

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Р.Х. ГАФАРОВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Часть II

Статически неопределимые системы. Сложное сопротивление.
Устойчивость деформируемых систем. Динамическое нагружение.
Сосуды. Кривые стержни. Переменные напряжения.

Рекомендовано учебно-методическим
объединением авиационно-космических вузов
Российской Федерации в качестве учебного пособия
для студентов авиационных и ракетно-космических
специальностей высших учебных заведений

УФА 2004

ПРЕДИСЛОВИЕ

Важная роль при изучении сопротивления материалов отводится самостоятельной работе студентов, которая приобретает особую значимость в последнее время в связи с сокращением для всех специальностей числа аудиторных занятий. Поэтому возникает потребность в учебных руководствах и пособиях, которые облегчили бы студентам самостоятельную проработку теоретического материала и помогли им научиться самостоятельно применять теорию к решению практических задач.

Основную цель настоящего пособия – помочь студенту приобрести навыки в решении задач по сопротивлению материалов. Пособие предназначается главным образом для студентов заочных и вечерних отделений высших технических учебных заведений, но может быть также полезным и для студентов очного обучения. Содержание пособия отвечает действующей в настоящее время программе курса сопротивления материалов, одобренной научно-методическим советом по сопротивлению материалов, строительной механике, теории упругости и пластичности для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям в области техники и технологии. Оно включает в себя шесть разделов. В первом разделе рассматриваются эпюры внутренних силовых факторов, второй раздел посвящен растяжению и сжатию прямолинейных стержней, в третьем излагаются элементы теории напряженного состояния и основные гипотезы прочности, в четвертом освещается теория кручения круглых валов, пятый раздел носит чисто геометрический характер и связан с вычислением геометрических характеристик поперечных сечений стержня, предметом шестого раздела служит теория плоского прямого изгиба.

Для облегчения пользования пособием каждому разделу предшествуют краткие, но довольно полные сведения по теории и основные формулы, необходимые для решения последующих задач. Большое внимание уделено подбору задач, их классификации и методам их решения. Немало задач с реальным содержанием, требующих ясного понимания сути и масштабов явлений. Широко также представлены и задачи упрощенные, идеализированные, только моделирующие реальную ситуацию. Такие задачи обязательно используются в практике обучения сопротивлению материалов, контроля за его усвоением. Они также полезны для овладения типичными приемами решения задач.

Автор хотел бы выразить уверенность, что первые шаги в изучении науки о прочности не покажутся читателям трудными, доставят определенное удовольствие, а мир обыденных вещей и привычных событий засверкает новыми гранями, станет богаче, ярче, интереснее.

Желаю успеха!

ОСНОВНЫЕ ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A – площадь поперечного сечения;	α – коэффициент линейного расширения; отношение;
E – модуль продольной упругости;	γ – относительный сдвиг; удельный вес материала;
F – сосредоточенная сила;	Δ – зазор; перемещение;
G – модуль сдвига; вес;	δ – линейное перемещение;
I_x, I_y – осевые моменты инерции;	Δl – абсолютная линейная деформация;
I_p – полярный момент инерции;	$\varepsilon, \varepsilon'$ – относительные продольная и поперечная деформации;
радиусы инерции;	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – главные деформации;
M – внешний момент;	θ – относительный угол закручивания вала; угол поворота поперечного сечения при изгибе;
M_x, M_y – изгибающие моменты;	ν – коэффициент Пуассона;
M_z, M_k – крутящий момент;	σ – нормальное напряжение;
N – продольная сила; мощность в л.с.;	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения;
n – коэффициент запаса прочности; частота вращения вала в об/мин;	$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение;
P – об/мин;	$[\sigma_p], [\sigma_c]$ – допускаемые нормальные напряжения на растяжение, сжатие;
Q – мощность;	$\sigma_{пц}, \sigma_{т}, \sigma_{пч}$ – пределы пропорциональности, текучести, прочности;
q – поперечная сила; интенсивность распределенной нагрузки;	$\sigma_{пчр}$ – пределы прочности при растяжении и сжатии;
S – деленный статический момент площади;	$\sigma_{пчс}$ – условный предел текучести, соответствующий пластической деформации, равной 0,2%;
t – площади;	τ – касательное напряжение; допускаемое касательное напряжение;
U – температура в град С; потенциальная энергия упругой деформации; удельная потенциальная энергия; уд. пот. энергия изменения объема и формы;	$[\tau]$ – напряжение; угол закручивания вала;
$u_{об}, u_{ф}$ – энергия;	φ – угловая скорость вала;
v – нения объема и формы;	ω – рад/с.
W – прогиб сечения балки;	
W_x, W_y – работа внешних сил; осевые моменты сопротивления;	
W_p – тивления; полярный момент сопротивления;	
w – противления; продольное перемещение сечения;	

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧУ

1. ПОНИМАНИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ – ЯСНО ПОНЯТЬ ПРЕДЛОЖЕННУЮ ЗАДАЧУ:

Что неизвестно? Что дано? В чем состоит условие? Определяется ли неизвестное данными или они недостаточны? Или чрезмерны? Или противоречивы? Сделайте чертеж. Введите подходящие обозначения. Разделите условие на части. Постарайтесь записать их.

2. СОСТАВЛЕНИЕ ПЛАНА РЕШЕНИЯ – НАЙТИ ПУТЬ ОТ НЕИЗВЕСТНОГО К ДАННЫМ, ЕСЛИ НУЖНО, РАССМОТРЕВ ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЗАДАЧИ (АНАЛИЗ):

Сформулируйте отношение между неизвестными и данными. Преобразуйте неизвестные элементы. Попробуйте ввести новые неизвестные, более близкие к данным задачи. Решите только часть задачи. Удовлетворите только часть условий: насколько неопределенным окажется тогда неизвестное? Обобщите. Рассмотрите частные случаи. Примените аналогию.

3. ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ПЛАНА – РЕАЛИЗОВАТЬ НАЙДЕННУЮ ИДЕЮ РЕШЕНИЯ (СИНТЕЗ)

Контролируйте каждый свой шаг, принимая лишь то, «что усматривается с полной ясностью или выводится с полной достоверностью» (Р. Декарт)

4. ВЗГЛЯД НАЗАД – РЕШЕНИЕ ПРОВЕРИТЬ И ОЦЕНИТЬ КРИТИЧЕСКИ:

Правдоподобен ли результат? Почему? Нельзя ли сделать проверку? Нет ли другого пути, ведущего к полученному результату? Более

прямого пути? Нельзя ли в какой-нибудь другой задаче использовать полученный результат или метод решения.

1. РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

1.1. Общие сведения

Под стержневыми системами понимаются конструкции, состоящие из элементов, имеющих форму стержня. Они могут быть статически определимыми и неопределимыми в зависимости от того, достаточно или нет уравнений статики для определения внутренних усилий (моментов, продольных и поперечных сил) в их элементах. Разность между числом неизвестных и числом независимых уравнений статики, которые можно составить для рассматриваемой системы, носит название степени статической неопределимости.

Расчет статически неопределимых систем может быть произведен различными методами. Одним из важнейших является метод сил, в котором за основные неизвестные принимают обобщенные реактивные силы в отброшенных связях системы.

Все связи статически неопределимой системы разделяют на абсолютно необходимые и дополнительные (они же условно лишние). Абсолютно необходимые связи служат для обеспечения кинематической неизменяемости системы (на плоскости таких связей три, а в пространстве – шесть). Всякую связь, наложенную сверх, называют дополнительной (на рис. 1.1 показаны пунктиром). Замкнутый контур, приведенный на рис. 1.1,г, имеет три дополнительные внутренние свя-

Каждое из этих уравнений выражает условие отсутствия перемещения по направлению одной из отброшенных связей. Коэффициенты при неизвестных δ_{ij} являются перемещениями основной системы по направлению неизвестной X_i от единичной силы \bar{X}_j . Свободные члены уравнений Δ_{iF} - это перемещения основной системы по направлению неизвестной X_i от заданной нагрузки, обозначаемой обобщенным символом « F ». Величины δ_{ij} и Δ_{iF} определяются с помощью интеграла Мора:

$$\delta_{ij} = \int_s \bar{M}_i \bar{M}_j ds / (EI), \quad \Delta_{iF} = \int_s \bar{M}_i M_F ds / (EI). \quad (1.2)$$

Предварительно должны быть построены эпюры \bar{M}_i , \bar{M}_j от единичных сил \bar{X}_i , \bar{X}_j и эпюра M_F от заданной нагрузки. Для вычисления интегралов Мора пользуются правилом Верещагина или формулой Симпсона.

Найденные коэффициенты при неизвестных и свободные члены перед решением уравнений следует проверить. Универсальная, т.е. одновременная, проверка всех коэффициентов при неизвестных состоит в том, что их сумма

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \text{ должна быть равна величине } \delta_{\sigma\sigma} = \int_s \bar{M}_\sigma^2 ds / (EI).$$

При этом эпюра \bar{M}_σ , называемая суммарной единичной эпюрой, получается в результате сложения всех единичных эпюр, т.е.

$$\bar{M}_\sigma = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n. \quad (1.3)$$

Если универсальная проверка не выполняется, то для нахождения ошибки в вычислениях можно произвести строчные проверки, которые состоят в том, что сумма коэффициентов δ_{ij} каждого уравнения $\sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}$

должна быть равна величине

$$\delta_{i\sigma} = \int_s \bar{M}_i \bar{M}_\sigma ds / (EI). \quad (1.4)$$

Если строчные проверки дают расхождение только в одной строке, то ошибку следует искать в вычислении перемещения δ_{ij} . При одновременном расхождении в двух строках ошибка, вероятнее всего, допущена при вычислении перемещения δ_{ij} , которое присутствует в обеих строках.

Проверка свободных членов Δ_{iF} состоит в том, что их сумма $\sum_{i=1}^n \delta_{iF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF}$ должна быть равна величине

$$\Delta_{\sigma F} = \int_s \bar{M}_\sigma M_F ds / (EI). \quad (1.5)$$

После определения и проверки всех коэффициентов при неизвестных δ_{ij} и свободных членов Δ_{iF} канонических уравнений последние решают совместно и находят значения x_1, x_2, \dots, x_n . На этом заканчивается раскрытие статической неопределимости.

4. После раскрытия статической неопределимости дальнейший расчет ведется как для статически определимых систем. Основная система нагружается заданными силами и

найденными неизвестными и из уравнений статики определяются опорные реакции. Затем строятся эпюры внутренних силовых факторов. При этом результирующая эпюра изгибающего момента может быть получена наложением на эпюру M_F от заданных сил единичных эпюр \bar{M}_i , увеличенных в x_i раз ($i = \bar{I}, \Pi$):

$$M = \bar{M}_1 x_1 + \bar{M}_2 x_2 + \dots + \bar{M}_n x_n + M_F. \quad (1.6)$$

5. Проверка решения. При правильном определении внутренних усилий (M , Q , N) должны одновременно удовлетворяться два условия: 1) уравнения равновесия для любой части системы (*статическая проверка*); 2) равенство нулю перемещений по направлению любой из связей, наложенных на систему (*кинематическая проверка*).

1.2. Примеры расчета

Пример 1.1. Установить степень статической неопределимости и указать несколько вариантов основной системы (рис. 1.2).

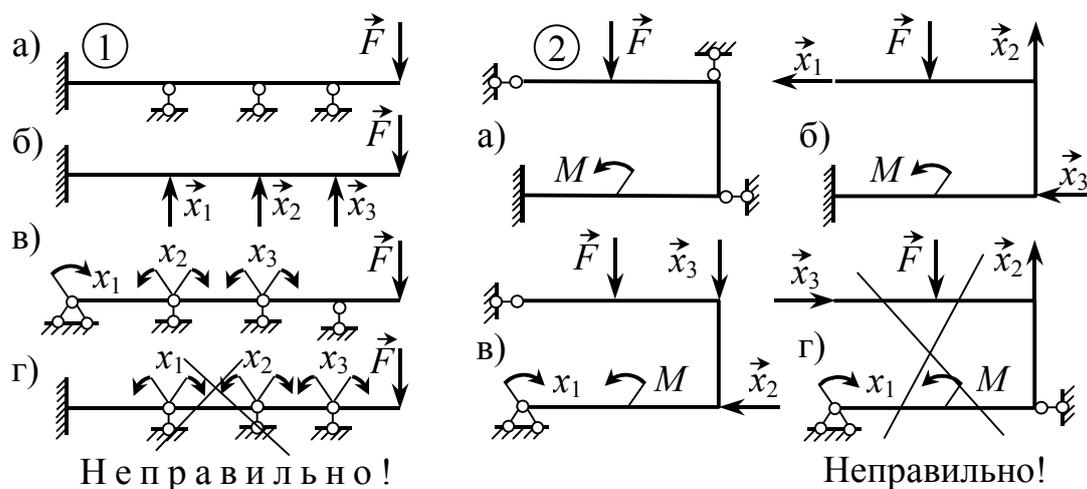


Рис. 1.2

Пример 1.2. Для неразрезной балки (рис. 1.3) требуется раскрыть статическую неопределенность и построить эпюры Q и M .

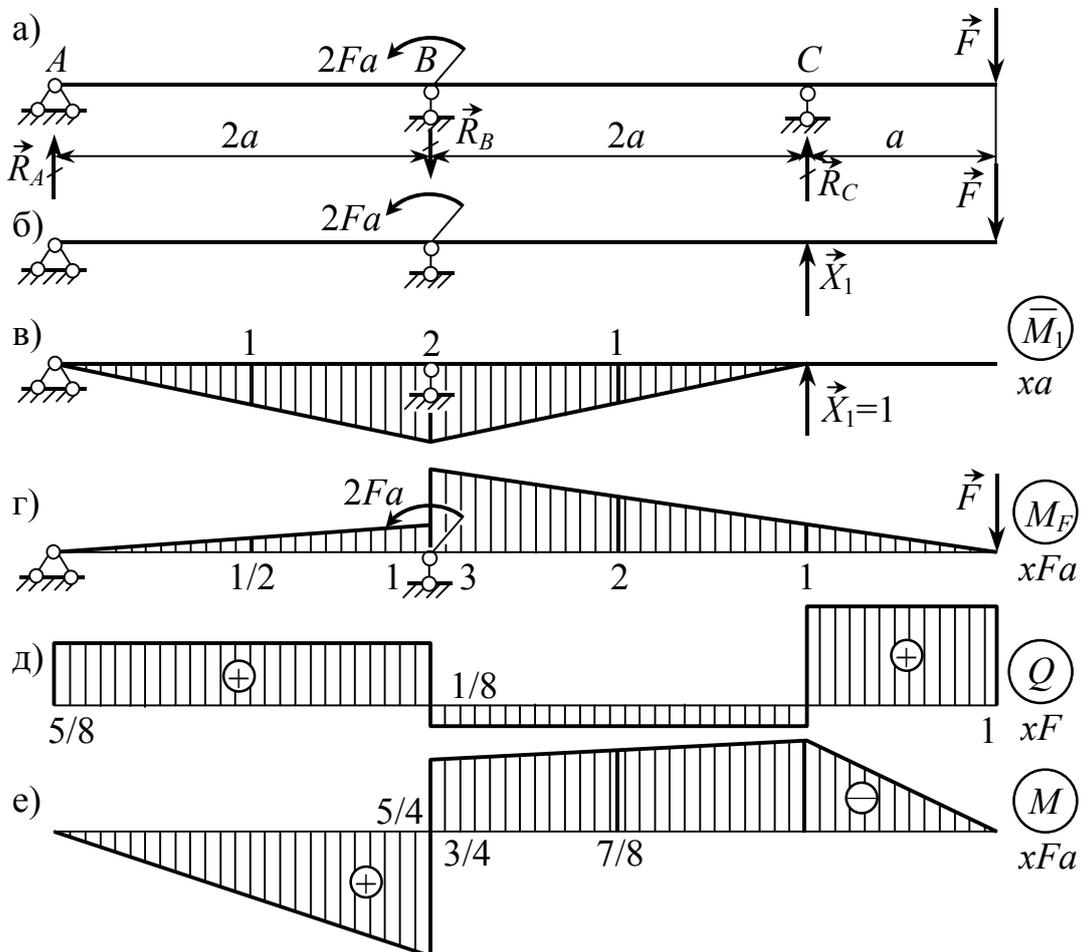


Рис. 1.3

Решение

1. Раскрытие статической неопределенности. Данная балка один раз статически неопределима (три неизвестные опорные реакции \vec{R}_A , \vec{R}_B , \vec{R}_C при двух независимых уравнениях статики). Отбрасывая одну из опор, например C, получим основную систему, приведенную на рис. 1.3,б.

Каноническое уравнение $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$.

Строим для основной системы эпюры изгибающих моментов от единичной силы $\bar{X}_1=1$, действующей по направлению неизвестной X_1 , а также от заданной нагрузки (рис. 1.3, в, г). Перемножая соответствующие эпюры, находим перемещения, увеличенные для удобства вычислений в EI раз:

$$EI\delta_{11} = 2 \cdot (1/2) \cdot 2a \cdot 2a \cdot (2/3) \cdot 2a = (16/3)a^3,$$

$$EI\Delta_{1F} = -[(1/2)2a \cdot 2a \cdot (2/3)Fa + (2a/6)(2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 2)Fa^2] = -6Fa^3.$$

Решая каноническое уравнение, находим

$$X_1 = -\Delta_{1F}/\delta_{11} = (9/8)F.$$

2. Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента. После определения опорной реакции $R_C = X_1$ две другие реакции определяются из уравнений равновесия статики:

$$\sum m_B = 0, \quad R_A \cdot 2a = 2Fa + (9/8)F \cdot 2a - F \cdot 3a; \quad R_A = (5/8)F;$$

$$\sum Y_i = 0, \quad R_B = R_A + R_C - F = (5/8)F + (9/8)F - F = (3/4)F.$$

Эпюры Q и M строим по характерным точкам.

3. Проверка решения. Выполним кинематическую проверку. С этой целью вычислим, например, перемещение по направлению опорной связи, наложенной на систему в сечении C . Перемножая эпюру M на \bar{M}_1 , получим

$$EI\Delta_1 = \int_s \bar{M}_1 M ds,$$

$$EI\Delta_1 = (1/2)(5Fa/4) \cdot 2a \cdot (2/3)2a - (2a/6)[(3Fa/4) \cdot 2a + 4 \cdot (7Fa/8) \cdot a] = 0.$$

Пример 1.3. Построить эпюры Q и M для двухпролетной неразрезной балки (рис. 1.4).

Решение. 1. Раскрытие статической неопределенности. Балка один раз статически неопределима (одна дополнительная связь). Удаляя внутреннюю связь в сечении B , получаем основную систему, показанную на рис. 1.4,б.

Каноническое уравнение $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$.

Перемещения, увеличенные в EI раз:

$$EI\delta_{11} = \int \bar{M}_1^2 ds,$$

$$EI\delta_{11} = (1/2) \cdot 1 \cdot a \cdot (2/3) + (1/2) \cdot 1 \cdot 2a \cdot (2/3) = a;$$

$$EI\Delta_{1F} = \int \bar{M}_1 M_F ds = (2/3)(qa^2/8) \cdot a \cdot (1/2) + (2/3)(qa^2/2) \cdot 2a \cdot (1/2) = \\ = (3qa^3/8).$$

Решая каноническое уравнение, получим

$$X_1 = -\Delta_{1F}/\delta_{11} = -(3qa^2/8).$$

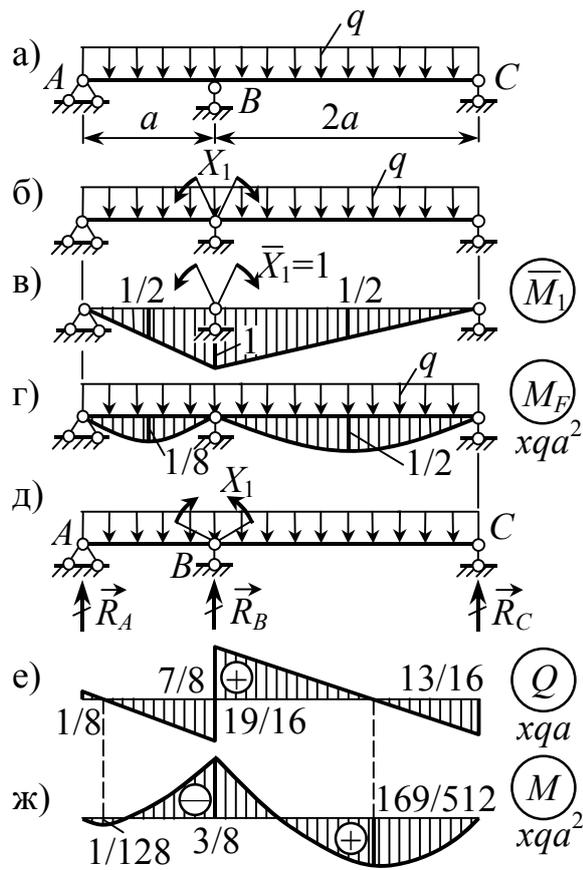


Рис. 1.4

2. Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента. Рассматривая равновесие частей AB , BC а также балки ABC в целом, определим опорные реакции:

$$AB: \quad \sum m_B = 0, \quad R_A \cdot a + X_1 - qa^2/2 = 0, \quad R_A = qa/8;$$

$$BC: \quad \sum m_B = 0, \quad R_C \cdot 2a + X_1 - 2qa^2 = 0, \quad R_C = (13/16)qa;$$

$$ABC: \quad \sum Y_i = 0, \quad R_A + R_B + R_C = 3qa, \quad R_B = (33/16)qa.$$

Далее по характерным точкам строим эпюры Q и M рис. 1.4., е, ж.

Пример 1.4. Построить эпюры Q и M .

Решение. 1. Раскрытие статической неопределенности. Балка один раз статически неопределима (одна дополнительная связь). Отбрасывая опору B , получим основную систему, приведенную на рис. 1.5, б.

Каноническое уравнение $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$.

Находим перемещения

$$EI\delta_{11} = (1/2) \cdot 2a \cdot 2a \cdot (4/3)a + 2a \cdot a \cdot 2a = (20/3)a^3;$$

$$EI\Delta_{1F} = -[(1/2) \cdot 2a \cdot 2Fa \cdot (4/3)a + (5/2)Fa \cdot a \cdot 2a] = -(23/3)Fa^3.$$

$$\text{Следовательно,} \quad X_1 = -\Delta_{1F} / \delta_{11} = (23/20)F.$$

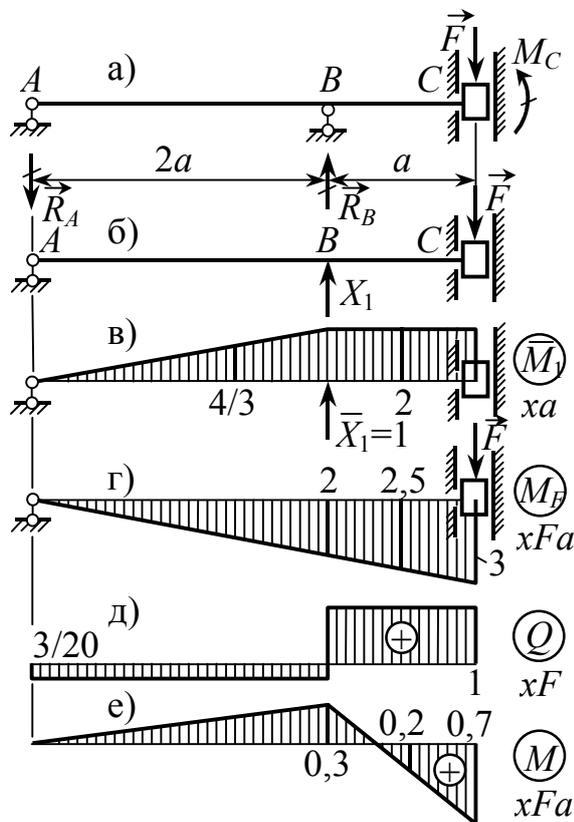


Рис. 1.5

2. Построение эпюр Q и M .

Рассматривая равновесие балки ABC , находим опорные реакции: $\sum Y_i = 0, R_A = X_1 - F = (3/20)F$;

$$\sum m_C = 0, X_1 \cdot a - R_A \cdot 3a = M_C, M_C = [(23/20) - (3/20) \cdot 3]Fa = 0,7Fa.$$

Затем по характерным точкам строим эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M .

3. Проверка решения. Выполним кинематическую проверку, вычисляя, например, перемещение по направлению опорной связи, наложенной на систему в сечении B :

$$EI\Delta_1 = \int_l \bar{M}_1 \cdot M dz,$$

$$(1/2)0,3Fa \cdot 2a \cdot (4/3)a - 2a \cdot a \cdot (Fa/5) = Fa^3(2/5 - 2/5) = 0.$$

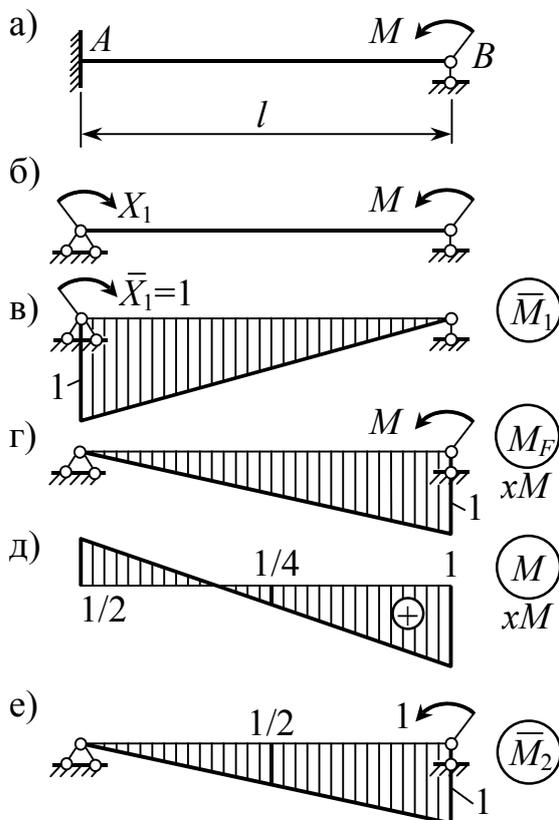


Рис. 1.6

Пример 1.5. Определить угол поворота сечения B .

Решение

1. Раскрытие статической неопределенности. Данная балка один раз статически неопределима (одна дополнительная внешняя связь). Отбрасывая одну связь в защемлении A , получим основную систему, приведенную на рис. 1.6,б. Составляем каноническое

уравнение

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Находим перемещения, увеличенные в EI раз

$$EI\delta_{11} = \int \bar{M}_1^2 ds = (1/2) \cdot 1 \cdot l \cdot (2/3) = l/3$$

$$EI\Delta_{1F} = \int \bar{M}_1 M_F \cdot ds = (1/2) \cdot M \cdot l \cdot (1/3) = Ml/6.$$

Следовательно, $X_1 = -\Delta_{1F} / \delta_{11} = -M/2$.

2. Определение угла поворота сечения B . Прикладываем в сечении B основной системы единичный момент и строим от него эпюру изгибающего момента \bar{M}_2 (рис. 1.6,е). Перемножая эпюры M и \bar{M}_2 , находим искомое перемещение

$$EI\theta_B = \int M \cdot \bar{M}_2 ds = (l/6)[4 \cdot (M/4) \cdot (1/2) + M \cdot 1] = Ml/4.$$

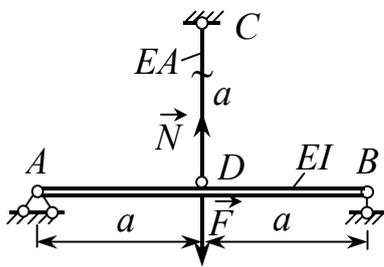


Рис. 1.7

Пример 1.6. Известно, что наличие стержня CD уменьшает прогиб балки AB от силы F в 2 раза. Найти площадь сечения стержня CD .

Решение. Из условия совместности деформаций балки AB и стержня CD

$$V_D = \Delta l \quad \text{или} \quad (F - N) \cdot (2a)^3 / (48EI) = Na / (EA).$$

По условию задачи $F - N = F/2$, откуда $N = F/2$.

$$\text{Следовательно,} \quad \frac{F}{2} \cdot \frac{8a^3}{48EI} = \frac{(F/2)a}{EA}.$$

$$\text{Отсюда} \quad A = 6I / a^2.$$

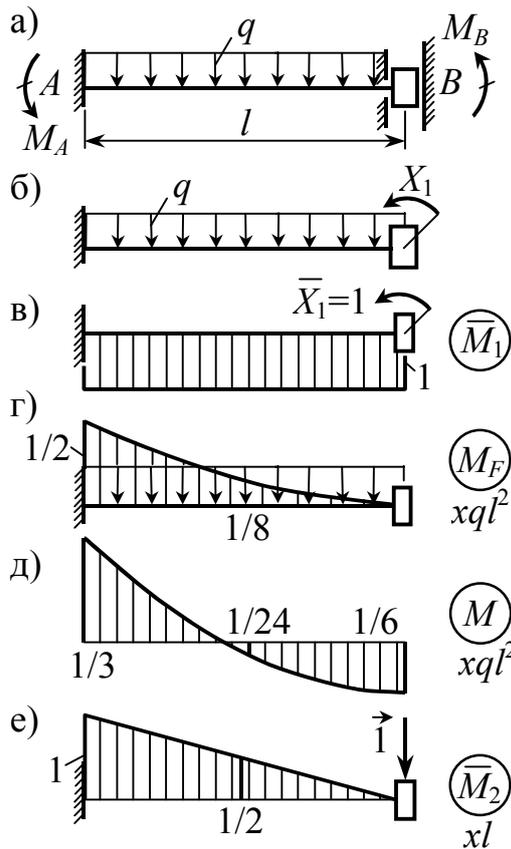


Рис. 1.8

Пример 1.7. Определить опускание ползуна B .

Решение. 1. Раскрытие статической неопределимости. Балка один раз статически неопределима (одна дополнительная связь). Отбрасывая одну связь в защемлении B , получим основную систему (рис. 1.8, б).

Каноническое уравнение

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Перемещения, увеличенные в EI раз

$$EI\delta_{11} = \int \bar{M}_1^2 ds = 1 \cdot l \cdot 1 = l,$$

$$EI\Delta_{1F} = \int \bar{M}_1 \cdot M_F ds = -(1/3) \cdot ql^2 / 2 \cdot l \cdot 1 = -ql^3 / 6.$$

Следовательно,

$$X_1 = -\Delta_{1F} / \delta_{11} = ql^2 / 6.$$

2. Построение эпюры изгибающего момента. Она строится согласно выражению

$$M = M_1 + M_F.$$

3. Проверка решения. Она включает в себя статическую и кинематическую проверки:

- *статическая*

$$\sum m_A = 0, \quad M_A + M_B - ql^2/2 = ql^2/3 + ql^2/6 - ql^2/2 \equiv 0;$$

- *кинематическая*

$$EI\Delta_1 = \int \bar{M}_1 \cdot M ds = (l/6) \left[(-ql^2/3) \cdot 1 + 4 \cdot (ql^2/24) \cdot 1 + (ql^2/6) \cdot 1 \right] = 0.$$

4. Определение перемещения ползуна B . Прикладываем в сечении B основной системы единичную силу и строим эпюру изгибающего момента \bar{M}_2 (рис. 1.8,е). Перемножая эпюры M и \bar{M}_2 , находим искомое перемещение

$$EIv_B = \int \bar{M}_2 \cdot M ds = (l/6) \left[(ql^2/3) \cdot l - 4(ql^2/24) \cdot (l/2) \right] = ql^4/24.$$

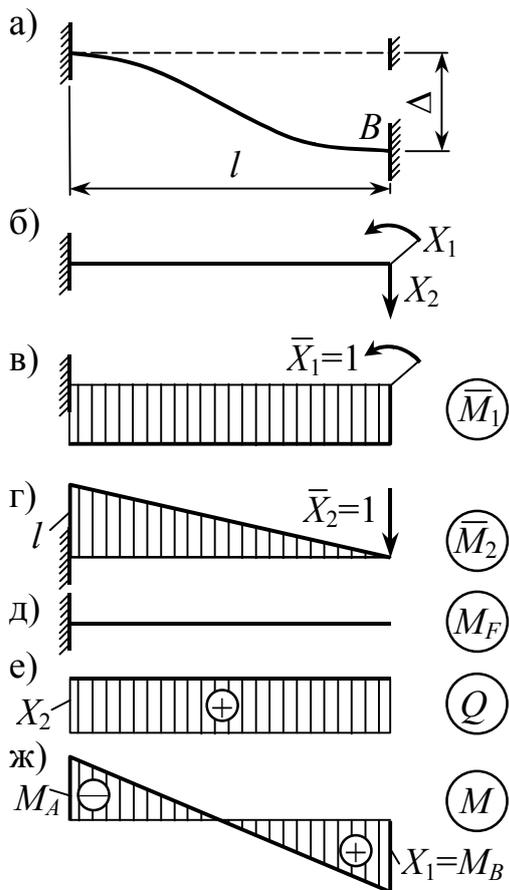


Рис. 1.9

Пример 1.8. В балке, жестко заделанной двумя концами, правая опора опустилась на величину Δ . Жесткость балки на изгиб равна EI . Определить опорные реакции и построить эпюры Q и M .

Решение. 1. Раскрытие статической неопределимости. Данная балка два раза статически неопределима (две дополнительные связи). Отбрасывая две связи в защемлении B , получим основную систему (рис. 1.9,б).

Канонические уравнения

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= \Delta. \end{aligned} \right\}$$

Перемещения, увеличенные в EI раз

$$\begin{aligned} EI\delta_{11} &= 1 \cdot l \cdot 1 = l, & \Delta_{1F} &= \Delta_{2F} = 0, \\ EI\delta_{22} &= (1/2)l \cdot l \cdot (2/3)l = l^3/3, \\ EI\delta_{12} &= -(1/2) \cdot l \cdot l \cdot 1 = -l^2/2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} l \cdot X_1 - (l^2/2)X_2 &= 0, \\ -(l^2/2)X_1 + (l^3/3)X_2 &= EI\Delta \end{aligned} \right\}$$

Решая полученную систему, находим

$$X_1 = 6EI\Delta / l^2, \quad X_2 = 12EI\Delta / l^3.$$

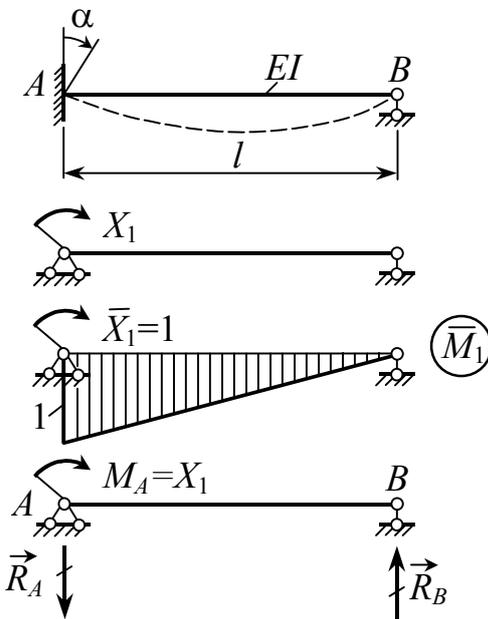


Рис. 1.10

Пример 1.9. Найти опорные реакции для балки, заделанной левым концом, если левая опора повернулась на угол α .

Решение. Данная балка один раз статически неопределима. Каноническое уравнение из-за отсутствия внешней нагрузки имеет вид

$$\delta_{11}X_1 = \alpha,$$

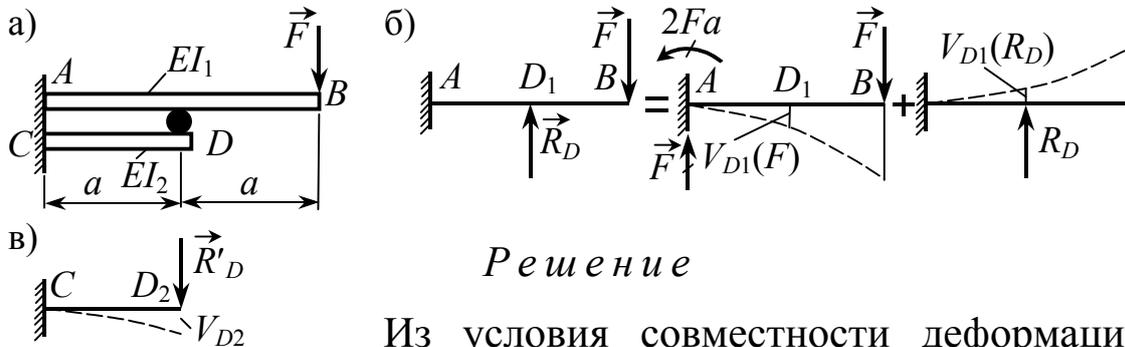
где $EI\delta_{11} = (1/2) \cdot 1 \cdot l \cdot (2/3) = l/3$.

Следовательно, $(l/3)X_1 = EI\alpha$, $X_1 = 3EI\alpha/l$. Из уравнений равновесия находим две оставшиеся реакции

$$\sum m_A = 0, \quad R_B \cdot l = M_A, \quad R_B = M_A / l = 3EI\alpha / l^2;$$

$$\sum Y_i = 0, \quad R_A = R_B.$$

Пример 1.10. Между двумя балками AB и CD установлен каток D . Найти силу взаимодействия между балками в точке D .



Решение

Из условия совместности деформаций $V_{D_1} = V_{D_2}$. Перемещение точки D_1 на основании принципа независимости действия сил равно

$$V_{D_1}(F, R_D) = V_{D_1}(F) + V_{D_1}(R_D).$$

Первое слагаемое находим, пользуясь методом начальных параметров,

$$V_{D_1}(F) = \frac{1}{EI_1} \left[\frac{2Fa(a)^2}{2} - \frac{F \cdot a^3}{6} \right] = \frac{5Fa^3}{6EI_1},$$

а второе по известной формуле $V_{D_1}(R_D) = -R_D a^3 / (3EI_1)$.

Аналогично находим $V_{D_2}(R'_D) = R_D a^3 / (3EI_2)$.

Следовательно,
$$\frac{5Fa^3}{6EI_1} - \frac{R_D a^3}{3EI_1} = \frac{R_D a^3}{3EI_2}.$$

Отсюда $R_D = (5/2)F \cdot [I_2 / (I_1 + I_2)]$.

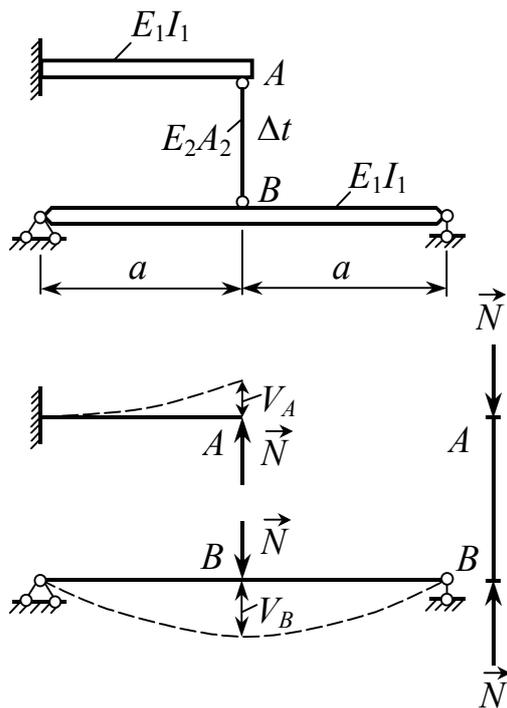


Рис. 1.11

Пример 1.11. Стержень AB длиной l соединяет две балки одинаковой жесткости. Какое усилие возникает в стержне при его нагревании на величину Δt ?

Решение. Из условия совместности деформаций имеем $\Delta l = V_A + V_B$,

где $V_A = \frac{Na^3}{3E_1I_1}$,

$$V_B = \frac{N(2a)^3}{48E_1I_1} = \frac{Na^3}{6E_1I_1},$$

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta t - Nl / (E_2A_2).$$

Следовательно,

$$\alpha \cdot l \cdot \Delta t - Nl / (E_2A_2) = Na^3 / (2E_1I_1).$$

Отсюда

$$N = \alpha l \Delta t / \left(\frac{a^3}{2E_1I_1} + \frac{l}{E_2A_2} \right).$$

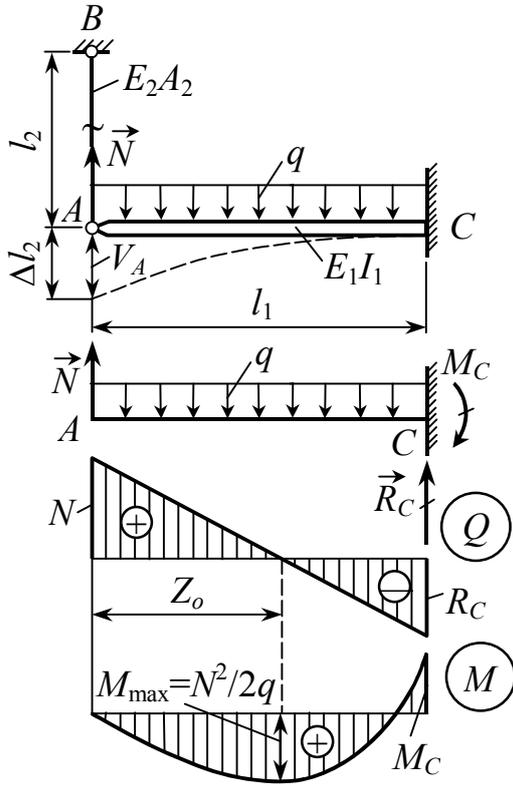


Рис.1.12

Пример 1.12. Определить усилие в стержне AB и построить эпюры Q и M для балки.

Решение

1. Раскрытие статической неопределимости. Из условия совместности деформаций $\Delta l_2 = V_A$.

Учитывая, что $\Delta l_2 = Nl_2 / (E_2A_2)$,

$$V_A = V_A(q) + V_A(N),$$

$$V_A(q) = ql_1^4 / (8E_1I_1),$$

$$V_A(N) = -Nl_1^3 / (3E_1I_1),$$

получим
$$Nl_2 / (E_2A_2) = ql_1^4 / (8E_1I_1) - Nl_1^3 / (3E_1I_1),$$

откуда
$$N = \frac{ql_1^4}{8E_1I_1} / \left(\frac{l_2}{E_2A_2} + \frac{l_1^3}{3E_1I_1} \right).$$

2. Построение эпюр Q и M . Вычисляем значения поперечной силы и изгибающего момента в характерных точках

$$Q_A = N, \quad Q_C = N - ql, \quad M_A = 0, \quad M_C = N \cdot l - ql^2/2,$$

$$M_{\max} = Q_A \cdot Z_o / 2, \quad Z_o = N/q, \quad M_{\max} = N^2 / (2q) \text{ и строим эпюры.}$$

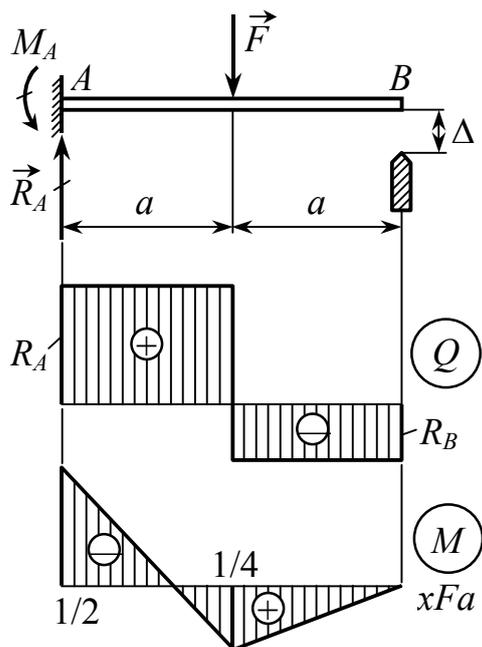


Рис. 1.13

Пример 1.13.

Определить величину зазора Δ между балкой AB и опорой из условия, чтобы опорная реакция A была в 3 раза больше опорной реакции B .

Решение

По условию задачи $R_A = 3R_B$. С учетом этого соотношения находим из уравнений равновесия опорные реакции:

$$\sum Y_i = 0, \quad R_A + R_B = F, \quad 4R_B = F;$$

Откуда $R_B = F/4, \quad R_A = 3F/4, \quad \sum m_A = 0,$

$$M_A = F \cdot a - R_B \cdot 2a = Fa/2.$$

Пользуясь методом начальных параметров, находим искомый зазор

$$\Delta = v_B = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_A (2a)^2}{2} - \frac{R_A (2a)^3}{6} + \frac{Fa^3}{6} \right] =$$

$$= \frac{Fa^3}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2^3}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{Fa^3}{6EI}.$$

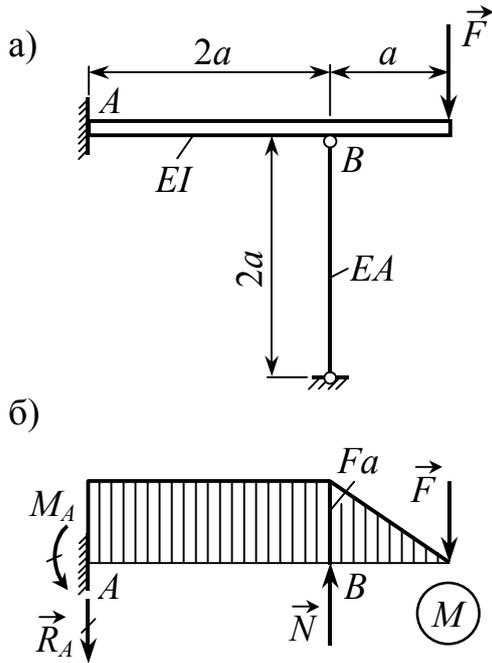


Рис. 1.14

Пример 1.14

Балка постоянной жесткости EI нагружена силой F . В сечении B балка опирается на стержень, жесткость которого на сжатие $EA = k \cdot EI/a^2$. Определить значение безразмерного коэффициента k из условия, чтобы моменты над опорой B и в заделке A были одинаковы.

Решение

По условию задачи

$$|M_A| = |M_B| = Fa.$$

Из уравнений равновесия для балки (рис. 1.14,б) имеем $\sum m_A = 0$, $M_A + N \cdot 2a - F \cdot 3a = 0$, $F \cdot a + N \cdot 2a - F \cdot 3a = 0$, откуда $N = F$; $\sum Y_i = 0$, $N - R_A - F = 0$, $R_A = 0$.

Из условия совместности деформаций балки и стержня в точке B

$$v_B = \Delta l.$$

Прогиб балки в сечении B находим, пользуясь методом начальных параметров:

$$v_B = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_A (2a)^2}{2} + \frac{R_A (2a)^3}{6} \right] = \frac{Fa^3}{EI} \left(1 \cdot \frac{2^2}{2} \right) = 2 \frac{Fa^3}{EI},$$

а деформацию стержня – по закону Гука:

$$\Delta l = N \cdot 2a / (EA) = 2Fa / (EA).$$

Таким образом,

$$2 \frac{Fa^3}{EI} = \frac{2Fa}{kEI/a^2}.$$

Отсюда

$$k = 1.$$

2. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

2.1. Общие сведения

Сложным сопротивлением называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня одновременно возникает не менее двух внутренних силовых факторов. Основные разновидности сложного сопротивления:

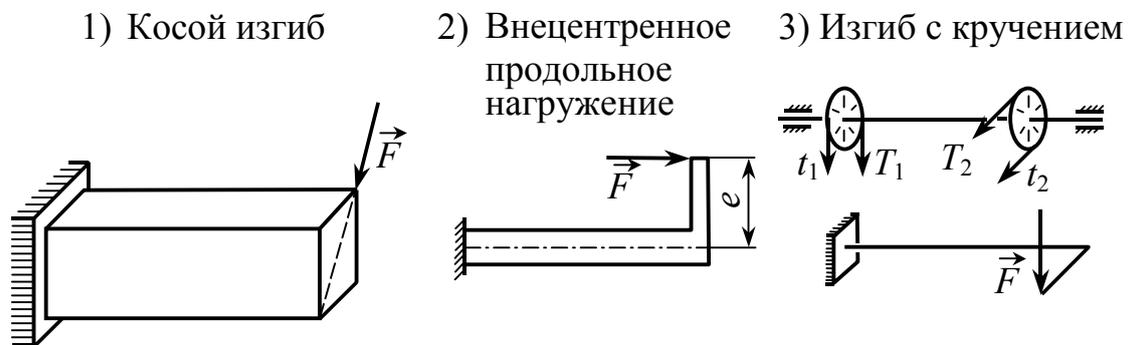


Рис. 2.1

Расчеты на сложное сопротивление базируются на принципе независимости действия сил, согласно которому искомые величины (напряжения, перемещения) определяются путем геометрического суммирования этих величин, вычисленных от каждого внутреннего силового фактора в отдельности.

Порядок расчета на прочность:

1. Строятся эпюры для каждого внутреннего силового фактора в отдельности, и на основании их сопоставления устанавливается опасное сечение.

2. Исследуя напряжения в опасном сечении, находят опасные точки.

3. Для опасных точек записываются условия прочности, исходя из которых делается заключение о надежности конструкции или определяются искомые величины (размеры поперечного сечения, допустимая нагрузка).

2.2. Косой изгиб

Изгиб, при котором плоскость действия суммарного изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции стержня, называется косым. Различают плоский и пространственный косые изгибы. Плоский характеризуется тем, что все внешние силы и моменты действуют в одной плоскости. При этом упругая линия стержня – плоская кривая. Пространственный косой изгиб вызывается внешними силами и моментами, не лежащими в одной плоскости. Упругая линия стержня в этом случае представляет собой пространственную кривую.

Косой изгиб удобно рассматривать как сочетание изгибов в двух главных плоскостях. Поэтому нагрузки, действующие на стержень, раскладывают по главным осям и строят эпюры изгибающих моментов M_x и M_y в главных плоскостях. Из сопоставления этих эпюр устанавливают опасное сечение.

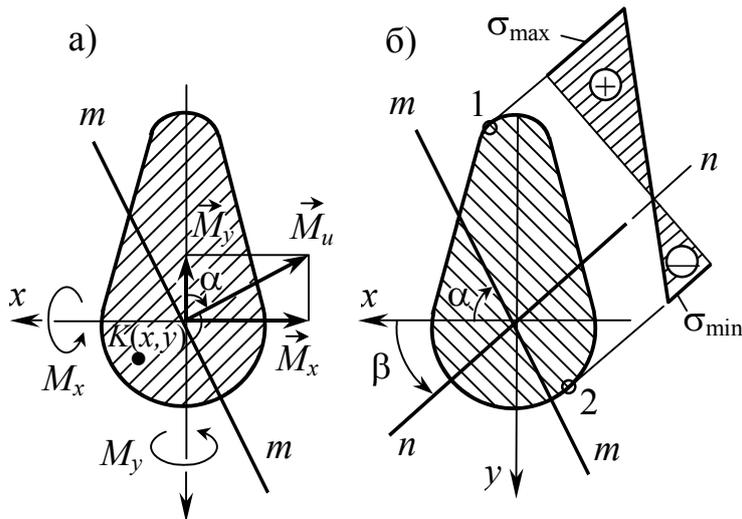


Рис. 2.2

Результирующий изгибающий момент определяется как геометрическая сумма

$$\vec{M}_u = \vec{M}_x + \vec{M}_y,$$

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = M_x / M_y.$$

(2.1)

След плоскости результирующего изгибающего момента на плоскости поперечного сечения (прямая mm) называется силовой линией. Она образует с осью x угол α , поэтому угловым коэффициентом силовой линии $k_1 = \operatorname{tg} \alpha$.

Нормальное напряжение в произвольной точке $K(x, y)$ поперечного сечения на основании принципа независимости действия сил

$$\sigma(M_x, M_y) = (M_x / I_x) y + (M_y / I_y) x$$

или $\sigma = M_u (\sin \alpha \cdot y / I_x + \cos \alpha \cdot x / I_y).$

(2.2)

Согласно формуле (2.2) нормальные напряжения распределяются по закону плоскости $z = Ax + By$, проходящей через центр тяжести сечения. След этой плоскости на плоскости поперечного сечения представляет собой нейтральную линию, для точек которой $\sigma = 0$, т.е.

$$\sin \alpha \cdot y_o / I_x + \cos \alpha \cdot x_o / I_y = 0,$$

откуда

$$y_o = -(1 / \operatorname{tg} \alpha) \cdot (I_x / I_y) \cdot x_o.$$

(2.3)

Угловым коэффициентом нейтральной линии

$$k_2 = \operatorname{tg} \beta = -(1 / \operatorname{tg} \alpha) \cdot (I_x / I_y).$$

Следовательно, $k_1 \cdot k_2 = -I_x/I_y$. (2.4)

Из этой формулы следует, что

- силовая линия tt и нейтральная линия nn проходят через разные четверти;

- угол между ними, содержащий ось x ($|\alpha| + |\beta|$), может быть тупым ($I_x > I_y$), острым ($I_x < I_y$) или прямым ($I_x = I_y$), что имеет место для сечения в форме круга, равностороннего треугольника, квадрата и вообще любого правильного многоугольника с четным числом сторон).

Так как напряжения распределяются по закону плоскости, то опасными будут точки, наиболее удаленные от нейтральной линии. Это точки 1 и 2 (рис. 2.2,б).

Условия прочности

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= (M_x/I_x) \cdot y_1 + (M_y/I_y) x_1 \leq [\sigma_p] \\ \sigma_{\min} &= (M_x/I_x) \cdot y_2 + (M_y/I_y) x_2 \leq [\sigma_c] \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Если сечение представляет собой прямоугольник или фигуру, вписанную в прямоугольник (двутавр, швеллер), то опасными являются угловые точки (рис. 2.3) и условие прочности принимает вид

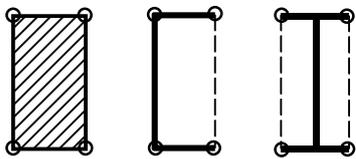
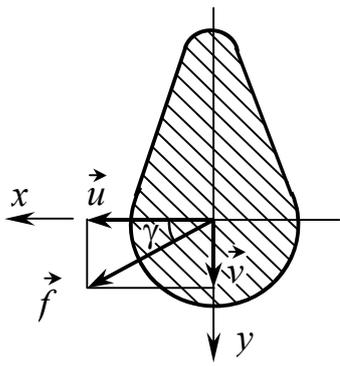


Рис. 2.3

$$\sigma_{\max} = |M_x|/W_x + |M_y|/W_y \leq [\sigma], \quad (2.6)$$

Результирующий прогиб \vec{f} при косом изгибе находится как геометрическая сумма

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \vec{u} + \vec{v}, \\ f &= \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = v/u, \end{aligned} \quad (2.7)$$



где \vec{u} и \vec{v} - горизонтальная и вертикальная составляющие полного перемещения, определяемые либо методом начальных параметров, исходя из дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} EI_y u'' &= -M_y, \\ EI_x v'' &= -M_x, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Рис. 2.4

либо энергетическим методом.

Замечание. При плоском косом изгибе вектор полного прогиба \vec{f} всегда перпендикулярен к нейтральной линии ($\vec{f} \perp nn$).

Плоский косой изгиб

Пример 2.1. Построить качественно (без вычислений) эпюру нормальных напряжений в опасном сечении и указать направление наибольшего полного прогиба.

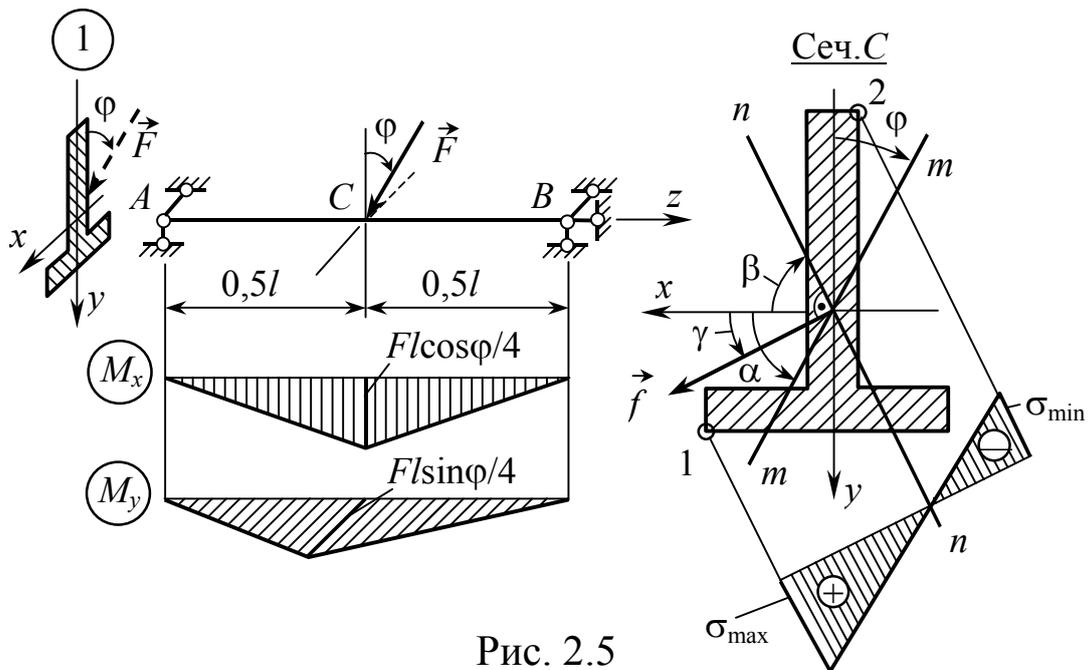


Рис. 2.5

Решение

Положение силовой линии mm нам известно (она проходит через 1-ю и 3-ю четверти).

Так как $I_x > I_y$, то нейтральная линия образует тупой угол с силовой линией ($|\alpha| + |\beta| > 90^\circ$). Угловым коэффициентом нейтральной линии, как известно, равен

$$k_2 = \operatorname{tg}\beta = -(1/\operatorname{tg}\alpha) \cdot (I_x/I_y) = -\operatorname{tg}\varphi \cdot (I_x/I_y).$$

Составляющие полного прогиба по главным осям инерции поперечного сечения находим по известным формулам

$$u_C = F \sin\varphi l^3 / (48EI_y), \quad v_C = F \cos\varphi l^3 / (48EI_x).$$

Угловым коэффициентом вектора полного прогиба

$$k_3 = \operatorname{tg}\gamma = v_C/u_C = (1/\operatorname{tg}\varphi) \cdot (I_y/I_x).$$

Произведение угловых коэффициентов $k_2 \cdot k_3 = -1$, т.е. $\vec{f} \perp nn$.

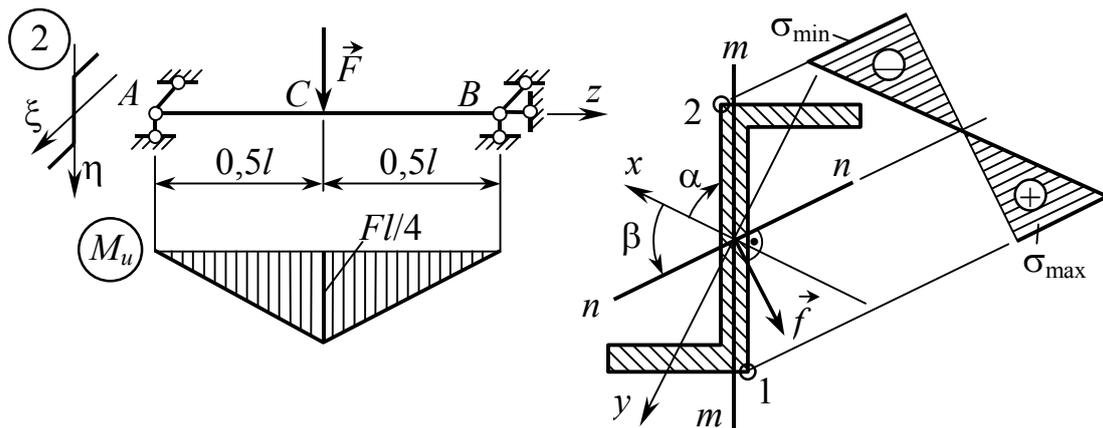
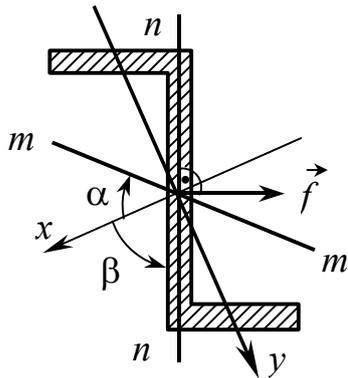


Рис. 2.6.

Так как $I_x > I_y$, то $|\alpha| + |\beta| > 90^\circ$, $\vec{f} \perp nn$.



Пример 2.2

Зная направление вектора полного прогиба \vec{f} , определить положение силовой линии.

Решение. Перпендикулярно к вектору \vec{f} проводим нейтральную линию nn .

Так как $I_x > I_y$, то $|\alpha| + |\beta| > 90^\circ$, т.е. угол между силовой и нейтральной линиями является тупым.

Пример 2.3. Проверить прочность стержня из равнобокого уголка, нагруженного парами сил по концам.

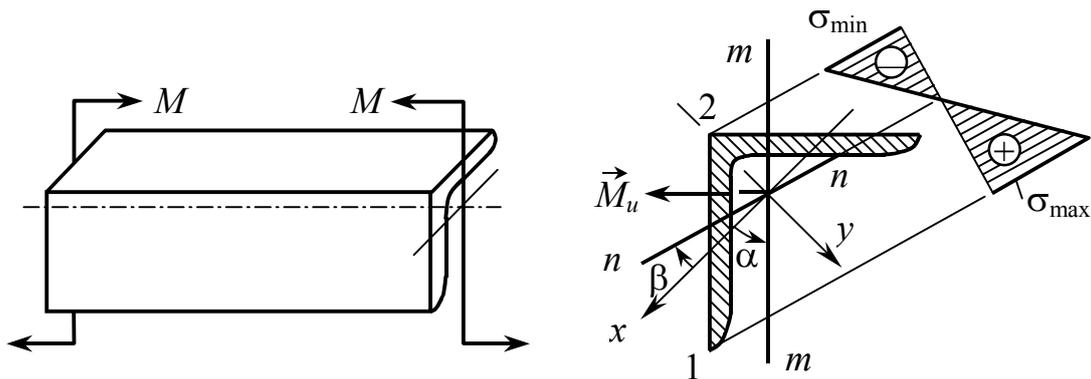


Рис. 2.7

Решение. Так как стержень нагружен только парами сил, то изгибающий момент постоянен по длине и равен внешней паре M , т.е. в данном случае все сечения равноопасны. Для отыскания опасных точек необходимо предварительно установить положение нейтральной линии, угловой коэффициент которой равен $\operatorname{tg}\beta = -(1/\operatorname{tg}\alpha) \cdot (I_x/I_y)$. Внешние пары действуют в вертикальной плоскости, поэтому силовая линия направлена параллельно вертикальной полке уголка и

$\alpha = 45^\circ$. Учитывая, что $I_x < I_y$, получим $|\alpha| + |\beta| < 90^\circ$, т.е. угол между нейтральной и силовой линиями является острым. Исходя из этого, проводим нейтральную линию nn . Опасной является точка 1, где возникает наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = M_u (\sin\alpha \cdot y_1 / I_x + \cos\alpha \cdot x_1 / I_y) = (M / \sqrt{2}) (y_1 / I_x + x_1 / I_y).$$

Подставляя найденное напряжение в условие прочности $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$, делаем заключение о работоспособности стержня.

Пример 2.4. Определить допустимую нагрузку для чугунной балки, если $[\sigma_c] = 4[\sigma_p]$.

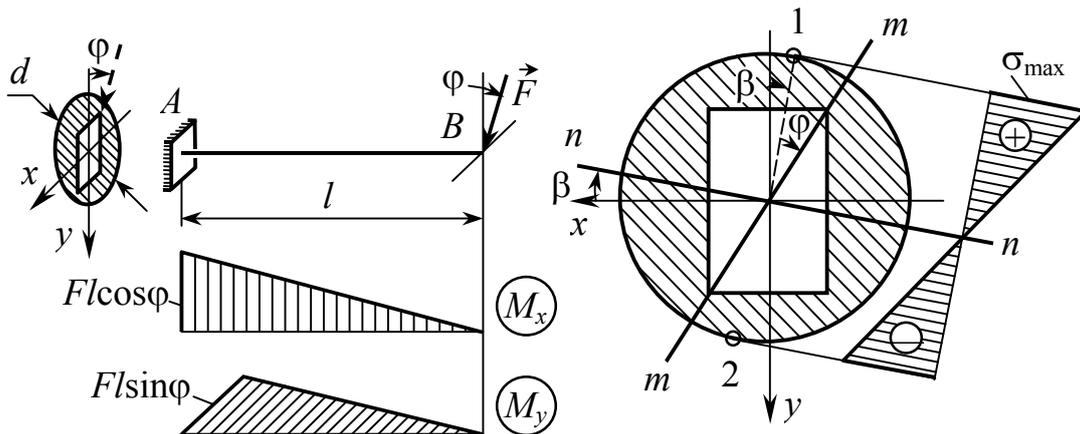


Рис. 2.8

Решение. Опасным является сечение A , где $M_x = -Fl \cos\phi$, $M_y = -Fl \sin\phi$. Ориентация нейтральной линии nn $\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\phi \cdot (I_x / I_y)$. Так как $I_x < I_y$, то $|\alpha| + |\beta| < 90^\circ$. Опасной является точка 1 с координатами

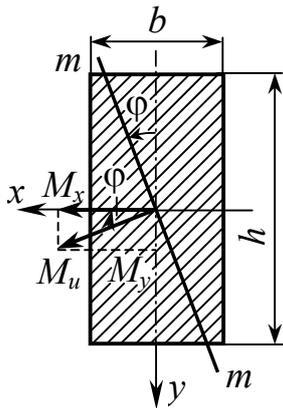
$$x_1 = -(d/2)\sin\beta, \quad y_1 = -(d/2)\cos\beta.$$

Условие прочности $\sigma_{\max} = (M_x / I_x)y_1 + (M_y / I_y)x_1 \leq [\sigma_p]$

или $\sigma_{\max} = (Fl d / 2) (\cos\phi \cos\beta / I_x + \sin\phi \sin\beta / I_y) \leq [\sigma_p]$.

Отсюда $[F] = (2[\sigma_p] / ld) / (\cos\phi \cos\beta / I_x + \sin\phi \sin\beta / I_y)$.

Пример 2.5. Сравнить наибольшие нормальные напряжения, возникающие в прямоугольном сечении стержня с отношением сторон $m = h/b = 6$ в двух случаях: 1) плоскость действия изгибающего момента M_u совпадает с главной плоскостью стержня $zoу$; 2) та же плоскость наклонена к плоскости $zoу$ на угол $\varphi = 5^\circ$.



Решение

В первом случае стержень испытывает прямой изгиб в плоскости $zoу$, поэтому

$$\sigma_{\max_1} = M_u / W_x.$$

Во втором случае имеет место кривой изгиб и наибольшее напряжение равно

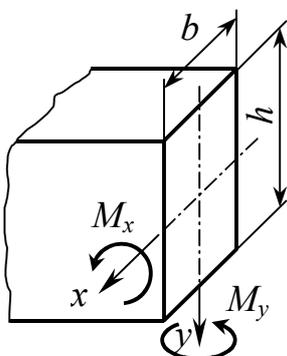
$$\sigma_{\max_2} = M_x / W_x + M_y / W_y,$$

$$\sigma_{\max_2} = M_u (\cos\varphi / W_x + \sin\varphi / W_y).$$

Отношение наибольших напряжений

$$K = \sigma_{\max_2} / \sigma_{\max_1} = \cos\varphi + \sin\varphi (W_x / W_y) = \cos\varphi + m \sin\varphi.$$

В нашем случае при $\varphi = 5^\circ$ и $m = 6$ получим $k = 1,52$, т.е. при повороте плоскости изгибающего момента всего на 5° по отношению к главной плоскости $zoу$ наибольшие напряжения возрастают на 52%.



Пример 2.6. Балка прямоугольного сечения подвергается кривому изгибу моментами M_x и M_y . Определить из условия прочности отношение сторон сечения $m = h/b$, при котором балка имеет минимальный вес.

Решение. Из условия прочности $M_x/W_x + M_y/W_y \leq [\sigma]$, где $W_x = bh^2/6 = m^2b^3/6$, $W_y = mb^2/6$, следует $6M_x/m^2b^3 + 6M_y/mb^3 = [\sigma]$, откуда

$$b = \sqrt[3]{6(M_x + mM_y) / (m^2[\sigma])}.$$

Площадь поперечного сечения балки

$$A = bh = \sqrt[3]{36(M_x + mM_y)^2 / ([\sigma]^2 \cdot m)}. \quad \text{Минимальный вес}$$

балки имеет место при минимальном значении площади сечения A . Из условия минимума $dA/dm = 0$ получаем

$$m = h/b = M_x/M_y.$$

Пространственный кривой изгиб

Пример 2.7. Проверить прочность и жесткость балки, если $F = 5$ кН, $a = 1$ м, $E = 10$ ГПа, $[\sigma] = 10$ МПа, $[f] = l/200 = 2$ см.

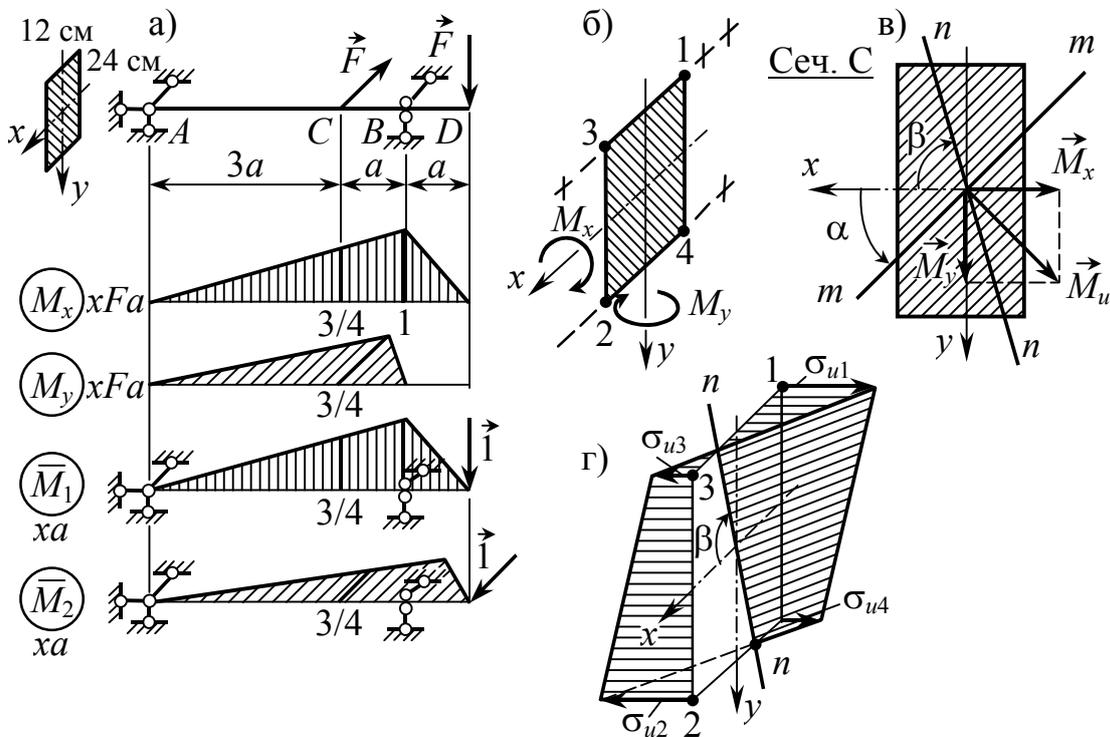


Рис. 2.9

Решение

1. Расчет на прочность. Строим эпюры M_x и M_y и устанавливаем, что опасным является сечение C , где $M_x = M_y = 3Fa/4 = 3,75$ кН·м. Устанавливаем положение силовой и нейтральной линии в этом сечении

$$\operatorname{tg}\alpha = M_x/M_y = 1, \quad \alpha = 45^\circ; \quad \operatorname{tg}\beta = -(1/\operatorname{tg}\alpha)(I_x/I_y) = -4; \quad \beta = -76^\circ.$$

Вычисляя нормальные напряжения в вершинах прямоугольника

$$\sigma_{u1,4} = \pm |M_x|/W_x \pm |M_y|/W_y = \pm 3,3 \pm 6,5;$$

$$\sigma_{u1} = 9,8 \text{ МПа}; \quad \sigma_{u2} = -9,8 \text{ МПа}; \quad \sigma_{u3} = -3,2 \text{ МПа}; \quad \sigma_{u4} = 3,2 \text{ МПа};$$

строим пространственную эпюру нормальных напряжений (рис. 2.9,г).

Условие прочности $\sigma_{\max} = \sigma_{u1} = 9,8 < [\sigma] = 10$ МПа выполняется.

2. Расчет на жесткость. Наибольший прогиб возникает в сечении D . Для определения составляющих полного прогиба воспользуемся энергетическим методом. Перемножая соответствующие эпюры, находим

$$v_D = 5Fa^3/(EI_x) = 0,6 \text{ см}; \quad u_D = 7Fa^3/(8EI_y) = 1,27 \text{ см}.$$

$$\text{Полный прогиб } f_D = \sqrt{u_D^2 + v_D^2} = 1,4 \text{ см} < [f] = 2 \text{ см},$$

т.е. жесткость балки вполне достаточна.

2.3. Внецентренное продольное нагружение

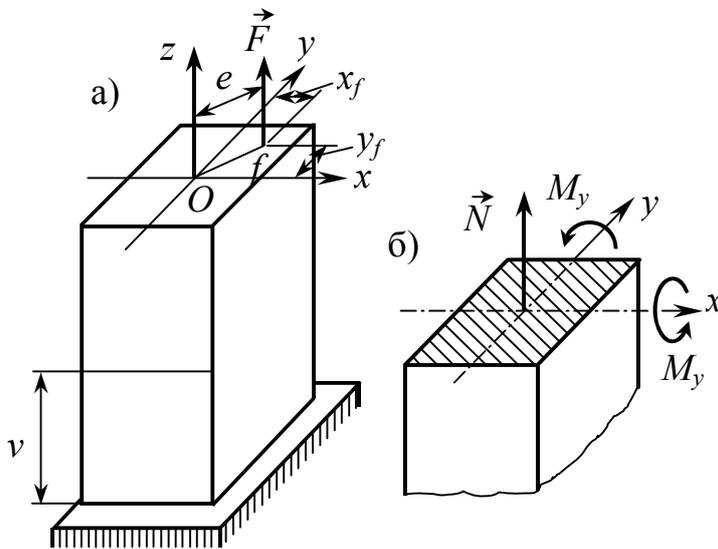


Рис. 2.10

Если линия действия силы F параллельна оси стержня, но с ней не совпадает, то стержень испытывает внецентренное продольное нагружение (растяжение или сжатие).

Расстояние e от продольной силы до оси стержня называется эксцентриситетом. Пусть точка пересечения продольной силы с поперечным сечением (полюс силы f) имеет координаты x_f, y_f . Приведя силу к оси стержня, можно представить внецентренное нагружение как сочетание центрального растяжения (сжатия) и чистого косоугольного изгиба, т.е. в произвольном сечении стержня возникает три внутренних силовых фактора (рис. 2.10,б)

$$N = \pm F, \quad M_x = \pm F \cdot y_f, \quad M_y = \pm F \cdot x_f.$$

Знак «плюс» соответствует растягивающей силе, а «минус» - сжимающей.

Нормальное напряжение в произвольной точке сечения на основании принципа независимости действия сил равно

$$\sigma(N, M_x, M_y) = N/A + (M_x/I_x) \cdot y + (M_y/I_y) \cdot x$$

или
$$\sigma = \pm (F/A) \left(1 + y_1 \cdot y / i_x^2 + x_f \cdot x / i_y^2 \right), \quad (2.9)$$

где $i_x^2 = I_x/A$, $i_y^2 = I_y/A$.

Согласно формуле (2.9) напряжения распределяются по закону плоскости (уравнение вида $z = Ax + By + D$), не проходящей через начало координат. Положение нейтральной линии определяется из условия $\sigma = 0$, откуда получаем уравнение

$$x_o/a_o + y_o/b_o = 1, \quad (2.10)$$

где x_o, y_o – координаты точек нейтральной линии, a_o и b_o – отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат (рис. 2.11) и вычисляемые по формулам

$$a_o = -i_y^2/x_f, \quad b_o = -i_x^2/y_f. \quad (2.11)$$

Из этих формул следует, что полюс и нейтральная линия всегда расположены по разные стороны от начала координат, совпадающего с центром тяжести сечения. Опасными являются точки, наиболее удаленные от нейтральной линии.

Условия прочности, например, при внецентренном сжатии, имеют вид

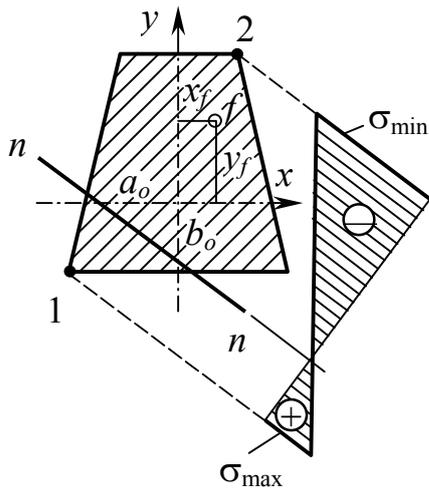


Рис. 2.11

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_f \cdot y_1}{i_x^2} + \frac{x_f \cdot x_1}{i_y^2} \right) \leq [\sigma_p]$$

$$\sigma_{\min} = \left| -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_f \cdot y_2}{i_x^2} + \frac{x_f \cdot x_2}{i_y^2} \right) \right| \leq [\sigma_c]. \quad (2.12)$$

Ядро сечения. Это область, очерченная вокруг центра тяжести и характерная тем, что

продольная сила, приложенная внутри этой области, вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака. При построении ядра сечения задаются предельными положениями нейтральной линии, когда последняя касается контура сечения, и определяются координаты его вершин по формулам

$$x_{я} = -i_y^2 / a_0, \quad y_{я} = -i_x^2 / b_0. \quad (2.13)$$

Переход нейтральной линии из одного предельного положения в другое связан с вращением нейтральной линии вокруг неподвижной точки. При этом полюс перемещается по прямой линии, соединяющей соответствующие точки ядра. Криволинейным участкам наружного контура поперечного сечения соответствуют криволинейные отрезки контура ядра.

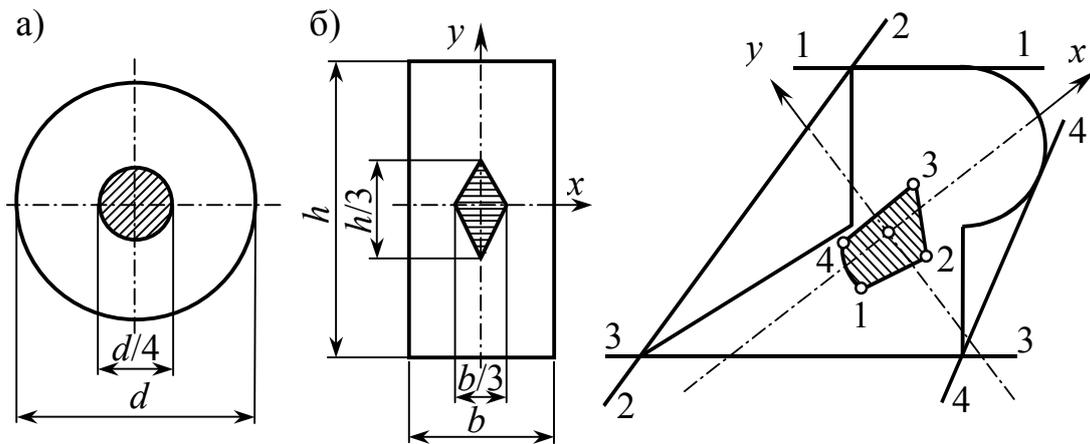
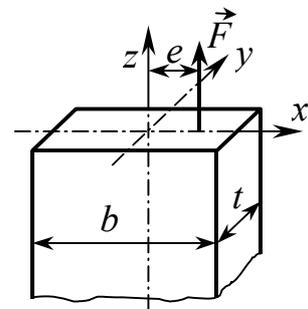


Рис. 2.12

Пример 2.8. Полоса толщины $t = 10$ мм растягивается силой $F = 64$ кН, приложенной с эксцентриситетом $e = b/4$. Определить ширину b , если допустимое напряжение материала равно $[\sigma] = 160$ МПа.



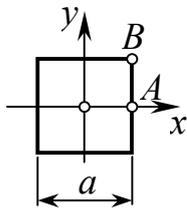
Решение. Согласно условию прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad N/A + M_y/W_y \leq [\sigma].$$

Учитывая, что $A = b \cdot t$, $W_y = tb^2/6$, $N = F$, $M_y = F \cdot e = F \cdot b/4$, получим $F/(bt) + F \cdot (b/4)/(tb^2/6) = (5/2)F/(bt) \leq [\sigma]$.

Отсюда $b = 5F/(2t \cdot [\sigma]) = 5 \cdot 64 \cdot 10^3 / (2 \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 160 \cdot 10^6) = 10 \text{ см}$.

Пример 2.9. Как изменится максимальное напряжение в стержне квадратного сечения, если сила, действующая вдоль оси, переместится параллельно в точки A и B ?



Решение. Когда сила приложена в точке O , стержень испытывает центральное растяжение, поэтому $\sigma_0 = N/A = F/A = F/a^2$.

Когда сила приложена в точках A и B , имеет место кривой изгиб. Максимальные напряжения возникают соответственно в точках A и B и определяются следующим образом:

$$\sigma_A = N/A + M_y/W_y = F/a^2 + F \cdot (a/2)/(a^3/6) = 4F/a^2,$$

$$\sigma_B = N/A + M_x/W_x + M_y/W_y = 7F/a^2.$$

Пример 2.10. Определить эксцентриситет продольной силы, при котором нормальные напряжения в крайних волокнах образца круглого сечения диаметра d отличаются от среднего значения напряжений не более чем на 5%.

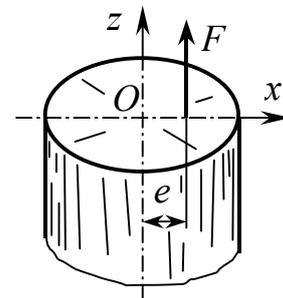
Решение. Напряжения в крайних точках и в центре стержня определяются следующими формулами:

$$\sigma_{\max} = F/A \pm Fe/W, \quad \sigma_{\text{ср}} = F/A.$$

По условию задачи $\sigma_{\max} = 1,05\sigma_{\text{ср}}$;

$$F/(\pi d^2/4) + F \cdot e/(\pi d^3/32) = 1,05F/(\pi d^2/4).$$

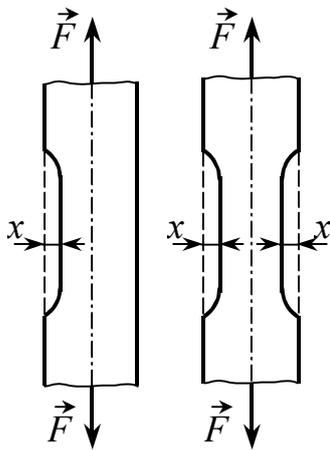
Отсюда $e/d = 1/160$.



Пример 2.11. Две полосы $b \times t$ растягиваются силой F . Одна полоса ослаблена одним боковым вырезом глубины X , другая – двумя боковыми вырезами той же глубины. При каком значении глубины X наибольшие напряжения в обоих случаях будут одинаковы?

Решение. В пластине с одним боковым вырезом возникает внецентренное растяжение с эксцентриситетом $e = 0,5X$, поэтому

$$\sigma_{\max 1} = \frac{N}{A_1} + \frac{M_u}{W_y} = \frac{F}{(b-x)t} + \frac{F \cdot 0,5x}{t(b-x)^2/6} = \frac{F(b+2x)}{t(b-x)^2}.$$



Пластина с двумя симметричными боковыми вырезами испытывает центральное растяжение, поэтому

$$\sigma_{\max 2} = N/A_2 = F/[(b-2x) \cdot t].$$

Приравняв напряжения, получим

$$(b+2x)/[t(b-x)^2] = F/[(b-2x) \cdot t],$$

откуда $b^2 - 4x^2 = (b-x)^2$,

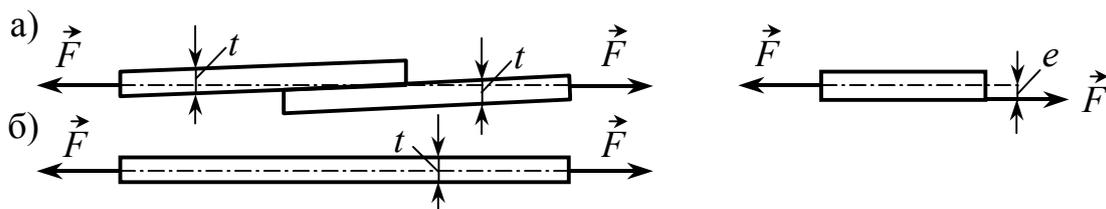
$$5x^2 - 2bx = x(5x - 2b) = 0.$$

Следовательно, $x_1 = 0$, $x_2 = 0,4b$.

Пример 2.12

Во сколько раз максимальное напряжение в полосах, соединенных

Сварными швами внахлестку, превосходит напряжение в целой полосе?



Решение. В первом случае лист испытывает внецентренное растяжение, поэтому

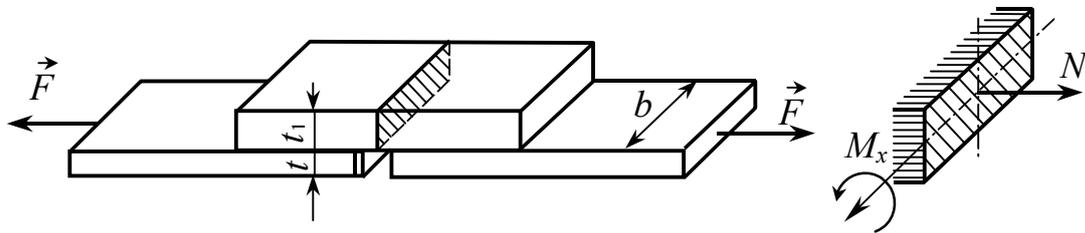
$$\sigma_{\max 1} = N/A + Fe/W = F/(b \cdot t) + F \cdot 0,5t/(bt^2/6) = 4F/(b \cdot t).$$

В целой полосе имеет место центральное растяжение, следовательно,

$$\sigma_{\max 2} = N/A = F/(b \cdot t).$$

Отношение напряжений $\sigma_{\max 1} / \sigma_{\max 2} = 4$.

Пример 2.13. Определить толщину накладки t_1 , при которой обеспечивается равнопрочность соединения.



$$N = F, \quad M_x = Fe, \quad e = 0,5(t + t_1).$$

Решение. Полоса испытывает центральное растяжение, а накладка – внецентренное растяжение. Соединение будет равнопрочным в том случае, если наибольшие нормальные напряжения в полосах и в накладке будут одинаковы.

Наибольшие напряжения соответственно равны:

- в полосе $\sigma_{\max 1} = F/(b \cdot t)$,

- в накладке

$$\sigma_{\max 2} = N/A + M_x/W_x = F/(bt_1) + 0,5F(t_1 + t)/(bt_1^2/6).$$

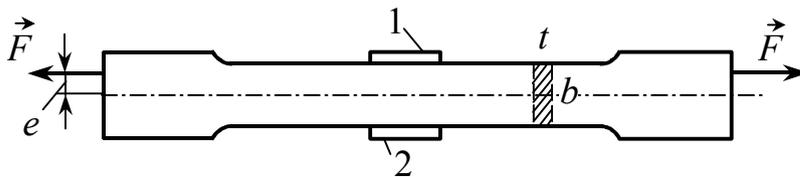
Приравняв напряжения, получим

$$F/(bt) = F/(bt_1) + 3F(t_1 + t)/(bt_1^2)$$

или после упрощения $t_1^2 - 4tt_1 - 3t^2 = 0$,

откуда $t_1 = t(2 + \sqrt{4 + 3}) = 4,65t$.

Пример 2.14. При испытании стального образца на внецентренное растяжение установлены нормальные напряжения в крайних волокнах $\sigma_1 = 180$ МПа и $\sigma_2 = 120$ МПа. Определить растягивающую силу F и ее эксцентриситет e . Сечение образца 60×5 мм.



Решение
Напряжения в крайних точках соответственно

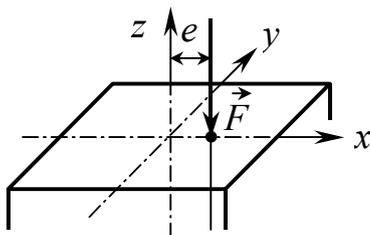
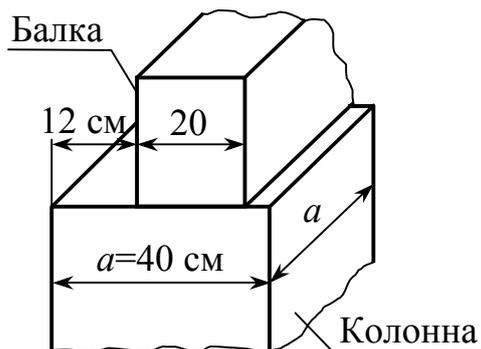
равны $\sigma_1 = F/(bt) + F \cdot e/(tb^2/6)$, $\sigma_2 = F/(bt) - F \cdot e/(tb^2/6)$.

Решая совместно эти два уравнения, найдем

$$F = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot b \cdot t = 0,5(180 + 120) \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} = 45 \text{ кН},$$

$$e = (\sigma_1 - \sigma_2) b^2 \cdot t / (12F) = (b/6) (\sigma_1 - \sigma_2) / (\sigma_1 + \sigma_2) = 0,2 \text{ см}.$$

Пример 2.15. Балка прямоугольного сечения опирается на колонну. В результате неточности монтажа она оказалась сдвинутой относительно продольной оси колонны. На сколько процентов увеличились нормальные напряжения в колонне по сравнению с проектом?



Решение

По проекту $e = 0$ и колонна подвергается центральному сжатию $\sigma_0 = |-F/A| = F/a^2$.

При неточном монтаже колонна испытывает внецентренное сжатие, поэтому

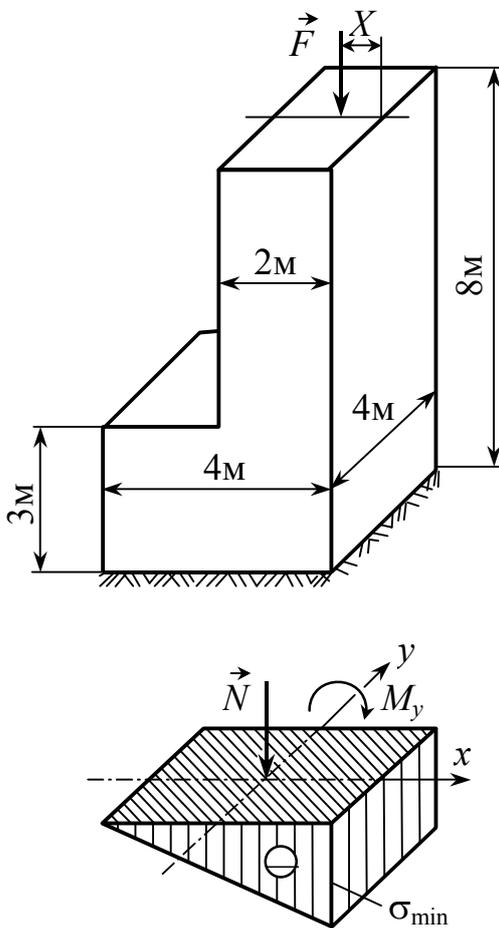
$$\begin{aligned} \sigma_{\text{наиб}} &= |-F/A - F \cdot e/(a^3/6)| = \\ &= F/a^2 + 6Fe/a^3. \end{aligned}$$

Отношение напряжений

$$\sigma_{\text{наиб}}/\sigma_0 = 1 + 6e/a = 1 + 6 \cdot 2/40 = 1,3,$$

т.е. напряжения возрастают на 30%.

Пример 2.16. Определить положение силы F из условия, чтобы по подошве бетонной опоры растягивающие напряжения были равны нулю? Какие наибольшие сжимающие напряжения при этом возникнут? Дано: $F = 1$ МН, объемный вес бетона $\gamma_\sigma = 20$ кН/м³.



Решение

Находим внутренние силовые факторы на уровне подошвы опоры. Вычисляя сумму проекций всех сил, включая собственный вес, на ось z , а также сумму моментов этих же сил относительно оси y , получим

$$\begin{aligned} |N| &= F + \gamma_\sigma(V_1 + V_2) = \\ &= 1 + 0,02 \cdot 88 = 2,76 \text{ МН}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |M_y| &= F(2-x) + \gamma_\sigma V_1 \cdot e_1 = \\ &= 1(2-x) + 0,02 \cdot 40 \cdot 1 = 2,8-x. \end{aligned}$$

Напряжения по подошве опоры

$$\sigma_{\text{max}} = -|N|/A + |M_y|/W_y,$$

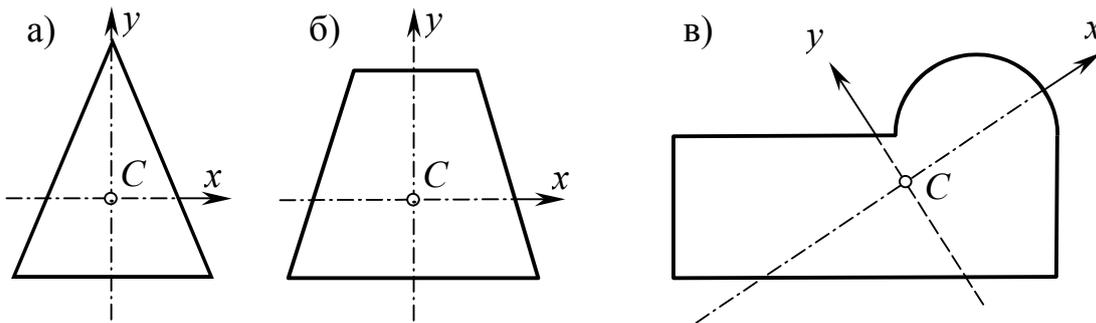
$$\sigma_{\text{min}} = -|N|/A - |M_y|/W_y.$$

По условию задачи $\sigma_{\max} = 0$, $\sigma_{\max} = -\frac{2,76}{16} + \frac{2,8-x}{4^3/6} = \frac{2,88-3x}{32} = 0$,

откуда $X = 0,96$ м. Тогда наибольшее сжимающее напряжение будет равно

$$\sigma_{\min} = -\frac{2,76}{16} - \frac{2,8-x}{4^3/6} = \frac{3x-13,92}{32} = -0,345 \text{ МПа.}$$

Пример 2.17. Построить ядро сечения для приведенных ниже фигур.



2.4. Одновременное действие кручения и изгиба

В этом случае стержень находится под действием крутящего и изгибающих моментов. Напряженное состояние в опасных точках является плоским, поэтому расчет на прочность должен выполняться с применением теорий прочности.

2.4.1. Стержень круглого сечения (рис. 2.13)

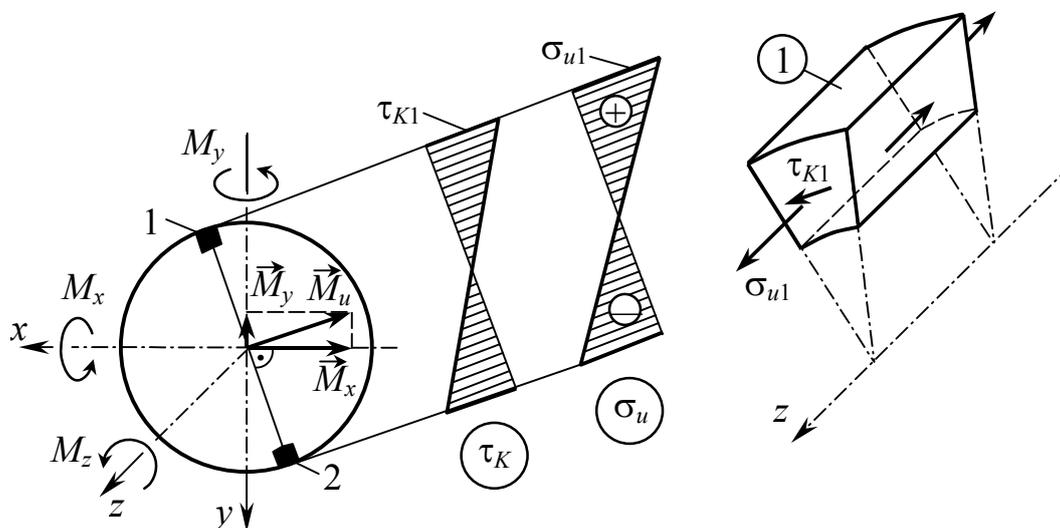


Рис. 2.13

Внешние нагрузки раскладываются по главным осям и строятся эпюры изгибающих моментов в вертикальной M_x и горизонтальной M_y плоскостях. В каждом сечении определяется суммарный изгибающий момент

$$\vec{M}_u = \vec{M}_x + \vec{M}_y, \quad M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

и строится эпюра M_u . Путем сопоставления эпюр M_u и $M_k = M_z$ устанавливается опасное сечение. Точки пересечения плоскости суммарного изгибающего момента с контуром поперечного сечения являются опасными, так как в них возникают наибольшие нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_{u1} = \frac{M_u}{W_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x}, \quad \tau_{k1} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{2W_x}. \quad (2.14)$$

Напряженное состояние в опасных точках является плоским, поэтому условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma_p]. \quad (2.15)$$

Рассмотрим, к примеру, 3-ю и 4-ю гипотезы прочности.

Тогда

$$\sigma_{\text{экв}} = \begin{cases} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} & \text{– по 3-й гипотезе прочности,} \\ \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} & \text{– по 4-й гипотезе прочности.} \end{cases}$$

После подстановки нормальных и касательных напряжений согласно (2.14) получим удобную для практики формулу

$$\boxed{M_{\text{экв}}/W_x \leq [\sigma]}, \quad (2.16)$$

где $M_{\text{экв}}$ – эквивалентный изгибающий момент, равный

$$M_{\text{экв}} = \begin{cases} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} & \text{– по 3-й гипотезе прочности,} \\ \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2} & \text{– по 4-й гипотезе прочности} \end{cases} \quad (2.17)$$

Как видим, расчет на изгиб с кручением сводится к расчету на изгиб от некоторого эквивалентного момента $M_{\text{экв}}$.

2.4.2. Стержень прямоугольного сечения (рис. 2.14)

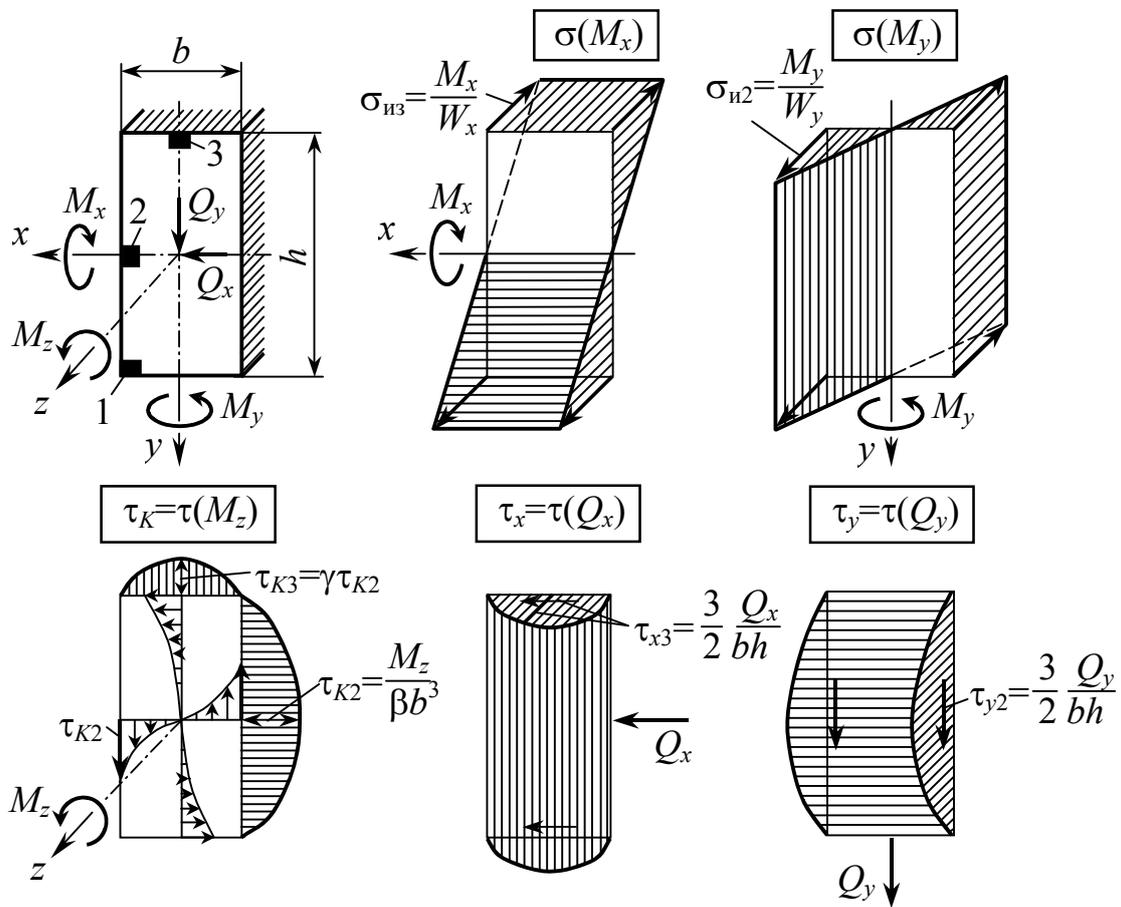
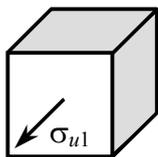


Рис. 2.14

Опасное сечение устанавливается из сопоставления эпюр M_x , M_y и M_z . Положение опасной точки сразу указать невозможно, поэтому приходится вычислять эквивалентные напряжения в трех точках контура сечения.

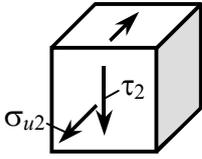


В точке 1 возникает наибольшее нормальное напряжение σ_{u1} , вызванное изгибающими моментами M_x и M_y и равное

$$\sigma_{u1} = M_x/W_x + M_y/W_y,$$

а касательные напряжения отсутствуют. Напряженное состояние является линейным, поэтому

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{(1)} = \sigma_{u1} = M_x/W_x + M_y/W_y.$$



В точке 2 возникают наибольшее касательное напряжение от крутящего момента M_z

$$\tau_{k2} = \tau_{k\text{max}} = M_z/\beta b^3.$$

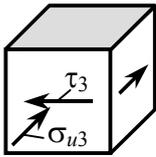
и от поперечной силы Q_y $\tau_{y2} = 3Q_y/(2bh)$.

Суммарное касательное напряжение $\tau_2 = \tau_{k2} + \tau_{y2}$.

Нормальное напряжение вызвано изгибающим моментом M_y

$$\sigma_{u2} = M_y/W_y.$$

Эквивалентное напряжение, например, по 3-й гипотезе прочности, равно $\sigma_{\text{ЭКВIII}}^{(2)} = \sqrt{\sigma_{u2}^2 + 4\tau_2^2}$.



В точке 3 возникают нормальное напряжение от изгибающего момента M_x $\sigma_{u3} = M_x/W_x$

и касательные напряжения, обусловленные крутящим моментом M_z и поперечной силой Q_x

$$\tau_3 = \tau_{k3} + \tau_{x3} = \gamma\tau_{k2} + 3Q_x/(2bh).$$

Эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{ЭКВIII}}^{(3)} = \sqrt{\sigma_{u3}^2 + 4\tau_3^2}$.

Точка, в которой эквивалентное напряжение является наибольшим, и будет опасной. Для этой точки записывается условие прочности $\sigma_{\text{ЭКВ max}} \leq [\sigma_p]$,

исходя из которого делается заключение о прочности конструкции или определяются искомые величины (размеры сечения, допускаемая нагрузка).

Справочные данные. При расчетах на кручение стержней прямоугольного сечения пользуются следующими данными:

Момент инерции прямоугольника при кручении $I_k = \alpha b^4$, где b – размер меньшей из сторон прямоугольника.

Момент сопротивления прямоугольника при кручении $W_k = \beta b^3$.

Наибольшее касательное напряжение, возникающее по середине длинной стороны $\tau_{k \max} = M_z / W_k = M_z / (\beta b^3)$.

Наибольшее касательное напряжение посередине короткой стороны $\tau'_{k \max} = \gamma \tau_{k \max}$.

Коэффициенты α , β , γ зависят от величины отношения h/b и приведены в нижеследующей таблице

h/b	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0
α	0,140	0,294	0,457	0,790	1,123	1,789
β	0,208	0,346	0,493	0,801	1,128	1,789
γ	1,0	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743

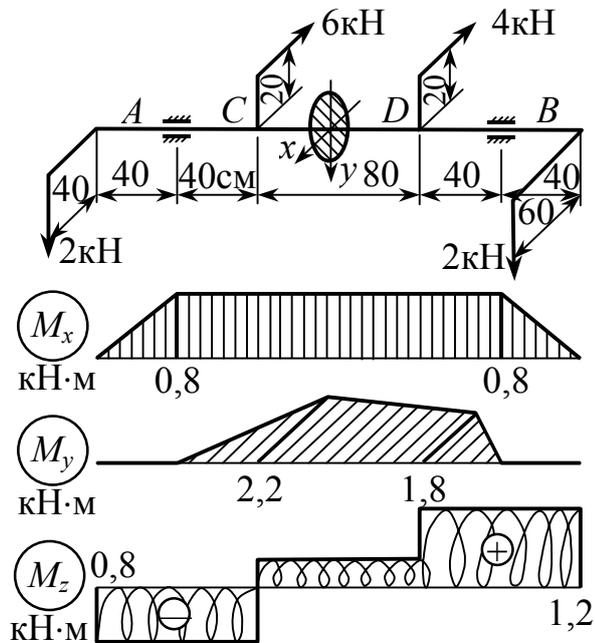
Пример 2.18. Установить опасное сечение для круглого вала, приведенного на рисунке.

Решение

Для установления опасного сечения необходимо построить эпюры изгибающих и крутящего моментов.

Какое из двух сечений (C или D) является опасным, сразу сказать трудно. Необходимо вычислить эквивалентный

момент. Пользуясь, например, 3-й гипотезой прочности,



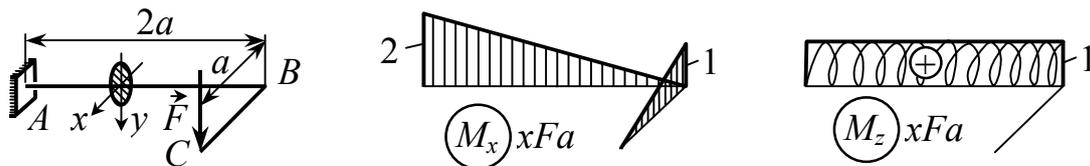
получим $M_{\text{ЭКВIII}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$

$$M_{\text{ЭКВIII}}^{(C)} = \sqrt{0,8^2 + 2,2^2 + 0,8^2} = 2,47,$$

$$M_{\text{ЭКВIII}}^{(D)} = \sqrt{0,8^2 + 1,8^2 + 1,2^2} = 2,31 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Так как $M_{\text{ЭКВIII}}^{(C)} > M_{\text{ЭКВIII}}^{(D)},$ то опасным является сечение $C.$

Пример 2.19. Пользуясь третьей гипотезой прочности, проверить прочность кронштейна, выполненного из круглого стержня диаметра $d = 100$ мм, если $a = 1$ м, $F = 5$ кН, $[\sigma] = 120$ МПа.



Решение. Построив эпюры изгибающего M_x и крутящего M_z моментов, устанавливаем что опасным является сечение $A,$ где

$$M_x = 2Fa, \quad M_z = Fa.$$

Эквивалентный момент по третьей гипотезе прочности

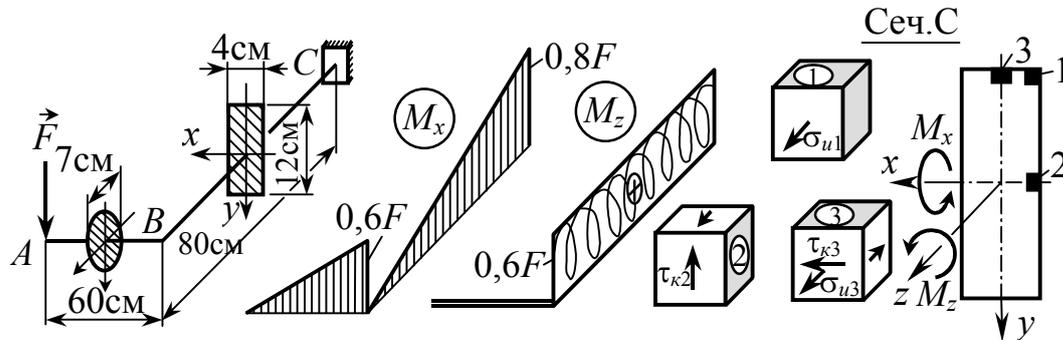
$$M_{\text{ЭКВIII}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = Fa\sqrt{2^2 + 1^2} = Fa\sqrt{5}.$$

Условие прочности $\sigma_{\text{ЭКВIII}} = M_{\text{ЭКВIII}} / W_x \leq [\sigma],$

$$\sigma_{\text{ЭКВIII}} = Fa\sqrt{5} / (0,1d^3) = 112 \text{ МПа} < [\sigma] = 120 \text{ МПа}$$

выполняется, т.е. прочность конструкции обеспечена.

Пример 2.20. Ломаный стержень ABC , жестко заделанный одним концом, нагружен силой F . Найти наибольшую допускаемую величину силы F исходя из третьей гипотезы прочности, если $[\sigma] = 100$ МПа.



Решение. Построив эпюры M_x и M_z , устанавливаем опасные сечения: на участке AB – сеч. B , на участке BC – сеч. C . Для определения допускаемой нагрузки составим условия прочности для каждой из стержней:

$$AB - M_x/W_x = 0,6F/(0,1d^3) \leq [\sigma],$$

$$[F_{AB}] = 0,1d^3 \cdot [\sigma]/0,6 = 5,7 \text{ кН};$$

$$BC - \sigma_{\text{экв max}} \leq [\sigma].$$

Находим эквивалентные напряжения в трех точках контура сеч. C :

$$\text{Точка 1: } \sigma_{\text{экв}}^{(1)} = M_x/W_x = 0,8F/(96 \cdot 10^{-6}) = 8333F;$$

$$\text{Точка 2: } \sigma_{\text{эквIII}}^{(2)} = \sqrt{\sigma_{u2}^2 + 4\tau_{к2}^2} = 23408F,$$

где $\sigma_{u2} = M_y/W_y = 0,$

$$\tau_{к2} = M_z/(\beta b^3) = 0,6F/(0,801 \cdot 4^3 \cdot 10^{-6}) = 11704F;$$

$$\text{Точка 3: } \sigma_{\text{эквIII}}^{(3)} = \sqrt{\sigma_{u3}^2 + 4\tau_{к3}^2} = 19497F,$$

где $\sigma_{u3} = M_x/W_x = 0,8F/(96 \cdot 10^{-6}) = 8333F,$

$$\tau_{к3} = \gamma\tau_{к2} = 0,753 \cdot 11704F = 8813F.$$

Как видим, опасной является точка 2, т.е. $\sigma_{\text{ЭКВmax}} = \sigma_{\text{ЭКВIII}}^{(2)}$.

Следовательно, $23408F \leq [\sigma]$, откуда $[F_{BC}] = [\sigma]/23408 = 4,27$ кН. Допускаемой нагрузкой для всего ломаного стержня будет меньшая из двух найденных величин

$$[F] = \min\{[F_{AB}], [F_{BC}]\} = [F_{BC}] = 4,27 \text{ кН.}$$

Пример 2.21. На вал AB , приводимый в движение ременной передачей с соотношением $T = 2t$, насажено зубчатое колесо, на которое в плоскости вращения действует окружное усилие F_1 . Угловая скорость вращения вала $\omega = 104 \text{ с}^{-1}$, а передаваемая мощность $P = 375 \text{ кВт}$. Определить диаметр вала, если: $a = 10 \text{ см}$, $b = 15 \text{ см}$, $l = 50 \text{ см}$, $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$, $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$.

Решение

1. Построение эпюр изгибающих и крутящего моментов.

Скручивающие моменты, приложенные к валу в сечениях C_1 и C_2 ,

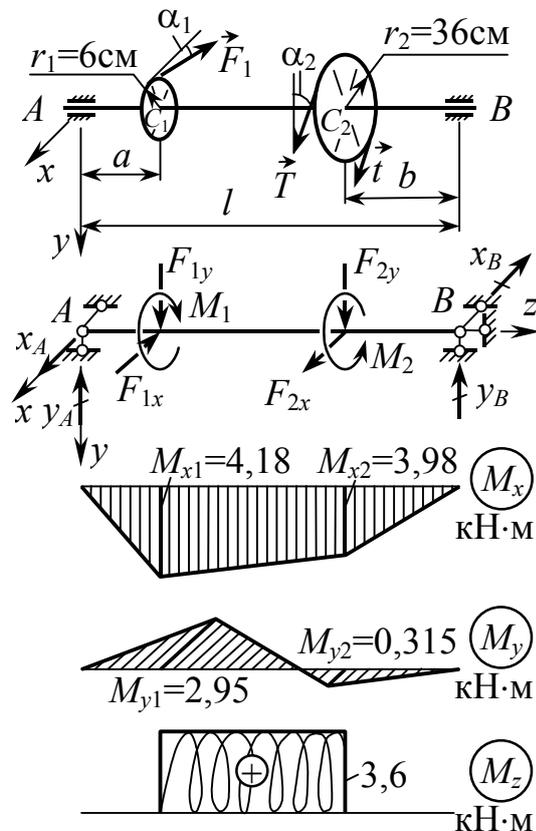
$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = M &= P/\omega = \\ &= 375/104 = 3,6 \text{ кН}\cdot\text{м.} \end{aligned}$$

Силы, действующие на вал в сечениях C_1 и C_2 ,

$$\begin{aligned} F_1 &= M_1/r_1 = 3,6/(6 \cdot 10^{-2}) = \\ &= 60 \text{ кН,} \end{aligned}$$

$$M_2 = (T - t) \cdot r_2 = t \cdot r_2,$$

$$F_2 = T + t = 3t = 3 \cdot 10 = 30 \text{ кН.}$$



Составляющие сил по осям координат

$$F_{1x} = F_{1y} = F_1 \cdot \cos 45^\circ = 42,4 \text{ кН};$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \sin 30^\circ = 15 \text{ кН};$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos 30^\circ = 25,9 \text{ кН}.$$

Эпюры изгибающих моментов строим от сил, действующих в двух главных плоскостях. Эпюра M_x строится в вертикальной плоскости. Сначала находим опорные реакции $\sum m_B = 0$, $Y_A \cdot l = F_{1y}(l - a) + F_{2y} \cdot b$, $Y_A = 41,8 \text{ кН}$;
 $\sum Y_i = 0$, $-Y_A - Y_B + F_{1y} + F_{2y} = 0$, $Y_B = F_{1y} + F_{2y} - Y_A = 26,5 \text{ кН}$,
а затем значения момента в характерных точках

$$M_{x1} = Y_A \cdot a = 41,8 \cdot 0,1 = 4,18 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{x2} = Y_B \cdot b = 3,98 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

по которым строим эпюру M_x . Эпюра M_y строится в горизонтальной плоскости. Определяем опорные реакции

$$\sum m_B = 0, \quad X_A \cdot l = F_{1x}(l - a) - F_{2x} \cdot b, \quad X_A = 29,5 \text{ кН};$$

$$\sum X_i = 0, \quad X_A - X_B - F_{1x} + F_{2x} = 0, \quad X_B = 2,1 \text{ кН},$$

и значения момента в характерных точках $M_{y1} = X_A \cdot a = 2,95 \text{ кН}\cdot\text{м}$;
 $M_{y2} = X_B \cdot b = 0,315 \text{ кН}\cdot\text{м}$, по которым строим эпюру M_y .

Эпюра крутящего момента постоянна между сечениями C_1 и C_2 : $M_z = M_1 = M_2 = 3,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Степень опасности сечения круглого вала оценивается по величине эквивалентного момента. В данном случае наибольший эквивалентный момент имеет место в сечении C_1

$$M_{\text{экв max}} = M_{\text{экв III}}^{(C_1)} = \sqrt{M_{x1}^2 + M_{y1}^2 + M_z^2} = 6,26 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

которое и является опасным с точки зрения прочности вала.

2. Подбор сечения. Записываем условие прочности

$$M_{\text{экв max}} / W_x = M_{\text{экв III}}^{(C_1)} / (0,1d^3) \leq [\sigma],$$

откуда находим искомый диаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{10M_{\text{эквIII}}^{(C_1)} / [\sigma]} = \sqrt[3]{10 \cdot 6,26 \cdot 10^3 / (150 \cdot 10^6)} = 74,8 \text{ мм.}$$

Принимаем по ГОСТ 6636-53: $d_o = 75$ мм.

Пример 2.22. При каких соотношениях между изгибающим M_u и крутящим M_k моментами более прочен стержень круглого сечения и при каких – стержень квадратного сечения? Все прочие условия одинаковы. Сравнение произвести, исходя из третьей гипотезы прочности.

Решение. Эквивалентные напряжения, полагая $k = M_k/M_u$,

- круглый вал $\sigma_{\text{эквIII}}^{\text{кр}} = M_{\text{эквIII}} / W_x = (32/\pi d^3) M_u \sqrt{1+k^2}$;
- квадратный вал

$$\sigma_{\text{эквIII}}^{\text{кв}} = \sqrt{\sigma_u^2 + 4\tau_k^2} = \sqrt{\left(6M_u/a^3\right)^2 + 4\left(kM_u/0,208a^3\right)^2} .$$

Так как валы имеют одинаковый вес, то $A_{\text{кр}} = A_{\text{кв}}$, откуда $a = (\sqrt{\pi/2})d = 0,886d$; здесь a – сторона квадратного сечения, d – диаметр круглого сечения.

Круглый вал будет прочнее, если $\sigma_{\text{эквIII}}^{\text{кр}} < \sigma_{\text{эквIII}}^{\text{кв}}$, что имеет место при $k > 0,58$. Таким образом, при $k > 0,58$ более прочен круглый вал, а при $k < 0,58$ более прочен вал квадратного сечения; наконец, при $k = 0,58$ валы равнопрочны.

1. УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Форму равновесия статически нагруженной конструкции называют устойчивой, если малым возмущающим воздействиям соответствуют малые отклонения от этой формы. Нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости, называют *критическими*, а соответствующие состояния критическими. Опасность потери устойчивости особенно велика для легких тонкостенных конструкций типа гибких стержней, пластин и оболочек. Здесь мы ограничимся лишь простейшими случаями расчета на устойчивость сжатых стержней, а также труб, нагруженных внешним давлением.

1.1. Устойчивость центрально сжатого прямолинейного стержня

При умеренных значениях сжимающей силы ($F < F_{кр}$) прямолинейная форма равновесия – единственная и притом устойчивая: малым возмущениям этой формы, которые осуществляются, например, при помощи малой дополнительной поперечной нагрузки, соответствуют малые прогибы. При критическом значении сжимающей силы прямолинейная форма становится неустойчивой и после малых возмущений стержень

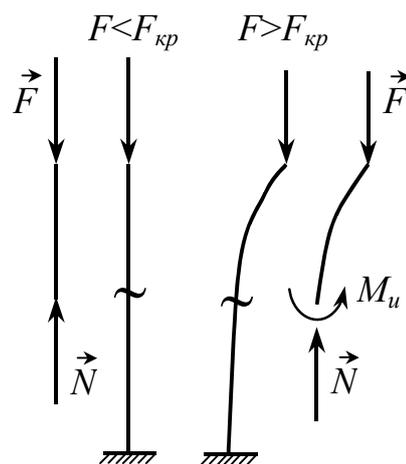


Рис. 1.1

приобретает новую криволинейную форму равновесия. Сжимающая сила вызывает дополнительно изгибающие моменты и наблюдается сильное нарастание прогибов при малом увеличении сжимающей силы (рис. 1.1). Это явление называется продольным изгибом. Дополнительные напряжения изгиба достигают весьма больших значений даже при ничтожно малом превышении критической величины сжимающей силы. Поэтому критическое состояние, как непосредственно предшествующее разрушению, считается недопустимым в реальных условиях эксплуатации. Определение критических нагрузок является весьма ответственной частью инженерного расчета конструкции и позволяет избежать потери устойчивости введение надлежащего запаса P_y :

$$P_y = F_{кр} / F. \quad (1.1)$$

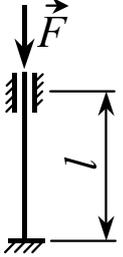
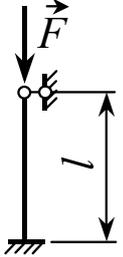
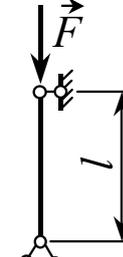
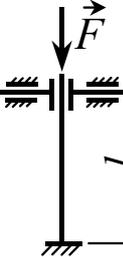
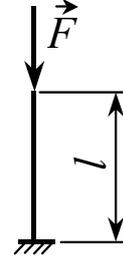
Коэффициент запаса устойчивости P_y зависит от материала стержня. Его рекомендуемые величины находятся в пределах: для стальных стоек 1,5 ... 3; для деревянных 2,5 ... 3,5; для чугунных 4 ... 6.

Критическая сила зависит как от материала стержня, так и от его гибкости λ , равной

$$\lambda = \mu l / i_{\min}, \quad (1.2)$$

где i_{\min} – минимальный радиус инерции поперечного сечения, определяемый как $i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}$; l – длина стержня, μ – коэффициент приведения, зависящий от условий закрепления концов стержня. Некоторые наиболее употребительные значения μ приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Номер схемы	I	II	III	IV	V
Схема					
μ	0,5	0,7	1	1	2

Стержни могут терять устойчивость при напряжениях, меньших или больших предела пропорциональности материала $\sigma_{\text{пц}}$. В первом случае речь идет о стержнях большой гибкости, для которых

$$\sigma_{\text{кр}} = F_{\text{кр}} / A \leq \sigma_{\text{пц}}.$$

Этому неравенству эквивалентно следующее: $\lambda \geq \lambda_{\text{пц}}$, где $\lambda_{\text{пц}}$ – постоянная для данного материала величина, называемая первой предельной гибкостью стержня и определяемая из условия $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{пц}}$.

Для стержней средней гибкости

$$\sigma_{\text{пц}} \leq \sigma_{\text{кр}} \leq \sigma_{\text{пред}},$$

что равноценно условию $\lambda_{\text{пред}} \leq \lambda \leq \lambda_{\text{пц}}$,

где $\sigma_{\text{пред}}$ – предельное для данного материала напряжение, равное пределу текучести σ_{T} для пластичных материалов или пределу прочности $\sigma_{\text{пч}}$ для хрупких материалов, $\lambda_{\text{пред}}$ – вторая предельная гибкость, определяемая из выражения $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{пред}}$.

Наконец, стержни малой гибкости ($\lambda < \lambda_{\text{пред}}$) достигают предельного состояния без потери устойчивости, поэтому они рассчитываются не на устойчивость, а на прочность при сжатии.

Критическая сила в зависимости от гибкости стержня λ определяется по одной из следующих формул:

1. По формуле Эйлера для стержней большой гибкости ($\lambda \geq \lambda_{\text{пц}}$)

$$F_{\text{кр}} = \pi^2 EI_{\text{min}} / (\mu l)^2. \quad (1.3)$$

Разделив обе части на площадь поперечного сечения A , получим критическое напряжение

$$\sigma_{\text{кр}} = F_{\text{кр}} / A = \pi^2 E / \lambda^2. \quad (1.4)$$

Используя условие $\sigma_{\text{кр}} = \pi^2 E / \lambda_{\text{пц}}^2 = \sigma_{\text{пц}}$, найдем первую предельную гибкость:

$$\lambda_{\text{пц}} = \pi \sqrt{E / \sigma_{\text{пц}}}. \quad (1.5)$$

2. По эмпирической формуле Тетмайера-Ясинского для стержней средней гибкости ($\lambda_{\text{пред}} \leq \lambda \leq \lambda_{\text{пц}}$):

$$F_{\text{кр}} = A(a - b\lambda + \varepsilon\lambda^2), \quad (1.6)$$

где a , b и c – числовые коэффициенты, имеющие размерность напряжения и определяемые опытным путем.

Характер зависимости критического напряжения от гибкости стержня представлен на рис. 1.2.

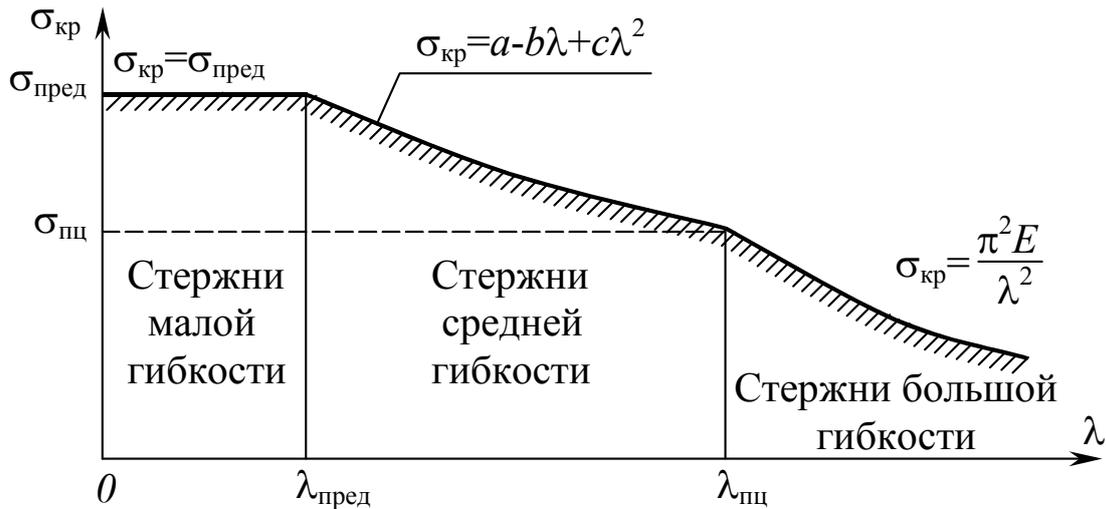


Рис. 1.2.

Расчет стержней на устойчивость сводится к удовлетворению неравенства $n_y = F_{кр} / F \geq [n_y]$, (1.7) где n_y и $[n_y]$ – соответственно фактический и нормативный коэффициенты запаса устойчивости. Это условие, конечно, видоизменяется в зависимости от типа решаемой задачи (подбор сечения, определение допускаемой нагрузки).

Расчет на устойчивость можно по форме привести к расчету на простое сжатие:

$$F / A \leq [\sigma_y], \quad (1.8)$$

где $[\sigma_y] = \sigma_{кр} / [n_y]$ – допускаемое напряжение при расчете на устойчивость, выражаемое через допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_c]$ с помощью коэффициента продольного изгиба φ :

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma_c]. \quad (1.9)$$

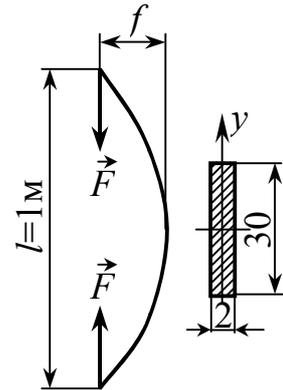
Итак, расчетная формула имеет вид

$$F/A \leq \varphi[\sigma_c]. \quad (1.10)$$

Значения коэффициента φ даются таблицами в зависимости от материала и гибкости стержня. Формула (1.10) применима

при любых значениях гибкости, для которых имеются табличные значения φ , и в этом смысле является универсальной. Коэффициент запаса устойчивости в этом расчете явно не фигурирует, он включен в величину φ .

Пример 1.1. Прямой стальной стержень длиной 1 м сечением 30×2 мм изогнут в виде лука с упругим прогибом посередине, равным $f = 6$ см. Его концы связаны тетивой. Определить усилие в тетиве и наибольшее напряжение в стержне.



Решение. Геометрические характеристики поперечного сечения стержня:

$$A = b \cdot h = 2 \cdot 30 = 60 \text{ мм}^2, \quad I_{\min} = I_y = hb^3/12 = 20 \text{ мм}^4,$$

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A} = 0,577 \text{ мм}, \quad W_y = hb^2/6 = 30 \cdot 2^2/6 = 20 \text{ мм}^3.$$

Деформации в стержне являются упругими ($\sigma_{\max} < \sigma_{\text{пц}}$), поэтому усилие в тетиве определяется по формуле Эйлера:

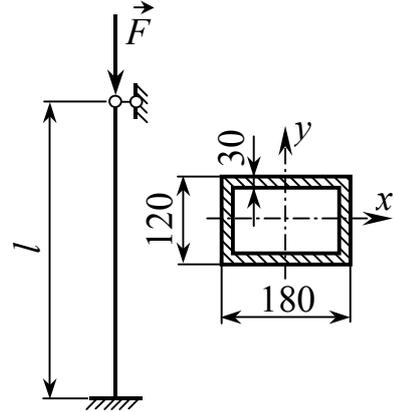
$$F = \pi^2 EI_{\min}/(\mu l)^2 = \pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 10^{-12}/(1 \cdot 1)^2 = 40 \text{ Н}.$$

Наибольшее напряжение возникает в среднем сечении стержня и равно

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{A \cdot f}{W_y} \right) = \frac{40}{60 \cdot 10^{-6}} \left(1 + \frac{60 \cdot 60}{20} \right) = 120 \text{ МПа}.$$

Как видим, напряжение от изгиба в 180 раз больше, чем от продольной сжимающей силы.

Пример 1.2. Проверить на устойчивость чугунную стойку, если $E = 120$ ГПа, $F = 275$ кН, $l = 5,8$ м; $[n_y] = 6$. Во сколько раз можно увеличить сжимающую силу при том же коэффициенте запаса устойчивости, если длину стержня уменьшить вдвое?



Решение. 1. Определение геометрических характеристик:
 $A = 18 \cdot 12 - 12 \cdot 6 = 144 \text{ см}^2$,

$$I_{\min} = I_x = 18 \cdot 12^3 / 12 - 12 \cdot 6^3 / 12 = 2376 \text{ см}^4,$$

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A} = 4,06 \text{ см}.$$

2. Проверка устойчивости стойки. Вычисляем гибкость $\lambda = \mu l / i_{\min} = 0,7 \cdot 580 / 4,06 = 100$. Так как $\lambda > \lambda_{\text{пц}} = 80$, то критическая сила определяется по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \pi^2 EI_{\min} / (\mu l)^2 = \pi^2 \cdot 120 \cdot 10^9 \cdot 2376 \cdot 10^{-8} / (0,7 \cdot 5,8)^2 = 1707 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$N_y = F_{\text{кр}} / F = 1707 / 275 = 6,2 > [n_y] = 6,$$

т.е. устойчивость стойки обеспечена.

При уменьшении длины стержня вдвое гибкость стойки уменьшается также вдвое ($\lambda' = 50$) и становится меньше первой предельной ($\lambda' < \lambda_{\text{пц}}$). Следовательно, формула Эйлера становится несправедливой, и для определения критической силы следует воспользоваться эмпирической формулой Тетмайера-Ясинского

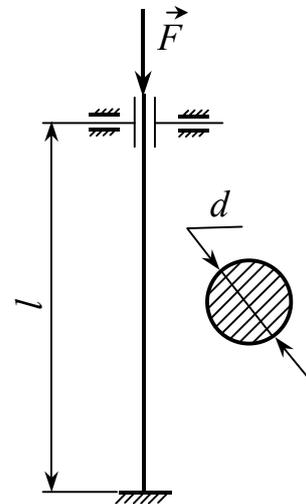
$$F'_{\text{кр}} = A(a - b\lambda' + c\lambda'^2),$$

$$F'_{\text{кр}} = 144 \cdot 10^{-4} (776 - 12 \cdot 50 + 0,053 \cdot 50^2) = 4442 \text{ кН}.$$

Отношение $F'_{кр} / F_{кр} = 4442 / 1707 = 2,6$.

Замечание. Если бы гибкость стержня уменьшилась вдвое в пределах применимости формулы Эйлера, то критическая сила, а следовательно, и допускаемая нагрузка возросли бы в 4 раза. Отсюда вытекает важный практический вывод: применение формулы Эйлера для стержней средней гибкости приводит к завышенному значению критической силы, что недопустимо.

Пример 1.3. Четырехколонная машина для испытания материалов рассчитана на наибольшую разрывающую нагрузку $Q = 1$ МН. Длина колонны $l = 3$ м. Определить из расчета на устойчивость диаметр сечения стальной колонны, если $[n_y] = 4$.



Решение. Расчетной схемой колонны является стержень, нижний конец которого имеет жесткое защемление, а верхний – подвижное защемление, так как он не поворачивается, но может перемещаться вместе с траверсой в поперечном направлении.

Из условия устойчивости $F_{кр} / F \geq [n_y]$.

Критическая сила определяется по формуле Эйлера $F_{кр} = \pi^2 EI_{\min} / (\mu l)^2$, а $F = Q/4$, $I_{\min} = \pi d^4 / 64$. Следовательно,

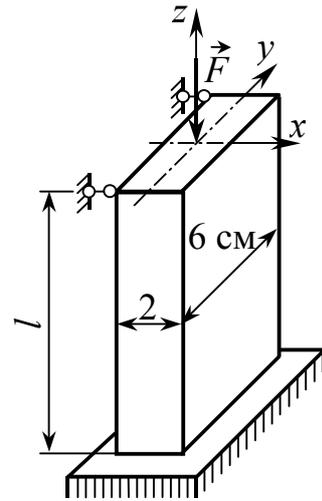
$$\pi^2 E (\pi d^4 / 64) / (\mu l)^2 = (Q/4) \cdot [n_y].$$

Отсюда $d \geq \sqrt[4]{16Q [n_y] (\mu l)^2 / (\pi^3 E)} = 98$ мм.

Принимаем по ГОСТу $d_o = 100$ мм.

Пример 1.4. Определить коэффициент запаса устойчивости стального стержня прямоугольного сечения, если $F = 50$ кН, $l = 1$ м.

Решение. В рассматриваемом случае закрепление концов стержня в главных плоскостях инерции различно, поэтому необходимо предварительно определить гибкость стержня в каждой из плоскостей. Стержень теряет устойчивость в той плоскости, где его гибкость является наибольшей. Эта плоскость называется плоскостью наименьшей жесткости стержня.



Определяем геометрические характеристики поперечного сечения стержня: $A = b \cdot h = 2 \cdot 6 = 12 \text{ см}^2$,

$$I_x = bh^3/12 = 2 \cdot 6^3/12 = 36 \text{ см}^4, \quad i_x = \sqrt{I_x/A} = \sqrt{3} = 1,73 \text{ см};$$

$$I_y = b^3h/12 = 2^3 \cdot 6/12 = 4 \text{ см}^4, \quad i_y = \sqrt{I_y/A} = 0,577 \text{ см}.$$

Вычисляем значения гибкостей стержня в главных плоскостях:

- в плоскости xz : $\lambda_y = \mu_1 l / i_y = 0,7 \cdot 100 / 0,577 = 121$;

- в плоскости yz : $\lambda_x = \mu_2 l / i_x = 2 \cdot 100 / 1,73 = 115$.

Так как $\lambda_y > \lambda_x$, то стержень потеряет устойчивость в плоскости xz , которая в данном случае является плоскостью наименьшей жесткости. Наибольшая гибкость стержня $\lambda_{\max} = \lambda_y > \lambda_{\text{пц}} = 100$, поэтому критическая сила определяется по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot A = \left(\pi^2 E / \lambda_y^2 \right) A = \left(\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 / 121^2 \right) 12 \cdot 10^{-4} = 162 \text{ кН}.$$

Искомый коэффициент запаса устойчивости стержня равен $\Pi_y = F_{кр} / F = 162/50 = 3,2$.

Студентам предлагается ответить на следующие вопросы. Станет ли более устойчивым данный стержень, если:

- а) Выполнить его из более прочной стали;
- б) Закрепить дополнительно верхнее сечение от перемещения вдоль оси y .

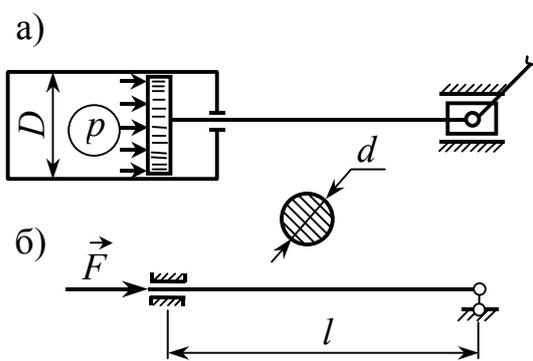


Рис 1.3.

Пример 1.5. Шток компрессора длиной $l = 120$ см и диаметром $d = 5$ см выполнен из стали Ст5. Диаметр поршня равен $D = 40$ см. Какое допустимо давление газа в цилиндре, если коэффициент запаса устойчивости штока равен $[\Pi_y] = 3$.

Решение

Наибольшей гибкостью шток обладает в плоскости чертежа, где правый конец шарнирно оперт, а левый – защемлен (рис. 1.3,б). Из плоскости чертежа поворот обоих концевых сечений исключен, т.е. они защемлены.

Геометрические характеристики поперечного сечения штока

$$A = \pi d^2/4, \quad I_{\min} = \pi d^4/64, \quad i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A} = d/4 = 1,25 \text{ см.}$$

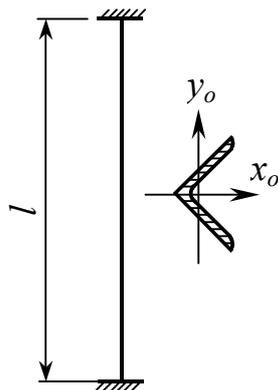
$$\text{Гибкость штока } \lambda = \mu l / i_{\min} = 0,7 \cdot 120 / 1,25 = 67.$$

Так как $\lambda < \lambda_{\text{пц}} = 100$, то критическая сила определяется по эмпирической формуле Тетмайера-Ясинского

$$F_{кр} = A(a - b\lambda) = (\pi d^2/4)(a - b\lambda).$$

Условие устойчивости $F \leq [F_y] = F_{кр} / [П_y]$. Отсюда, учитывая, что $F = p \cdot (\pi D^2/4)$, находим

$$[p] = \frac{(a - b\lambda)}{[n_y]} \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2 = \frac{(464 - 3,26 \cdot 67)}{3} \cdot \left(\frac{5}{40}\right)^2 = 1,28 \text{ МПа.}$$



Пример 1.6. На какую температуру нужно нагреть стальной уголок $80 \times 80 \times 8$, жестко защемленный по концам, чтобы он потерял устойчивость? Рассмотреть два случая: $l_1 = 4$ м, $l_2 = 2$ м.

Решение. Минимальный радиус инерции уголка находим из сортамента:

$$i_{\min} = i_{y_0} = 1,57 \text{ см.}$$

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda_1 = \mu l_1 / i_{\min} = 0,5 \cdot 400 / 1,57 = 127, \quad \lambda_2 = 0,5 \lambda_1 = 63,5.$$

В первом случае применима формула Эйлера ($\lambda_1 > \lambda_{\text{пц}} = 100$):

$$\sigma_{кр}^{(1)} = \pi^2 E / \lambda_1^2.$$

Во втором случае критическое напряжение определяется по эмпирической формуле Тетмайера-Ясинского ($\lambda_2 < \lambda_{\text{пц}}$)

$$\sigma_{кр}^{(2)} = a - b\lambda_2.$$

В момент потери устойчивости сжимающие напряжения σ , вызванные изменением температуры, равны критическому напряжению $\sigma_{кр}$, т.е.

$$\sigma = \alpha E \Delta t = \sigma_{кр}, \text{ откуда } \Delta t = \sigma_{кр} / (\alpha E).$$

$$\text{Следовательно, } \Delta t_1 = \pi^2 / (\alpha \lambda_1^2) = \pi^2 / (12 \cdot 10^{-6} \cdot 127^2) = 51^\circ \text{C,}$$

$$\Delta t_2 = (a - b\lambda_2) / (\alpha E) = (310 - 1,14 \cdot 63,5) \cdot 10^6 / (12 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^9) = 99^\circ \text{C.}$$

Пример 1.7. Балка AC имеет шарнирную опору A и две опоры B и C в виде гибких стержней круглого поперечного сечения диаметра d . Какой из стержней первым потеряет устойчивость при возрастании нагрузки q . Найти соответствующее значение $q_{кр}$. Рассмотреть два варианта: 1) балка является абсолютно жесткой ($EI = \infty$); 2) балка является гибкой и деформациями сжатия стержней по сравнению с деформациями балки можно пренебречь.

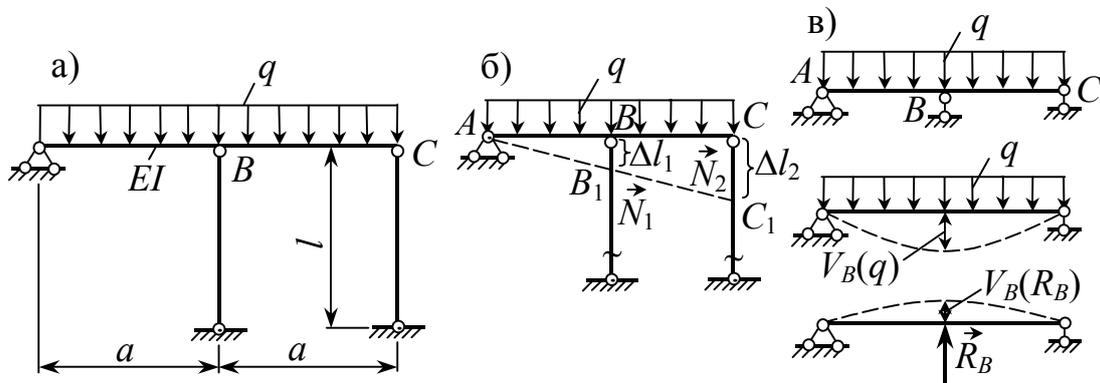


Рис. 1.4

Решение. 1 вариант. В этом случае опоры B и C являются податливыми и система деформируется по схеме, показанной на рис. 1.4. Так как $\Delta l_2 = 2\Delta l_1$, то $N_2 = 2N_1$, т.е. первым потеряет устойчивость второй стержень. Из уравнения равновесия $\sum m_A = 0$, $N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a = 2qa^2$ с учетом предыдущего соотношения находим $N_2 = (4/5)qa$.

В момент потери устойчивости $N_2 = F_{кр} = \pi^2 EI_{\min} / l^2$ или $4qa/5 = \pi^3 E d^4 / (64 l^2)$, откуда $q_{кр}^{(1)} = 5\pi^3 d^4 E / (256 a l^2)$.

2 вариант. В этом случае (рис. 1.4,в) опоры являются жесткими и наибольшее сжимающее усилие возникает в стержне 1, которое определяется из условия

$$V_B = V_B(q) + V_B(R_B) = 0.$$

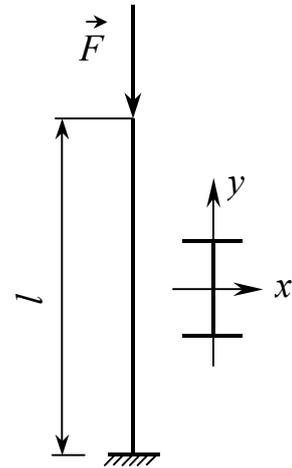
Учитывая, что $V_B(q) = 5q(2a)^4/(384EI)$, $V_B(R_B) = -\frac{R_B(2a)^3}{48EI}$,

получим $N_1 = R_B = 5qa/4$.

В момент потери устойчивости $N_1 = F_{кр} = \pi^2 EI_{\min}/l^2$
или $5qa/4 = \pi^3 Ed^4/(64l^2)$.

Следовательно, $q_{кр}^{(2)} = \pi^3 Ed^4 / (80al^2)$.

Пример 1.8. Для консольной стойки требуется подобрать, используя таблицу коэффициентов продольного изгиба, номер двутаврового сечения и определить коэффициент запаса устойчивости. Дано: $l = 2$ м, $F = 500$ кН. Допускаемое напряжение на сжатие для материала стойки $[\sigma_c] = 140$ МПа.



Решение. Искомое сечение находится из условия устойчивости, представляющего собой трансцендентное уравнение

$$F / A \leq \varphi [\sigma_c],$$

обычно решаемое методом последовательных приближений.

Первое приближение. Примем $\varphi_1 = 500$, тогда необходимая площадь поперечного сечения стойки

$$A_1 = F / (\varphi_1 [\sigma_c]) = 500 \cdot 10^3 / (500 \cdot 10^{-3} \cdot 140 \cdot 10^6) = 71,4 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239-72 берем двутавр № 40, для которого $A = 72,6 \text{ см}^2$, $i_{\min} = i_y = 3,03 \text{ см}$. Гибкость этой стойки

$$\lambda = \mu l / i_{\min} = 2 \cdot 200 / 3,03 = 132.$$

По таблице $\varphi(\lambda)$, используя формулу линейной интерполяции

$$\varphi = \varphi_K + 0,1(\varphi_{K+1} - \varphi_K)(\lambda - \lambda_K),$$

находим $\varphi'_1 = 400 + 0,1(360 - 400)(132 - 130) = 392$.

Ввиду большого расхождения между φ'_1 и φ_1 делаем *второе приближение*, принимая

$$\varphi_2 = 0,5(\varphi_1 + \varphi'_1) = 0,5(500 + 392) = 446,$$

$$A_2 = F / (\varphi_2[\sigma_c]) = 80 \text{ см}^2.$$

По ГОСТу берем двутавр № 45, для которого $A = 84,7 \text{ см}^2$, $I_{\min} = I_y = 808 \text{ см}^4$, $i_{\min} = i_y = 3,09 \text{ см}$. Гибкость стойки

$$\lambda = \mu l / i_{\min} = 2 \cdot 200 / 3,09 = 129.$$

Интерполируя, находим $\varphi'_2 = 400 + 0,1 \cdot 50 \cdot 1 = 405$.

Вычисляем допускаемое напряжение $[\sigma_y] = \varphi'_2[\sigma_c] = 0,405 \cdot 140 = 56,7 \text{ МПа}$ и сравниваем его с фактическим $\sigma = F / A = 500 \cdot 10^3 / (84,7 \cdot 10^{-4}) = 59 \text{ МПа}$. Перенапряжение составляет 4%, что допустимо. Итак, останавливаемся на двутавре № 45.

Гибкость принятой стойки $\lambda = 129 > \lambda_{\text{пц}} = 100$, поэтому критическая сила вычисляется по формуле Эйлера

$$F_{\text{кр}} = \pi^2 EI_{\min} / (\mu l)^2 = \pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 808 \cdot 10^{-8} / (2 \cdot 2)^2 = 997 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = F_{\text{кр}} / F = 997 / 500 = 1,99.$$

1.2. Продольный изгиб стержней с учетом осложняющих факторов

В отличие от идеального стержня, рассмотренного выше (п.1.1), поведение реальных стержней в значительной степени определяется наличием таких несовершенств, как неизбежные эксцентриситеты при приложении сжимающей нагрузки, начальная кривизна стержня, несовершенные граничные условия, неоднородность материала и т.п. Ниже рассматриваются два случая несовершенств, имеющих наиболее важное практическое значение: внецентренное приложение силы и стержень с начальной погибью. В обоих случаях дается приближенная формула, позволяющая учесть влияние несовершенств сила – характерное перемещение.

1.2.1. Учет эксцентриситета приложения нагрузки

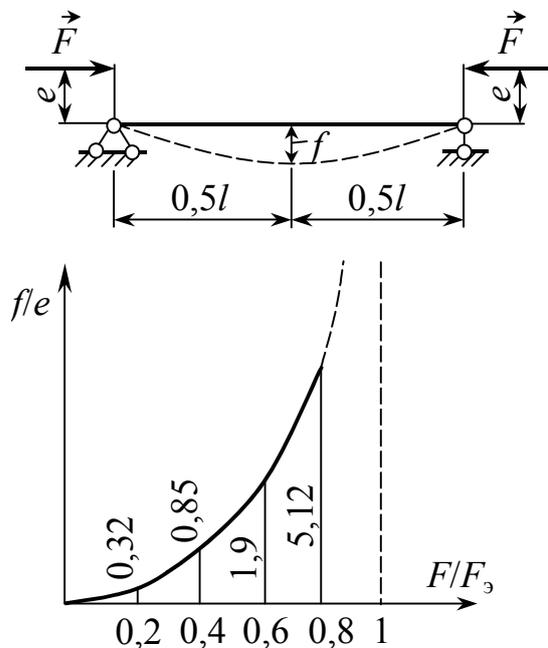


Рис. 1.5

Рассмотрим стержень, шарнирно закрепленный по концам (рис.1.5). Если сжимающие силы приложены эксцентриситетом e , то прогиб посередине стержня приближенно равен $f = (4e/\pi)/(F_3/F - 1)$, (1.11) где $F_3 = \pi^2 EI/l^2$ – эйлерова критическая сила.

Когда сжимающая сила F стремится к эйлеровой

критической силе $F_{\text{э}}$, то прогиб f быстро возрастает.

Максимальный изгибающий момент возникает посредине стержня и равен

$$M_{\text{max}} = F(e + f) = F \cdot e \left[1 + (4/\pi)/(F_{\text{э}}/F - 1) \right],$$

а максимальное сжимающее напряжение и условие прочности можно представить так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{max}} = F/A + M_{\text{max}}/W = (F/A)(1 + \alpha) \leq [\sigma], \\ \text{где } \alpha = (Ae/W) \left[1 + (4/\pi)/(F_{\text{э}}/F - 1) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Как видно из формулы (1.12), при сжатии гибкого стержня в пределах упругих деформаций наблюдается сложная нелинейная зависимость между напряжением и сжимающей силой.

1.2.2. Учет начальной погиби

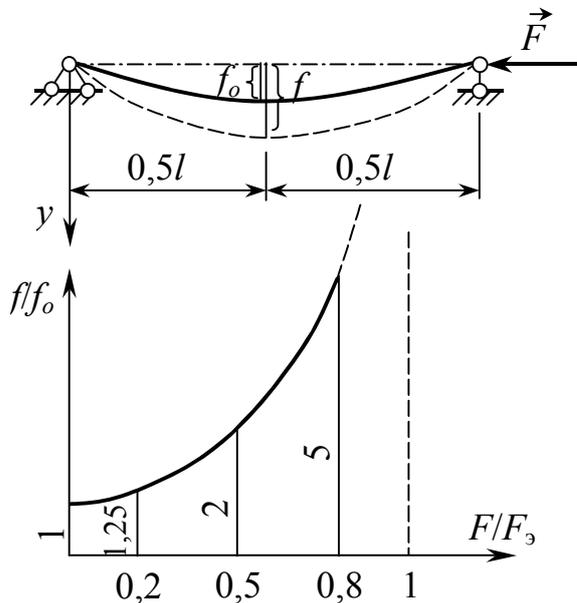


Рис. 1.6

Если до загрузки стержень имел начальное искривление, которое приближенно можно считать синусоидой с одной полуволной и амплитудой f_0 (рис. 1.6), то результирующее выражение для полного прогиба в середине пролета стержня будет

$$f = f_0 / (1 - F/F_{\text{э}}). \quad (1.13)$$

Максимальное напряжение и условие прочности

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{\max} = F / A + F \cdot f / W = (F / A)(1 + \alpha),$$

$$\alpha = (A f_0 / W) / (1 - F / F_3).$$

Примечания.

1. Эйлера критическая сила одинакова для идеального и реальных стержней, обладающих несовершенствами.

2. Выражения (1.11) и (1.13) справедливы при малых перемещениях и напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала ($\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{пц}}$), что имеет место при $F \leq 0,8F_3$.

Пример 1.9. Во сколько раз возрастет максимальный прогиб стержня, нагруженного внецентренно приложенной сжимающей силой F , если сила возрастет в Π раз. Рассмотрим два случая, когда начальное значение силы F составляет 2% и 20% от F_3 .

Решение. Используя приближенную формулу

$$f = \frac{4e}{\pi} \left/ \left(\frac{F_3}{F} - 1 \right) \right., \text{ находим:}$$

- начальное значение $f_1 = (4e/\pi) / (F_3 / F_1 - 1)$,

- конечное значение $f_2 = (4e/\pi) / (F_3 / F_2 - 1)$.

Отношение прогибов $f_2 / f_1 = (F_3 / F_1 - 1) / (F_3 / F_2 - 1)$

или, учитывая что $F_2 = \Pi F_1$, $f_2 / f_1 = n(F_3 - F_1) / (F_3 - nF_1)$.

Пусть, к примеру, $\Pi = 3$. Тогда

а) $F_1 = 0,02F_3$; $f_2 / f_1 = 3(F_3 - 0,02F_3) / (F_3 - 0,06F_3) = 3,13$ раза;

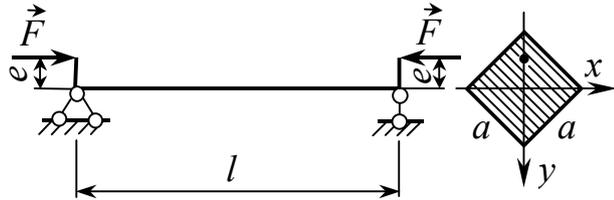
б) $F_1 = 0,2F_3$; $f_2 / f_1 = 3(F_3 - 0,2F_3) / (F_3 - 0,6F_3) = 6$ раз.

Как видим, при небольших значениях сжимающей силы (случай а) максимальный прогиб растет практически пропор-

ционально силе, а при больших значениях силы (случай б) максимальный прогиб растет значительно быстрее, чем сила, т.е. нелинейность зависимости $f(F)$ проявляется очень отчетливо.

Пример 1.10.

Стержень длиной $l = 1,8$ м, имеющий квадратное сечение 5×5 см, сжимает-



ся внецентренно приложенными силами $F = 45$ кН. Точка приложения силы расположена на диагонали с эксцентриситетом $e = 2,5$ см. Определить максимальное сжимающее напряжение.

Решение. Находим геометрические характеристики поперечного сечения стержня:

$$A = a^2 = 25 \text{ см}^2, \quad I_x = a^4/12 = 52 \text{ см}^4, \quad W_x = I_x/y_{\max} = 14,73 \text{ см}^3.$$

Эйлера критическая сила

$$F_3 = \pi^2 EI_x/l^2 = \pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 52 \cdot 10^{-8} / 1,8^2 = 317 \text{ кН}.$$

Коэффициент $\alpha = \frac{Ae}{W_x} \left[1 + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{F_3}{F} - 1} \right] = 5,14.$

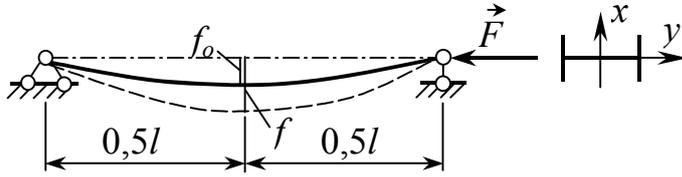
Максимальное сжимающее напряжение

$$\sigma_{\max} = (F/A)(1+\alpha) = (45 \cdot 10^3 / 25 \cdot 10^{-4})(1+5,14) = 110 \text{ МПа}.$$

Пример 1.11. Стальной стержень из двутаврового профиля № 20 имеет начальную погибь в форме полуволны синусоиды с максимальной стрелой в середине $f_0 = 0,5$ см. Вычислить максимальное сжимающее напряжение, возникающее в стержне, и установить, во сколько раз следует уве-

личить сжимающую силу, чтобы в стержне возникли пластические деформации, если $\sigma_T = 280$ МПа, $F = 44$ кН, $l = 4,5$ м.

Решение



По таблице сортамента для двутавра № 20 имеем:

$$A = 26,8 \text{ см}^2; \quad I_y = 115 \text{ см}^4, \quad W_y = 23,1 \text{ см}^3.$$

Эйлера критическая сила

$$F_3 = \pi^2 EI_y / l^2 = 106,8 \text{ кН}.$$

Максимальное сжимающее напряжение

$$\sigma_{\max} = (F/A)[1 + (A \cdot f_0 / W_y) / (1 - F/F_3)] = 22 \text{ МПа}.$$

При увеличении силы F в Π раз максимальные напряжения достигают предела текучести материала, т.е.

$$\sigma_{\max} = (F \cdot n / A)[1 + (A f_0 / W_y) / (1 - F \cdot n / F_3)] = \sigma_T.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение для определения Π :

$$(F/F_3)n^2 - (1 + A f_0 / W_y + \sigma_T A / F_3)n + \sigma_T A / F = 0$$

или, подставляя числовые значения,

$$0,412n^2 - 8,6n + 17,05 = 0.$$

Решая, находим $\Pi_1 = 2,21$; $\Pi_2 = 18,67$. Второе значение следует отбросить, так как $\Pi_2 > F_3/F = 106,8/44 = 2,43$, при котором $F = F_3$.

Следовательно, коэффициент запаса по нагрузкам $\Pi_F = \Pi_1 = 2,21$.

Коэффициент запаса по напряжениям, равный $\Pi_\sigma = \sigma_T / \sigma_{\max} = 280/22 = 12,7$, значительно больше.

Таким образом, запас прочности конструкции

$$n = \min\{n_\sigma, n_F\} = n_F = 2,21.$$

1.3. Продольно-поперечный изгиб

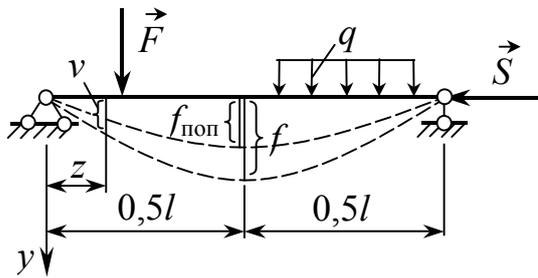


Рис. 1.7

Изгиб стержня под действием поперечной нагрузки с учетом влияния продольных сил называется продольно-поперечным (рис. 1.7).

Максимальный прогиб определяется по следующей приближенной формуле:

$$F = f_{\text{поп}} / (1 - S/S_3), \quad (1.14)$$

где $f_{\text{поп}}$ – прогиб от поперечной нагрузки; $S_3 = \pi^2 EI / (\mu l)^2$ – эйлерова критическая сила, при вычислении которой момент инерции сечения I принимается относительно главной оси, перпендикулярной к плоскости действия поперечной нагрузки. Эта формула дает удовлетворительные результаты при поперечной нагрузке одного направления. В случае шарнирного закрепления концов ($\mu = 1$) она точнее, чем при других способах закрепления. Величина $f_{\text{поп}}$ вычисляется любым известным точным методом (метод начальных параметров, энергетический метод).

Зная прогибы, можно определить изгибающий момент от продольной силы. Если обозначить через $M_{\text{поп}}$ изгибающий момент от поперечной нагрузки, то суммарный изгибающий момент в произвольном сечении можно записать

$$M(Z) = M_{\text{поп}}(Z) + Sv.$$

Наибольшие по абсолютной величине напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma_{\text{max}} = N/A + M_{\text{max}}/W_x = S/A + [M_{\text{поп}} + S \cdot f_{\text{поп}} / (1 - S/S_3)] / W_x. \quad (1.15)$$

Как видим, зависимость напряжений от нагрузок является нелинейной, причем напряжения растут значительно быстрее, чем нагрузки. Поэтому запас по нагрузкам Π_F , будучи меньше, чем по напряжениям Π_σ ($\Pi_F < \Pi_\sigma$), выступает как запас прочности конструкции. Он определяется из уравнения

$$\sigma_{\max} = nS/A + [nM_{\text{поп}} + n^2 S \cdot f_{\text{поп}} / (1 - nS/S_9)] / W_x = \sigma_T \quad (1.16)$$

или
$$n^2 \left(\frac{S}{S_9} + \frac{M_{\text{поп}} A}{W_x \cdot S_9} - \frac{A \cdot f_{\text{поп}}}{W_x} \right) - n \left(1 + \frac{M_{\text{поп}} A}{W_x \cdot S} + \frac{\sigma_T A}{S_9} \right) + \frac{\sigma_T A}{S} = 0.$$

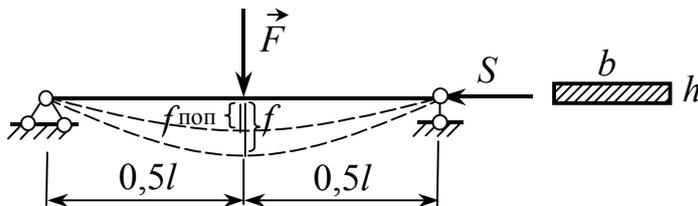
Условие прочности $\Pi \geq [\Pi]$ (1.17)

можно представить также следующим образом:

$$\sigma_{\text{рас}} = S/A + [M_{\text{поп}} + [n] S \cdot f_{\text{поп}} / (1 - [n] S/S_9)] / W_x \leq [\sigma]. \quad (1.18)$$

Расчет стержней, испытывающих продольно-поперечный изгиб, сводится к одновременному удовлетворению трех условий:

- условия устойчивости в плоскости наименьшей жесткости (из плоскости поперечной нагрузки);
- условия прочности $\Pi \geq [\Pi]$ или $\sigma_{\text{рас}} \leq [\sigma]$ в плоскости действия поперечной нагрузки;
- условия жесткости $f \leq [f]$ в той же плоскости.



Пример 1.12

Стальная балка прямоугольного сечения 20×3 см и

длины $l = 2$ м нагружена силами $F = 500$ Н и $S = 70$ кН. Определить наибольший прогиб и максимальные нормаль-

ные напряжения в балке. Как изменятся эти величины, если нагрузки увеличить в 2,5 раза?

Решение. Геометрические характеристики поперечного сечения балки

$$A = b \cdot h = 60 \text{ см}^2, \quad I_x = bh^3/12 = 45 \text{ см}^4, \quad W_x = bh^2/6 = 30 \text{ см}^3.$$

Эйлера критическая сила

$$S_3 = \pi^2 EI / (\mu l)^2 = \pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 45 \cdot 10^{-8} / 2^2 = 222 \text{ кН}.$$

Наибольший прогиб от поперечной нагрузки

$$f_{\text{поп}} = Fl^3 / (48EI) = 500 \cdot 2^3 / (48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 45 \cdot 10^{-8}) = 0,926 \text{ мм}.$$

Наибольший изгибающий момент от поперечной нагрузки

$$M_{\text{поп}} = Fl/4 = 500 \cdot 2/4 = 250 \text{ н·м}.$$

Максимальный прогиб с учетом изгибающего действия продольной силы

$$f = f_{\text{поп}} / (1 - S/S_3) = 0,926 / (1 - 70/222) = 1,35 \text{ мм}.$$

Максимальные сжимающие напряжения, возникающие в среднем сечении балки,

$$\sigma_{\text{max}} = N/A + M_{\text{max}}/W = S/A + (M_{\text{поп}} + S \cdot f)/W,$$

$$\sigma_{\text{max}} = 70 \cdot 10^3 / 60 \cdot 10^{-4} + (250 + 70 \cdot 10^3 \cdot 1,35 \cdot 10^{-3}) / 30 \cdot 10^{-6} = 23 \text{ МПа}.$$

Если нагрузки увеличить в 2,5 раза, то будем иметь

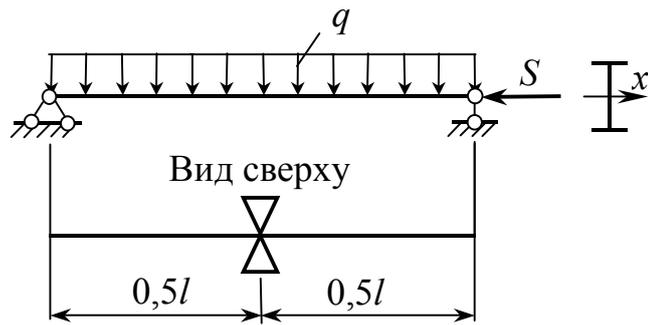
$$f_1 = 2,5 f_{\text{поп}} / (1 - 2,5 S/S_3) = 2,5 \cdot 0,926 / (1 - 2,5 \cdot 70/222) = 11 \text{ мм},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max}1} &= \frac{2,5S}{A} + \frac{2,5(M_{\text{поп}} + Sf_1)}{W} = \\ &= \frac{2,5 \cdot 70 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^{-4}} + \frac{2,5(250 + 70 \cdot 10^3 \cdot 11 \cdot 10^{-3})}{30 \cdot 10^{-6}} = 115 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Как видим, напряжения и прогибы растут значительно быстрее, чем нагрузки: изменение нагрузок в 2,5 раза вызывает увеличение напряжений в 5 раз, а прогиба – в 8 раз.

Пример 1.13

Подобрать сечение двутавровой балки, если $q = 15$ кН/м, $S = 500$ кН, $\sigma_T = 240$ МПа, $[\Pi] = 1,5$; $l = 6$ м,



$[f] = l/800$. Для предотвращения бокового выпучивания балка разделена связями пополам.

Решение

1. Предварительный подбор сечения из условия устойчивости в плоскости наименьшей жесткости. Находим допускаемое напряжение на сжатие:

$$[\sigma_c] = \sigma_T / [\Pi] = 240 / 1,5 = 160 \text{ МПа.}$$

Исходя из условия устойчивости $S / A \leq \varphi [\sigma_c]$, пользуясь методом последовательных приближений, находим искомое сечение. Это будет двутавр № 36, для которого $A = 61,9 \text{ см}^2$, $i_{\min} = i_y = 2,89 \text{ см}$; $I_x = 13380 \text{ см}^4$, $W_x = 743 \text{ см}^3$.

2. Проверка прочности балки в плоскости наибольшей жесткости (в плоскости нагрузки). Проверку прочности производим по формуле

$$\sigma_{\text{рас}} = \frac{S}{A} + \frac{1}{W_x} \left(M_{\text{поп}} + \frac{[n]S \cdot f_{\text{поп}}}{1 - [n]S/S_9} \right) \leq [\sigma_c].$$

Величины, входящие в формулу,

$$S_9 = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 13380 \cdot 10^{-8}}{6^2} = 7336 \text{ кН,}$$

$$M_{\text{поп}} = ql^2/8 = 15 \cdot 10^3 \cdot 6^2/8 = 67,5 \text{ кН}\cdot\text{м,}$$

$$f_{\text{поп}} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_x} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 6^4}{384 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 0,945 \text{ см.}$$

Следовательно,

$$\sigma_{\text{рас}} = \frac{500 \cdot 10^3}{61,9 \cdot 10^{-4}} + \frac{10^3}{743 \cdot 10^{-6}} \left(67,5 + \frac{1,5 \cdot 500 \cdot 0,945 \cdot 10^{-2}}{1 - 1,5 \cdot 500 / 7336} \right) = 182 \text{ МПа.}$$

Так как $\sigma_{\text{рас}} = 182 > [\sigma] = 160$ МПа, то прочность балки недостаточна (перенапряжение составляет около 14%). Поэтому следует взять больший номер двутавра. Примем двутавр № 40, для которого $A = 71,4 \text{ см}^2$; $I_x = 18930 \text{ см}^4$; $W_x = 947 \text{ см}^3$.

Вычисляем

$$S_3 = \pi^2 EI_x / (\mu l)^2 = \pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 18930 \cdot 10^{-8} / 6^2 = 10379 \text{ кН,}$$

$$f_{\text{поп}} = 5ql^4 / (384EI_x) = 5 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 6^4 / (384 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 18930 \cdot 10^{-8}) = 0,668 \text{ см.}$$

Находим

$$\sigma_{\text{рас}} = \frac{500 \cdot 10^3}{71,4 \cdot 10^{-4}} + \frac{10^3}{947 \cdot 10^{-6}} \left(67,5 + \frac{1,5 \cdot 500 \cdot 0,668 \cdot 10^{-2}}{1 - 1,5 \cdot 500 / 10379} \right) = 149 \text{ МПа,}$$

т.е. $\sigma_{\text{рас}} < [\sigma]$ и условие прочности выполняется.

3. Проверка жесткости балки.

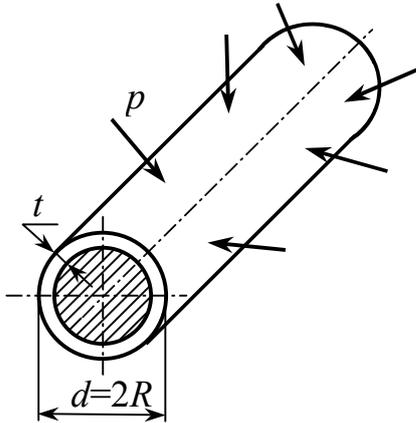
Максимальный прогиб

$$f = f_{\text{поп}} / (1 - S/S_3) = 0,668 / (1 - 500/10379) = 0,70 \text{ см.}$$

Допускаемый прогиб $[f] = l/800 = 0,75 \text{ см}$. Следовательно, жесткость балки обеспечена.

Таким образом, двутавр № 40 будет работать надежно, так как он удовлетворяет условиям прочности, жесткости и устойчивости.

1.4. Устойчивость труб, нагруженных внешним давлением.



Гладкая труба (без внутренних или наружных подкреплений) теряет устойчивость при нагружении ее внешним давлением, достигающим критической величины $p_{кр}$, определяемой по формуле

$$p_{кр} = Et^3/[4(1-\nu^2)R^3]. \quad (1.19)$$

Для стальных труб $\nu = 0,3$ и эта формула принимает вид

$$p_{кр} = 0,275E(2t/d)^3. \quad (1.20)$$

Труба будет работать надежно, если выполняется условие устойчивости

$$\Pi_y = p_{кр} / p \geq [\Pi_y]. \quad (1.21)$$

Пример 1.14. При прокладке трубопровода через Мессинский пролив, где глубина достигает 360 м, были использованы трубы 510×24 мм. Проверить устойчивость трубопровода и установить предельную глубину укладки, если $[\Pi_y] = 10$.

Решение. Критическое давление

$$p_{кр} = 0,275E(2t/d)^3 = 0,275 \cdot 200 \cdot 10^3 (2 \cdot 24 / 510)^3 = 45,9 \text{ МПа.}$$

Давление, действующее на трубу,

$$p = \gamma H = 10 \cdot 10^3 \cdot 360 = 3,6 \text{ МПа.}$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = p_{кр}/p = 45,9 / 3,6 = 12,7 > [n_y] = 10,$$

т.е. условие устойчивости выполняется.

Предельная глубина укладки определяется из условия

$$p_{кр}/p = p_{кр}/\gamma H = [n_y].$$

Отсюда $H = p_{кр}/(\gamma[n_y]) = 45,9/(10 \cdot 10^3 \cdot 10) = 459 \text{ м.}$

Пример 1.15. В одном из проектов для подачи нефти и газа с африканского континента в Европу предлагается проложить трубопровод через Гибралтарский пролив, где глубина достигает 2 км. Определить толщину трубы диаметром $d = 400 \text{ мм}$, если $[n_y] = 10$.

Решение. Из условия устойчивости $p_{кр}/p = [n_y]$

$$\text{или } \frac{0,275E}{\gamma H} \left(\frac{2t}{d} \right)^3 = [n_y] \quad \text{находим} \quad t = \frac{d}{2} \sqrt[3]{\frac{\gamma H [n_y]}{0,275E}} = 30,8 \text{ мм.}$$

2. ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ

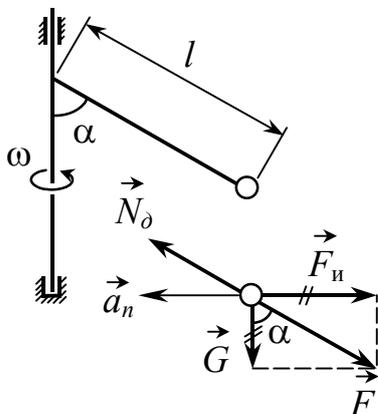
Динамическое нагружение является значительно более сложным, чем статическое, и в большинстве случаев точное решение не может быть получено элементарными методами. Поэтому мы ограничимся простейшими приемами расчета, которые не дают высокой точности, но в то же время позволяют правильно оценить порядок расчетных величин (напряжений, деформаций и перемещений).

Все многообразие приемов базируется на двух подходах. Согласно первому искомые величины определяются непосредственно исходя из общих принципов и законов механики (принципа Даламбера, законов сохранения энергии и количества движения). При втором подходе динамические величины (σ_d , δ_d) определяются через соответствующие статические ($\sigma_{ст}$, $\delta_{ст}$) с помощью динамического коэффициента k_d :

$$\sigma_d = k_d \cdot \sigma_{ст}, \quad \delta_d = k_d \cdot \delta_{ст},$$

т.е. решение динамической задачи сводится к решению статической задачи и нахождению динамического коэффициента. Выбор того или иного подхода диктуется особенностями и содержанием решаемой задачи.

2.1. Расчеты на действие инерционных нагрузок



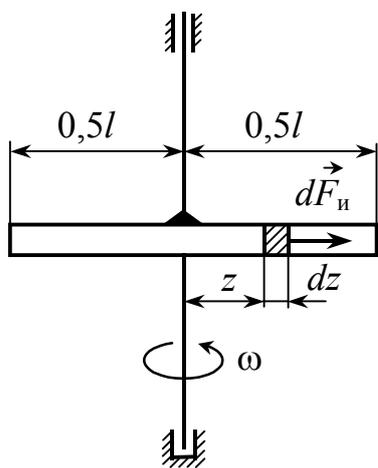
Пример 2.1. Стержень, наклоненный к вертикали под углом α , несет на конце груз массы m . Пренебрегая массой стержня, установить, при какой угловой скорости вращения ω в любом поперечном сечении стержня будет возникать

только продольная сила.

Решение. На груз действуют собственный вес $G = mg$ и центробежная сила инерции $F_{и} = ma_n = m\omega^2 l \sin\alpha$. Если эти силы приводятся к равнодействующей $\vec{F} = \vec{F}_{и} + \vec{G}$, направленной вдоль стержня, то в поперечных сечениях последнего будут возникать только продольные силы. Следовательно,

$$mgtg\alpha = m\omega^2 l \sin\alpha,$$

откуда $\omega = \sqrt{g/(l \cos\alpha)}$.



Пример 2.2. Стальной стержень постоянного сечения вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Определить допустимую по прочности наибольшую длину стержня $l_{пред}$ при частоте вращения $\omega = 160$ рад/с и частоту вращения Π_{max} , при кото-

рой стержень разорвется, если $l = l_{пред}$. Дано: $[\sigma] = 100$ МПа, $\sigma_{пч} = 800$ МПа, $\rho = 7,85$ т/м³.

Решение. Наибольшее усилие возникает в среднем сечении стержня и равно $N_{\partial} = \int_0^{0,5l} dF_{и}$, где $dF_{и} = \rho A dz \omega^2 z$ –

элементарная сила инерции. Следовательно,

$$N_{\partial} = \rho A \omega^2 \int_0^{0,5l} z dz = (1/8) \rho A \omega^2 l^2.$$

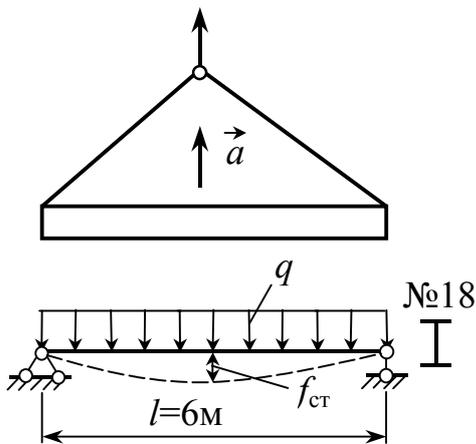
Наибольшее динамическое напряжение

$$\sigma_d = N_d/A = (1/8)\rho A\omega^2 l^2.$$

Из условия прочности $\sigma_d = \frac{1}{8}\rho\omega^2 l^2 \leq [\sigma]$ находим предельную длину стержня

$$l_{\text{пред}} = (2/\omega)\sqrt{2[\sigma]/\rho} = (2/160)\sqrt{2 \cdot 100 \cdot 10^6 / (7,85 \cdot 10^3)} = 2 \text{ м.}$$

Полагая в этом выражении $l = l_{\text{пред}}$ и заменяя $[\sigma]$ на $\sigma_{\text{пч}}$, определим предельную частоту вращения $\omega_{\text{max}} = (2/l)\sqrt{2\sigma_{\text{пч}}/\rho}$ и $n_{\text{max}} = (60/\pi l)\sqrt{2\sigma_{\text{пч}}/\rho} = 4311 \text{ об/мин.}$



Пример 2.3. Определить стрелу прогиба стальной двутавровой балки, поднимаемой с ускорением $a = 4,9 \text{ м/с}^2$.

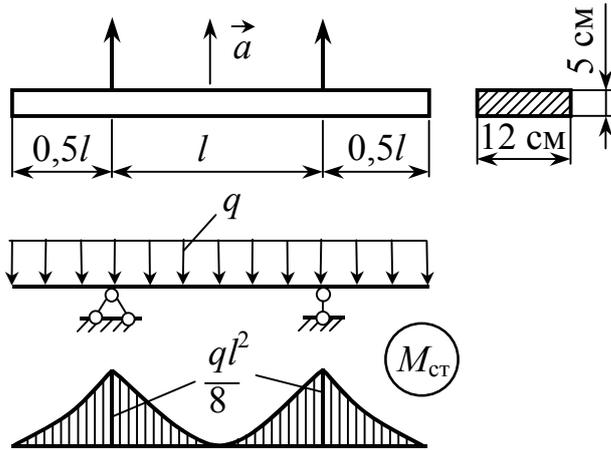
Решение. Для двутавровой балки № 18 имеем: $q = 184 \text{ Н/м}$, $I_x = 1290 \text{ см}^4$.

Статический прогиб при действии равномерно распределенной погонной нагрузки (собственный вес)

$$f_{\text{ст}} = 5ql^4/(384EI_x) = 5 \cdot 184 \cdot 6^4 / (384 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}) = 1,2 \text{ мм.}$$

Динамический коэффициент $k_d = 1 + a/g = 1 + 4,9/9,8 = 1,5$.

Динамический прогиб $f_d = k_d \cdot f_{\text{ст}} = 1,5 \cdot 1,2 = 1,8 \text{ мм.}$



Пример 2.4.
Установить с каким ускорением происходит равноускоренный подъем детали на двух тросах, если возникающие при этом наибольшие напряжения в

детали $\sigma_d = 53$ МПа, плотность материала $\rho = 5$ т/м³, $l = 6$ м.

Решение

Погонная нагрузка от собственного веса

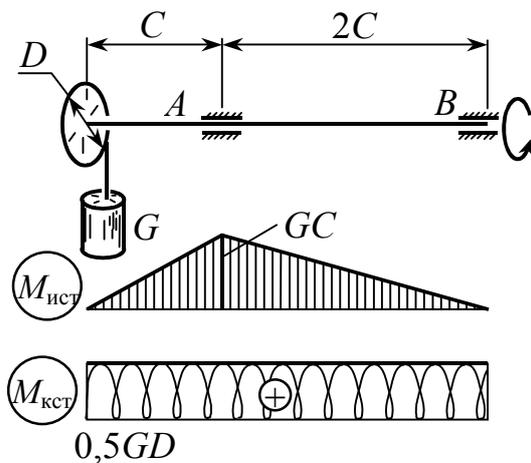
$$q = \rho g A = \rho g b h.$$

Наибольшее напряжение от статической нагрузки

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{ст}}{W_x} = \frac{ql^2}{8W_x} = \frac{3\rho g l^2}{4h} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 6^2}{4 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 26,5 \text{ МПа.}$$

Динамическое напряжение $\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot k_d = \sigma_{ст} \cdot (1 + Q/g)$.

Отсюда $a = g(\sigma_d / \sigma_{ст} - 1) = 9,8(53/26,5 - 1) = 9,8$ м/с².



Пример 2.5. Груз весом $G = 120$ кН поднимается на тросе с постоянным ускорением $a = 4,9$ м/с². Диаметр шкива $D = 1$ м, диаметр вала $d = 0,2$ м, $C = 0,5$ м. Пренебрегая массой троса, вала и шкива, проверить прочность

вала по III гипотезе прочности, если $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение

1. Статический расчет. Строим эпюры изгибающего $M_{и}$ и крутящего $M_{к}$ моментов и устанавливаем опасное сечение. Это будет сечение A , где $M_{и} = G \cdot C$, $M_{к} = 0,5 GD$.

Наибольшее эквивалентное напряжение по III гипотезе прочности $\sigma_{\text{ЭКВ}_{\text{max}}} = \sigma_{\text{ЭКВ}_{III}}^{(A)} = M_{\text{ЭКВ}_{III}}^{(A)} / W_x$.

Так как $M_{\text{ЭКВ}_{III}}^{(A)} = \sqrt{M_{и}^2 + M_{к}^2} = G\sqrt{C^2 + 0,25D^2}$, $W_x = 0,1d^3$,

то $\sigma_{\text{ЭКВ}_{\text{max}}} = 10C\sqrt{C^2 + 0,25D^2} / d^3 = 106 \text{ МПа}$.

2. Динамический расчет. Динамический коэффициент в данном случае равен

$$k_d = 1 + a/g = 1 + 4,9/9,8 = 1,5.$$

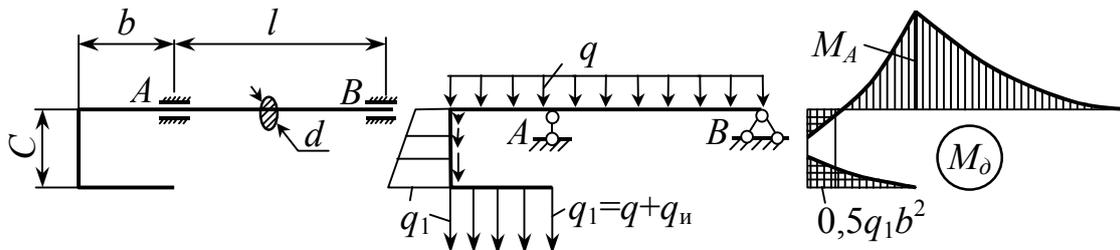
Расчетное динамическое напряжение

$$\sigma_d = k_d \sigma_{\text{ЭКВ}_{\text{max}}} = 1,5 \cdot 106 = 159 < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Как видим, прочность вала вполне достаточна.

Пример 2.6. Определить наибольшие нормальные напряжения для стального вала диаметра $d = 2 \text{ см}$ при его вращении с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 \text{ рад/с}$, если $b = 1 \text{ м}$, $l = 2 \text{ м}$, $C = 0,6 \text{ м}$.

Решение. Расчетной схемой данного вала служит плоская рама, нагруженная погонной нагрузкой разной



интенсивности и включающей в себя собственный вес $q = \rho g A$ и инерционную нагрузку $q_{и} = \rho A a_n = \rho A \omega^2 C$.

Наибольший изгибающий момент возникает в сечении A и равен

$$M_A = 0,5q_1 b^2 + 0,5qb^2 + 0,5(q+q_1)C \cdot b = 0,5\rho A b(b+C)(2g+\omega^2 C).$$

Наибольшее динамическое напряжение

$$\sigma_{\partial} = M_A / W_x = 4\rho b(b + C)(2g + \omega^2 C) / d = 200 \text{ МПа}.$$

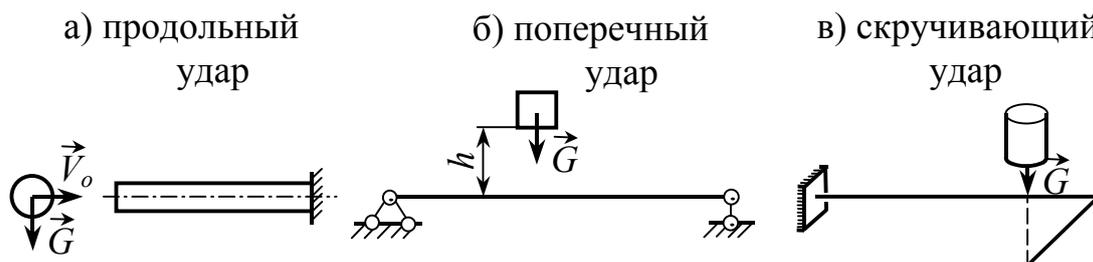
2.2. Расчеты на удар

Они базируются на следующих допущениях:

- напряжения в конструкции не превосходят предела пропорциональности материала ($\sigma_{д} \leq \sigma_{пл}$);
- удар считается неупругим;
- потери энергии при ударе пренебрежимо малы.

Стержни, подверженные действию удара, могут испытывать деформации растяжения (сжатия), изгиба и кручения.

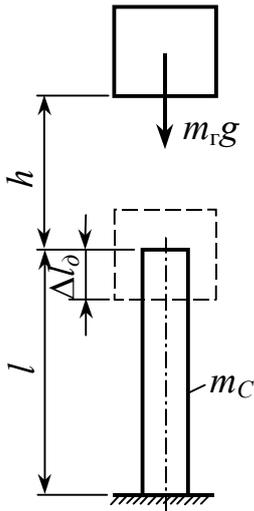
В соответствии с этим различают:



2.2.1. Продольный удар. Рассмотрим, например, случай вертикального движения ударяющего груза. Массу ударяемого стержня будем считать пренебрежимо малой по сравнению с массой груза. Составим уравнение баланса энер-

гии $W = U$, где W – работа силы тяжести падающего груза, U – потенциальная энергия упругой деформации стержня, воспринимающего удар. Очевидно,

$$W = m_{\Gamma}g(h + \Delta l_{\partial}), \quad U = (1/2)C\Delta l_{\partial}^2, \quad m_{\Gamma}g = C\Delta l_{\text{ст}}, \quad \Delta l_{\partial} = k_{\partial}\Delta l_{\text{ст}}.$$



Тогда

$$m_{\Gamma}g(h + \Delta l_{\partial}) = (1/2)(m_{\Gamma}g/\Delta l_{\text{ст}})k_{\partial}^2\Delta l_{\text{ст}}^2$$

или после упрощения

$$k_{\partial}^2 - 2k_{\partial} - 2h/\Delta l_{\text{ст}} = 0.$$

Отсюда $k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{\text{ст}}}$. (2.1)

При вычислении динамического коэффициента можно приближенно учесть и массу стержня, приведя ее к точке удара.

Приведенная масса стержня находится из условия равенства кинетической энергии стержня массы m_C , распределенной по его объему, и воображаемого груза массы $m_{\text{пр}}$, сосредоточенной в месте удара. Она равна $m_{\text{пр}} = k_{\text{пр}}m_C$, где $k_{\text{пр}}$ – коэффициент приведения, равный в данном случае $k_{\text{пр}} = 1/3$.

Динамический коэффициент с учетом массы стержня находится по формуле

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + (2h/\Delta l_{\text{ст}})/(1 + m_{\text{пр}}/m_{\Gamma})}. \quad (2.2)$$

При внезапном приложении груза $h = 0$ и $k_{\partial} = 2$.

Если $h \gg \Delta l_{\text{ст}}$, то пользуются приближенной формулой

$$k_{\partial} \cong \sqrt{2h/\Delta l_{\text{ст}}}. \quad (2.3)$$

Решение. При внезапной остановке кинематическая энергия клетки $GV_o^2/(2g)$ и ее потенциальная энергия $G(\Delta l_\partial - \Delta l_{ст})$ переходят в изменение потенциальной энергии упругой деформации троса $C(\Delta l_\partial^2 - \Delta l_{ст}^2)/2$. Таким образом, получаем уравнение энергетического баланса в виде

$$GV_o^2/(2g) + G(\Delta l_\partial - \Delta l_{ст}) = C(\Delta l_\partial^2 - \Delta l_{ст}^2)/2$$

или, учитывая, что $G = C\Delta l_{ст}$, $\Delta l_\partial = k_\partial \Delta l_{ст}$,

$$V_o^2/(2g) + \Delta l_{ст}(k_\partial - 1) = \Delta l_{ст}(k_\partial^2 - 1)/2.$$

Отсюда $k_\partial^2 - 2k_\partial + 1 - V_o^2/(g\Delta l_{ст}) = 0$

и тогда $k_\partial = 1 + \sqrt{V_o^2/(g\Delta l_{ст})}$.

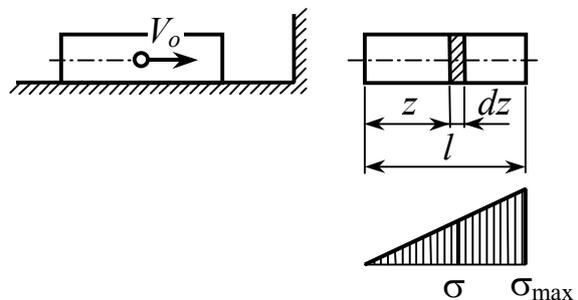
В данном случае $\Delta l_{ст} = Gl/(EA) = 1$ см,

$$k_\partial = 1 + V_o/\sqrt{g\Delta l_{ст}} = 1 + 1,25/\sqrt{9,8 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 5.$$

Следовательно, $N_\partial = k_\partial N_{ст} = k_\partial \cdot G = 5 \cdot 28 = 140$ кН.

Так как $N_\partial = 140 < [N] = 150$ кН, то прочность троса достаточна.

Пример 2.9. Определить напряжения, возникающие в коротком стальном стержне, движущемся в горизонтальном направлении со скоростью $V_o = 2,2$ м/с,



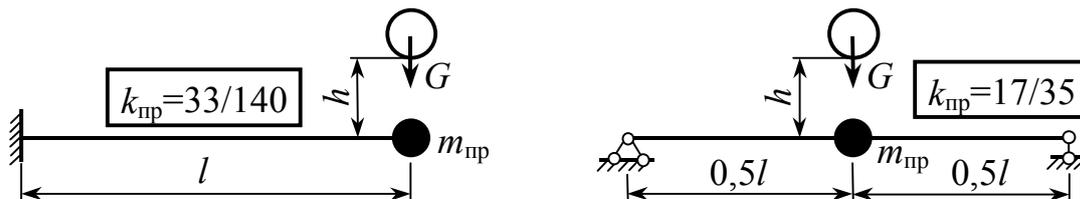
при ударе о недеформируемую стенку. Принять, что напряжения в стержне распределяются по линейному закону.

Решение. Уравнение баланса энергии $T = U$, где $T = mV_o^2/2 = \rho AlV_o^2/2$ – кинетическая энергия стержня, U – потенциальная энергия упругой деформации стержня, равная

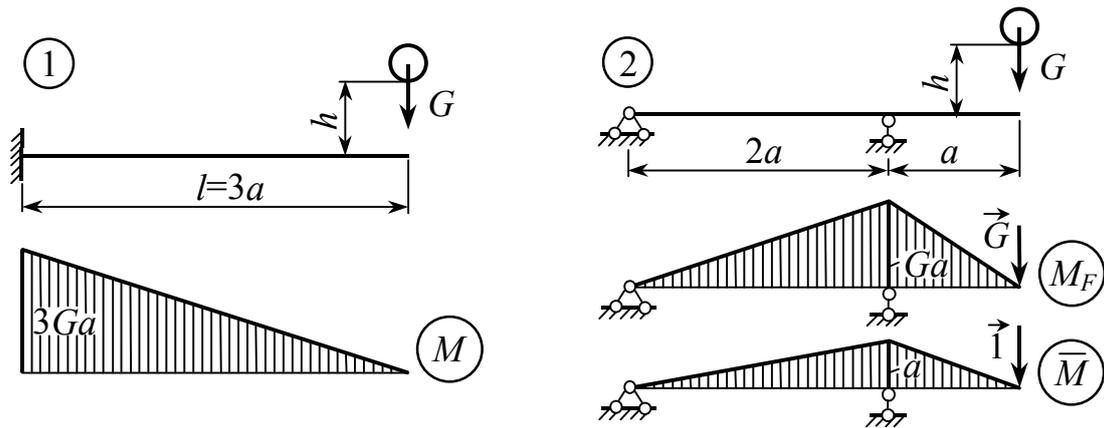
$$U = \int_0^l u dv = \int_0^l \left(\sigma^2 / 2E \right) A dz = (A/2E) \int_0^l (\sigma_{\max} z/l)^2 dz = \sigma_{\max}^2 Al / (6E).$$

После подстановки в исходное уравнение находим $\sigma_{\max} = V_o \cdot \sqrt{3\rho E} = 151$ МПа.

2.2.2. Поперечный удар. Динамический коэффициент определяется по тем же формулам (2.1), (2.2), (2.3), что и при продольном ударе, если заменить в них $\Delta l_{\text{ст}}$ на $f_{\text{ст}}$. Масса балки, испытывающей удар, приближенно учитывается с помощью коэффициента приведения $k_{\text{пр}}$, вычисляемого из энергетических соображений.



Пример 2.10. Сопоставить наибольшие нормальные напряжения, возникающие в опасном поперечном сечении балок, при статическом и динамическом приложении сил. Применить приближенную формулу для динамического коэффициента.



Решение. 1. Статический расчет. Наибольшие напряжения $\sigma_{ст1} = 3Ga / W_x$, $\sigma_{ст2} = Ga / W_x$ и их отношение $\sigma_{ст1} / \sigma_{ст2} = 3$.

Прогибы в точке удара $f_{ст1} = G(3a)^3 / (3EI) = 9Ga^3 / (EI)$,

$$f_{ст2} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_F \bar{M} dz = \frac{Ga^3}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{Ga^3}{EI}$$

и их отношение $f_{ст2} / f_{ст1} = 1/9$.

2. Динамический расчет. Наибольшие динамические напряжения

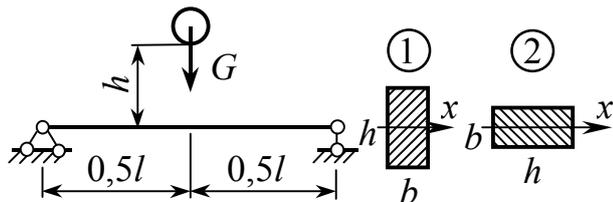
$$\sigma_{\partial 1} = k_{\partial 1} \sigma_{ст1} = \sqrt{2h / f_{ст1}} \cdot \sigma_{ст1}, \quad \sigma_{\partial 2} = k_{\partial 2} \sigma_{ст2} = \sqrt{2h / f_{ст2}} \cdot \sigma_{ст2}$$

и их отношение $\sigma_{\partial 1} / \sigma_{\partial 2} = \sqrt{f_{ст2} / f_{ст1}} (\sigma_{ст1} / \sigma_{ст2}) = (1/3) \cdot 3 = 1$.

Как видим, динамические напряжения в обоих случаях одинаковы.

Пример 2.11.

Сравнить максимальные напряжения, возникающие в балке



прямоугольного сечения вследствие удара грузом, падающим с высоты h , в случаях, когда удар происходит в плоскости наибольшей жесткости и когда удар происходит в плоскости наименьшей жесткости. Динамический коэффициент определять по приближенной формуле.

Решение. Максимальные динамические напряжения

$$\sigma_{\partial 1} = k_{\partial 1} \sigma_{ст1} = \sqrt{2h/f_{ст1}} \cdot \sigma_{ст1}, \quad \sigma_{\partial 2} = k_{\partial 2} \sigma_{ст2} = \sqrt{2h/f_{ст2}} \cdot \sigma_{ст2}$$

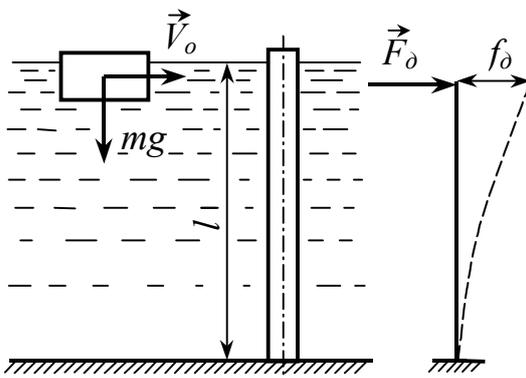
и их отношение $\sigma_{\partial 1} / \sigma_{\partial 2} = \sqrt{f_{ст2} / f_{ст1}} (\sigma_{ст1} / \sigma_{ст2})$.

Учитывая, что $\sigma_{ст1} = M_{\max} / W_{x1}$, $\sigma_{ст2} = M_{\max} / W_{x2}$,

$$f_{ст1} = Gl^3 / (48EI_{x1}), \quad f_{ст2} = Gl^3 / (48EI_{x2}),$$

получим $\sigma_{\partial 1} / \sigma_{\partial 2} = \sqrt{I_{x1} / I_{x2}} \cdot (W_{x2} / W_{x1}) = (h/b)(b/h) = 1$,

т.е. максимальные динамические напряжения в обоих случаях одинаковы.



Пример 2.12. Найти наибольшие нормальные напряжения в трубчатой свае при ударе о ее верхний конец льдины, плывущей с постоянной скоростью $V_0 = 1$ м/с. Нижний конец сваи считать

жестко заделанным. Дано: $m = 300$ кг, $l = 3$ м, $d_n = 20$ см, $\alpha = 0,9$.

Решение. 1. Статический расчет. Геометрические характеристики поперечного сечения сваи:

- момент сопротивления $W_x = (\pi d_{\text{н}}^3 / 32)(1 - \alpha^4) = 270 \text{ см}^3$,

- момент инерции $I_x = (\pi d_{\text{н}}^4 / 64)(1 - \alpha^4) = 2700 \text{ см}^4$.

Статический прогиб в месте удара равен $f_{\text{ст}} = Fl^3 / (3EI)$, откуда жесткость балки

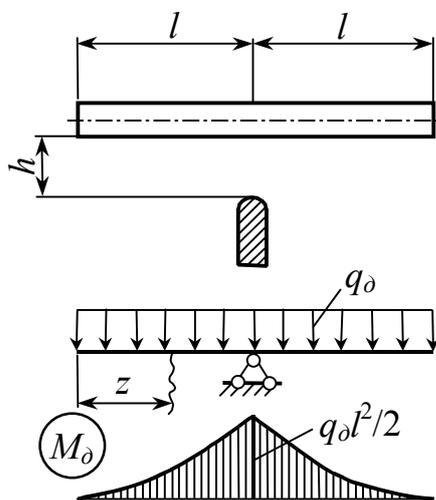
$$C = 3EI/l^3 = 3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2700 \cdot 10^{-8} / 3^3 = 600 \text{ кН/м}.$$

2. Динамический расчет. Уравнение баланса энергии $T = U$ или $mV_o^2 / 2 = C \cdot f_{\text{д}}^2 / 2$. Отсюда $f_{\text{д}} = V_o \sqrt{m/C}$,

$$F_{\text{д}} = Cf_{\text{д}} = V_o \sqrt{Cm}, \quad M_{\text{max}} = F_{\text{д}} \cdot l = V_o l \sqrt{Cm}.$$

Наибольшие динамические напряжения

$$\sigma_{\text{max}} = M_{\text{max}} / W_x = V_o l \sqrt{Cm} / W_x = 149 \text{ МПа}.$$



Пример 2.13. Тонкостенная труба длиной $2l$, падая в горизонтальном положении с высоты h , ударяется о препятствие своей серединой. Определить высоту h , если наибольшие динамические напряжения при ударе равны $\sigma_{\text{д}} = 175 \text{ МПа}$.

Дано: $E = 200 \text{ ГПа}$, $\rho = 7,85 \text{ т/м}^3$.

Решение

При ударе потенциальная энергия трубы $mgh = 2\rho A l g h$ переходит в ее потенциальную энергию упругой деформации:

$$U = 2 \frac{1}{2EI_0} \int_0^l M_\delta^2 dz = \frac{1}{EI_0} \int_0^l \left(q_\delta \frac{z^2}{2} \right)^2 dz = \frac{q_\delta^2 l^5}{20EI_0}.$$

Из уравнения баланса энергии

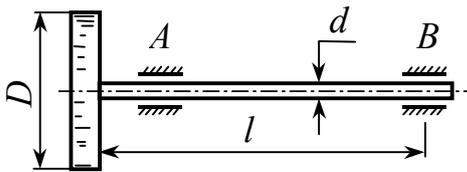
$$2\rho A l g h = q_\delta^2 l^5 / (20EI_0) \quad \text{находим} \quad q_\delta = \sqrt{40\rho A g h EI_0} / l^2.$$

Наибольшее динамическое напряжение

$$\sigma_\delta = M_{\max} / W_x = q_\delta l^2 / (2W_x) = \sqrt{10\rho A g h EI_0} / W_x.$$

Отсюда $h = \sigma_\delta^2 W_x^2 / (10\rho g E \cdot A l) = \sigma_\delta^2 / (20\rho g E) = 10 \text{ см.}$

2.2.3. Скручивающий удар



Пример 2.14. Маховик электроинерционного стартера представляет собой диск постоянной толщины диаметра $D = 16 \text{ см}$ и массы $m = 8,8 \text{ кг}$. За время $t = 1 \text{ с}$ он приобретает частоту вращения $\Pi = 8000 \text{ об/мин}$. Найти максимальное касательное напряжение в вале диаметра $d = 2 \text{ см}$, на который насажен маховик, считая ускорение постоянным.

Решение. Вал совершает равноускоренное вращение, поэтому

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Отсюда, учитывая, что $\omega_0 = 0$ и $\omega = \pi n / 30$, находим угловое ускорение $\varepsilon = \omega / t = \pi n / (30t)$.

Скручивающий момент, действующий на вал, определяем из дифференциального уравнения вращательного движения

$$M_\delta = I_m \cdot \varepsilon = (mD^2/8) \cdot (\pi n / 30t).$$

Наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\partial} = M_{\partial}/W_p = mD^2n/(15d^3t) = 15 \text{ МПа.}$$

Пример 2.15. Вал диаметра $d = 8$ см, несущий маховик массы $m = 60$ кг и диаметра $D = 32$ см, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 16,2$ рад/с. При внезапном заземлении вала в сечении B наибольшие касательные напряжения достигают величины $\tau_{\partial} = 80$ МПа. Определить длину вала l , пренебрегая его массой и полагая $G = 80$ ГПа.

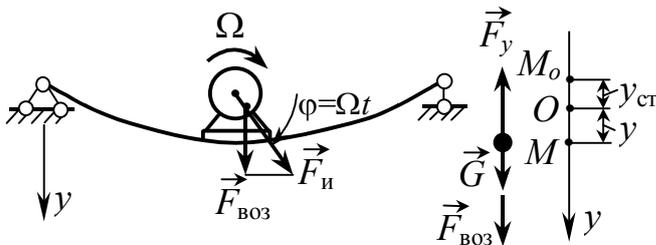
Решение. При внезапной остановке вала кинетическая энергия маховика $T = I_m\omega^2/2$ переходит в потенциальную энергию упругой деформации вала $U = M_{\partial}^2l/(2GI_p)$, т.е. уравнение баланса энергии имеет вид

$$I_m\omega^2/2 = M_{\partial}^2l/(2GI_p).$$

Отсюда, учитывая, что $M_{\partial} = \tau_{\partial}W_p$, $I_m = mD^2/8$, получим

$$l = \frac{I_m\omega^2GI_p}{\tau_{\partial}^2W_p^2} = \frac{G \cdot m}{\pi} \left(\frac{D\omega}{\tau_{\partial}d} \right)^2 = 1 \text{ м.}$$

2.3. Колебания упругих систем с одной степенью свободы.



Колебания или вибрации систем вызываются различными периодическими или внезапно приложенными силами,

действующими как самостоятельно, так и в сочетании с другими факторами.

Рассмотрим вынужденные колебания, вызванные периодической возмущающей силой $F_{\text{воз}} = F_0 \sin \Omega t$, роль которой может играть, в частности, вертикальная составляющая центробежной силы инерции неуравновешенных масс ротора электродвигателя.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$m\ddot{y} = G + F_{\text{воз}} - F_y, \quad (2.4)$$

где $F_y = C(y + y_{\text{ст}})$ – упругая сила. Учитывая, что в положении статического равновесия $G = Cy_{\text{ст}}$, и разделив почленно на m , после упрощения получим

$$\ddot{y} + \omega^2 y = (F_0 g / G) \sin \Omega t. \quad (2.5)$$

Здесь $\omega = \sqrt{C/m} = \sqrt{g/y_{\text{ст}}}$ – частота собственных колебаний упругой системы.

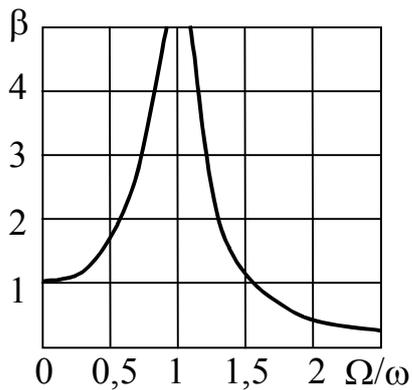
Общее решение уравнения (2.5)

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) + A \sin \Omega t, \quad (2.6)$$

где первое слагаемое представляет собой свободные колебания упругой системы, которые быстро затухают и не представляют практического интереса; второе слагаемое описывает вынужденные колебания, амплитуда которых определяется по формуле

$$A = \frac{F_0}{C} \cdot \left| \frac{1}{1 - (\Omega/\omega)^2} \right| = \frac{F_0}{C} \beta, \quad (2.7)$$

где $\beta = \left| 1/[1 - (\Omega/\omega)^2] \right|$ – коэффициент нарастания колебаний.



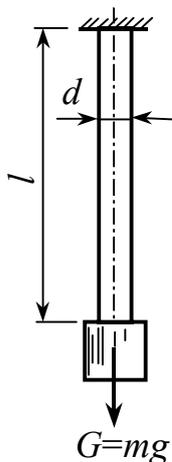
Если $\Omega \gg \omega$, то $A \rightarrow 0$ и груз на упругой подвеске практически будет неподвижным. Если $\Omega \ll \omega$, то $A \rightarrow F_0/C$. Если Ω приближается к ω , то амплитуда A быстро возрастает. При $\Omega = \omega$ возникает резонанс и $A = \infty$. В действительности

из-за наличия сил сопротивления A не будет обращаться в бесконечность, но может достигать весьма большой величины.

В резонансной зоне, когда отношение частот близко к 1 ($0,7 \leq \Omega/\omega \leq 1,3$), сравнительно небольшие возмущающие силы могут вызвать в элементах колеблющейся системы значительные деформации, а, следовательно, и значительные напряжения.

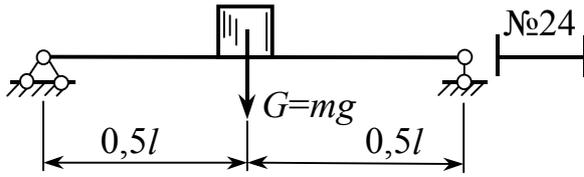
Динамический коэффициент определяется по формуле

$$k_d = 1 + (F_0/G)\beta. \quad (2.8)$$



Пример 2.16. К стальному стержню длины $l = 1$ м и диаметра $d = 2$ см прикреплен груз массы $m = 50$ кг. Найти частоту и период собственных вертикальных колебаний системы.

Решение. Частота собственных колебаний стержня равна $\omega = \sqrt{C/m}$ или, учитывая, что $C = EA/l$, $\omega = \sqrt{EA/(ml)} = 1121$ рад/с. Тогда период колебаний $T = 2\pi/\omega = 5,6$ мс.



Пример 2.17

Опытным путем было установлено, что период собственных колебаний груза массы $m = 200$ кг, расположенного посередине пролета $l = 6$ м двутавровой балки № 24, равен 0,35 с. Стенка балки расположена горизонтально. Определить величину модуля продольной упругости материала, учитывая при расчете массу балки.

Решение. По сортаменту для двутавра № 24 имеем:

- момент инерции относительно горизонтальной оси $I = 198 \text{ см}^4$,

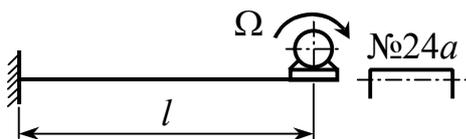
- масса 1 погонного метра $\rho_l = 27,3$ кг.

Частота собственных колебаний равна $\omega = 2\pi/T$. С другой стороны, $\omega = \sqrt{C/(m + m_{\text{пр}})}$, где C – жесткость балки, равная $C = 48 EI/l^3$, $m_{\text{пр}}$ – приведенная масса балки, определяемая следующим образом:

$$m_{\text{пр}} = k_{\text{пр}} m_{\sigma} = k_{\text{пр}} \cdot \rho_l \cdot l = (17/35) \cdot 27,3 \cdot 6 \cong 80 \text{ кг.}$$

Следовательно, $4\pi^2/T^2 = 48EI/[l^3 \cdot (m + m_{\text{пр}})]$.

Отсюда $E = \pi^2 l^3 (m + m_{\text{пр}}) / (12IT^2) = 205 \text{ ГПа.}$



Пример 2.18. Ротор электромотора, установленного на консоли, имеет частоту вращения

$\Pi = 900$ об/мин. Вследствие неуравновешенности ротора возникает возмущающая сила $F_{\text{воз}} = F_o \sin \Omega t$. Определить: 1) при

каком значении l наступает резонанс; 2) на каком расстоянии l_1 нужно установить мотор, чтобы частота собственных колебаний балки на 30% превышала частоту возмущающей силы. Для этого случая подсчитать амплитуду вынужденных колебаний и максимальное нормальное напряжение, если $m = 100$ кг, $F_o = 200$ Н, $E = 200$ ГПа. Массой балки пренебречь.

Решение. Частота возмущающей силы $\Omega = \pi n/30 = 94,25$ с⁻¹. Частота собственных колебаний $\omega = \sqrt{C/m} = \sqrt{3EI/(ml^3)}$. При резонансе $\Omega = \omega$ или $\Omega^2 = 3EI/(ml^3)$, откуда $l = \sqrt[3]{3EI/(m\Omega^2)} = 1,2$ м. Чтобы было $\omega_1 = 1,3\Omega$, мотор необходимо расположить на расстоянии $l_1 = l/\sqrt[3]{(\omega_1/\Omega)^2} = 1$ м.

Коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \left| 1/[1 - (\Omega/\omega_1)^2] \right| = 2,45.$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = (F_o/C)\beta = \left[F_o l_1^3 / (3EI) \right] \beta = 0,32 \text{ мм.}$$

Динамический коэффициент $k_\delta = 1 + (F_o/mg) \cdot \beta = 1,5$.

Максимальные динамические напряжения

$$\sigma_\delta = k_\delta \sigma_{ст} = k_\delta mgl_1/w \cong 40 \text{ МПа.}$$

3. ТОНКОСТЕННЫЕ СОСУДЫ

Для сосудов, имеющих форму тела вращения, стенки которых тонки ($t/d \leq 1/20$), не имеют резких переходов и изломов при действии осесимметричной нагрузки (например, внутреннего или внешнего давления) можно пользоваться безмоментной теорией оболочек.

По этой теории из условия равновесия элемента, выделенного около рассматриваемой точки стенки сосуда бесконечно близкими меридиональными и перпендикулярными им сечениями (рис. 3.1,а), получается одно уравнение (уравнение Лапласа) для определения окружного σ_t и меридианального σ_m нормальных напряжений:

$$\sigma_m / \rho_m + \sigma_t / \rho_t = p / t, \quad (3.1)$$

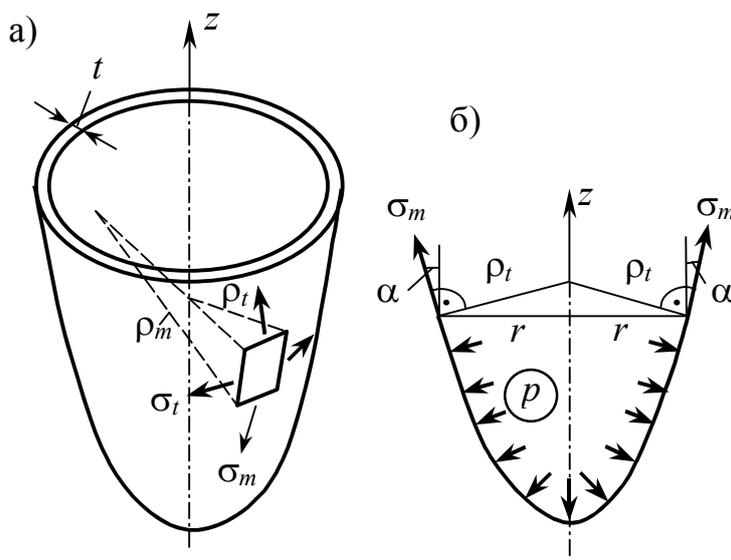


Рис. 3.1

где ρ_t и ρ_m – радиусы кривизны кольцевого меридианального сечений на уровне рассматриваемой точки, p – интенсивность внутреннего давления.

Из условия равновесия части сосуда,

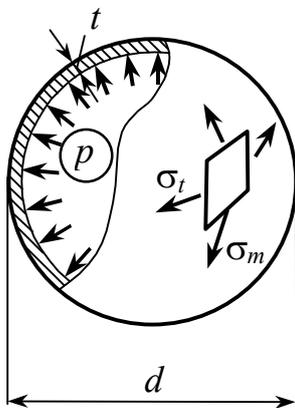
отделенной сечением, перпендикулярным дуге меридиана на уровне рассматриваемой точки (рис. 3.1, б), получается второе уравнение

$$\sigma_m = pr / (2t \cos \alpha). \quad (3.2)$$

Из полученных таким образом уравнений находятся искомые напряжения.

3.1. Сферический сосуд. Имеем: $\rho_m = \rho_t = d / 2$,

$$\sigma_m = \sigma_t.$$



Из уравнения (3.1) находим

$$\sigma_m = \sigma_t = pd / (4t).$$

Следовательно, $\sigma_m = \sigma_t = pd / (4t)$, $\sigma_3 = 0$.

Условие прочности по гипотезе О.Мора

$$\sigma_{\text{ЭКВМ}} = \sigma_1 - m\sigma_3 = pd / (4t) \leq [\sigma_p]. \quad (3.3)$$

3.2. Цилиндрический сосуд. Имеем:

$$\rho_m = \infty, \quad \rho_t = d/2, \quad \alpha = 0.$$

Из уравнения (3.1) находим

$$\sigma_t = pd / (2t),$$

а из уравнения (3.2), полагая $\alpha = 0$,

$$\sigma_m = pd / (4t).$$

Следовательно, $\sigma_1 = \sigma_t = pd / (2t)$, $\sigma_2 = \sigma_m = pd / (4t)$, $\sigma_3 = 0$.

Условие прочности по гипотезе О.Мора

$$\sigma_{\text{ЭКВМ}} = \sigma_1 - m\sigma_3 = pd / (2t) \leq [\sigma_p]. \quad (3.4)$$

Для цилиндрической оболочки, как видим, эквивалентное напряжение оказывается в два раза большим, чем для сферической того же диаметра и той же толщины.

Пример 3.1. Какое максимальное избыточное давление газа может выдержать тонкая сферическая оболочка воздушного шара-зонда диаметром $d = 1$ м, выполненная из полиэтиленовой пленки толщиной $t = 1$ мм, если $[\sigma_p] = 5$ МПа.

Решение. Согласно условию прочности сферической оболочки

$$\sigma_{\text{эквМ}} = pd/(4t) \leq [\sigma_p],$$

откуда искомое давление

$$p = [\sigma_p] \cdot 4t/d = 5 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 10^{-3} / 1 = 20 \text{ кПа.}$$

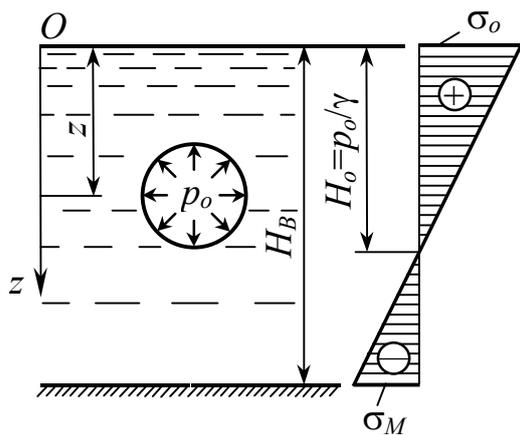
Пример 3.2. Сферический газгольдер емкостью 4000 м^3 имеет диаметр $d = 20$ м и толщину стенки $t = 30$ мм. Согласно правилам Госгортехнадзора СССР материал стенки сосуда должен работать не менее чем с трехкратным запасом по пределу прочности. Спрашивается, из какой стали должен быть изготовлен газгольдер, чтобы он мог выдерживать избыточное давление газа, достигающее $p = 1,2$ МПа?

Решение. Эквивалентное напряжение для сферического сосуда равно

$$\sigma_{\text{эквМ}} = pd/(4t).$$

Из условия прочности $\sigma_{\text{пч}} / \sigma_{\text{эквМ}} \geq [n]$ находим предел прочности материала:

$$\sigma_{\text{пч}} = \sigma_{\text{эквМ}} \cdot [n] = pd[n] / (4t) = 1,2 \cdot 20 \cdot 3 / (4 \cdot 3 \cdot 10^{-2}) = 600 \text{ МПа.}$$



Пример 3.3. Сферический сосуд, находящийся под внутренним давлением $p_0 = 0,2$ МПа, решили опустить на дно глубокого озера. Как будут изменяться напряжения в стенке сосуда по мере опускания? Возможен

ли такой момент, когда в стенке сосуда не будет напряжений?

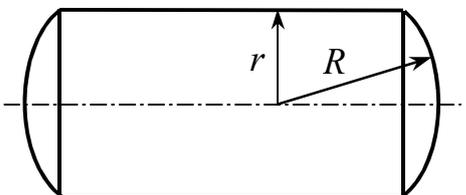
Решение

Главные напряжения в стенке сферического сосуда определяются следующим образом: $\sigma_1 = \sigma_2 = pd/(4t)$ или, учитывая, что $p = p_0 - \gamma z$, получим $\sigma_1 = \sigma_2 = (p_0 - \gamma z)d/(4t)$, т.е. напряжения изменяются по линейному закону от растягивающих на поверхности ($z = 0$) $\sigma_0 = p_0 d / (4t)$

до сжимающих на дне водоема $\sigma_M = (p_0 - \gamma H_B)d/(4t)$.

На глубине, где суммарное давление равно нулю, отсутствуют также напряжения в стенке сосуда, т.е.

$$p = p_0 - \gamma H_0 = 0, \text{ откуда } H_0 = p_0/\gamma = 0,2 \cdot 10^3/10 = 20 \text{ м.}$$



Пример 3.4. Цилиндрический котел со сферическими днищами находится под действием внутреннего давления p . Толщина стенок одинакова. Определить, при каком соотношении радиусов R/r обеспечивается равнопрочность конструкции. Расчет выполнить по III и IV гипотезам прочности.

Расчет выполнить по III и IV гипотезам прочности.

Решение. Находим эквивалентные напряжения:

- цилиндрическая часть $\sigma_{\text{ЭКВIII}}^{(\Pi)} = pT/t$;

$$\sigma_{\text{ЭКВIV}}^{(\Pi)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = (\sqrt{3}/2)pr/t$$

или в общем виде $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{(\Pi)} = kpr/t$, где

$$k = \begin{cases} 1 & \text{— по III гипотезе проч.,} \\ \sqrt{3}/2 & \text{— по IV гипотезе,} \end{cases}$$

- сферическая часть $\sigma_{\text{ЭКВIII}}^{(\text{сф})} = \sigma_{\text{ЭКВIV}}^{(\text{сф})} = pR/(2t)$.

Из условия равнопрочности $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{(\Pi)} = \sigma_{\text{ЭКВ}}^{(\text{сф})}$ или $kpr/t = pR/(2t)$. Отсюда $R/r = 2k$.

Пример 3.5. Чугунный водовод диаметром $d = 120$ см должен выдерживать напор воды, достигающий $H = 100$ м. Допускаемое напряжение на растяжение равно $[\sigma_p] = 20$ МПа. Определить толщину стенки чугунной трубы.

Решение

Условие прочности, исходя из гипотезы О. Мора

$$\sigma_{\text{ЭКВМ}} = pd/(2t) \leq [\sigma_p],$$

откуда искомая толщина $t = pd/(2[\sigma_p]) = 1 \cdot 120 / (2 \cdot 20) = 3$ см.

Пример 3.6. Кислородный баллон представляет собой стальной цилиндрический сосуд с наружным диаметром $d = 24$ см и толщиной стенки $t = 10$ мм. С каким минимальным запасом прочности работает стенка баллона, если рабо-

чее давление в нем достигает 3 МПа. Предел прочности материала равен $\sigma_{пч} = 470$ МПа. Воспользоваться III и IV гипотезами прочности.

Решение

Находим эквивалентные напряжения:

- по III гипотезе прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВIII}} = pd/(2t) = 3 \cdot 24 / (2 \cdot 1) = 36 \text{ МПа},$$

- по IV гипотезе прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВIV}} = (\sqrt{3}/2)\sigma_{\text{ЭКВIII}} = 31,2 \text{ МПа}.$$

Коэффициент запаса прочности равен $\Pi = \sigma_{пч}/\sigma_{\text{ЭКВ}}$,

$$\Pi_{\text{III}} = \sigma_{пч}/\sigma_{\text{ЭКВIII}} = 470/36 = 13,$$

$$\Pi_{\text{IV}} = \sigma_{пч}/\sigma_{\text{ЭКВIV}} = 470/31,2 = 15.$$

Как видим, III гипотеза прочности дает заниженный коэффициент запаса прочности.

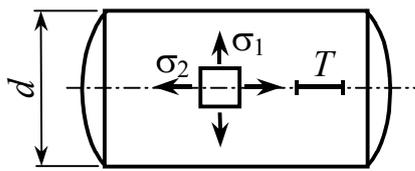
Пример 3.7. Стальная цилиндрическая оболочка диаметром $d = 5$ м и толщиной $t = 5$ мм нагружается внутренним давлением. При этом тензометрический датчик, наклеенный вдоль образующей цилиндра, дает увеличение показаний на 40 делений. Определить главные напряжения в стенке цилиндра и давление p , если цена деления тензометра $C = 5 \cdot 10^{-6}$, модуль упругости материала $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$.

Решение

Для цилиндрического сосуда главные напряжения, как известно, определяются следующим образом

$$\sigma_1 = \sigma_t = pd/(2t), \quad \sigma_2 = \sigma_m = pd/(4t), \quad \sigma_3 = 0,$$

т.е. $\sigma_1 = 2\sigma_2$.



По закону Гука

$$\varepsilon_2 = (\sigma_2 - \nu\sigma_1)/E = (1 - 2\nu)\sigma_2/E.$$

С другой стороны, $\varepsilon_2 = CN$.

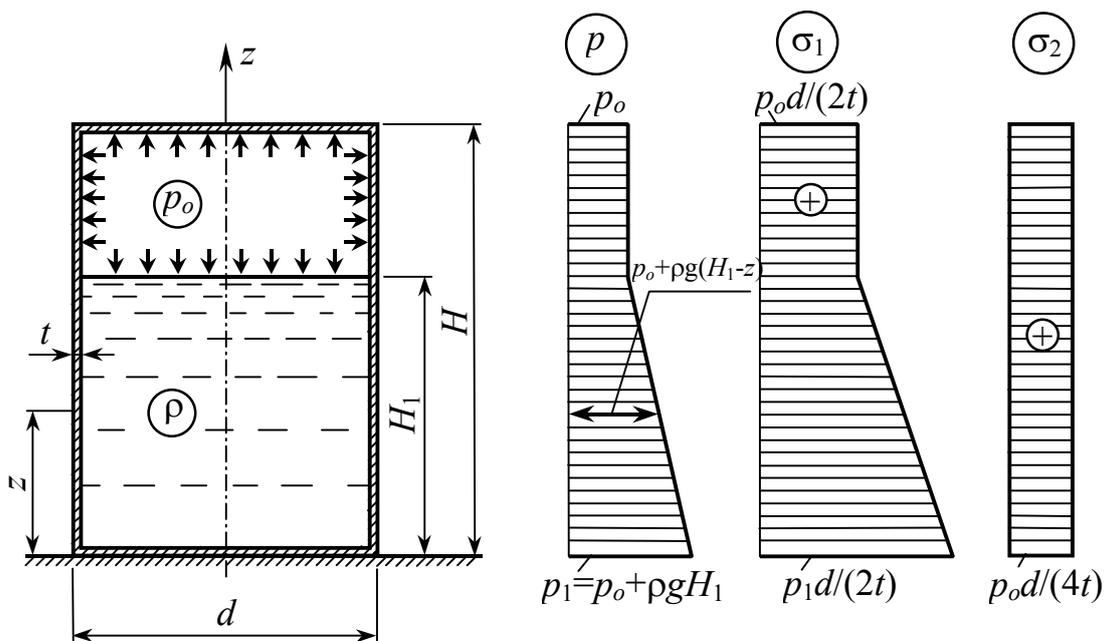
Следовательно, $\sigma_2 = ECN/(1 - 2\nu)$,

$$\sigma_2 = 200 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 5 \cdot 10^{-6} / (1 - 2 \cdot 0,25) = 80 \text{ МПа},$$

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 = 160 \text{ МПа}.$$

Из выражения $\sigma_2 = pd/(4t)$ находим искомое давление внутри сосуда: $p = \sigma_2 \cdot 4t/d = 80 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} / 5 = 0,32 \text{ МПа}$.

Пример 3.8. Цилиндрический бак наполнен жидкостью с плотностью ρ . Высота уровня жидкости H_1 . Жидкость находится под давлением p_0 . Построить эпюры главных напряжений в стенке сосуда по высоте цилиндра, если толщина стенки постоянна и равна t .



СОДЕРЖАНИЕ

1. Устойчивость деформируемых систем	50
1.1. Устойчивость центрально сжатого прямолинейного стержня	50
1.2. Продольный изгиб стержней с учетом осложняющих факторов	64
1.2.1. Учет эксцентриситета приложения нагрузки	64
1.2.2. Учет начальной погиби	65
1.3. Продольно-поперечный изгиб	69
1.4. Устойчивость труб, нагруженных внешним давлением	74
2. Динамическое нагружение	76
2.1. Расчеты на действие инерционных нагрузок	76
2.2. Расчеты на удар	81
2.2.1. Продольный удар	81
2.2.2. Поперечный удар	85
2.2.3. Скручивающий удар	89
2.3. Колебания упругих систем с одной степенью свободы	90
3. Тонкостенные сосуды	95
3.1. Сферический сосуд	96
3.2. Цилиндрический сосуд	96

1. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ СТЕРЖНИ

1.1. Основные предпосылки

Стержни с криволинейной осью называют криволинейными. К такой расчетной схеме сводится расчет крюка, звеньев металлической цепи и т.п. В последующем будем рассматривать стержни, у которых:

- ось является дугой окружности;
- поперечное сечение постоянно и симметрично относительно плоскости кривизны;
- нагрузка действует в плоскости кривизны.

Итак, речь пойдет о плоских кривых стержнях кругового очертания.

В зависимости от отношения h/ρ (рис. 1.1) различают стержни:

- малой кривизны $h/\rho < 1/5$;
- средней кривизны $1/5 \leq h/\rho \leq 1/2$;
- большой кривизны $h/\rho > 1/2$.

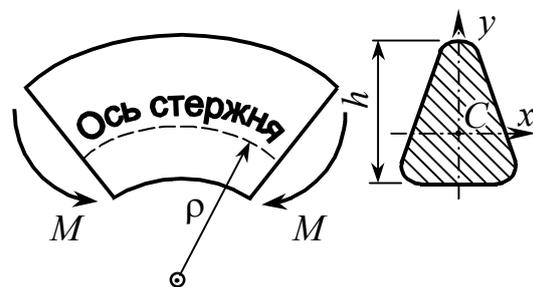


Рис. 1.1

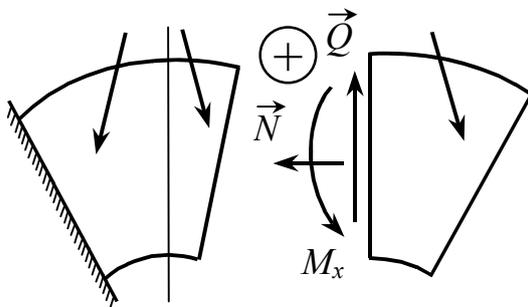


Рис. 1.2

В поперечных сечениях плоского кривого стержня возникает 3 внутренних силовых фактора: продольная сила N , поперечная сила Q и изгибающий момент M_x

(рис. 1.2.). Для продольной и поперечной сил сохраняется правило знаков, принятое для прямых стержней. Изгибающий момент принято считать положительным, если он увеличивает кривизну (вызывает растяжение с выпуклой стороны). Для изучения распределения внутренних усилий по длине стержня строят эпюры N , Q и M_x , используя метод сечений. На эпюрах внутренних усилий положительные значения откладывают перпендикулярно геометрической оси стержня в сторону от центра его кривизны, а отрицательные – к центру его кривизны. Для стержней, состоящих из криволинейных и прямолинейных участков, положительные и отрицательные значения откладывают исходя из правила, принятого для криволинейных участков.

1.2. Определение напряжений и расчет на прочность

В общем случае нагружения в поперечных сечениях плоского кривого стержня возникают нормальные напряжения, обусловленные продольной силой N и изгибающим моментом M_x , т.е.

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M, \quad (1.1)$$

и касательные напряжения τ , связанные с поперечной силой Q . Напряжения σ_N распределяются равномерно по площади поперечного сечения

$$\sigma_N = N/A. \quad (1.2)$$

Напряжения σ_M определяются исходя из двух гипотез:

- сечения плоские и нормальные к оси стержня до деформации остаются плоскими и нормальными к оси стержня и после деформации;

- криволинейные волокна, изгибаясь, не оказывают давления друг на друга.

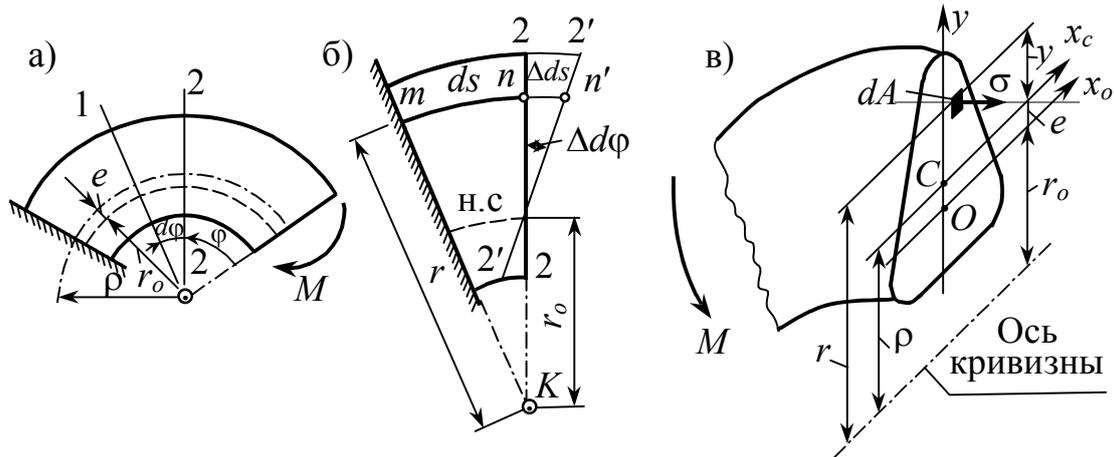


Рис. 1.3

На основании первой гипотезы относительная деформация произвольного волокна mn равна (рис. 1.3,б)

$$\varepsilon = nn'/mn = (r - r_0)\Delta d\varphi / (rd\varphi) = (\Delta d\varphi / d\varphi)(1 - r_0/r).$$

Согласно второй гипотезе напряженное состояние является линейным, поэтому

$$\sigma = E\varepsilon = (E\Delta d\varphi / d\varphi)(1 - r_0/r) = C(1 - r_0/r),$$

где $C = E\Delta d\varphi / d\varphi$ - постоянный множитель.

При чистом изгибе кривого стержня $N = 0$ и $M_x = M$. Из условия $N = 0$ находим радиус кривизны нейтрального

слоя. Имеем
$$N = \int_A \sigma dA = C \int_A (1 - r_0/r) dA = C \left(A - r_0 \int_A dA/r \right) = 0,$$

откуда
$$r_0 = A / \left(\int_A dA/r \right). \quad (1.3)$$

В кривом стержне нейтральная ось x_o не проходит через центр тяжести (т.С) сечения, а смещена к центру кривизны на величину

$$e = \rho - r_o.$$

Для стержней средней и малой кривизны ее можно определять по приближенной формуле Н.Н. Давиденкова

$$e = I_{x_C} / (\rho A). \quad (1.5)$$

Изгибающий момент в произвольном сечении стержня равен

$$M_u = \int_A \sigma \cdot r dA = C \int_A (1 - r_o / r) r dA = C \int_A (r - r_o) dA = M.$$

Величина $\int_A (r - r_o) dA = S_{x_o} = Ae$ есть статический момент сечения

относительно нейтральной оси x_o , поэтому $C = M / (Ae)$.

Следовательно, искомый закон распределения нормальных напряжений имеет вид

$$\sigma_M = \frac{M}{Ae} \left(1 - \frac{r_o}{r} \right). \quad (1.6)$$

Как видим, распределение является гиперболическим (рис. 1.4). Если сечение симметрично относительно центральной оси x_c , то наибольшие по абсолютной величине напряжения всегда возникают в точке 1, ближайшей к центру кривизны.

Для несимметричного сечения наибольшие напряжения могут возникать также в точке 2, наиболее удаленной от центра кривизны, поэтому в этом случае для опре-

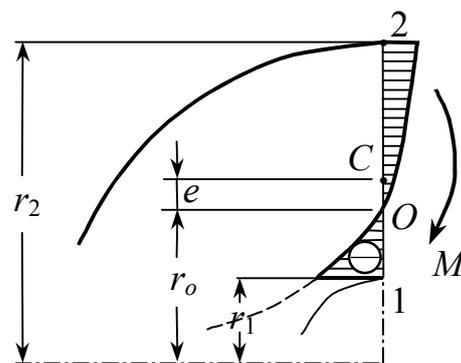


Рис. 1.4

деления опасной точки необходимо вычислить напряжения в обеих точках.

Итак, в общем случае нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M}{Ae} \left(1 - \frac{r_o}{r} \right). \quad (1.7)$$

Касательные напряжения распределяются примерно так же, как в поперечном сечении прямого стержня, поэтому их можно определять по формуле Д.И. Журавского

$$\tau = QS_x^{OTC} / (b \cdot I_x). \quad (1.8)$$

Условия прочности:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad \tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (1.9)$$

1.3. Определение перемещений и расчет на жесткость

Для плоского кривого стержня большой кривизны линейные и угловые перемещения определяются по формуле Мора

$$\Delta = \int_S \frac{M \cdot \bar{M} dS}{EA\rho e} + \int_S \frac{N \cdot \bar{N} dS}{EA} + \int_S \frac{(M \cdot \bar{N} + N \cdot \bar{M}) dS}{EA\rho} + k \int_S \frac{Q \cdot \bar{Q} dS}{GA}, \quad (1.10)$$

где M , N , Q – текущие значения внутренних усилий от заданной нагрузки; \bar{M} , \bar{N} , \bar{Q} – то же, от единичной обобщенной силы, приложенной в точке, перемещение которой определяется; k – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения (для прямоугольника $k = 1,2$; для круга $k \cong 1,1$). Для стержней малой кривизны ($h/\rho < 1/5$) перемещения можно определять без учета кривизны:

$$\Delta = \int_S \frac{M \cdot \bar{M} dS}{EI}. \quad (1.11)$$

$$\text{Условие жесткости} \quad \Delta \leq [\Delta]. \quad (1.12)$$

1.4. Примеры расчета

Пример 1.1. Исследовать, какую ошибку в величине максимального нормального напряжения дает применение приближенной формулы для определения смещения e нейтральной оси по отношению к центру тяжести сечения при чистом изгибе кривого стержня прямоугольного сечения. Рассмотреть два случая: а) $h/\rho = 1$, б) $h/\rho = 0,5$.

Решение

1. Случай а.

Имеем: $h/\rho = 1$, $h = \rho$,

$$r_1 = \rho - 0,5h = 0,5\rho;$$

$$r_2 = \rho + 0,5h = 1,5\rho;$$

$$A = b \cdot h = b \cdot \rho,$$

$$I_{x_c} = bh^3/12 = b\rho^3/12.$$

Положение нейтральной оси:

- точная формула

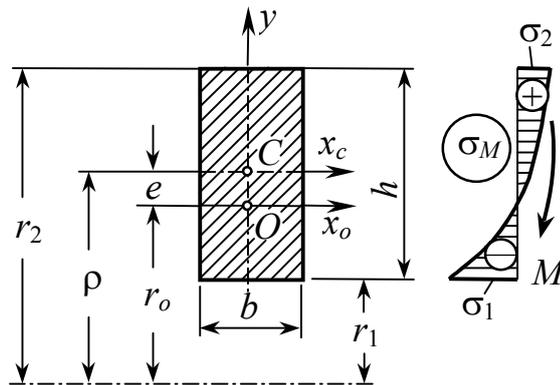
$$r_o = h/\ln(r_2/r_1) = \rho/\ln 3 = 0,9102\rho; \quad e = \rho - r_o = 0,0898\rho;$$

- приближенная формула

$$\tilde{e} = I_{x_c} / (\rho A) = \rho/12 = 0,0833\rho; \quad \tilde{r}_o = \rho - \tilde{e} = 0,9167\rho.$$

Максимальное напряжение (точка 1):

- точное значение



$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{M}{Ae} \left(1 - \frac{r_o}{r_1} \right) = \frac{M}{b \cdot \rho \cdot 0,0898\rho} \left(1 - \frac{0,9102\rho}{0,5\rho} \right) = 9,14 \frac{M}{b\rho^2};$$

- приближенное значение

$$\tilde{\sigma}_{\max} = \frac{M}{A\tilde{e}} \left(1 - \frac{\tilde{r}_o}{r_1} \right) = \frac{M}{b \cdot \rho \cdot 0,0833\rho} \left(1 - \frac{0,9167\rho}{0,5\rho} \right) = 10 \frac{M}{b\rho^2}.$$

Отношение максимальных напряжений $\tilde{\sigma}_{\max} / \sigma_{\max} = 1,095$, т.е. приближенная формула дает завышенное (в данном случае на 9,5%) значение для максимального напряжения, что идет в запас прочности.

2. *Случай б.* Имеем: $h/\rho = 0,5$; $h = 0,5\rho$; $A = b \cdot h = 0,5b\rho$; $r_1 = \rho - 0,5h = 0,75\rho$; $r_2 = \rho + 0,5h = 1,25\rho$; $I_{x_c} = bh^3/12 = b\rho^3/96$.

Положение нейтральной оси:

$$r_o = h / \ln(r_2/r_1) = 0,5\rho / \ln(5/3) = 0,9788\rho; \quad e = \rho - r_o = 0,0212\rho;$$

$$\tilde{e} = I_{x_c} / (\rho A) = \rho/48 = 0,0208\rho; \quad \tilde{r}_o = \rho - \tilde{e} = 0,9792\rho.$$

Максимальное напряжение (точка 1):

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Ae} \left(1 - \frac{r_o}{r_1} \right) = \frac{M}{0,5b\rho \cdot 0,0212\rho} \left(1 - \frac{0,9788\rho}{0,75\rho} \right) = 28,78 \frac{M}{b\rho^2};$$

$$\tilde{\sigma}_{\max} = \frac{M}{A\tilde{e}} \left(1 - \frac{\tilde{r}_o}{r_1} \right) = \frac{M}{0,5b\rho \cdot 0,0208\rho} \left(1 - \frac{0,9792\rho}{0,75\rho} \right) = 29,38 \frac{M}{b\rho^2}.$$

Отношение $\tilde{\sigma}_{\max} / \sigma_{\max} = 1,02$, т.е. превышение всего на 2%.

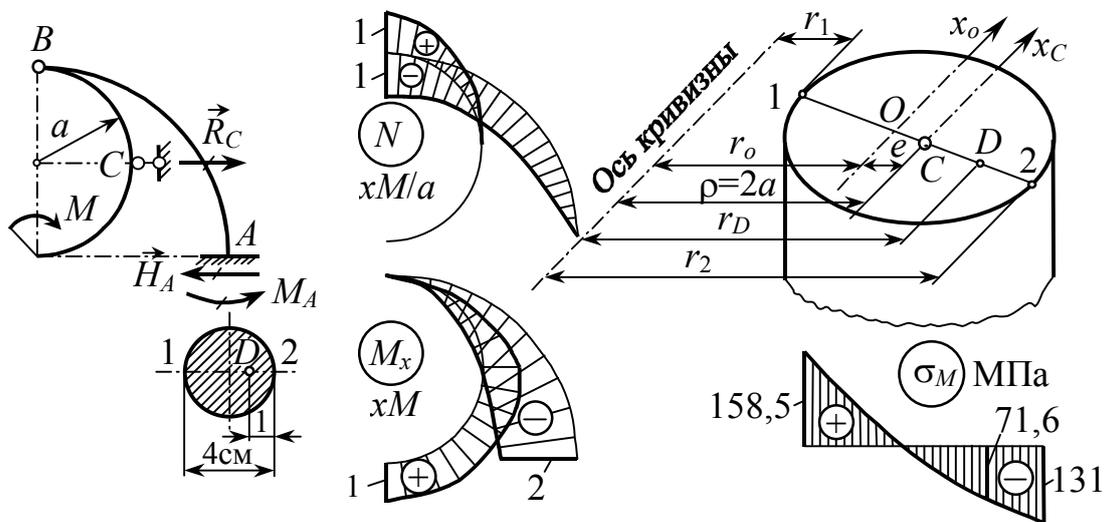
Вывод. Для стержней большой кривизны ($h/\rho > 1/2$) приближенная формула неприменима (погрешность превышает 5%), а для стержней средней кривизны ($h/\rho \leq 1/2$) ошибка не превышает точности инженерного расчета.

Пример 1.2. Определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения, а также напряжение в точке D опасного сечения, если $a = 8$ см, $M = 450$ Н·м.

Решение. 1. Построение эпюр M_x и N . Опорные реакции:

$$\text{стержень } BC - \sum m_B = 0, \quad R_C \cdot a - M = 0, \quad R_C = M/a;$$

$$\text{система в целом} - \sum m_A = 0, \quad M_A - M - R_C \cdot a = 0, \quad M_A = 2M.$$



Анализ построенных эпюр показывает, что опасным является сечение A , где возникает наибольший изгибающий момент, равный

$$M_{\max} = -2M = -900 \text{ Н·м.}$$

2. Определение нормальных напряжений в опасном сечении. Вычисляем $A = \pi d^2/4 = \pi \cdot 4^2/4 = 12,57 \text{ см}^2$;

$$e = I_{x_c} / (\rho A) = (\pi d^4/64) / (2a \cdot \pi d^2/4) = d^2 / (32a) = 4^2 / (32 \cdot 8) = 0,0625 \text{ см};$$

$$r_o = \rho - e = 16 - 0,0625 = 15,9375 \text{ см}, \quad r_1 = \rho - 0,5d = 16 - 2 = 14 \text{ см};$$

$$r_2 = \rho + 0,5d = 16 + 2 = 18 \text{ см}; \quad r_D = \rho + y_D = 16 + 1 = 17 \text{ см.}$$

Тогда

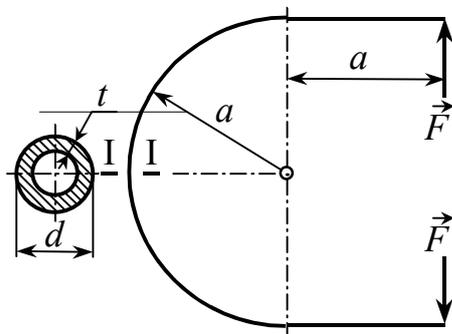
$$\sigma_1 = \frac{M_{\max}}{Ae} \left(1 - \frac{r_o}{r_1} \right) = -\frac{900}{12,57 \cdot 0,0625} \left(1 - \frac{15,9375}{14} \right) = 158,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{M_{\max}}{Ae} \left(1 - \frac{r_o}{r_2} \right) = -\frac{900}{12,57 \cdot 0,0625} \left(1 - \frac{15,9375}{18} \right) = -131 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = \frac{M_{\max}}{Ae} \left(1 - \frac{r_o}{r_D} \right) = -\frac{900}{12,57 \cdot 0,0625} \left(1 - \frac{15,9375}{17} \right) = -71,6 \text{ МПа}.$$

По найденным трем напряжениям строим эпюру нормальных напряжений в сечении A .

Пример 1.3. Проверить прочность криволинейного стержня трубчатого сечения с наружным диаметром $d = 46$ мм и толщиной стенки $t = 6$ мм, $a = 50$ мм, $F = 6$ кН, $[\sigma] = 150$ МПа.



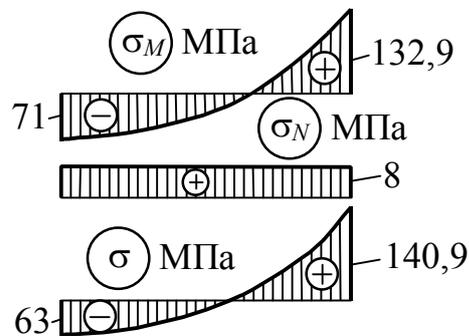
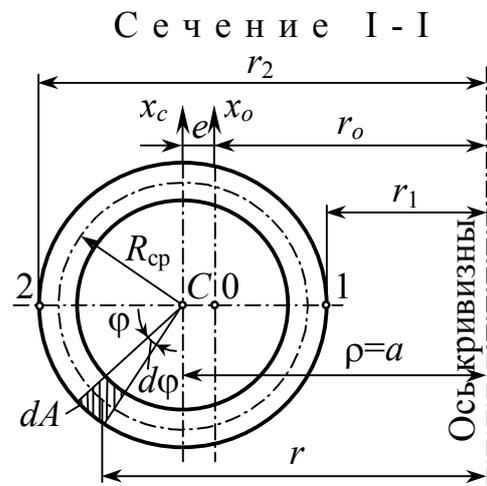
Решение

1. Определение положения нейтральной оси.

$$\text{Имеем } A = 2\pi R_{\text{cp}} \cdot t,$$

$$dA = t \cdot R_{\text{cp}} d\varphi,$$

$$r = a + R_{\text{cp}} \cos\varphi,$$



$$\int_A \frac{dA}{r} = 2 \int_0^\pi \frac{t \cdot R_{\text{ср}} d\varphi}{a + R_{\text{ср}} \cos\varphi} = \frac{2\pi t R_{\text{ср}}}{\sqrt{a^2 - R_{\text{ср}}^2}}.$$

Радиус кривизны нейтрального слоя

$$r_o = A / \int_A dA/r = \sqrt{a^2 - R_{\text{ср}}^2} = 4,5826 \text{ см.}$$

Смещение нейтральной оси по отношению к центру тяжести $e = \rho - r_o = a - r_o = 5 - 4,5826 = 0,4174 \text{ см.}$

2. Установление опасного сечения. Не прибегая к построению эпюр M_x и N , нетрудно убедиться, что в данном случае опасным является сечение I - I, где

$$M_1 = -2Fa = -2 \cdot 6 \cdot 0,05 = -0,6 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad N_1 = F = 6 \text{ кН.}$$

3. Определение нормальных напряжений в опасном сечении и проверка прочности криволинейного стержня. Вычисляем геометрические параметры сечения

$$A = 2\pi R_{\text{ср}} \cdot t = 2\pi \cdot 2 \cdot 0,6 = 7,54 \text{ см}^2;$$

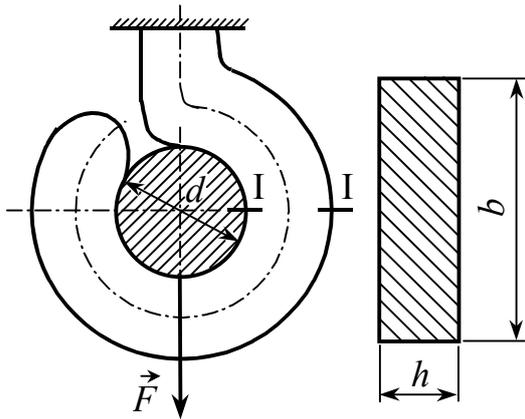
$$r_1 = \rho - 0,5d = 5 - 0,5 \cdot 4,6 = 2,7 \text{ см}; \quad r_2 = \rho + 0,5d = 7,3 \text{ см.}$$

Находим напряжения в крайних точках сечения

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} + \frac{M_1}{Ae} \left(1 - \frac{r_o}{r_1} \right) = \frac{6 \cdot 10^3}{7,54 \cdot 10^{-4}} - \frac{0,6 \cdot 10^3}{7,54 \cdot 10^{-4} \cdot 0,4174 \cdot 10^{-2}} \left(1 - \frac{4,5826}{2,7} \right) = 140,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_1}{A} + \frac{M_1}{Ae} \left(1 - \frac{r_o}{r_2} \right) = 8 - \frac{0,6 \cdot 10^{-3}}{7,54 \cdot 10^{-4} \cdot 0,4174 \cdot 10^{-2}} \left(1 - \frac{4,5826}{7,3} \right) = 63 \text{ МПа}$$

и строим эпюру σ . Так как $\sigma_{\text{max}} = \sigma_1 = 140,9 < [\sigma] = 150 \text{ МПа}$, то прочность кривого стержня обеспечена.



Пример 1.4

Определить, при какой нагрузке F начнет разгибаться крюк, если $d = 10$ мм, $b = 25$ мм, $h = 6$ мм, предел упругости материала стержня $\sigma_y = 390$ МПа.

Решение

Стержень начнет разгибаться при условии $\sigma_{\max} = \sigma_y$.

Наибольшие напряжения в данном случае возникают в сечении I - I, где внутренние факторы принимают значения $N_1 = F$, $M_1 = -F \cdot \rho$.

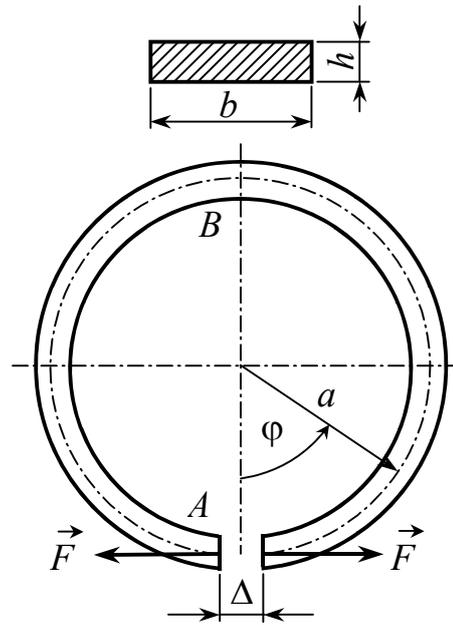
Вычисляем геометрические параметры $r_1 = 0,5$ см; $r_2 = 1,1$ см; $A = b \cdot h = 2,5 \cdot 0,6 = 1,5$ см²; $\rho = 0,5(d + h) = 0,5(1 + 0,6) = 0,8$ см; $r_o = h / \ln(r_2 / r_1) = 0,6 / \ln(1,1 / 0,5) = 0,761$ см; $e = \rho - r_o = 0,8 - 0,761 = 0,039$ см.

$$\text{Используя условие } \sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{F}{A} - \frac{F \cdot \rho}{Ae} \left(1 - \frac{r_o}{r_1} \right) = \sigma_y,$$

находим

$$F = \sigma_y \cdot A \left[1 + \frac{\rho(r_o - r_1)}{e \cdot r_1} \right] = 390 \cdot 10^6 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \left[1 + \frac{0,8(0,761 - 0,5)}{0,039 \cdot 0,5} \right] = 5 \text{ кН.}$$

Пример 1.5. Определить, на какую величину Δ можно развести торцы разрезанного кольца прямоугольного сечения, чтобы максимальное нормальное напряжение не превышало предела текучести материала $\sigma_T = 300$ МПа, если в недеформированном состоянии зазор равен нулю. Дано: $a = 4$ см, $h = 1$ см, $E = 200$ ГПа.



Решение

1. Определение силы F . В опасном сечении B внутренние силовые факторы принимают следующие значения:

$$N_B = F, \quad M_B = -2Fa.$$

Из условия $\sigma_{\max} = \sigma_T$ найдем силу F

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{2Fa}{Ae} \cdot \frac{r_o - r_1}{r_1} = \sigma_T,$$

$$F = \sigma_T A / \left(1 + \frac{2a}{e} \cdot \frac{r_o - r_1}{r_1} \right). \quad (a)$$

2. Определение искомого перемещения Δ . Оно вычисляется по формуле Мора

$$EI_x \Delta = 2 \int_0^\pi M_F \bar{M} a d\varphi.$$

Усилия от силы F и от единичной силы соответственно равны $M_F = Fa(1 - \cos\varphi)$, $\bar{M} = a(1 - \cos\varphi)$.

Следовательно,

$$EI_x \Delta = 2Fa^3 \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi = 3\pi Fa^3. \quad (б)$$

Заменяя в этой формуле F согласно (а), получим

$$\Delta = \frac{3\pi a^3 \sigma_T A}{EI_x} \left(1 + \frac{2a}{e} \cdot \frac{r_o - r_1}{r_1} \right). \quad (в)$$

Определяем геометрические параметры сечения $A = bh$, $I_{x_c} = bh^3/12$, $e = I_{x_c} / (\rho A) = h^2 / (12a) = 1^2 / (12 \cdot 4) = 0,0208$ см;
 $r_o = a - e = 4 - 0,0208 = 3,9792$ см; $r_1 = a - 0,5h = 4 - 0,5 = 3,5$ см.

В результате

$$\Delta = \frac{36 \cdot \pi \cdot 4^3 \cdot 10^{-6} \cdot 300 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^9 \cdot 1^2 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{2 \cdot 4}{0,0208} \cdot \frac{3,9792 - 3,5}{3,5} \right) = 2 \text{ мм.}$$

Пример 1.6. Сравнить прочность двух типов звеньев цепи – кольцевого и вытянутого при одинаковом радиусе криволинейной части (рис. 1.5). Расчет вести по формулам для стержня малой кривизны.

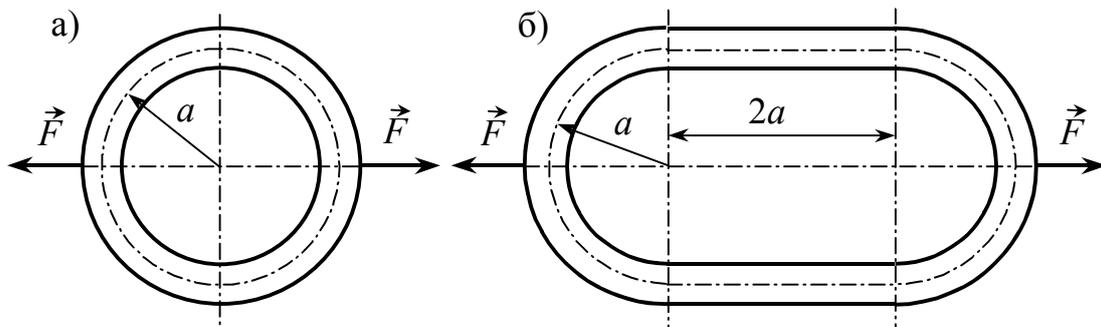


Рис. 1.5

Решение. Обе системы три раза статически неопределимы, но условия симметрии позволяют сократить число неизвестных до одного. Разрежем кольца по оси симметрии. В силу симметрии в сечениях колец, попавших в разрез, поперечные силы отсутствуют, а продольные силы равны $0,5F$.

Изгибающий момент неизвестен, поэтому обозначим его через x_1 . Каноническое уравнение метода сил имеет вид $\delta_{11}x_1 + \Delta_{1F} = 0$ и выражает в данном случае условие отсутствия угловых перемещений концевых сечений полуколец. Для определения перемещений δ_{11} и Δ_{1F} рассмотрим по отдельности каждый из вариантов.

Вариант а

Находим моменты от заданных сил и от единичного силового фактора в произвольном сечении с угловой координатой φ

$$M_F = 0,5Fa(1 - \cos\varphi), \quad \bar{M}_1 = -1.$$

Определяем коэффициенты канонического уравнения

$$EI\delta_{11} = 2 \int_0^{\pi/2} \bar{M}_1^2 \cdot a \cdot d\varphi = \pi \cdot a,$$

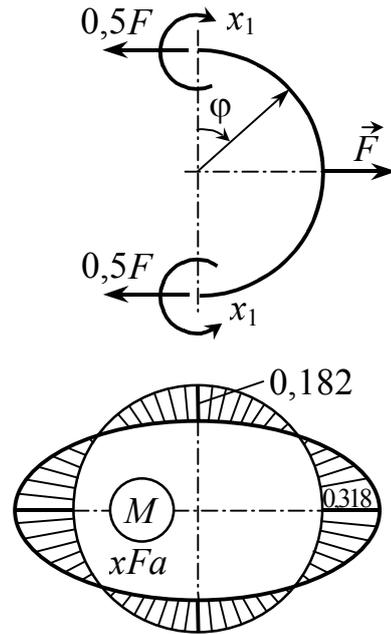
$$EI\Delta_{1F} = 2 \int_0^{\pi/2} M_F \cdot \bar{M}_1 \cdot a \cdot d\varphi = -Fa^2(\pi/2 - 1).$$

Тогда $x_1 = -\Delta_{1F}/\delta_{11} = Fa(0,5 - 1/\pi) = 0,182Fa$.

Изгибающий момент в произвольном сечении равен алгебраической сумме момента от заданных сил M_F и момента x_1 . В итоге $M_{изг} = M_F - x_1 = Fa(1/\pi - 0,5\cos\varphi)$.

Согласно этому выражению на рассматриваемой четверти окружности может быть построена эпюра изгибающего момента, а затем по условиям симметрии распространена и на другие участки окружности. Наибольший изгибающий момент возникает в точках приложения сил F и равен

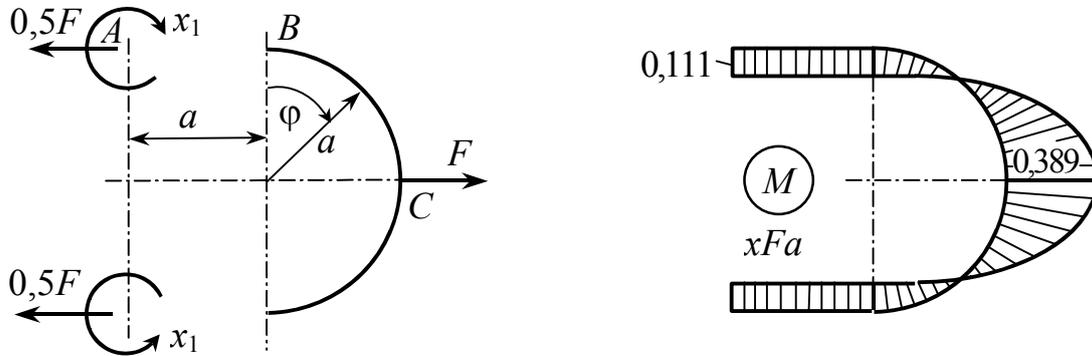
$$M_{\max} = M_{изг/\varphi=90^\circ} = Fa/\pi = 0,318Fa.$$



Вариант б. Изгибающие моменты:

участок AB : $M_F = 0$, $\bar{M}_1 = -1$;

участок BC : $M_F = 0,5Fa(1 - \cos\varphi)$, $\bar{M}_1 = -1$.



Коэффициенты канонического уравнения

$$EI\delta_{11} = 2 \int_A^C \bar{M}_1^2 ds = 2 \left[\int_0^a ds + a \int_0^{\pi/2} d\varphi \right] = (2 + \pi)a,$$

$$EI\Delta_{1F} = 2 \int_A^C M_F \cdot \bar{M}_1 ds = -Fa^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\varphi) d\varphi = -Fa^2(\pi/2 - 1).$$

Неизвестный момент

$$x_1 = -\Delta_{1F}/\delta_{11} = (Fa/2) \cdot (\pi - 2) / (\pi + 2) = 0,111Fa.$$

Результирующие изгибающие моменты:

участок AB – $M_{AB} = x_1 = 0,111Fa$;

участок BC – $M_{BC} = M_F - x_1 = Fa(0,389 - 0,5\cos\varphi)$.

Максимальный изгибающий момент равен

$$M_{\max} = M_{/\varphi=90^\circ} = 0,389Fa.$$

Вывод. Так как сечения и радиусы кривизны в обоих случаях одинаковы, то напряжения относятся как изгибающие моменты

$$\sigma_{\max_\delta} / \sigma_{\max_a} = M_{\max_\delta} / M_{\max_a} = 0,389 / 0,318 = 1,223.$$

Следовательно, в вытянутом звене наибольшее напряжение будет на 22,3% больше, чем в кольцевом.

2. ТОЛСТОСТЕННЫЕ СОСУДЫ

2.1. Краткие теоретические сведения

2.1.1. Толстостенный цилиндр

Основные уравнения:

- уравнение равновесия

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r \cdot r) - \sigma_t = 0; \quad (2.1)$$

- геометрические уравнения

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r};$$

- физические уравнения (закон Гука)

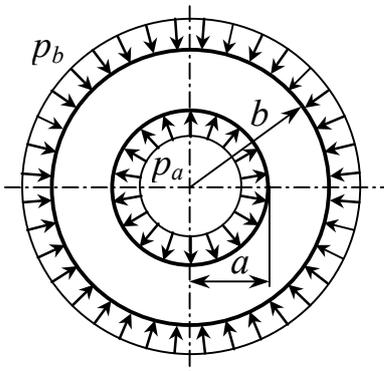
$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)], \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}[\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]. \quad (2.3)$$

Решая совместно эти уравнения, найдем

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}, \quad (2.4)$$

где A и B - произвольные постоянные, определяемые из граничных условий задачи.

Цилиндр, нагруженный внутренним и внешним давлением (задача Ламе). Граничные условия имеют вид:



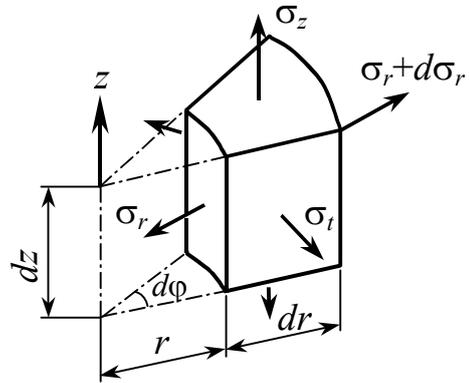
при $r = a$ $\sigma_r = -p_a$;

при $r = b$ $\sigma_r = -p_b$, т.е.

$$A - \frac{B}{a^2} = -p_a, \quad A - \frac{B}{b^2} = -p_b,$$

откуда

$$A = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}, \quad B = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p_a - p_b).$$



В итоге получаем

$$\sigma_{r_t} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \mp \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}. \quad (2.5)$$

Если цилиндр имеет днища, то осевое напряжение будет следующим:

$$\sigma_z = (p_a a^2 - p_b b^2)/(b^2 - a^2). \quad (2.6)$$

Радиальное перемещение в произвольной точке на основании формул (2.2), (2.3), (2.5)

$$u = \varepsilon_t r = \frac{r}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]$$

или

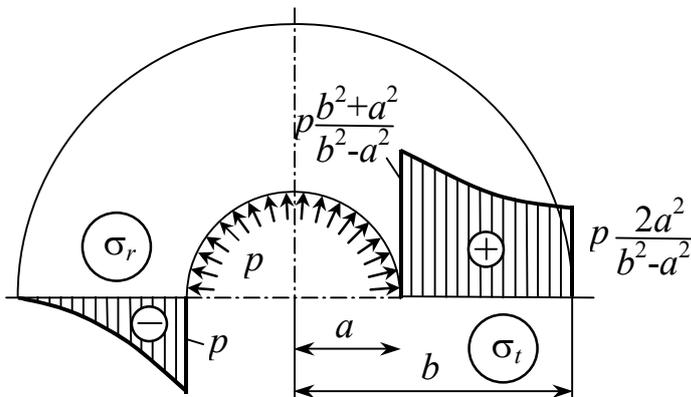
$$u = \frac{1-\nu}{E} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1-\nu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} - \frac{\nu}{E} \sigma_z r. \quad (2.7)$$

При наличии осевого напряжения σ_z , определяемого формулой (2.6), получаем

$$u = \frac{1-2\nu}{E} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{1+\nu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}. \quad (2.8)$$

Теперь рассмотрим два частных случая.

Цилиндр, нагруженный внутренним давлением.



В этом случае

$$p_a = p, \quad p_b = 0.$$

Формула (2.5) принимает вид

$$\sigma_{r_t} = \frac{p a^2}{b^2 - a^2} \left(1 \mp \frac{b^2}{r^2} \right). \quad (2.9)$$

Эпюры σ_r и σ_t приведены на рисунке слева. Опасная точка расположена у внутренней поверхности цилиндра, где

$$\sigma_r = -p, \quad \sigma_t = p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}.$$

По теории наибольших касательных напряжений (в случае отсутствия осевой силы, т.е. при $\sigma_z = 0$)

$$\sigma_{\text{ЭКВ III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - (-p) = p \frac{2b^2}{b^2 - a^2}. \quad (2.10)$$

Если толщина трубы $t = b - a$ мала по сравнению с радиусом a , то эта формула приводится к виду

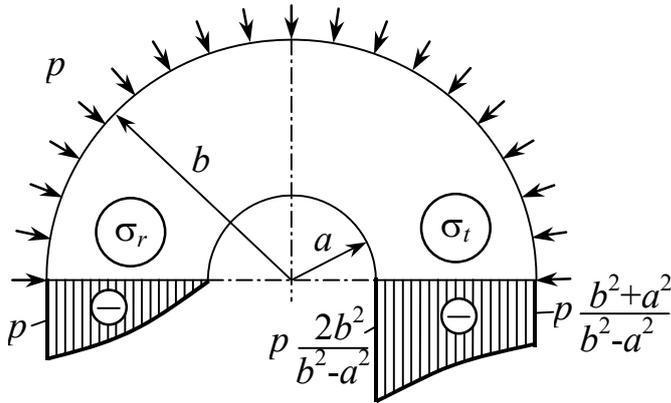
$$\sigma_{\text{ЭКВ III}} = p \frac{2(a+t)^2}{(2a+t) \cdot t} = p \frac{2a^2(1+t/a)^2}{2a \cdot t(1+t/2a)} \approx p \frac{a}{t}. \quad (2.11)$$

Если толщина цилиндра увеличивается, то наибольшие напряжения в нем при неизменном давлении уменьшается, но не беспредельно. Рассмотрим случай, когда $b \rightarrow \infty$, т.е. когда цилиндр имеет бесконечно большую толщину. Тогда выражение (2.10) принимает вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ III}} = 2p. \quad (2.12)$$

В действительности, ограничиваясь точностью 5 - 6%, мы можем применять формулу (2.12) для цилиндра с отношением $b/a > 4$. Существенно также, что форма внешнего контура в этом случае не оказывает влияния на распределение напряжений.

Цилиндр, нагруженный внешним давлением. В этом



случае $p_a = 0$, $p_b = p$.

Выражение (2.5) принимает такой вид

$$\sigma_{r,t} = -\frac{pb^2}{b^2 - a^2} \left(1 \mp \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (2.13)$$

Эпюры напряжений по толщине цилиндра представлены на рисунке слева. Наибольшее эквивалентное напряжение имеет место у внутренней поверхности цилиндра и равно

$$\sigma_{\text{ЭКВ III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - \left(-p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \right) = p \frac{2b^2}{b^2 - a^2}. \quad (2.14)$$

Это выражение совпадает с тем, которое было получено для случая внутреннего давления.

2.1.2. Составные цилиндры

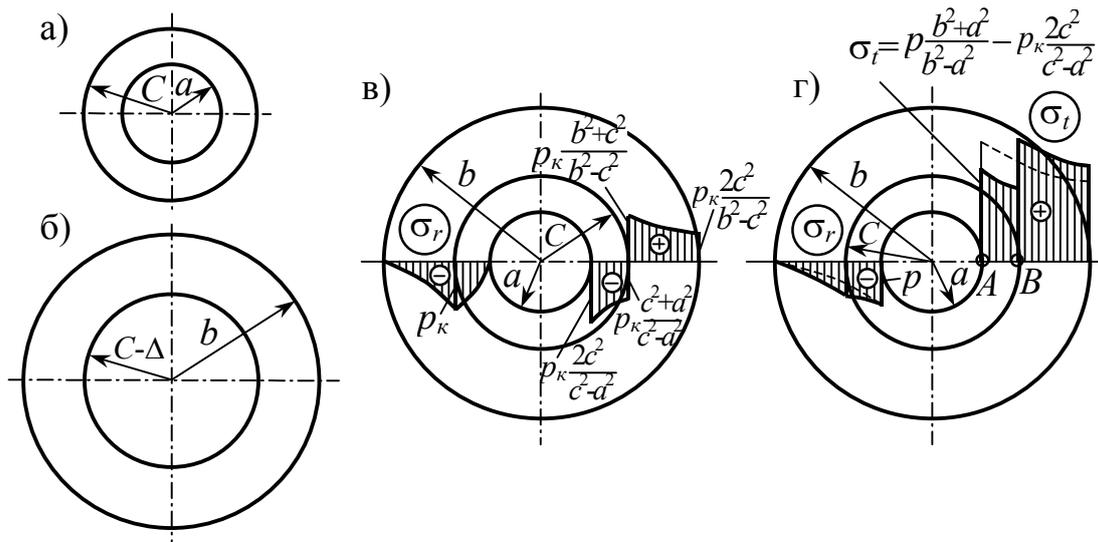


Рис. 2.1

Одним из способов повышения несущей способности толстостенных сосудов является создание составных, соединенных с натягом цилиндров. Этот прием используется как в технике высоких давлений, так и в артиллерийской практике для упрочнения стволов мощных орудий.

Берутся два цилиндра, причем внутренний радиус внешнего охватывающего цилиндра на величину натяга Δ меньше наружного радиуса внутреннего цилиндра. Если большой цилиндр нагреть, то отверстие в нем увеличится и его можно будет свободно надеть на внутренний цилиндр. При остывании между цилиндрами возникает контактное давление p_k , определяемое по формуле

$$p_k = \frac{E\Delta}{2c^3} \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{b^2 - a^2}. \quad (2.15)$$

В результате посадки внутренний цилиндр получает начальные напряжения сжатия, а в наружном цилиндре возникают растягивающие напряжения. В дальнейшем при нагрузке цилиндра рабочим давлением p остаточные напряжения суммируются с рабочими так, что во внутренней трубе имеет место частичная разгрузка (рис. 2.1, г). Поэтому составной цилиндр способен выдержать большее давление, чем обычный. Однако в результате натяга увеличиваются напряжения в зоне контакта у внешнего цилиндра. Поэтому натяг Δ должен быть подобран из условия равнопрочности цилиндров $\sigma_{\text{эквА}} = \sigma_{\text{эквВ}}$. Он равен

$$\Delta = \frac{2p}{E} \frac{cb^2(c^2 - a^2)}{b^2(c^2 - a^2) + c^2(b^2 - c^2)}. \quad (2.16)$$

Наивыгоднейшее соотношение между радиусами (условие Гадолина)

$$c = \sqrt{ab}, \quad (2.17)$$

которому соответствует минимальное эквивалентное напряжение

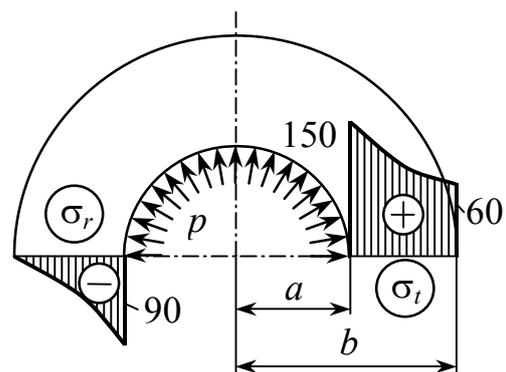
$$\sigma_{\text{ЭКВ}_{\min}} = pb/(b-a). \quad (2.18)$$

Сопоставляя выражения (2.18) и (2.10), мы видим, что посадка труб приводит к заметному снижению эквивалентного напряжения. Имеем $\sigma_{\text{ЭКВ}_{\min}}/\sigma_{\text{ЭКВ}} = (b+a)/(2b)$, т.е. если внутренний радиус цилиндра a мал, то посадка труб по соотношению Гадолина дает почти двукратное снижение эквивалентного напряжения. Вместе с тем для тонкостенных труб, т.е. при $a \approx b$ посадка труб не дает эффекта.

2.2. Примеры расчета

Пример 2.1. Определить наружный радиус цилиндра, предназначенного для удержания внутреннего давления $p = 90$ МПа при условии двукратного запаса. Предел текучести материала $\sigma_{\text{тр}} = 480$ МПа.

Внутренний радиус цилиндра $a = 5$ см. При найденных размерах построить эпюры σ_r и σ_t по толщине трубы.



Решение. Условие прочности

$$\sigma_{\text{экв III}} = p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \leq \frac{\sigma_{\text{тр}}}{n}.$$

Обозначим через $\beta = b/a$, тогда

$$\sigma_{\text{экв III}} = p \frac{2\beta^2}{\beta^2 - 1} \leq \frac{\sigma_{\text{тр}}}{n}.$$

Отсюда

$$\beta = \sqrt{\frac{\sigma_{\text{тр}}}{2pn} / \left(\frac{\sigma_{\text{тр}}}{2pn} - 1 \right)} = \sqrt{\frac{480}{2 \cdot 90 \cdot 2} / \left(\frac{480}{2 \cdot 90 \cdot 2} - 1 \right)} = 2.$$

Следовательно, $b = \beta a = 2 \cdot 5 = 10$ см.

Вычисляем напряжения в крайних точках по толщине цилиндра:

при $r = a$ $\sigma_r = -p = -90$ МПа,

$$\sigma_t = p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} = p \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1} = \frac{5}{3} p = 150 \text{ МПа},$$

при $r = b$ $\sigma_r = 0$,

$$\sigma_t = p \frac{2a^2}{b^2 - a^2} = p \frac{2}{\beta^2 - 1} = \frac{2}{3} p = 60 \text{ МПа}$$

и строим эпюры σ_r и σ_t .

Пример 2.2. Длинная бетонная труба, имеющая наружный диаметр $d_n = 2b = 100$ см, заложена на глубине $H = 38$ м от поверхности воды. Считая давление воды равномерно распределенным по поверхности трубы, определить

необходимую толщину ее стенок, если допускаемое напряжение бетона на сжатие равно $[\sigma_c] = 2,1$ МПа. Построить также эпюры σ_r и σ_t по толщине трубы.

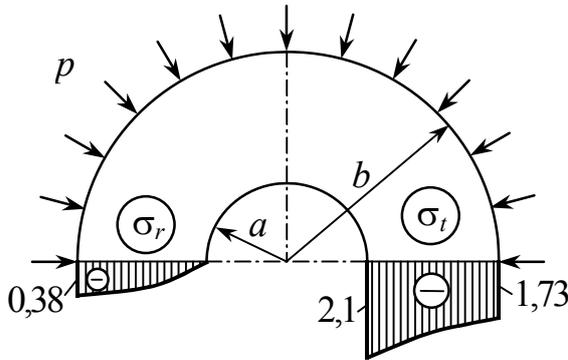
Решение

Из условия прочности

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= 2pb^2/(b^2 - a^2) = \\ &= 2p\beta^2/(\beta^2 - 1) \leq [\sigma_c] \end{aligned}$$

находим

$$\beta = \sqrt{\frac{[\sigma_c]}{2p} / \left(\frac{[\sigma_c]}{2p} - 1 \right)} = 1,25.$$



Следовательно,

$$a = b/\beta = 50/1,25 = 40 \text{ см}; \quad t = b - a = 50 - 40 = 10 \text{ см}.$$

Находим напряжения в крайних точках:

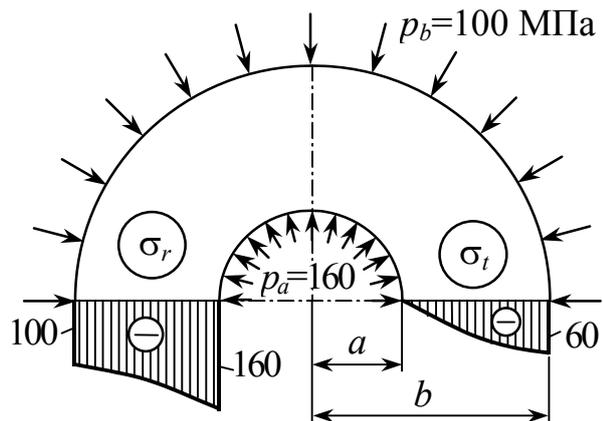
при $r = a$ $\sigma_r = 0$, $\sigma_t = -2pb^2/(b^2 - a^2) = -2p\beta^2/(\beta^2 - 1) = -2,1$ МПа;

при $r = b$ $\sigma_r = -p_b = -0,38$ МПа; $\sigma_t = -p(\beta^2 + 1)/(\beta^2 - 1) = -1,73$ МПа

и строим эпюры σ_r и σ_t .

Пример 2.3

Толстостенная труба нагружена внешним давлением $p_b = 100$ МПа. Требуется установить, при каком наибольшем внутреннем давлении в трубе не возникает растягивающих напряжений. Для предельного случая построить эпюры σ_r и σ_t .
Дано: $a = 10$ см, $b = 20$ см.



Решение. Радиальные напряжения σ_r отрицательны при любых значениях p_a и p_b , а окружные σ_t могут быть сжимающими или растягивающими в зависимости от соотношения величин p_a / p_b . Установим, при каком наибольшем внутреннем давлении p_a , окружные напряжения в точках, расположенных у внутренней и внешней поверхности трубы, неположительны:

- *внутренняя точка* ($r = a$)

$$\sigma_t = (p_a a^2 - p_b b^2)/(b^2 - a^2) + b^2(p_a - p_b)/(b^2 - a^2) \leq 0,$$

откуда $p_a(a^2 + b^2) \leq 2p_b b^2$, $p_a/p_b \leq 2\beta^2/(1+\beta^2) = 1,6$;

- *наружная точка* ($r = b$)

$$\sigma_t = (p_a a^2 - p_b b^2)/(b^2 - a^2) + a^2(p_a - p_b)/(b^2 - a^2) \leq 0,$$

откуда $2p_a a^2 \leq p_b(b^2 + a^2)$, $p_a/p_b \leq 0,5(1+\beta^2) = 2,5$.

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы о характере напряжений в трубе:

- при $p_a \leq 1,6 p_b = 160$ МПа возникают только сжимающие напряжения;

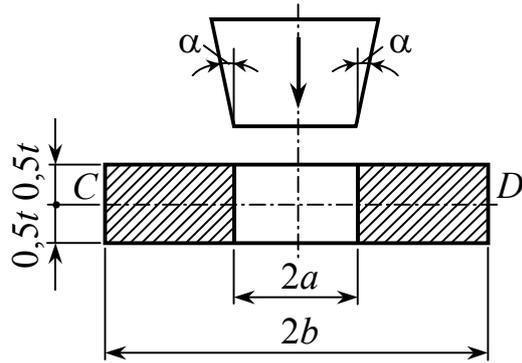
- при $1,6p_b < p_a < 2,5p_b$ возникают и растягивающие и сжимающие напряжения;

- при $p_a > 2,5p_b$ возникают только растягивающие напряжения. Таким образом, внутреннее давление не должно превышать $p_a = 160$ МПа. В этом случае $\sigma_{t/r=a} = 0$,

$$\sigma_{t/r=b} = [2p_a - p_b(1+\beta^2)]/(\beta^2 - 1) = [2 \cdot 160 - 100(1+2^2)]/(2^2 - 1) = -60 \text{ МПа.}$$

Пример 2.4

Абсолютно жесткий конический пуансон с небольшим углом скоса α вгоняется в толстостенное кольцо толщиной t . Определить да-



вление p_k , возникающее между клином и кольцом, в среднем сечении кольца CD , когда клин продвинется на всю толщину кольца t . Найти также наибольшие напряжения, возникающие в сечении CD кольца.

Решение. Радиальное перемещение точек среднего сечения CD , находящихся в контакте с пуансоном, определяется по формуле (2.2)

$$u = \varepsilon_t a = (a/E)(\sigma_t - \nu\sigma_r).$$

Учитывая, что

$$\sigma_r = -p_k, \quad \sigma_t = p_k(b^2 + a^2)/(b^2 - a^2) = p_k(\beta^2 + 1)/(\beta^2 - 1),$$

$$\text{получаем} \quad u = (p_k a/E)[(\beta^2 + 1)/(\beta^2 - 1) + \nu]. \quad (\text{а})$$

$$\text{С другой стороны,} \quad u = 0,5t \cdot \alpha. \quad (\text{б})$$

Приравнявая выражения (а) и (б), найдем искомое контактное давление

$$p_k = \frac{E \cdot t \cdot \alpha (\beta^2 - 1)}{2a [\beta^2 (1 + \nu) + 1 - \nu]}.$$

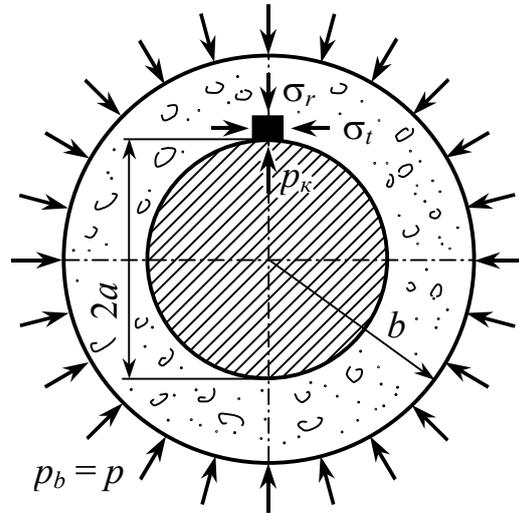
Теперь можно определить наибольшие напряжения в сечении CD :

- радиальное $|\sigma_r| = p_k$,

- окружное $\sigma_t = p_k(b^2 + a^2)/(b^2 - 1) = p_k(\beta^2 + 1)/(\beta^2 - 1)$.

Пример 2.5

Определить давление p_k между бетонной трубой и абсолютно жестким сердечником, а также проверить прочность трубы, используя гипотезу О. Мора. Дано: $E_\sigma = 20$ ГПа, $\nu_\sigma = 0,16$; $[\sigma_p] = 0,4$ МПа; $[\sigma_c] = 2$ МПа; $p = 1,2$ МПа; $\beta = b/a = 2$.



Решение

Так как сердечник является абсолютно жестким, то радиальные перемещения точек трубы, находящиеся в контакте с сердечником, равны нулю, т.е.

$$u_{/r=a} = (a/E)(\sigma_t - \nu\sigma_r) = 0.$$

После подстановки напряжений

$$\sigma_r = -p_a = -p_k,$$

$$\sigma_t = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + b^2 \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} = \frac{p_a (1 + \beta^2) - 2 p_b \beta^2}{\beta^2 - 1}$$

оно принимает следующий вид:

$$\frac{a}{E} \left[\frac{p_k (1 + \beta^2) - 2 p \beta^2}{\beta^2 - 1} + \nu p_k \right] = 0$$

Отсюда

$$p_k = p \frac{2\beta^2}{1 + \beta^2 + \nu(\beta^2 - 1)} = 1,2 \frac{2 \cdot 2^2}{1 + 2^2 + 0,16(2^2 - 1)} = 1,75 \text{ МПа.}$$

Следовательно, главные напряжения в опасной точке (у внутренней поверхности трубы)

$$\sigma_T = -p_k = -1,75 \text{ МПа}; \quad \sigma_t = \frac{p_k(1 + \beta^2) - 2p\beta^2}{\beta^2 - 1} = -0,283 \text{ МПа},$$

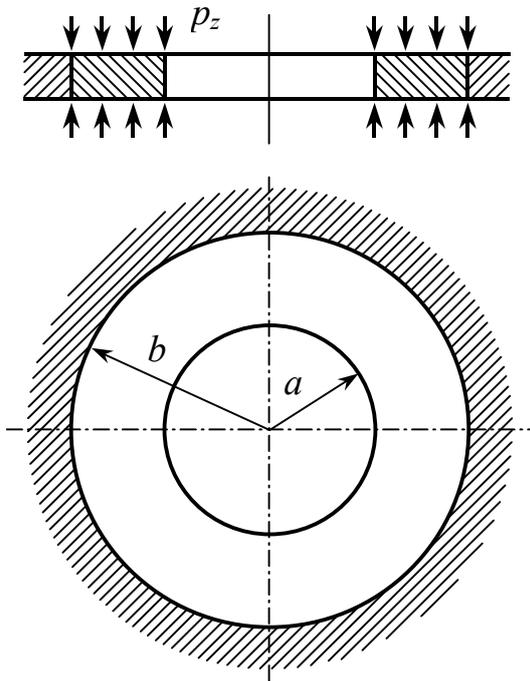
$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_t = -0,283 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = \sigma_r = -1,75 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение по гипотезе О.Мора

$$\sigma_{\text{эквМ}} = \sigma_1 - m\sigma_3 = 0 - 0,2 \cdot (-1,75) = 0,35 \text{ МПа},$$

где $m = [\sigma_p]/[\sigma_c] = 0,4/2 = 0,2$.

Так как $\sigma_{\text{эквМ}} = 0,35 < [\sigma_p] = 0,4 \text{ МПа}$, то прочность трубы достаточна.



Пример 2.6

Определить граничное (контактное) давление p_k между кольцом и абсолютно жесткой оболочкой, если известны значения p_z , a , b и ν .

Решение

Оболочка является абсолютно жесткой, поэтому перемещения точек наружной поверхности кольца равны нулю,

т.е. $u_b = \varepsilon_t b = (b/E)[\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] = 0$.

После подстановки напряжений

$$\sigma_z = -p_z, \quad \sigma_r = -p_b = -p_k, \quad \sigma_t = -p_k \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} = -p_k \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1}$$

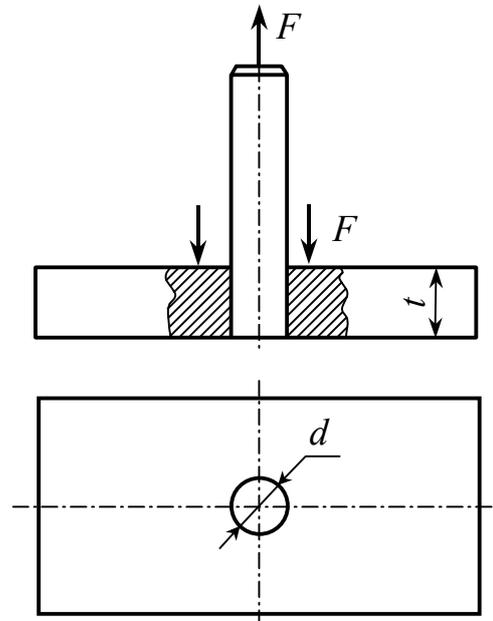
оно принимает вид
$$\frac{b}{E} \left[-p_k \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1} + \nu(p_k + p_z) \right] = 0,$$

откуда
$$p_k = \frac{\nu p_z (\beta^2 - 1)}{\beta^2 (1 - \nu) + 1 + \nu}.$$

В частности, при $\beta = 2, \quad \nu = 1/3, \quad p_k = 0,25p_z.$

Пример 2.7

Абсолютно жесткий стержень установлен с натягом в стальной плите. Какую силу следует приложить к стержню в осевом направлении, чтобы вытянуть его из плиты? Известен натяг $\Delta = 0,0195$ мм; диаметр стержня $d = 60$ мм, толщина плиты $t = 106$ мм, коэффициент трения между плитой и стержнем $f = 0,25$.



Решение

Так как размеры плиты в плане значительно больше диаметра отверстия d , то $b/a > 4$ и напряжения точек плиты у края отверстия равны (при $r = a = 0,5d$)

$$\sigma_t = p_k, \quad \sigma_r = -p_k.$$

Перемещения этих же точек равны натягу Δ , т.е. $u_a = \Delta$. (а)

С другой стороны, на основании закона Гука

$$u_a = \varepsilon_t a = \frac{a}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_r) = \frac{p_k a}{E} (1 + \nu). \quad (б)$$

Приравнявая выражения (а) и (б), найдем контактное давление

$$p_k = E \frac{\Delta}{0,5d(1 + \nu)} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0,0195}{0,5 \cdot 60 \cdot 1,3} = 100 \text{ МПа.}$$

Искомая сила, рассматриваемая как сила трения, будет равна

$$F = f p_k \pi d \cdot t = 0,25 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 106 \cdot 10^{-3} = 500 \text{ кН.}$$

Пример 2.8. На цилиндр с внутренним диаметром $d_b = 2a = 20$ мм и наружным диаметром $d_c = 2c = 30$ мм надет с натягом цилиндр с наружным диаметром $d_n = 2b = 40$ мм. Составной цилиндр подвергается внутреннему давлению $p = 250$ МПа. Какой необходимо создать натяг, чтобы кольцевое напряжение на внутренней поверхности составного цилиндра было на 30% меньше напряжения в несоставном цилиндре тех же размеров?

Решение. По условию задачи начальные сжимающие напряжения во внутренних точках, обусловленные натягом, составляют 30% от рабочих, т.е. согласно формулам (2.9) и (2.13) имеем

$$p_k \frac{2c^2}{c^2 - a^2} = 0,3p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2},$$

откуда находим контактное давление между цилиндрами

$$p_k = \frac{0,3p(b^2 + a^2)(c^2 - a^2)}{2c^2(b^2 - a^2)}.$$

С другой стороны, по формуле (2.15)

$$p_k = \frac{E\Delta}{2c^3} \cdot \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{b^2 - a^2}.$$

Приравнивая эти выражения, находим искомый натяг

$$\Delta = \frac{0,3p}{E} \frac{c(b^2 + a^2)}{b^2 - c^2} = \frac{0,3 \cdot 250 \cdot 15(20^2 + 10^2)}{200 \cdot 10^3 \cdot (20^2 - 15^2)} = 16,1 \text{ мкм.}$$

Пример 2.9. Найти оптимальное контактное давление p_k составного цилиндра, вызванное натягом, из условия равнопрочности внутреннего и наружного цилиндров, а также допускаемое внутреннее давление, сопоставив его с соответствующей величиной для цельного цилиндра. Дано: $d_B = 2a = 80$ мм, $d_H = 2b = 146$ мм, $d_C = 2c = 114$ мм, $[\sigma] = 500$ МПа.

Решение. Для обоих цилиндров наибольшие напряжения возникают во внутренних точках:

- *внутренний цилиндр* (точка А)

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p, \quad \sigma_t = p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - p_k \frac{2c^2}{c^2 - a^2},$$

$$\sigma_{\text{экв}A} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - \sigma_r = 2 \left(p \frac{b^2}{b^2 - a^2} - p_k \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right);$$

- *наружный цилиндр* (точка В)

$$\text{при } r = c \quad \sigma_T = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) - p_k,$$

$$\sigma_t = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right) + p_k \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2},$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}_B} = \sigma_t - \sigma_r = 2 \left[\frac{pa^2 b^2}{c^2 (b^2 - a^2)} + \frac{p_k b^2}{b^2 - c^2} \right].$$

Из условия равнопрочности цилиндров $\sigma_{\text{ЭКВ}_A} = \sigma_{\text{ЭКВ}_B}$,

т.е.
$$p \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2} = p_k \left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right).$$

Отсюда
$$p_k = p \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2} / \left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right) = 0,16p.$$

Используя условие прочности $\sigma_{\text{ЭКВ}_A} = [\sigma]$

или
$$2 \left(\frac{pb^2}{b^2 - a^2} - 0,16p \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right) = [\sigma],$$

находим допускаемое давление

$$[p] = \frac{[\sigma]}{2} / \left(\frac{b^2}{b^2 - a^2} - \frac{0,16c^2}{c^2 - a^2} \right) = 224 \text{ МПа.}$$

Для цельного цилиндра условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ}_{\max}} = \sigma_{\text{ЭКВ}_A} = p_o \frac{2b^2}{b^2 - a^2} = [\sigma],$$

откуда
$$[p_o] = \frac{[\sigma](b^2 - a^2)}{2b^2} = \frac{500(73^2 - 40^2)}{2 \cdot 73^2} = 175 \text{ МПа.}$$

Как видим, несущая способность составного цилиндра с натягом больше, чем у цельного тех же размеров в

$$[p]/[p_o] = 224/175 = 1,28 \text{ раза или на } 28\%.$$

Пример 2.10. На стальной вал диаметра $d = 40$ мм надет с натягом стальной шкив диаметра $D = 80$ мм. Найти величину минимального натяга, обеспечивающего передачу при помощи трения момента $M = 1,2$ кН·м. Коэффициент трения $f = 0,15$; ширина шкива $b = 60$ мм; $E = 200$ ГПа. Кроме того, определить максимально допустимый натяг из условия, чтобы в материале не возникали пластические деформации. Предел текучести $\sigma_T = 300$ МПа. Воспользоваться III теорией прочности.

Решение. Момент сил трения приравниваем внешнему

$$M = p_k \pi d \cdot b \cdot 0,5d = 0,5 p_k \pi d^2 b.$$

Отсюда находим требуемое контактное давление

$$p_k = 2M / (\pi d^2 \cdot b). \quad (a)$$

С другой стороны, по формуле (2.15), полагая в ней $a = 0$, $c = 0,5d$; $b = 0,5D$, имеем

$$p_k = \frac{E \cdot \Delta}{2 \cdot (0,5d)^3} \cdot \frac{(0,5d)^2 \cdot 0,5^2 (D^2 - d^2)}{(0,5D)^2} = \frac{E \cdot \Delta (1 - \alpha^2)}{d}. \quad (б)$$

Приравнявая выражения (а) и (б), получим

$$\Delta = \frac{2M}{f \cdot \pi d \cdot b (1 - \alpha^2) E} = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{0,15 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-2} (1 - 0,5^2) \cdot 200 \cdot 10^9} =$$

$$= 14,1 \text{ мкм.}$$

Условие наступления пластических деформаций по III теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - \sigma_r = \sigma_T.$$

Для внутренних точек шкива имеем

$$\sigma_{\text{экв}III} = p_{\text{к}}^* \frac{2b^2}{b^2 - a^2} = p_{\text{к}}^* \frac{2 \cdot (0,5D)^2}{0,5^2(D^2 - d^2)} = \frac{2p_{\text{к}}^*}{1 - \alpha^2} = \sigma_T.$$

Отсюда контактное давление

$$p_{\text{к}}^* = 0,5\sigma_T(1 - \alpha^2).$$

Максимально допустимый натяг согласно формуле (б) будет равен

$$\Delta^* = p_{\text{к}}^* d / [E(1 - \alpha^2)] = 0,5\sigma_T d / E = 0,03 \text{ мм}.$$

Пример 2.11. В круглое отверстие стальной плиты толщиной $t = 50$ мм вставлен с натягом стальной стержень диаметра $d = 40$ мм, к которому приложена растягивающая сила $F = 60$ кН. Найти величину минимального натяга, необходимого для удержания стержня при помощи трения, если коэффициент трения $f = 0,18$. Определить запас прочности по пределу текучести $\sigma_T = 300$ МПа. Размеры плиты считать бесконечно большими. Модуль упругости равен $E = 200$ ГПа.

Решение. Полагая в формуле (2.15) $c = 0,5d$; $a = 0$, $b = \infty$, находим контактное давление между стержнем и плитой

$$p_k = E\Delta/d.$$

С другой стороны, контактное давление, необходимое для удержания стержня, определяется из условия

$$F = f \cdot p_k \pi d \cdot t, \text{ откуда } p_k = F/(f \cdot \pi d \cdot t).$$

Следовательно, искомый натяг будет равен

$$\Delta = F/(f \cdot \pi \cdot t \cdot E) = 10,6 \text{ мкм.}$$

Эквивалентное напряжение в точках плиты, примыкающих к отверстию,

$$\sigma_{\text{экр III}} = 2p_k = 2E\Delta/d.$$

Искомый запас прочности по пределу текучести

$$n_T = \sigma_T / \sigma_{\text{экр III}} = \sigma_T d / (2E\Delta),$$

$$n_T = 300 \cdot 40 / (2 \cdot 200 \cdot 10,6 \cdot 10^{-3}) = 2,83.$$

3. ОСНОВЫ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

3.1. Краткие теоретические сведения

3.1.1. Основные понятия

Многие детали машин в процессе работы испытывают действие переменных во времени напряжений. Если эти напряжения превышают определенный уровень, то в металле детали начинают происходить необратимые изменения, которые приводят к образованию трещины. Трещина, постепенно развиваясь, в конце концов вызывает быстро протекающее разрушение детали. Накопление необратимых механических изменений в материале при приложении циклических нагрузок называют *усталостью*, а разрушение в результате постепенного развития трещины – *усталостным разрушением*.

Срок службы детали до момента ее разрушения зависит от возникающих в ней напряжений. При больших напряжениях для разрушения бывает достаточно 5-10 циклов. При меньших напряжениях деталь выдерживает миллионы и миллиарды циклов, а при еще меньших – способна работать неограниченно долго. Например, по данным, систематизированным Н.Н. Давиденковым, железнодорожный мост за время его эксплуатации в среднем выдерживает $2 \cdot 10^6$ циклов нагружений, коленчатый вал авиационного двигателя – $1,8 \cdot 10^7$, ось подвижного состава железных дорог – $2 \cdot 10^8$, вал паровой

турбины - $1,6 \cdot 10^{10}$, лопатки паровых турбин – 10^{11} циклов нагружений.

Механизм усталостного разрушения. Физико-механическая природа усталостного разрушения изучалась различными методами (рентгеновским, микроскопическим, поляризационно-оптическим, электроноскопическим и другими). Это позволило выявить первенствующую роль поликристаллического неоднородного строения металлов для объяснения процесса усталостного разрушения. Конструкционные стали и другие сплавы представляют собой мелкокристаллический конгломерат, кристаллиты которого имеют случайную ориентировку. Кристаллиты, составляющие структуру металла, обладают анизотропией, т.е. различными упругими свойствами и различной прочностью в зависимости от ориентировки кристаллографических осей. Поэтому при деформировании конгломерата напряжения в отдельных кристаллитах оказываются значительно больше, чем в других, и в них уже на ранних стадиях деформирования возникают пластические деформации. Накопление пластических деформаций в наиболее слабых и наиболее напряженных кристаллитах приводит к появлению в них *линий скольжения*. При повторных нагружениях число этих линий скольжения увеличивается и постепенно они сливаются, образуют *полосы скольжения и субмикроскопические трещины*. Слиянием субмикроскопических трещин и созданием условий для развития прогрессирующей *макроскопической трещины* заканчивается первая стадия усталостного разрушения. Число циклов, приходящееся на эту

стадию (называемую иногда подготовительной или инкубационной), составляет 60-90% от полного разрушающего числа циклов. Вторая стадия, состоящая в прогрессирующем развитии макроскопической трещины, занимает, следовательно, меньшую часть разрушающего числа циклов.

Кривая усталости. Стандартные испытания на усталость состоят в нагружении растягиваемых, скручиваемых или изгибаемых образцов силами, периодически меняющимися во времени. При этом в образце возникают циклически изменяющиеся напряжения. Совокупность последовательных значений напряжений за один период их изменения называется *циклом напряжений*. Каждый цикл характеризуется следующими параметрами (рис. 3.1):

- максимальным напряжением цикла σ_{\max} или τ_{\max} (наибольшим по алгебраической величине);

- минимальным напряжением цикла σ_{\min} или τ_{\min} (наименьшим по алгебраической величине);

- средним напряжением цикла σ_m или τ_m

$$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2, \quad \tau_m = (\tau_{\max} + \tau_{\min})/2; \quad (3.1)$$

- амплитудой цикла σ_a или τ_a

$$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2, \quad \tau_a = (\tau_{\max} - \tau_{\min})/2; \quad (3.2)$$

- коэффициентом асимметрии цикла R

$$R_\sigma = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}, \quad R_\tau = \tau_{\min}/\tau_{\max}. \quad (3.3)$$

В случае, когда $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, $R_\sigma = -1$, и цикл называется *симметричным*. Он встречается, например, при изгибе

вращающегося вала постоянным по величине моментом (изгиб при вращении).

Если $\sigma_{\min} = 0$ или $\sigma_{\max} = 0$, цикл называется *пульсационным*. Для пульсационного цикла $R_{\sigma} = 0$ или $R_{\sigma} = -\infty$. Пульсационный цикл возникает, например, в зубе шестерни при ее вращении в одну сторону и передаче при этом постоянного по величине крутящего момента. Циклы,

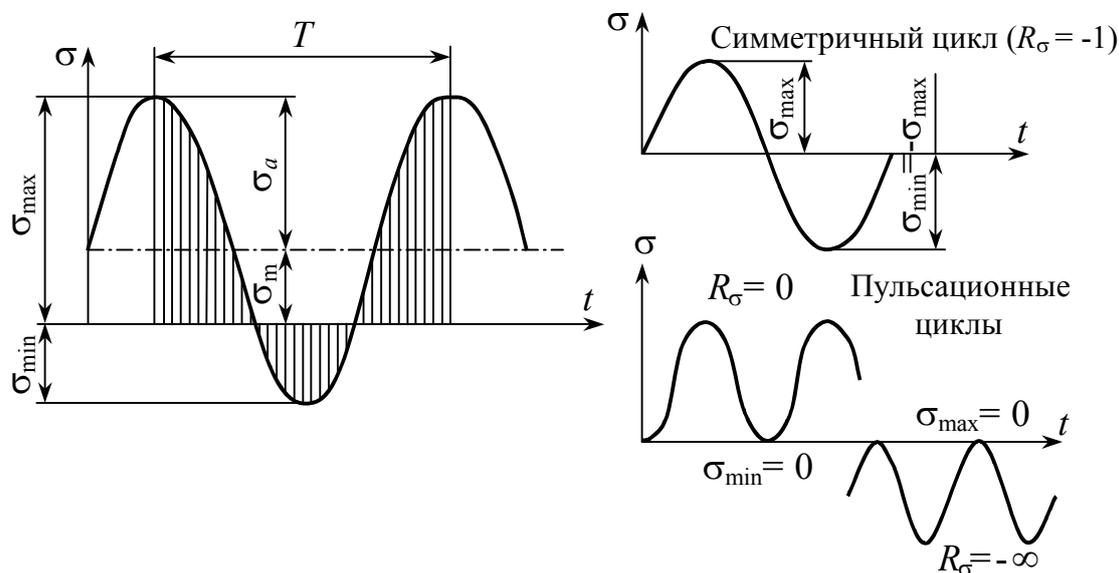


Рис. 3.1

имеющие одинаковые показатели R , называются *подобными*.

Самыми распространенными являются испытания при симметричном цикле напряжений. Испытания обычно доводят до некоторого предельного числа циклов N_B , называемого базой испытаний. Обычно $N_B = 10$ млн циклов для образцов из стали, 50 -100 млн для образцов из цветных металлов.

Результаты испытаний представляют графически (рис. 3.2). По горизонтали откладывают разрушающее число циклов N (обычно по логарифмической шкале), а по вертикали – соответствующее

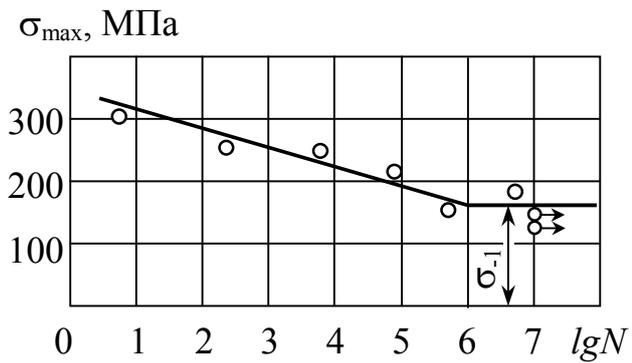


Рис. 3.2

максимальное напряжение цикла или его амплитуду. Даже при самых тщательных испытаниях числа N имеют разброс, достигающий иногда трех порядков. Этот разброс является естественным следствием вероятностной природы усталостного разрушения. По найденным опытным точкам путем осреднения проводят кривую, называемую *кривой усталости* или *кривой Велера*.

Предел выносливости. По кривой усталости определяется предел выносливости образца, выступающий как механическая характеристика, связанная со спецификой циклического нагружения. Он равен ординате горизонтального участка кривой усталости. Обычно под пределом выносливости понимают наибольшее напряжение цикла, которое образец может выдержать не разрушаясь до базы испытания N_B .

Предел выносливости обозначается через σ_R , где индекс R соответствует коэффициенту асимметрии цикла. Так, для симметричного цикла обозначение предела выносливости принимает вид σ_{-1} , для пульсационного - σ_c и т.д.

Предел выносливости находится в корреляционной связи с другими прочностными характеристиками материала. В

случаях, когда нет опытных данных о значениях предела выносливости, можно использовать следующие эмпирические соотношения:

- для стали $\sigma_{-1} \approx (0,4 \dots 0,5)\sigma_{\text{пч}}$,

причем для углеродистых сталей берут значения ближе к нижней границе, для легированных – к верхней;

- для цветных металлов $\sigma_{-1} \approx (0,25 \dots 0,5)\sigma_{\text{пч}}$;

- для серого чугуна $\sigma_{-1} \approx 0,45\sigma_{\text{пчр}}$.

Существуют также приближенные зависимости между пределом выносливости при симметричном цикле изгиба σ_{-1} и пределами выносливости при других видах деформации:

- при центральном растяжении-сжатии

$$\sigma_{-1p} \approx (0,7 \dots 0,9)\sigma_{-1};$$

- при кручении для обычных сталей $\tau_{-1} \approx 0,6\sigma_{-1}$;

- при кручении для хрупких материалов (высоколегированная сталь, чугун) $\tau_{-1} \approx 0,8\sigma_{-1}$.

Из этих зависимостей следует, что при неоднородном напряженном состоянии предел выносливости всегда выше, чем при однородном.

Предел выносливости может быть определен не только при симметричном цикле, но также и при асимметричном. Образцы в условиях несимметричных циклов испытываются обычно не на изгиб, а на растяжение-сжатие или на кручение специальными машинами – гидропульсаторами. Для характеристики сопротивляемости материала действию переменных напряжений с различной асимметрией цикла строится так

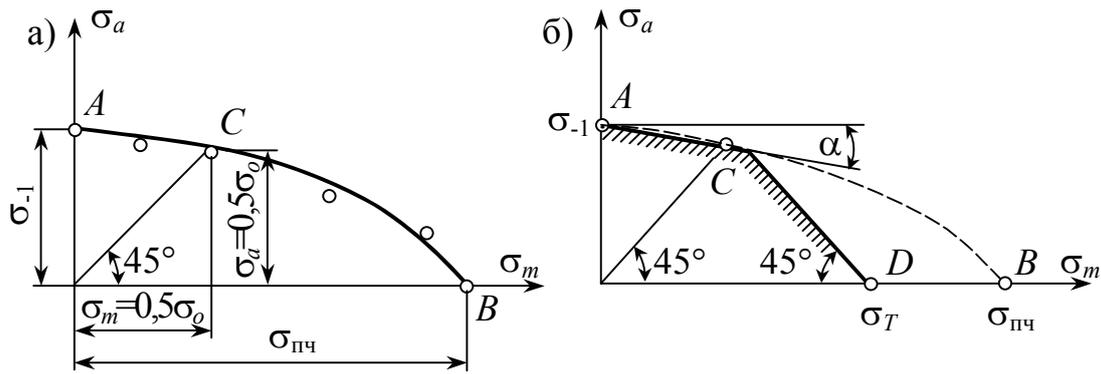


Рис. 3.3

называемая диаграмма *предельных амплитуд* в координатах $\sigma_a - \sigma_m$ (по оси ординат откладывают предельную амплитуду цикла σ_a , по оси абсцисс – среднее напряжение цикла). Очевидно, что эта кривая (рис. 3.3,а) отсекает на оси ординат отрезок, равный σ_{-1} , а на оси абсцисс отрезок, равный пределу прочности материала $\sigma_{пч}$.

Для расчета на прочность при несимметричных циклах диаграмма предельных амплитуд должна быть схематизирована. Например, С.В. Серенсен и Р.С. Кинасошвили предложили схематизацию из двух отрезков прямых, которые строятся по результатам трех серий испытаний образцов: при симметричном цикле σ_{-1} (точка A), при пульсационном цикле σ_o (точка C) и статическом разрыве σ_T (точка D). Соединяя точки A и C прямой и проводя из D прямую под углом 45° , получим приближенную диаграмму предельных амплитуд (рис.3.3,б). Уравнение прямой AC , имеющей угловой коэффициент $\psi_\sigma = \operatorname{tg}\alpha$, можно представить в виде

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m, \quad (3.4)$$

где $\psi_\sigma = (2\sigma_{-1} - \sigma_o) / \sigma_o$ - коэффициент, характеризующий чувствительность материала к асимметрии цикла. Как показала

систематизация многочисленных опытов, значения ψ_σ лежат в пределах от 0,1 до 0,2 для углеродистых сталей и от 0,2 до 0,3 – для легированных сталей (при кручении значения ψ_τ соответственно равны 0,05 ... 0,1 и 0,1 ... 0,15).

Правая часть диаграммы аппроксимируется прямой, проходящей через точку D и составляющей угол 45° с координатными осями σ_m и σ_a , т.е.

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a = \sigma_r.$$

Смысл этой прямой очевиден. Максимальное напряжение цикла $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$ не должно превышать предела текучести σ_T , чтобы не появлялись недопустимо большие пластические деформации.

3.1.2. Факторы, влияющие на величину предела выносливости

Пределы выносливости натуральных деталей σ_{-1D} значительно ниже (в ряде случаев в 3-6 раз и более) пределов выносливости стандартных лабораторных образцов σ_{-1} , которые имеют малые размеры ($d_o = 7 - 10$ мм), плавные очертания и тщательно полированную поверхность. Коэффициент

$$K = \sigma_{-1} / \sigma_{-1D} \quad (3.5)$$

характеризует указанное снижение предела выносливости. Это снижение объясняется суммарным влиянием различных конструкционных, технологических и эксплуатационных факторов, одни из которых повышают, другие понижают сопротивление усталости.

Существенное влияние на сопротивление усталости оказывают следующие факторы:

- 1) абсолютные размеры поперечного сечения (масштабный фактор);
- 2) концентрация напряжений;
- 3) качество обработки поверхности;
- 4) состояние поверхностного слоя: химический состав, механические свойства, остаточные напряжения, зависящие от условий изготовления детали;
- 5) эксплуатационные факторы (коррозия, температура, частота нагружения и др.).

Масштабный фактор. Под масштабным фактором понимают снижение предела выносливости с увеличением размеров детали. Количественная оценка влияния на усталостную прочность абсолютных размеров поперечного сечения детали производится с помощью *коэффициента масштабного фактора* (масштабного коэффициента), равного

$$K_{d\sigma} = \sigma_{-1d} / \sigma_{-1} \quad (3.6)$$

где σ_{-1d} - предел выносливости гладких образцов диаметром d ; σ_{-1} - предел выносливости гладких лабораторных образцов малого диаметра $d_o = 7,5$ мм.

Основные причины, вызывающие снижение пределов выносливости с увеличением размеров детали, следующие:

- 1) ухудшение качества металла отливки или поковки;
- 2) влияние термической и механической обработки при изготовлении деталей различных размеров;
- 3) увеличение вероятности появления опасных дефектов и перенапряженных зерен, что в связи со статической природой процесса усталостного разрушения приводит к увеличению вероятности разрушения.

Концентрация напряжений. Теоретические и экспериментальные исследования позволили установить, что в тех местах детали, где имеются разного рода отверстия, выточки, переходы от одних размеров и форм сечений к другим, какие-либо внутренние или внешние пороки в материале, а также в зоне контакта деталей наблюдается значительное возрастание действительных напряжений по сравнению с номинальными, вычисленными по обычным формулам сопротивления материалов. Явление повышения напряжений по сравнению с номинальными называется *концентрацией напряжений*, а причина ее возникновения – концентратором напряжений. Зона распространения повышенных напряжений ограничена узкой областью, расположенной в окрестности очага концентрации, поэтому эти напряжения называются также местными.

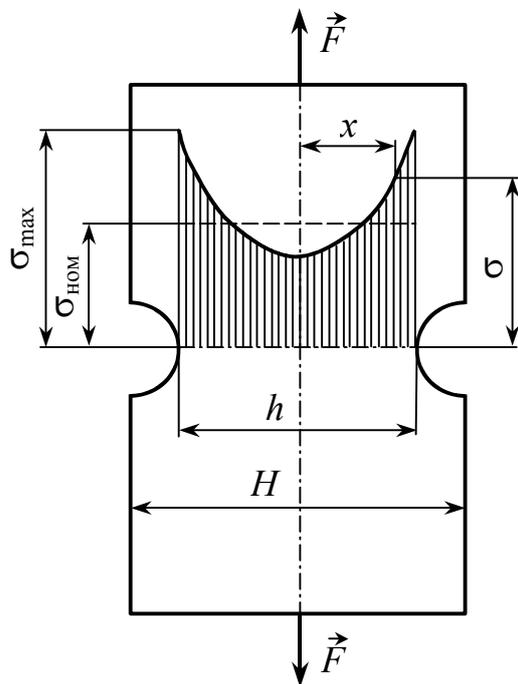


Рис. 3.4

На рис. 3.4 показана эпюра распределения напряжений при растяжении пластины с боковыми вырезами. Если вычислить напряжения в предположении их равномерного распределения, т.е. без учета концентрации напряжений, то получится величина, называемая номинальным напряжением

$$\sigma_{\text{ном}} = N/A = F/(bh),$$

где b – толщина пластины.

Фактическое напряжение в зоне концентрации у дна выточки σ_{\max} значительно больше $\sigma_{\text{НОМ}}$. Отношение $\sigma_{\max} / \sigma_{\text{НОМ}}$ характеризует степень концентрации напряжений и называется теоретическим коэффициентом концентрации напряжений, обозначаемым α_{σ} (α_{τ} для касательных напряжений), т.е.

$$\alpha_{\sigma} = \sigma_{\max} / \sigma_{\text{НОМ}}.$$

Распределение напряжений в деталях сложной формы и значения величин α_{σ} находят либо теоретически на основе методов теории упругости, либо экспериментально методом фотоупругости, тензометрированием и другими методами. Величины теоретических коэффициентов концентрации напряжений для ряда деталей можно определить по графикам, приведенным на рис. 3.5, 3.6, 3.7.

Наличие концентратора напряжений на образце приводит к снижению предела выносливости, которое оценивается эффективным коэффициентом концентрации K_{σ} , под которым понимается отношение предела выносливости образца без концентрации σ_{-1} к пределу выносливости образца таких же абсолютных размеров сечения, но с концентрацией $\sigma_{-1к}$, т.е.

$$K_{\sigma} = \sigma_{-1} / \sigma_{-1к} \quad (3.7)$$

Эффективные коэффициенты концентрации K_{σ} обычно имеют меньшие значения, чем теоретические α_{σ} . Оценить эту разницу можно с помощью коэффициентов чувствительности материала к концентрации напряжений:

$$q_{\sigma} = (K_{\sigma} - 1)/(\alpha_{\sigma} - 1) \quad \text{или} \quad q_{\tau} = (K_{\tau} - 1)/(\alpha_{\tau} - 1). \quad (3.8)$$

Величина q зависит в основном от свойств материала и лежит в пределах от 0 до 1. Для материалов с грубой структурой (серый чугун) коэффициент q близок к нулю. Для металлов и сплавов с высокой степенью структурной однородности (высокопрочные легированные стали) коэффициент q близок к единице.

Сопротивление усталости деталей зависит не только от величины коэффициента α_{σ} , но и от скорости убывания напряжений, т.е. их градиента (рис. 3.4)

$$G = \left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_{x=h/2}.$$

Под относительным градиентом понимается величина

$$\bar{G} = \frac{d\sigma}{dx} \cdot \frac{1}{\sigma_{\max}}.$$

Увеличение относительного градиента снижает чувствительность материала к местным напряжениям.

Обратное влияние оказывает линейная протяженность L очага концентрации. Чем больше величина L , тем большее число кристаллитов находится в зоне повышенных напряжений и возрастает вероятность образования усталостной трещины. Формулы для определения L и \bar{G} в некоторых практически важных случаях приведены в табл. 3.1.

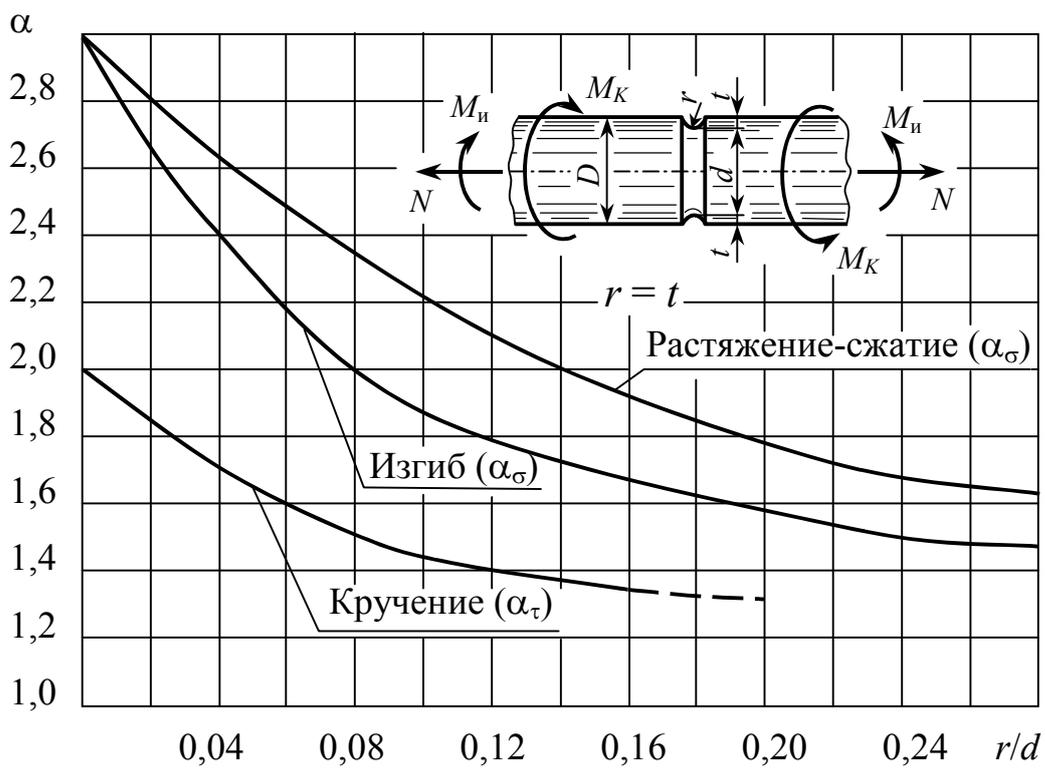


Рис. 3.5

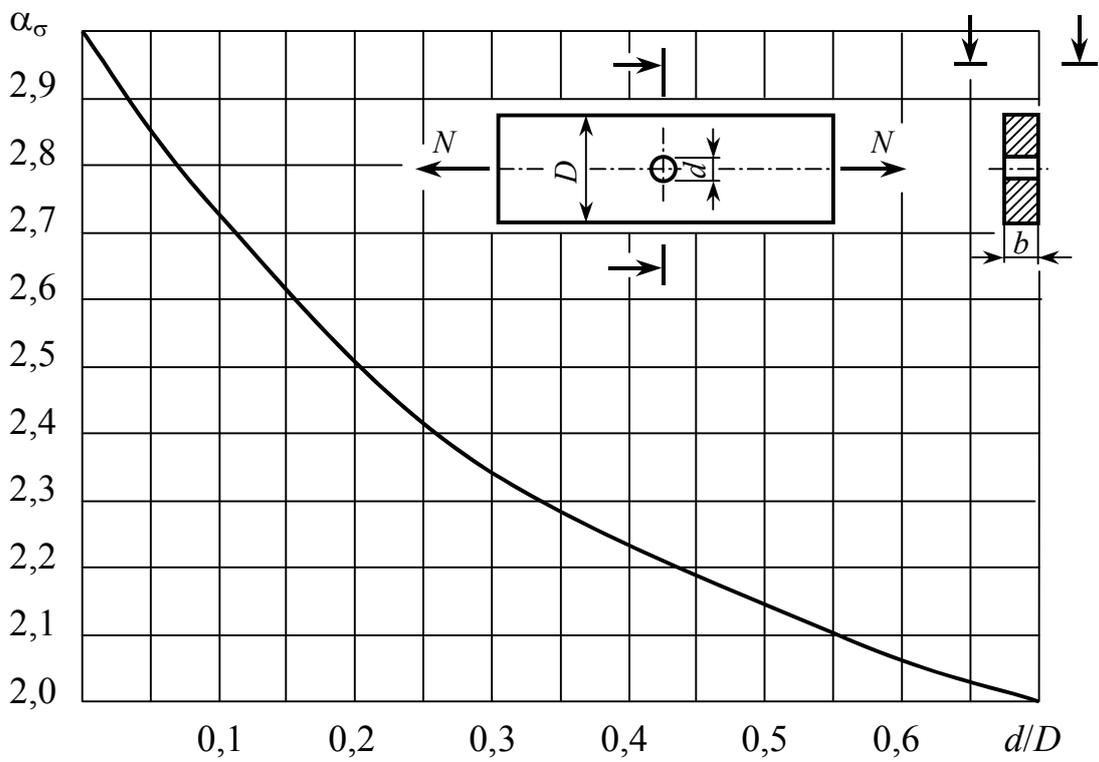


Рис. 3.6

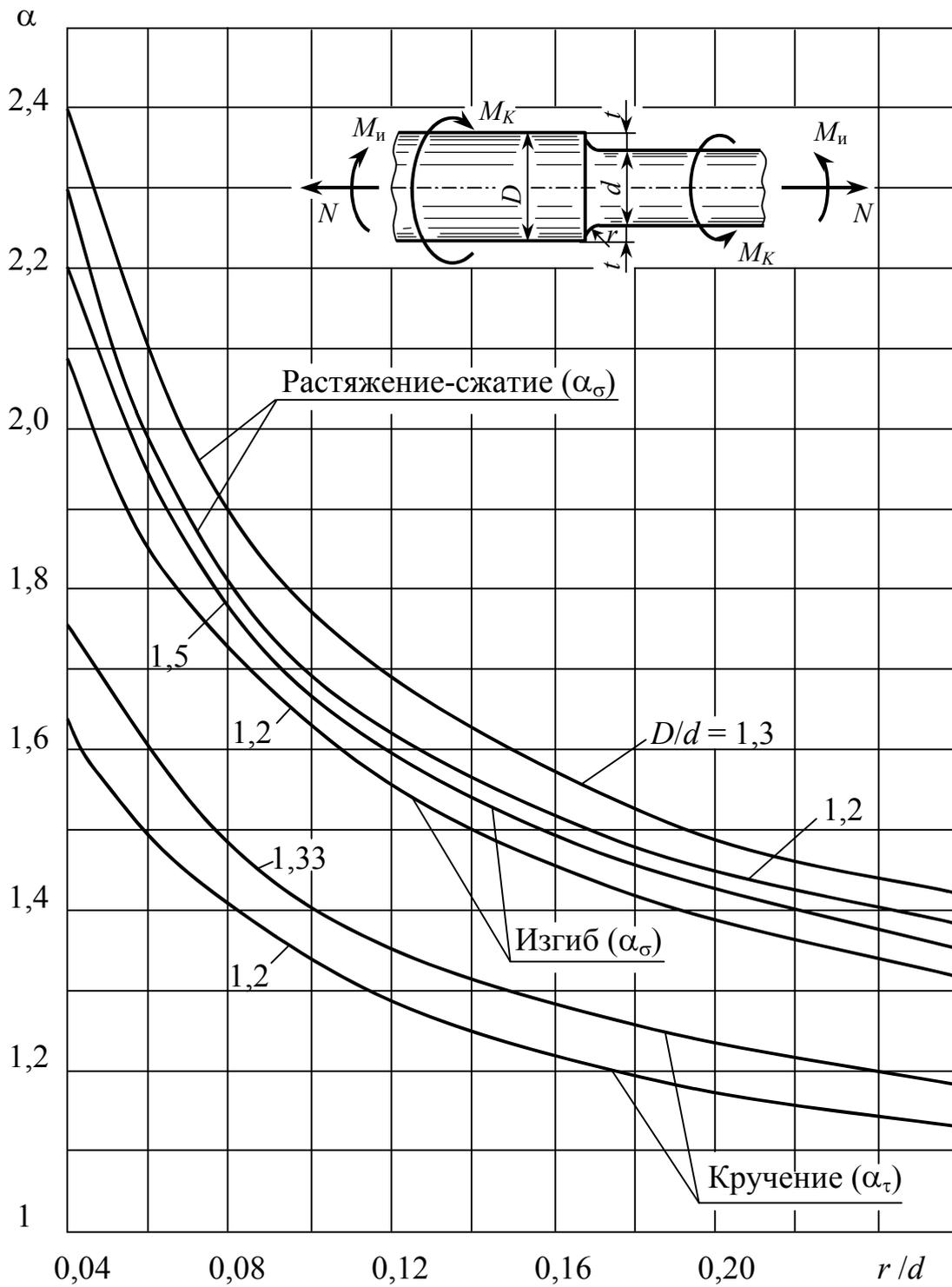


Рис. 3.7

Таблица 3.1

Линейная протяженность очага концентрации
и относительный градиент напряжений

Деталь	L, мм	Вид деформации		
		изгиб	растяжение и сжатие	кручение $\bar{G}_\tau, \text{мм}^{-1}$
		$\bar{G}, \text{мм}^{-1}$		
	2b	$H/h \geq 1,5$		—
		$2/r + 2/h$	$2/r$	
		$H/h < 1,5$		
		$\frac{2(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{h}$	$\frac{2(1+\varphi)}{r}$	
	πd	$D/d \geq 1,5$		$\frac{1}{r} + \frac{2}{d}$
		$2/r + 2/d$	$2/r$	
		$D/d < 1,5$		
		$\frac{2(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{d}$	$\frac{2(1+\varphi)}{r}$	
	2b	$H/h \geq 1,5$		—
		$2,3/r + 2/h$	$2,3/r$	
		$H/h < 1,5$		
		$\frac{2,3(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{h}$	$\frac{2,3(1+\varphi)}{r}$	
	πd	$D/d \geq 1,5$		$\frac{1,15}{r} + \frac{2}{d}$
		$2,3/r + 2/d$	$2,3/r$	
		$D/d < 1,5$		
		$\frac{2,3(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{d}$	$\frac{2,3(1+\varphi)}{r}$	
	2b	—	$\frac{2,3}{r}$	—

Примечание. Для случаев, указанных в таблице

$$\varphi = \frac{1}{2 + 4\sqrt{t/r}}, \text{ где } t = \frac{H-h}{2} \text{ или } t = \frac{D-d}{2}$$

Влияние концентрации напряжений, размеров и формы поперечного сечения, вида нагружения на величину предела выносливости хорошо объясняется и количественно описывается статистической теорией усталостного разрушения. По этой теории определяется множитель $K_{\sigma}/K_{d\sigma}$, учитывающий одновременно масштабный эффект и концентрацию напряжений и используемый в дальнейшем как единое целое. Для сталей, алюминиевых и магниевых сплавов, а также для чугуна с шаровидным графитом он определяется по формуле

$$\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} = \frac{2\alpha_{\sigma}}{1 + (88,3\bar{G} / L)^{\nu_{\sigma}}}. \quad (3.9)$$

Аналогично при кручении

$$\frac{K_{\sigma}}{K_{d\tau}} = \frac{2\alpha_{\tau}}{1 + (88,3\bar{G} / L)^{\nu_{\tau}}}. \quad (3.10)$$

Здесь 88,3 – коэффициент, имеющий размерность мм^2 . Величины α_{σ} и α_{τ} – уже известные нам теоретические коэффициенты концентрации напряжений, а ν_{σ} и ν_{τ} – показатели степени, постоянные для данного материала (при определенной температуре и частоте испытания).

Для углеродистых сталей $\nu_{\sigma} = 0,1 \dots 0,14$;

для легированных $\nu_{\sigma} = 0,04 \dots 0,08$;

для алюминиевых сплавов $\nu_{\sigma} = 0,08 \dots 0,09$;

для чугуна с шаровидным графитом $\nu_{\sigma} = 0,15$.

Значения ν_{τ} определены с меньшей достоверностью и для меньшего числа материалов. При отсутствии информации можно использовать следующее соотношение:

$$\nu_{\tau} \approx (1,5 \dots 2)\nu_{\sigma}.$$

Отношение $K_{\sigma}/K_{d\sigma}$ для валов с напрессованными деталями определяется по формуле

$$K_{\sigma}/K_{d\sigma} = (K_{\sigma}/K_{d\sigma})_o \xi' \xi'', \quad (3.11)$$

где $(K_{\sigma}/K_{d\sigma})_o$ – коэффициент, определяемый по рис. 3.8, который соответствует испытаниям до разрушения валов из стали с пределом прочности $\sigma_{пч} = 500$ МПа при давлении посадки $p \geq 30$ МПа;

ξ' - коэффициент, учитывающий влияние предела прочности (рис. 3.9);

ξ'' - коэффициент, учитывающий влияние давления напрессовки и определяемый по рис. 3.10.

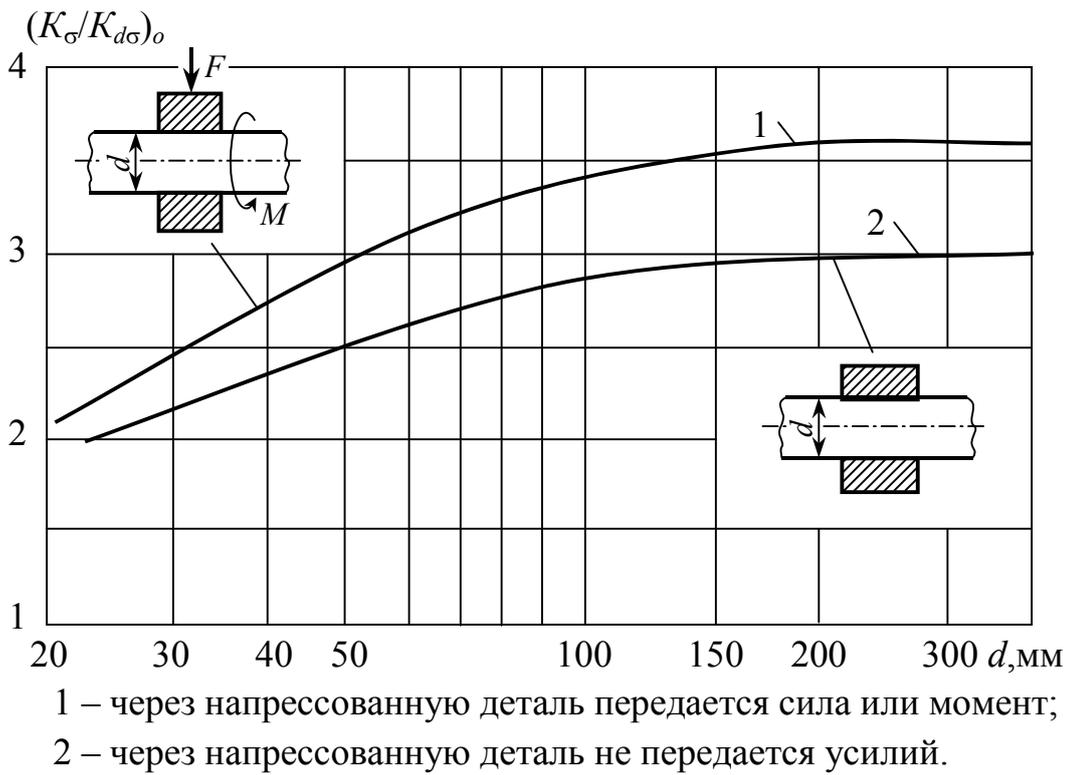


Рис. 3.8

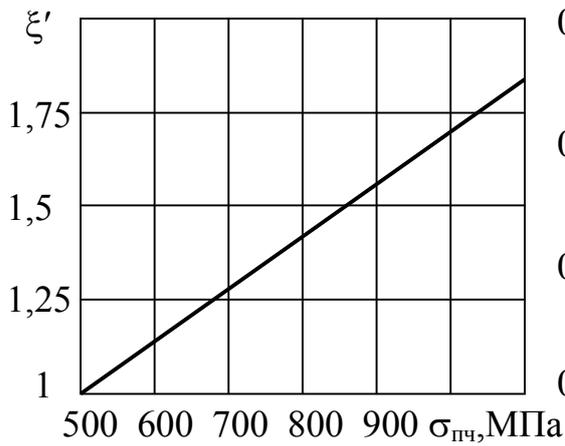


Рис. 3.9

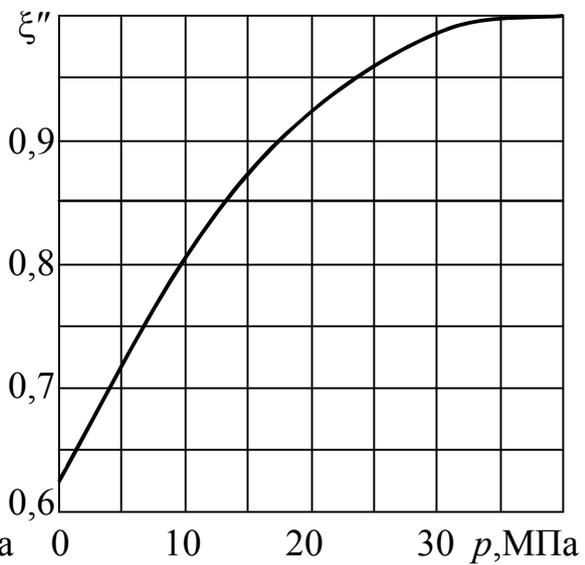


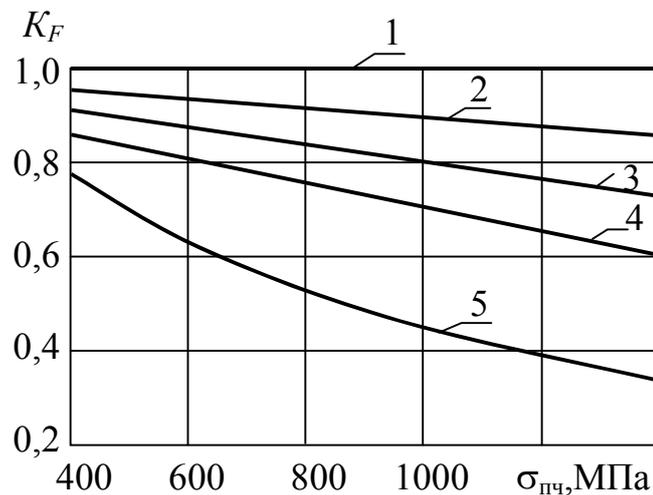
Рис. 3.10

Качество обработки поверхности. Зарождение усталостной трещины в большинстве деталей начинается с поверхности вследствие того, что в точках, примыкающих к поверхности, возникают наибольшие напряжения при изгибе и кручении. Поэтому состояние поверхности оказывает очень сильное влияние на предел выносливости и долговечность детали. На рис.3.11. показаны экспериментально найденные кривые, характеризующие изменение предела выносливости образцов вследствие различного качества обработки поверхности. По оси абсцисс на этом графике отложен предел прочности стали $\sigma_{пч}$, а по оси ординат – коэффициент качества поверхности K_F , равный

$$K_F = \sigma'_{-1} / \sigma_{-1}, \quad (3.12)$$

где σ'_{-1} - предел выносливости образцов с данным качеством обработки поверхности; σ_{-1} – предел выносливости тщательно полированных образцов.

Снижение предела выносливости тем больше, чем выше предел прочности стали. В случае грубого точения снижение оказывается очень большим и достигает до 40% при пределе прочности $\sigma_{пч} = 1250$ МПа. Поэтому в случае использования высокопрочных легированных



1 – полирование; 2 – шлифование;
3 – тонкое точение; 4 – грубое
точение; 5 – наличие окалины

Рис. 3.11

сталей детали должны иметь тщательно шлифованную или полированную поверхность; в противном случае теряется смысл применения дорогих легированных сталей.

В ряде случаев детали машин подвергаются еще до эксплуатации предварительной коррозии при хранении или транспортировке. Для оценки влияния предварительной коррозии производят соответствующие испытания. Образцы вначале подвергают воздействию коррозионной среды в течение определенного времени, после чего проводят усталостные испытания уже без воздействия среды. Результаты экспериментов обычно представляют в виде графиков зависимости коэффициента K_F от предела прочности стали при различной выдержке в условиях коррозии до испытания. Необходимые данные для различных агрессивных сред (в воздухе, в пресной и морской воде) можно найти в обширной справочной литературе.

В настоящее время разработаны и широко используются в промышленности эффективные технологические методы поверхностного упрочнения: наклеп поверхностного слоя обкаткой роликами или обдувом дробью, поверхностная закалка токами высокой частоты, цементация, азотирование, цианирование и др. Поверхностное упрочнение позволяет повысить предел выносливости деталей в 1,5 – 3 раза, а срок службы в десятки раз. При этом положительный эффект достигается, во-первых, за счет повышения прочности поверхностного слоя при сохранении вязкости нижележащих слоев, а во-вторых, за счет возникновения в поверхностном слое ос-

таточных сжимающих напряжений, препятствующих образованию усталостной трещины.

Влияние поверхностного упрочнения на сопротивление усталости оценивается коэффициентом K_v , равным

$$K_v = \sigma_{-1\text{упр}} / \sigma_{-1}, \quad (3.13)$$

где $\sigma_{-1\text{упр}}$ и σ_{-1} – пределы выносливости упрочненных и неупрочненных образцов.

Совместное влияние всех вышеперечисленных факторов учитывается в расчетах *коэффициентом снижения предела выносливости*, определяемым по формулам

или

$$\left. \begin{aligned} K &= (K_\sigma / K_{d\sigma} + 1 / K_F - 1) / K_v \\ K &= (K_\tau / K_{d\tau} + 1 / K_F - 1) / K_v \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

3.1.3. Расчет на прочность при установившихся режимах переменных напряжений

Под установившимся режимом переменных напряжений понимается периодический закон изменения напряжений во времени по асимметричному циклу с неизменными во времени значениями амплитуды σ_a и среднего напряжения цикла σ_m . Ниже будет изложен традиционный детерминистический метод расчета на прочность, в котором характеристики нагруженности и прочности рассматриваются как детерминированные величины, а их случайные вариации при расчете во внимание не принимаются. Расчет, согласно этому

методу, сводится к вычислению запаса прочности и сопоставлению его с допустимым нормативным значением, устанавливаемым на основе опыта расчетов в конструкторских бюро и наблюдениями за поведением машин в условиях эксплуатации.

В настоящее время в ряде случаев указанный детерминистический подход является недостаточным, и требуется применение более эффективных вероятностных методов расчета на усталость. Однако часто объем экспериментальной информации о нагрузках и прочности, необходимой для использования вероятностных методов расчета, является ограниченным, что снижает достоверность получаемых оценок ресурса и надежности. В этих случаях применение детерминистических подходов, основанных на вычислении коэффициентов запаса прочности, остается оправданным.

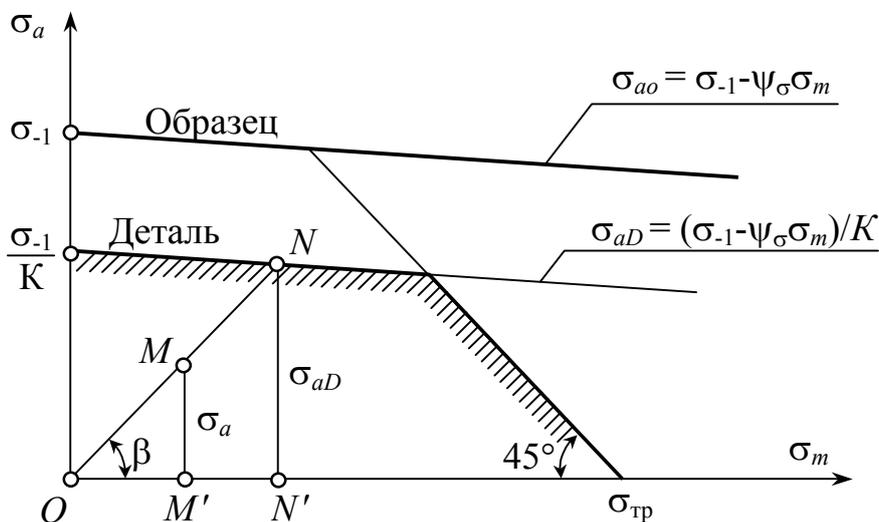


Рис. 3.12

Для определения коэффициента запаса при циклическом нагружении обратимся к схематизированной диаграмме предельных амплитуд, полученной при испытании образцов

(рис. 3.3,б). Предельная амплитуда напряжений образца согласно формуле (3.4) описывается уравнением

$$\sigma_{a_0} = \sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \sigma_m.$$

Если перейти к детали, то влияние местных напряжений, масштабного фактора и качества обработки поверхности приводит к тому, что предельная амплитуда циклов для рассматриваемой детали σ_{aD} оказывается в K раз меньше σ_{a_0} , т.е.

$$\sigma_{aD} = \sigma_{a_0} / K = (\sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \sigma_m) / K. \quad (3.15)$$

Пусть номинальные напряжения в детали σ_a и σ_m характеризуются точкой M (рис. 3.12). Так как точка M лежит ниже линии предельных напряжений, то деталь, очевидно, будет иметь некоторый запас прочности больше единицы. Предположим, что в процессе работы детали с ростом нагрузки отношение $\sigma_a / \sigma_m = \text{const}$, т.е. переменная и постоянная составляющие цикла пропорционально возрастают. Такое нагружение детали называется простым.

При простом нагружении точка, характеризующая цикл напряжений, будет смещаться от точки M к точке N по лучу ON , выходящему из начала координат. При этом коэффициент асимметрии цикла R будет оставаться постоянным. Это вытекает из зависимости:

$$\text{tg}\beta = \sigma_a / \sigma_m = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) = (1 - R) / (1 + R),$$

откуда при $\beta = \text{const}$ и $R = \text{const}$.

Точка N , соответствующая разрушению, называется предельной.

Искомый запас прочности равен отношению

$$n_{\sigma} = ON/OM = NN'/MM',$$

которое после простых преобразований с учетом формулы (3.15) приводится к виду

$$n_{\sigma} = \sigma_{-1}/(K\sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m). \quad (3.16)$$

Аналогично при кручении

$$n_{\tau} = \tau_{-1}/(K\tau_a + \psi_{\tau}\tau_m). \quad (3.17)$$

Формулы (3.16) и (3.17) впервые предложены С.В. Серенсенем и Р.С. Кинасошвили в 40-х годах и с тех пор нашли широкое применение в промышленности для расчета на прочность при циклическом нагружении.

При сложном напряженном состоянии коэффициент запаса прочности определяется по эмпирической формуле Гафа и Полларда

$$n_R = n_{\sigma}n_{\tau} / \sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}, \quad (3.18)$$

где n_{σ} и n_{τ} вычисляются по формулам (3.16) и (3.17)

Полученное расчетом значение n должно быть не меньше нормативного минимально допустимого значения коэффициента запаса прочности по усталости $[n]$, которое зависит от достоверности определения усилий и напряжений, от однородности материала, уровня технологии изготовления детали и других причин, учитываемых расчетом. При повышенной точности расчета с широким использованием экспериментальных данных по определению усилий, напряжений и характеристик прочности при достаточной однородности

материала и качества технологических процессов принимают $[n] = 1,3 \dots 1,5$ (например, в коленчатых валах поршневых авиационных двигателей). При недостаточно полном объеме экспериментальной информации о нагрузках и прочности, при ограниченном числе результатов натурных усталостных испытаний, при среднем уровне технологии производства и дефектоскопии $[n] = 1,5 \dots 2$. При малом объеме или отсутствии экспериментальной информации о нагрузках и прочности, при невысоком уровне технологии производства, пониженной однородности материала (литые и сварные детали значительных размеров) $[n] = 2 \dots 3$.

Для выполнения практических расчетов на усталость необходимо знать основные механические характеристики материала детали. Для некоторых конструкционных сталей они приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Механические характеристики конструкционных сталей

Марка стали	Напряжения, МПа						Ψ_{σ}	Ψ_{τ}	ν_{σ}	ν_{τ}
	$\sigma_{пч}$	σ_T	τ_T	σ_{-1}	σ_{-1p}	τ_{-1}				
20	420	250	160	170	120	100	0,1	0,05	0,1	0,16
35	540	320	190	220	170	130				
45	610	360	220	250	190	150				
60	690	410	250	310	220	180				
12ХНЗА ...	950	700	400	390	270	220	0,2	0,1	0,08	0,12

40XH	1000	800	390	400	290	240				
------------	------	-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--	--

3.2. Примеры расчета

3.2.1. Определение предела выносливости

Пример 3.1. Определить величину предела выносливости, если минимальное напряжение предельного цикла равно $\sigma_{\min} = -40$ МПа, а амплитуда предельного цикла $\sigma_a = 180$ МПа.

Решение. Как известно, предел выносливости равен наибольшему напряжению предельного цикла, т.е. $\sigma_R = \sigma_{\max}$. С другой стороны, амплитуда цикла определяется выражением

$$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2,$$

откуда $\sigma_R = \sigma_{\max} = \sigma_{\min} + 2\sigma_a = -40 + 2 \cdot 180 = 320$ МПа.

Коэффициент асимметрии данного цикла равен

$$R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = -40/320 = -0,125.$$

Пример 3.2. При испытании нескольких серий образцов получены следующие значения пределов выносливости: $\sigma_{-1} = 320$ МПа, $\sigma_{-0,5} = 420$ МПа, $\sigma_0 = 540$ МПа, $\sigma_{+0,5} = 640$ МПа, $\sigma_{+1} = 670$ МПа. По приведенным данным построить диаграмму предельных амплитуд и определить по ней предел выносливости при $R = +0,6$.

Решение. 1. Построение диаграммы предельных амплитуд. Находим координаты точек, изображающих на координатной плоскости $\sigma_m - \sigma_a$ заданные предельные циклы.

Имеем:

$$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = \sigma_R (1 - R)/2,$$

$$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2 = \sigma_R (1 + R)/2.$$

Необходимые вычисления представим в табличной форме.

Номер точки	R	σ_R		σ_a		σ_m	
		Общий вид	Численное значен.	Общий вид	Численное значен.	Общий вид	Численное значен.
1	-1	σ_{-1}	320	σ_{-1}	320	0	0
2	-0,5	$\sigma_{-0,5}$	420	$0,75\sigma_{-0,5}$	315	$0,25\sigma_{-0,5}$	105
3	0	σ_0	540	$0,5\sigma_0$	270	$0,5\sigma_0$	270
4	+0,5	$\sigma_{+0,5}$	640	$0,25\sigma_{+0,5}$	160	$0,75\sigma_{+0,5}$	480
5	+1	σ_{+1}	670	0	0	σ_{+1}	670

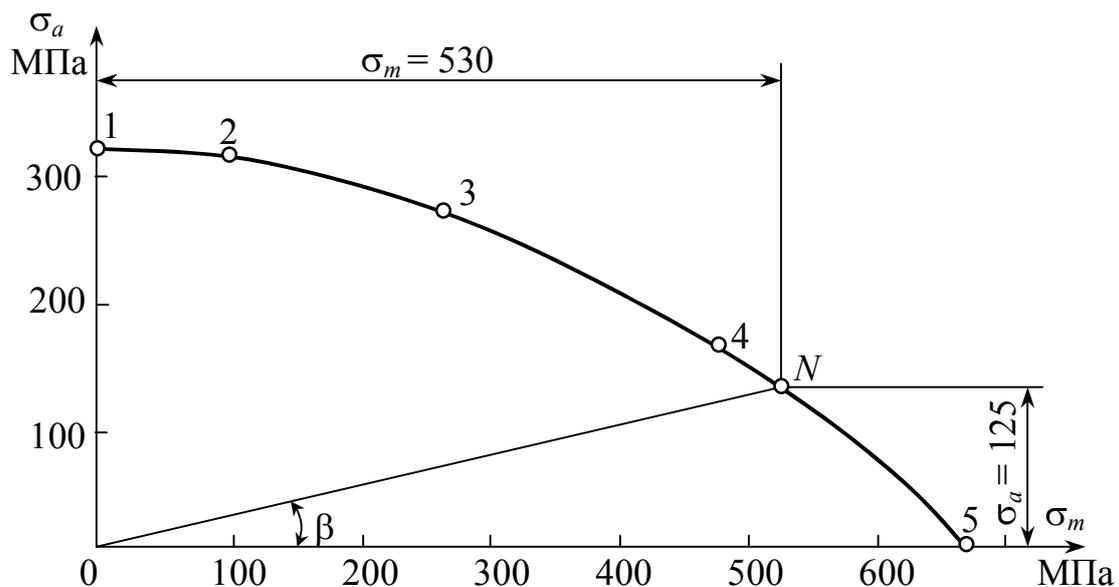


Рис. 3.13

Соединяя точки 1,2 ... 5 плавной кривой, получим диаграмму предельных амплитуд (рис. 3.13), которую используем для графического определения предела выносливости цикла с заданным коэффициентом асимметрии $R = +0,6$.

2. Определение предела выносливости. По заданному коэффициенту асимметрии вычисляем

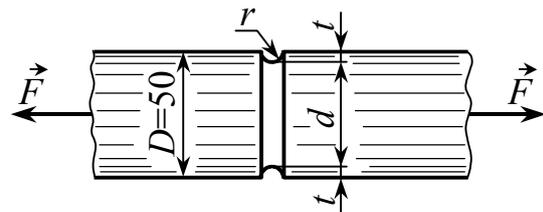
$$\operatorname{tg}\beta = (1 - R)/(1 + R) = (1 - 0,6)/(1 + 0,6) = 0,25$$

и под углом β к оси абсцисс проводим луч до его пересечения с диаграммой в точке N , абсцисса и ордината которой дают в выбранном масштабе значения среднего напряжения σ_m и амплитуды σ_a предельного цикла. Следовательно, искомый предел выносливости равен

$$\sigma_{+0,6} = \sigma_a + \sigma_m = 125 + 530 = 655 \text{ МПа.}$$

Пример 3.3.

Определить значение предела выносливости σ_{-1pD} для детали круглого поперечного сечения, изготовленной из



стали 45. Деталь с грубо обточенной поверхностью имеет выточку, радиус которой $r = t = 5$ мм. Насколько изменится предел выносливости, если поверхность детали подвергнуть шлифовке с последующей закалкой токами высокой частоты?

Решение. Предел выносливости детали, нагруженной продольным усилием, изменяющимся по симметричному циклу, согласно формуле (3.5) равен

$$\sigma_{-1pD} = \sigma_{-1p} / K,$$

где σ_{-1p} - предел выносливости стандартного образца, K - коэффициент снижения предела выносливости, определяемый по формуле (3.14)

$$K = (K_{\sigma}/K_{d\sigma} + 1/K_F - 1)/K_v.$$

По табл. 3.2 находим механические характеристики стали 45: $\sigma_{пч} = 610$ МПа; $\sigma_{-1p} = 190$ МПа; $\psi_{\sigma} = 0,1$; $\nu_{\sigma} = 0,1$.

Параметры очага концентрации (в зоне выточки):

- длина очага концентрации (табл. 3.1)

$$L = \pi d = 3,14 \cdot 40 = 125,7 \text{ мм};$$

- относительный градиент напряжений при $D/d = 50/40 = 1,25$ (табл. 3.1)

$$\bar{G} = \frac{2(1+\varphi)}{r} = \frac{2}{r} \left(1 + \frac{1}{2+4\sqrt{t/r}} \right) = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{1}{6} \right) = 0,467 \text{ мм}^{-1};$$

- теоретический коэффициент концентрации напряжений (рис. 3.5)

$$\alpha_{\sigma} = 2,06.$$

По формуле (3.9) определяем множитель

$$\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} = \frac{2\alpha_{\sigma}}{1 + (88,3\bar{G}/L)^{\nu_{\sigma}}} = \frac{2 \cdot 2,06}{1 + (88,3 \cdot 0,467 / 125,7)^{0,1}} = 2,17.$$

Коэффициент влияния качества обработки поверхности для детали с грубой обточкой по графику, приведенному на рис. 3.11, получается равным $K_F = 0,814$. Поскольку деталь не подвергалась специальному технологическому упрочнению, полагаем $K_v = 1$.

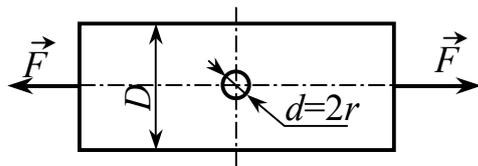
Итоговый поправочный коэффициент для детали

$$K = (2,17 + 1/0,814 - 1)/1 = 2,40.$$

Искомый предел выносливости детали с выточкой

$$\sigma_{-1pD} = \sigma_{-1p} / K = 190/2,40 = 79 \text{ МПа}.$$

Если поверхность детали подвергнуть шлифовке с последующей закалкой токами высокой частоты, то получим $K'_F = 0,93$; $K'_v = 2$; поправочный коэффициент $K' = (2,17 + 1/0,93 - 1)/2 = 1,12$, т.е. предел выносливости детали увеличится в $K/K' = 2,40/1,12 = 2,14$ раза.



Пример 3.4. Вычислить допускаемое напряжение для тонкой шлифованной пластины

15×100 мм с поперечным отверстием диаметром $d = 20$ мм, принимая двукратный запас прочности. Материал – сталь 60. Пластина нагружена продольной силой, изменяющейся по симметричному циклу.

Решение. Механические характеристики стали 60 согласно табл. 3.2: $\sigma_{пч} = 690$ МПа; $\sigma_{-1p} = 220$ МПа; $\psi_\sigma = \nu_\sigma = 0,1$.

Допускаемое напряжение детали при симметричном цикле равно $[\sigma] = \sigma_{-1p} / (K \cdot \Pi)$.

Параметры очага концентрации (табл. 3.1):

$$L = 2b = 2 \cdot 15 = 30 \text{ мм}; \quad \bar{G} = 2,3/r = 2,3/10 = 0,23 \text{ мм}^{-1}.$$

По графику (рис. 3.6) при $d/D = 20/100 = 0,2$ находим теоретический коэффициент концентрации напряжений $\alpha_\sigma = 2,51$. Теперь по формуле (3.9) определяем множитель

$$\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} = \frac{2\alpha_\sigma}{1 + (88,3\bar{G}/L)^{\nu_\sigma}} = \frac{2 \cdot 2,51}{1 + (88,3 \cdot 0,23/30)^{0,1}} = 2,56.$$

Из графика (рис. 3.11) находим $K_F = 0,92$.

Итоговый поправочный коэффициент

$$K = (K_{\sigma}/K_{d\sigma} - 1/K_F - 1)/K_v = (2,56 - 1/0,92 - 1)/1 = 2,65.$$

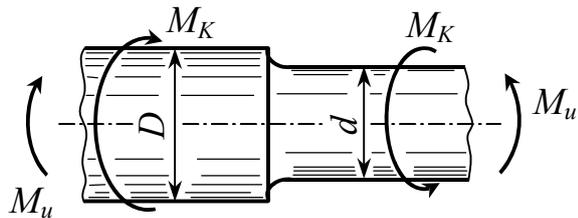
Искомое допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \sigma_{-1p} / (K \cdot \Pi) = 220 / (2,65 \cdot 2) = 41,5 \text{ МПа}.$$

Пример 3.5

Найти предел выносливости для шлифованного вала с галтелью, если $D = 125 \text{ мм}$, $d = 100 \text{ мм}$,

$r = 12 \text{ мм}$. Материал вала – сталь 35. Рассмотреть по отдельности два случая: а) вал нагружен только изгибающими моментами M_u ; б) вал нагружен только крутящими моментами M_K .



Решение. Механические характеристики стали 35 согласно табл. 3.2:

$$\sigma_{\text{пч}} = 540 \text{ МПа}; \quad \sigma_{-1} = 220 \text{ МПа}; \quad \tau_{-1} = 130 \text{ МПа};$$

$$\psi_{\sigma} = \nu_{\sigma} = 0,1; \quad \psi_{\tau} = 0,05; \quad \nu_{\tau} = 0,16.$$

Случай а. Вал испытывает только деформацию изгиба. По графику (рис. 3.7) при $D/d = 125/100 = 1,25$ и $r/d = 0,12$ находим теоретический коэффициент концентрации напряжений $\alpha_{\sigma} = 1,57$.

Вычисляем:

- длину очага концентрации (табл. 3.1)

$$L = \pi d = \pi \cdot 100 = 314 \text{ мм};$$

- относительный градиент напряжений (табл. 3.1)

$$\bar{G}_\sigma = \frac{2,3}{r} \left(1 + \frac{1}{2+4\sqrt{t/r}} \right) + \frac{2}{d} = \frac{2,3}{12} \left(1 + \frac{1}{2+4\sqrt{125/12}} \right) + \frac{2}{100} = 0,243 \text{ мм}^{-1};$$

- множитель

$$\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} = \frac{2\alpha_\sigma}{1 + (88,3\bar{G}_\sigma / L)^{\nu_\sigma}} = \frac{2 \cdot 1,57}{1 + (88,3 \cdot 0,243 / 314)^{0,1}} = 1,78.$$

По графику (рис. 3.11) при $\sigma_{\text{пч}} = 540$ МПа находим для шлифованной поверхности $K_F = 0,94$. Вал не подвергался упрочняющей обработке, поэтому $K_V = 1$. Следовательно, коэффициент снижения предела выносливости будет равен

$$K = (K_\sigma / K_{d\sigma} + 1 / K_F - 1) / K_V = (1,78 + 1 / 0,94 - 1) / 1 = 1,84.$$

Искомый предел выносливости вала при симметричном цикле изгиба

$$\sigma_{-1D} = \sigma_{-1} / K = 220 / 1,84 = 119,6 \text{ МПа.}$$

Случай б. Вал испытывает только деформацию кручения.

По графику (рис. 3.7) при $D/d = 1,25$ и $r/d = 0,12$ находим $\alpha_\tau = 1,31$. Далее, определяем

$$\bar{G}_\tau = \frac{1,15}{r} + \frac{2}{d} = \frac{1,15}{12} + \frac{2}{100} = 0,116 \text{ мм}^{-1},$$

$$\frac{K_\tau}{K_{d\tau}} = \frac{2\alpha_\tau}{1 + (88,3\bar{G}_\tau / L)^{\nu_\tau}} = \frac{2 \cdot 1,31}{1 + (88,3 \cdot 0,116 / 314)^{0,16}} = 1,66.$$

Тогда поправочный коэффициент

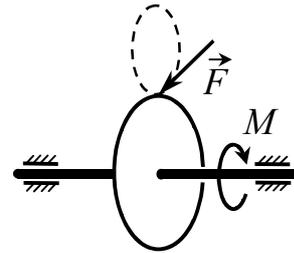
$$K = (K_\tau / K_{d\tau} + 1 / K_F - 1) / K_V = (1,66 + 1 / 0,94 - 1) / 1 = 1,72.$$

Искомый предел выносливости вала при симметричном цикле кручения

$$\tau_{-1D} = \tau_{-1}/K = 130/1,72 = 75,6 \text{ МПа.}$$

Пример 3.6

Найти предел выносливости круглого вала диаметром $d = 40$ мм со шлифованной поверхностью в зоне посадки на него шестерни, передающей момент, если давление напрессовки $p = 22$ МПа. Материал вала – сталь 12ХНЗА.



Решение. Механические характеристики материала вала согласно табл. 3.2: $\sigma_{пч} = 950$ МПа, $\sigma_{-1} = 390$ МПа.

Множитель $K_{\sigma}/K_{d\sigma}$ в данном случае определяется по формуле (3.11)

$$K_{\sigma}/K_{d\sigma} = (K_{\sigma}/K_{d\sigma})_o \cdot \xi' \cdot \xi''.$$

По графику (рис. 3.8) снимаем с кривой 1 при $d = 40$ мм $(K_{\sigma}/K_{d\sigma})_o = 2,7$. Поправочные коэффициенты:

- на предел прочности (рис. 3.9) при $\sigma_{пч} = 950$ МПа: $\xi' = 1,63$;

- на давление напрессовки (рис. 3.10) при $p = 22$ МПа: $\xi'' = 0,93$.

Следовательно, $K_{\sigma}/K_{d\sigma} = 2,7 \cdot 1,63 \cdot 0,93 = 4,09$.

Для шлифованной поверхности при $\sigma_{пч} = 950$ МПа (рис. 3.11), кривая 2) находим значение $K_F = 0,88$. В итоге получаем $K = (K_{\sigma}/K_{d\sigma} + 1/K_F - 1)/K_v = (4,09 + 1/0,88 - 1)/1 = 4,23$.

Следовательно, предел выносливости вала

$$\sigma_{-1D} = \sigma_{-1}/K = 390/4,23 = 92 \text{ МПа.}$$

3.2.2. Расчет на прочность при простых видах деформации

Пример 3.7. Определить запас прочности детали, рассмотренной в примере 3.3, если осевая растягивающая сила циклически изменяется от $N_{\max} = 94,2$ кН до $N_{\min} = 31,4$ кН.

Решение. 1. Определение параметров цикла. Имеем:

- максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = N_{\max}/A = 4N_{\max}/(\pi d^2) = 4 \cdot 94,2 \cdot 10^3 / (\pi \cdot 4^2 \cdot 10^{-4}) = 75 \text{ МПа};$$

- минимальное напряжение

$$\sigma_{\min} = 4N_{\min}/(\pi d^2) = 4 \cdot 31,4 \cdot 10^3 / (\pi \cdot 4^2 \cdot 10^{-4}) = 25 \text{ МПа};$$

- амплитуда цикла

$$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = (75 - 25)/2 = 25 \text{ МПа};$$

- среднее напряжение $\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2 = 50$ МПа;

- коэффициент асимметрии

$$R_\sigma = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = 25/75 = 0,333.$$

2. Определение коэффициента запаса прочности. Так как цикл несимметричный, то согласно формуле (3.16)

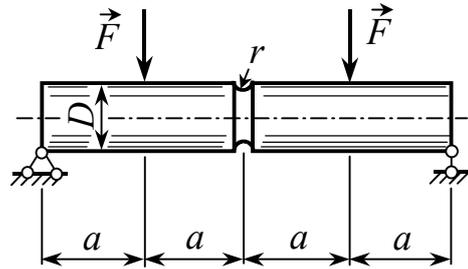
$$\Pi_\sigma = \sigma_{-1p}/(K\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_m).$$

Ранее мы подсчитали $K = 2,40$. По таблице 3.2 находим $\psi_\sigma = 0,1$. Следовательно,

$$\Pi_\sigma = 190/(2,4 \cdot 25 + 0,1 \cdot 50) = 2,92.$$

Пример 3.8

Определить допускаемое значение амплитуды сил F , синфазно изменяющихся по симметричному циклу. Балка с полированной поверхностью



круглого поперечного сечения диаметром $D = 50$ мм имеет в середине пролета кольцевую выточку радиусом $r = 5$ мм. Материал балки – сталь 45; нормативный коэффициент запаса прочности $[\Pi] = 1,5$; $a = 25$ см.

Решение. Сначала вычисляем поправочный коэффициент K . По графику (рис. 3.5) находим теоретический коэффициент концентрации напряжений $\alpha_\sigma = 1,77$. Определяем параметры очага концентрации

$$L = \pi d = \pi \cdot 40 = 125,7 \text{ мм};$$

$$\bar{G} = \frac{2}{r} \left(1 + \frac{1}{2 + 4\sqrt{t/r}} \right) + \frac{2}{d} = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{1}{6} \right) + \frac{2}{40} = 0,517 \text{ мм}^{-1};$$

$$\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} = \frac{2\alpha_\sigma}{1 + (88,3\bar{G}/L)^{\nu_\sigma}} = \frac{2 \cdot 1,77}{1 + (88,3 \cdot 0,517 / 125,7)^{0,1}} = 1,86.$$

В итоге, учитывая, что $K_\nu = K_F = 1$, получаем

$$K = (K_\sigma / K_{d\sigma} + 1 / K_F - 1) / K_\nu = (1,86 + 1 / 1 - 1) / 1 = 1,86.$$

Так как деталь подвергается симметричному циклу изгиба, то условие прочности имеет вид

$$\sigma_a = F \cdot a / W_x \leq [\sigma].$$

Здесь $[\sigma]$ - допускаемое напряжение, определяемое по фор-

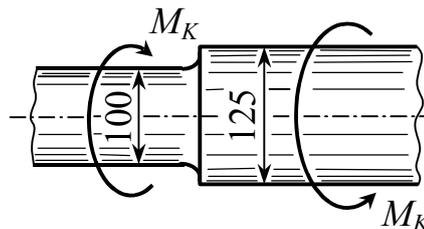
муле $[\sigma] = \sigma_{-1}/(K \cdot [\Pi])$.

Следовательно,

$$[F] = \sigma_{-1} \cdot W_x / (K \cdot [\Pi] \cdot a) = 250 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 4^3 \cdot 10^{-6} / (1,86 \cdot 1,5 \cdot 0,25) = 2,25 \text{ кН.}$$

Пример 3.9

Определить допускаемое значение максимального крутящего момента, если $M_{\min} / M_{\max} = 0,5$; $\tau_{-1} = 230 \text{ МПа}$; $\psi_\tau = 0,1$; $[\Pi] = 2$.



Принять $K = 2$.

Решение. Условие прочности при несимметричном цикле имеет вид

$$n_R = \tau_{-1} / (K\tau_a + \psi_\tau \tau_m) \geq [n].$$

Параметры данного цикла:

- максимальное напряжение $\tau_{\max} = M_{\text{кmax}} / W_p$,

- амплитуда $\tau_a = (\tau_{\max} - \tau_{\min}) / 2 = \tau_{\max} (1 - R) / 2$,

- среднее напряжение $\tau_m = \tau_{\max} (1 + R) / 2$.

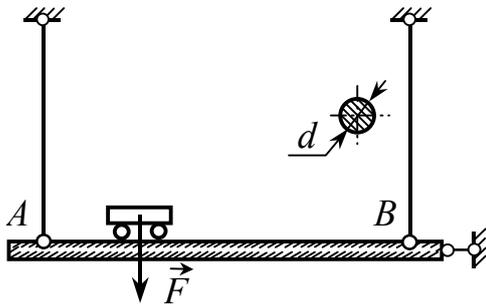
Следовательно,

$$n_R = \frac{2\tau_{-1} \cdot W_p}{M_{\max} [K(1 - R) + \psi_\tau (1 + R)]} = [n].$$

Отсюда

$$[M_{\max}] = \frac{2\tau_{-1} \cdot W_p}{[n] [K(1 - R) + \psi_\tau (1 + R)]} = \frac{2 \cdot 230 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{2(2 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 1,5)} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Пример 3.10



Тележка с грузом F периодически перемещается из положения A в положение B и обратно. Определить, не учитывая веса тележки и балки, допускаемую величину силы F , исходя из условия прочности стержней, на которых подвешена балка. Стержни круглые диаметром $d = 45$ мм. Материал – сталь 20, для которой $\sigma_{-1p} = 120$ МПа, $\psi_\sigma = 0,1$. Принять $[n] = 1,5$; $K = 2,44$.

допускаемую величину силы F , исходя из условия прочности стержней, на которых подвешена балка. Стержни круглые диаметром $d = 45$ мм. Материал – сталь 20, для которой $\sigma_{-1p} = 120$ МПа, $\psi_\sigma = 0,1$. Принять $[n] = 1,5$; $K = 2,44$.

Решение. При периодическом перемещении тележки из положения A в положение B продольная сила в стержнях изменяется от $N_{\max} = F$ до $N_{\min} = 0$, т.е. стержни подвергаются циклическому пульсационному нагружению с параметрами $\sigma_{\max} = N_{\max}/A = F/A$, $\sigma_{\min} = N_{\min}/A = 0$, $\sigma_m = \sigma_a = 0,5\sigma_{\max} = 0,5F/A$.

Записываем условие прочности при асимметричном

цикле
$$n_R = \frac{\sigma_{-1p}}{K\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_m} = \frac{2\sigma_{-1p}A}{F(K + \psi_\sigma)} \geq [n].$$

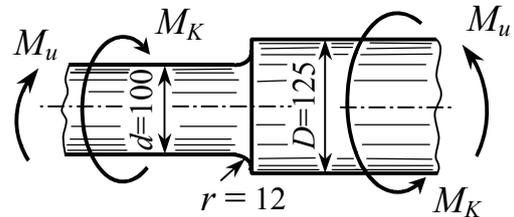
Отсюда

$$[F] = \frac{2\sigma_{-1p}A}{[n](K + \psi_\sigma)} = \frac{2 \cdot 120 \cdot 10^6 \cdot 15,9 \cdot 10^{-4}}{1,5(2,44 + 0,1)} = 100 \text{ кН.}$$

3.2.3. Расчет на прочность при сложных видах деформации

Пример 3.11

Определить коэффициент запаса прочности для вала с полированной поверхностью, если наибольшие значения



изгибающего и крутящего моментов одинаковы и равны $M_{и} = M_{к} = 10$ кН·м, а коэффициенты асимметрии циклов для нормальных и касательных напряжений соответственно равны $R_{\sigma} = -0,8$ и $R_{\tau} = 0$. Вал изготовлен из стали 60.

Решение. Механические характеристики стали 60 согласно табл. 3.2: $\sigma_{-1} = 310$ МПа; $\tau_{-1} = 180$ МПа; $\psi_{\sigma} = 0,1$; $\psi_{\tau} = 0,05$.

Процедура нахождения запаса прочности вала включает в себя следующие этапы.

1. Определение параметров циклов нормальных и касательных напряжений.

Для рабочего цикла изменения нормальных напряжений при изгибе имеем:

$$\sigma_{\max} = M_{и} / W_x = 32M_{и} / (\pi d^3) = 32 \cdot 10 \cdot 10^3 / (\pi \cdot 0,1^3) = 102 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\min} = R_{\sigma} \cdot \sigma_{\max} = -0,8 \cdot 102 = -81,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2 = (102 - 81,6) / 2 = 10,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = (102 + 81,6)/2 = 91,8 \text{ МПа.}$$

Касательные напряжения изменяются по пульсационному циклу с параметрами:

$$\tau_{\max} = M_K/W_p = 16 \cdot 10 \cdot 10^3 / (\pi \cdot 0,1^3) = 51 \text{ МПа;}$$

$$\tau_{\min} = 0; \quad \tau_m = \tau_a = 0,5\tau_{\max} = 0,5 \cdot 51 = 25,5 \text{ МПа.}$$

2. Определение условного запаса прочности по нормальным напряжениям Π_σ . Для рассматриваемого случая $K_F = K_v = 1$, а величина $K_\sigma/K_{d\sigma}$ была вычислена в примере 3.5 и равна 1,78. Итоговый поправочный коэффициент $K = (K_\sigma/K_{d\sigma} + 1/K_F - 1)/K_v = 1,78$. Следовательно,

$$\Pi_\sigma = \sigma_{-1} / (K\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_m) = 310 / (1,78 \cdot 91,8 + 0,1 \cdot 10,2) = 1,89.$$

3. Определение условного запаса прочности по касательным напряжениям Π_τ . Величина $K_\tau/K_{d\tau} = 1,66$ (см. пример 3.5). Поправочный коэффициент по формуле (3.14) равен $K = 1,66$. Коэффициент запаса

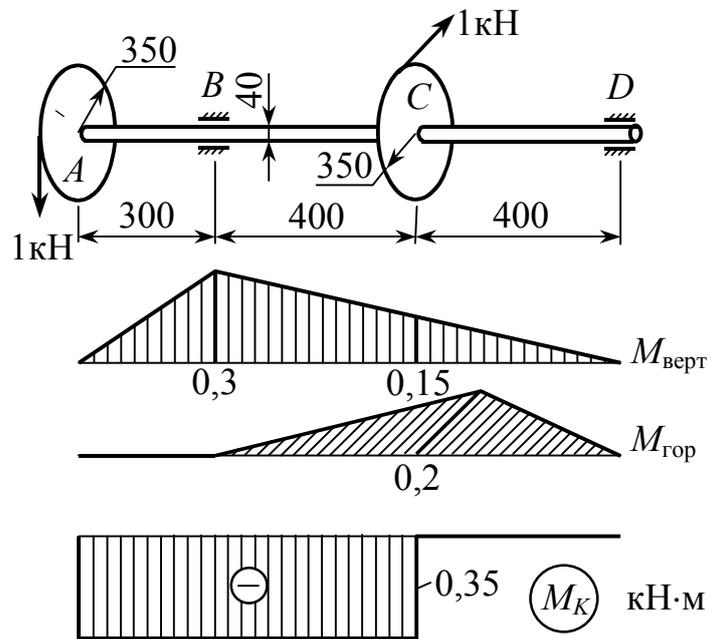
$$\Pi_\tau = \tau_{-1} / (K\tau_a + \psi_\tau\tau_m) = 180 / (1,66 \cdot 25,5 + 0,05 \cdot 25,5) = 4,24.$$

4. Определение запаса прочности детали. Напряженное состояние вала является двухосным, для определения коэффициента запаса воспользуемся эмпирической формулой Гафа и Полларда

$$n_R = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{1,89 \cdot 4,24}{\sqrt{1,89^2 + 4,24^2}} = 1,73.$$

Пример 3.12

Требуется определить коэффициент запаса циклической прочности для шлифованного вала, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Материал вала – сталь 12ХНЗА. Давление посадки при уста-



новке на вал шкивов и колец подшипников в опорных сечениях $p = 16$ МПа.

Решение

Вал подвергается изгибу и кручению. Построив эпюры изгибающих моментов в вертикальной $M_{\text{верт}}$ и горизонтальной $M_{\text{гор}}$ плоскостях, а также крутящего момента M_K , устанавливаем опасное сечение вала. Это будет опорное сечение B, где $M_{\text{и}} = 0,3$ кН·м и $M_K = 0,35$ кН·м.

Под действием постоянного крутящего момента в сечениях вала на участке AC возникают неизменные во времени касательные напряжения τ . Вследствие вращения вала нормальные напряжения изгиба будут изменяться по симметричному циклу. Таким образом, напряженное состояние вала является двухосным и для определения коэффициента запаса

следует обратиться к эмпирической формуле Гафа и Полларда (3.18), предварительно определив условные запасы по σ и τ .

Параметры цикла нормальных напряжений:

$$\sigma_{\max} = \sigma_a = M_H / W_x = M_H / (0,1d^3) = 46,9 \text{ МПа}; \quad \sigma_m = 0.$$

Множитель $K_\sigma / K_{d\sigma}$ в зоне посадки кольца подшипника B определяется по формуле (3.11): $K_\sigma / K_{d\sigma} = (K_\sigma / K_{d\sigma})_o \cdot \xi' \cdot \xi'' = 3,94$, где $(K_\sigma / K_{d\sigma})_o = 2,7$; $\xi' = 1,63$; $\xi'' = 0,89$ (сняты с графиков, приведенных на рис. 3.8, 3.9, 3.10). Для шлифованной поверхности при $\sigma_{\text{пч}} = 950 \text{ МПа}$ получаем $K_F = 0,88$ (рис. 3.11). В итоге поправочный коэффициент

$$K = (K_\sigma / K_{d\sigma} + 1/K_F - 1) / K_v = 4,07.$$

Тогда $\Pi = \sigma_{-1} / (K\sigma_a) = 390 / (4,07 \cdot 46,9) = 2,03$.

Для касательных напряжений имеем:

$$\tau_a = 0, \quad \tau_m = M_K / (0,2d^3) = 27,3 \text{ МПа}.$$

Здесь, поскольку $\tau_a = 0$, коэффициент запаса следует определять по пределу текучести:

$$n_\tau = \tau_T / \tau_m = 400 / 27,3 = 14,65.$$

Искомый запас прочности вала

$$n_R = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{2,03 \cdot 14,65}{\sqrt{2,03^2 + 14,65^2}} \cong 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 25.504-82. Расчеты и

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Плоские кривые стержни	103
1.1.	Основные предпосылки	103
1.2.	Определение напряжений и расчет на прочность	104
1.3.	Определение перемещений и расчет на жесткость.....	107
1.4.	Примеры расчета	108
2.	Толстостенные сосуды	118
2.1.	Краткие теоретические сведения	118
2.1.1.	Толстостенный цилиндр	118
2.1.2.	Составные цилиндры	121
2.2.	Примеры расчета	123
3.	Основы расчета на прочность при переменных напряжениях	137
3.1.	Краткие теоретические сведения	137
3.1.1.	Основные понятия	137
3.1.2.	Факторы, влияющие на величину предела выносли- вости	144
3.1.3.	Расчет на прочность при установившихся режимах переменных напряжений	157
3.2.	Примеры расчета	162
3.2.1.	Определение предела выносливости	162
3.2.2.	Расчет на прочность при простых видах деформации	170
3.2.3.	Расчет на прочность при сложных видах деформа- ции	174
	Литература	178