СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Настоящий практикум предназначен для самостоятельной работы студентов. Выполнение курсовых заданий позволяет каждому студенту глубже изучить раздел теоретической механики «Динамика» и приобрести навыки решения конкретных задач по составлению и решению дифференциальных уравнений движения материальной точки, определению параметров колебаний системы с одной степенью свободы, применению теорем об изменении кинетического момента и кинетической энергии механической системы, общего уравнения динамики и уравнений Лагранжа второго рода. Перед выполнением задания необходимо изучить законы динамики точки, общие теоремы динамики механической системы, основные понятия аналитической механики, используя рекомендуемую литературу. Это поможет построить решение конкретного варианта задания, не просто следуя примеру выполнения, а, выявляя особенности данного варианта, найти оптимальные решения задач.

Знания, приобретенные в ходе выполнения курсовых заданий, послужат основой для решения задач в области теоретической механики и смежных дисциплин.

1. Цели и задачи выполнения курсовых заданий

Согласно федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования в результате изучения дисциплины «Теоретическая механика» выпускник должен обладать следующими общекультурными (ОК) и профессиональными компетенции (ПК):

-целенаправленное применение базовых знаний в области математических, естественных, гуманитарных и экономических наук в профессиональной деятельности (ОК-9).

-способностью использовать основные законы естественнонаучных дисциплин профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-10);

-способностью использовать прикладные программные средства при решении практических задач профессиональной деятельности, методы стандартных испытаний по определению физико-механических свойств и технологических показателей материалов и готовых машиностроительных изделий, стандартные методы их проектирования, прогрессивные методы эксплуатации изделий (ПК-3);

-творчески применять основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-10).

В соответствии с образовательным стандартом в результате выполнения курсовых заданий и проработки теоретического материала по разделу «Динамика» студент должен знать: основные понятия и теоремы, методы теоретического и экспериментального исследований механического движения в машинах и механизмах. Выполнение курсовых заданий по разделу теоретической механики «Динамика» ставит целью изучить законы динамики материальной точки, общие теоремы динамики механической системы, основные понятия аналитической механики. Задачами выполнения курсовых заданий являются: закрепление изученного теоретического материала, развитие познавательных способностей и выработка логического мышления студентов.

2. Задание №1. Динамика материальной точки

2.1. Содержание задания

Груз *D* массой *m*, получив в точке *A* начальную скорость движется по изогнутой трубе *ABC*, расположенной в вертикальной плоскости.

На участке *AB* трубы на груз, кроме силы тяжести, действуют постоянная сила $Q = 10$ Н, направленная от точки *A* к точке *B*, и сила сопротивления *R*, зависящая от скорости $\vec{V}$ груза *D*: $R = \mu V^n$.

В точке *B* груз, изменив направление приобретенной скорости, но, сохранив при этом ее величину, переходит на участок *BC* трубы, где на него, помимо силы тяжести, действует сила трения скольжения (коэффициент трения груза о трубу *f=0,2*) и переменная по величине сила *F=F(t)*, направленная вдоль участка *BC*. Проекция *Fx* последней силы на ось *Bx* задается.

Считая груз *D* материальной точкой, и зная расстояние *AB* или время *t,* движения груза от точки *A* до точки *B*, найти уравнение *x=x(t)* движения груза на участке *BC*.

Варианты расчетных схем изображены на рис. 2.1. Варианты числовых значений параметров приведены в табл. 2.1.

2.2. Краткие указания к выполнению задания

2.2.1. Проработать раздел “Динамика материальной точки”, пользуясь конспектом лекций и рекомендуемыми учебниками [1-4].

2.2.2. По условию задачи вычертить изогнутую трубу *ABC*. Изобразить груз *D* на каждом из участков *AB* и *BC* в произвольные моменты времени и приложить активные силы в соответствии с условием задачи.

2.2.3. Освободиться от действия связей (мысленно отбросить плоскость на которую опирается груз), изобразив нормальную реакцию на каждом из участков *AB* и *BC*.

2.2.4. Выбрать неподвижную систему координат на каждом из участков *AB* и *BC*, направив одну из осей вдоль соответствующего участка в сторону движения груза *D*, а другую – по нормали к этому участку. Начало системы координат выбрать в начале данного участка.

2.2.5. Составить дифференциальные движения груза на каждом из участков *AB* и *BC, с*читая груз *D* материальной точкой.

2.2.6. Преобразовать дифференциальное уравнение движения груза на участке *AB,* понизив порядок производной (вместо второй производной координаты груза по времени записать производную проекцию скорости груза по времени)

$$\ddot{x} = \frac{dV}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt}.$$

2.2.7. Затем, если задана длина участка *AB,* то следует перейти от производной скорости груза по времени к производной скорости груза по координате, выполнив преобразование:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt}\frac{d\dot{x}}{dx} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}.$$

2.2.8. Разделить переменные в полученном дифференциальном уравнении.

2.2.9. Определить его решение с учетом начальных условий движения груза на участке *AB* и определить скорость груза в конце этого участка. Начальную скорость груза на участке *BC* принять равной скорости его в конце участка *AB*.

2.2.10. Преобразовать дифференциальное уравнение движения груза на участке *BC,* понизив порядок производной, так же как в п.п. 2.2.6, разделить переменные в полученном дифференциальном уравнении и определить его решение с учетом начальных условий движения на участке *BC.*

Таблица 2.1

Варианты числовых значений параметров задания №1

№ Вар.	**№ Подвар.**	***m*, кг**	**V_0, м/с**	**μ, Нс/м**	***n***	***F*, Н**	**α, град**	***t*, сек**	***l*, м**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	1	5	2	0,1	1	$3\sin(\pi t)$	30	3	-
	2	6	1,5	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	2	-
	3	3	5,5	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	5	-
	4	2	7,5	0,2	1	$2t+\sin(\pi t)$	45	4	-
	5	3	2,4	0,1	1	$5t^2+2$	30	1	-
	6	10	3,0	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	60	2,5	-
2.	1	15	3,5	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	30	-	5
	2	8	1,5	0,05	2	$0{,}5\cos(2t)$	30	-	10
	3	3	3,5	0,15	2	$0{,}5t^2+1$	60	-	2
	4	12	4,5	0,2	2	$2t+3t^2$	45	-	4
	5	3	5,4	0,1	2	$5t^2+2$	30	-	3
	6	10	1,0	0,3	2	$2\sin(\pi t/2)$	60	-	1
3.	1	2	5,5	0,1	1	$3\sin^2(\pi t)$	90	3	-
	2	6	4,5	0,05	1	$t+5\cos(2t)$	90	2	-
	3	9	2,3	0,15	1	$5t^2+t^3$	90	5	-
	4	1	5,2	0,2	1	$2t+0{,}5t^2$	90	6	-
	5	3	2,4	0,1	1	$5t^2+2t^3$	90	1	-
	6	20	3,0	0,3	1	$\sin(t)\cos(t)$	90	5	-
4.	1	5	2	0,1	2	$0{,}5\cos^2(\pi t)$	90	-	3
	2	6	1,5	0,05	2	$t^2+5\cos(2t)$	90	-	2
	3	3	3	0,15	2	$\sin(t)\cos(t)$	90	-	1
	4	2	7	0,2	2	$2\sin(\pi t/2)$	90	-	5
	5	3	4	0,1	2	$5\sin^2(t)+2t$	90	-	4
	6	10	10	0,3	2	$2t+0{,}3t^3$	90	-	8

Продолжение табл. 2.1

№ Вар.	**№ Подвар.**	***m*, кг**	**V_0, м/с**	**μ, Нс/м**	***n***	***F*, Н**	**α, град**	***t*, сек**	***l*, м**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5.	1	5	2	0,1	1	$3\sin(\pi t)$	30	3	-
	2	6	2,5	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	2	-
	3	3	3	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	5	-
	4	2	7	0,2	1	$2t+0{,}25t^2$	45	6	-
	5	3	2,4	0,1	1	$5t^2+2$	30	1	-
	6	10	1,5	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	60	5	-
6.	1	5	3	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	30	-	2
	2	6	3,5	0,05	2	$0{,}5\cos(2t)$	30	-	4
	3	3	3	0,15	2	$0{,}5t^2+1$	60	-	3
	4	2	2	0,2	2	$2t+\sin(\pi t)$	45	-	2
	5	3	4	0,1	2	$5t^2+2$	30	-	6
	6	10	2	0,3	2	$2\sin(\pi t/2)$	60	-	5
7.	1	5	10	0,1	1	$3\sin(\pi t)$	30	1	-
	2	6	5	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	0.5	-
	3	3	13	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	1,5	-
	4	2	20	0,2	1	$2t+\cos(\pi t)$	45	2	-
	5	3	11	0,1	1	$5t^2+2$	30	1,2	-
	6	10	10	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	60	0,8	-
8.	1	5	13	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	30	-	4
	2	6	12	0,05	2	$0{,}5\cos(2t)$	30	-	3
	3	3	20	0,15	2	$0{,}5t^2+1$	60	-	6
	4	2	10	0,2	2	$3t-\sin(\pi t)$	45	-	2
	5	3	14	0,1	2	$5t^2+2$	30	-	5
	6	10	10	0,3	2	$2\sin(\pi t/2)$	60	-	1

Продолжение табл. 2.1

№ Вар.	№ Подвар.	m, кг	V_0, м/с	μ, Нс/м	n	F, Н	α, град	t, сек	l, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9.	1	5	0,2	0,1	1	$3\sin(\pi t)$	30	3	-
	2	6	0,5	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	2	-
	3	3	0,3	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	5	-
	4	2	0,2	0,2	1	$2t-\cos(\pi t)$	45	6	-
	5	3	0,4	0,1	1	$5t^2+2$	30	1	-
	6	10	1,0	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	60	5	-
10.	1	5	0,2	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	30	-	2
	2	6	0,5	0,05	2	$0{,}5\cos(2t)$	30	-	5
	3	3	0,3	0,15	2	$0{,}5t^2+1$	60	-	3
	4	2	0,2	0,2	2	$2t+\sin^2(\pi t)$	45	-	3
	5	3	0,4	0,1	2	$5t^2+2$	30	-	8
	6	10	1,0	0,3	2	$2\sin(\pi t/2)$	60	-	10
11.	1	5	0,2	0,1	1	$3\sin(\pi t)$	30	3	-
	2	6	0,5	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	2	-
	3	3	0,3	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	5	-
	4	2	0,2	0,2	1	$t+2\cos(\pi t)$	45	6	-
	5	3	0,4	0,1	1	$5t^2+2$	30	1	-
	6	10	1,0	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	60	5	-
12.	1	5	0,2	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	30	-	2
	2	6	0,5	0,05	2	$0{,}5\cos(2t)$	30	-	4
	3	3	0,3	0,15	2	$0{,}5t^2+1$	60	-	3
	4	2	0,2	0,2	2	$t-2\sin(\pi t)$	45	-	3
	5	3	0,4	0,1	2	$5t^2+2$	30	-	1
	6	10	1,0	0,3	2	$2\sin(\pi t/2)$	60	-	5

Продолжение табл. 2.1

№ Вар.	№ Подвар.	m, кг	V_0, м/с	μ, Нс/м	n	F, Н	α, град	t, сек	l, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13.	1	5	8	0,1	1	$3\sin(\pi t)$	30	1,3	-
	2	6	16	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	2	-
	3	3	9	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	0,5	-
	4	2	12	0,2	1	$2t+1/t$	45	0,8	-
	5	3	10	0,1	1	$5t^2+2$	30	1	-
	6	10	15	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	60	1	-
14.	1	5	12	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	30	-	3
	2	6	9	0,05	2	$0{,}5\cos(2t)$	30	-	1
	3	3	16	0,15	2	$0{,}5t^2+1$	60	-	4
	4	2	10	0,2	2	$t+\sin(\pi t/3)$	45	-	1,5
	5	3	9,5	0,1	2	$5t^2+2$	30	-	1
	6	10	14	0,3	2	$2\sin(\pi t/2)$	60	-	2
15.	1	5	5	0,1	1	$3\sin(\pi t)$	30	0,3	-
	2	6	10	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	0,6	-
	3	3	11	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	0,5	-
	4	2	16	0,2	1	$2t+t^2$	45	1	-
	5	3	14	0,1	1	$5t^2+2$	30	1	-
	6	10	13	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	60	0,5	-
16.	1	5	12	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	30	-	2,5
	2	6	15	0,05	2	$0{,}5\cos(2t)$	30	-	3,5
	3	3	13	0,15	2	$0{,}5t^2+1$	60	-	2
	4	2	12	0,2	2	$2t+5/t$	45	-	3
	5	3	20	0,1	2	$5t^2+2$	30	-	4
	6	10	10	0,3	2	$2\sin(\pi t/2)$	60	-	2

Продолжение табл. 2.1

№ Вар.	№ Подвар.	m, кг	V_0, м/с	μ, Нс/м	n	F, Н	α, град	t, сек	l, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17.	1	5	0,2	0,1	1	$3\sin(\pi t)$	30	3	-
	2	6	0,5	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	2	-
	3	3	0,3	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	5	-
	4	2	0,2	0,2	1	$t-\sin(\pi t/2)$	45	6	-
	5	3	0,4	0,1	1	$5t^2+2$	30	1	-
	6	10	1,0	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	60	5	-
18.	1	5	0,2	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	30	-	6
	2	6	0,5	0,05	2	$0{,}5\cos(2t)$	30	-	3
	3	3	0,3	0,15	2	$0{,}5t^2+1$	60	-	4
	4	2	0,2	0,2	2	$2t+\sin^2(\pi t)$	45	-	1
	5	3	0,4	0,1	2	$5t^2+2$	30	-	2
	6	10	1,0	0,3	2	$2\sin(\pi t/2)$	60	-	4
19.	1	5	12	0,1	1	$3\sin(\pi t)$	30	1,3	-
	2	6	15	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	2	-
	3	3	8	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	0,5	-
	4	2	20	0,2	1	$t-\cos(\pi t/2)$	45	1,6	-
	5	3	10	0,1	1	$5t^2+2$	30	1	-
	6	10	10	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	60	0,5	-
20.	1	5	10	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	30	-	2
	2	6	9	0,05	2	$0{,}5\cos(2t)$	30	-	3
	3	3	13	0,15	2	$0{,}5t^2+1$	60	-	4
	4	2	9	0,2	2	$2t-0{,}1t^3$	45	-	2
	5	3	14	0,1	2	$5t^2+2$	30	-	6
	6	10	10	0,3	2	$2\sin(\pi t/2)$	60	-	5

Продолжение табл. 2.1

№ Вар.	№ Подвар.	*m*, кг	V_0, м/с	μ, Нс/м	*n*	*F*, Н	α, град	*t*, сек	*l*, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21.	1	5	1,2	0,1	1	$3t+\sin(\pi t)$	90	3	-
	2	6	1,5	0,05	1	$5\cos^2(t/2)$	90	2	-
	3	3	3	0,15	1	$0{,}5t^2+3t^3$	90	5	-
	4	2	2	0,2	1	$2t+\sin^2(\pi t)$	90	2,5	-
	5	3	1,4	0,1	1	$\sin(t)\cos(t)$	90	1	-
	6	10	3	0,3	1	$2+\sin(\pi t/2)$	90	1,5	-
22.	1	5	1,2	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	90	-	3
	2	6	1,5	0,05	2	$0{,}5\cos(2t)$	90	-	4
	3	3	1,0	0,15	2	$\sin(t)\cos(t)$	90	-	2
	4	2	2	0,2	2	$0{,}2t^3-\sin(t)$	90	-	6
	5	3	4	0,1	2	$t^2+2\sin^2(t)$	90	-	8
	6	10	1,0	0,3	2	$2t+\sin(\pi t/2)$	90	-	1
23.	1	5	0,2	0,1	1	$3\sin(\pi t)$	30	7	-
	2	6	0,5	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	2	-
	3	3	0,3	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	5	-
	4	2	0,2	0,2	1	$3t+\sin(\pi t)$	45	6	-
	5	3	0,4	0,1	1	$5t^2+2$	30	1	-
	6	10	1,0	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	60	5	-
24.	1	5	0,2	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	30	-	3
	2	6	0,5	0,05	2	$0{,}5\cos^2(2t)$	30	-	5
	3	3	0,3	0,15	2	$0{,}5t^2+1$	60	-	6
	4	2	0,2	0,2	2	$t+\sin(\pi t/2)$	45	-	8
	5	3	0,4	0,1	2	$5t^2+2$	30	-	2
	6	10	1,0	0,3	2	$2\sin(\pi t/2)$	60	-	4

Продолжение табл. 2.1

№ Вар.	№ Подвар.	**m, кг**	**V_0, м/с**	**μ, Нс/м**	**n**	**F, Н**	**α, град**	**t, сек**	**l, м**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25.	1	5	1,2	0,1	1	$3+\sin(\pi t)$	30	3	-
	2	6	1,5	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	2	-
	3	3	3	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	5	-
	4	2	2	0,2	1	$t-5\sin(\pi t)$	45	1,5	-
	5	3	4	0,1	1	$5t^2+2$	30	1	-
	6	10	10	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	60	5	-
26.	1	5	12	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	30	-	6
	2	6	15	0,05	2	$0{,}5\cos(2t)$	30	-	5
	3	3	18	0,15	2	$0{,}5t^2+1$	60	-	7
	4	2	9	0,2	2	$t-\cos(\pi t/6)$	45	-	3
	5	3	8	0,1	2	$5t^2+2$	30	-	2
	6	10	8	0,3	2	$2\sin(\pi t/2)$	60	-	3
27.	1	5	2	0,1	1	$3\sin(\pi t)$	30	3	-
	2	6	3,5	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	2	-
	3	3	3	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	5	-
	4	2	2	0,2	1	$t+\cos(\pi t/6)$	45	6	-
	5	3	4	0,1	1	$5t^2+2$	30	1	-
	6	10	1,0	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	60	2,5	-
28.	1	5	9	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	30	-	1
	2	6	18	0,05	2	$0{,}5\cos(2t)$	30	-	4
	3	3	9,5	0,15	2	$0{,}5t^2+1$	60	-	3
	4	2	4,5	0,2	2	$t+\sin(3\pi t)$	45	-	2
	5	3	20	0,1	2	$5t^2+2$	30	-	5
	6	10	14	0,3	2	$2\sin(\pi t/2)$	60	-	3

Окончание табл. 2.1

№ Вар.	№ Подвар.	m, кг	V_0, м/с	μ, Нс/м	n	F, Н	α, град	t, сек	l, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
29.	1	5	2	0,1	1	$3\sin(\pi t)+2$	30	3	-
	2	6	2,5	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	2	-
	3	3	6	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	5	-
	4	2	3	0,2	1	$2t+5t^{-2}$	45	2,5	-
	5	3	1,4	0,1	1	$5t^2+2$	30	1	-
	6	10	5	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	60	3,5	-
30.	1	5	0,2	0,1	2	$3\sin(\pi t)$	30	-	3
	2	6	0,5	0,05	2	$0{,}5\cos(2t)$	30	-	2
	3	3	0,3	0,15	2	$0{,}5t^2+1$	60	-	1
	4	2	0,2	0,2	2	$2t-6t^{-2}$	45	-	5
	5	3	0,4	0,1	2	$5t^2+2$	30	-	6
	6	10	1,0	0,3	2	$2\sin(\pi t/2)$	60	-	8
31.	1	5	2,2	0,1	1	$3\sin(\pi t)$	25	3	-
	2	6	2,5	0,05	1	$0{,}5\cos(2t)$	30	2	-
	3	3	3,5	0,15	1	$0{,}5t^2+1$	60	5	-
	4	2	4,5	0,2	1	$2t+\sin(\pi t)$	45	1,5	-
	5	3	5	0,1	1	$5t^2+2$	60	1	-
	6	10	1,5	0,3	1	$2\sin(\pi t/2)$	30	5	-
32.	1	5	2	0,1	2	$3+\sin(\pi t)$	30	-	4
	2	6	3,5	0,05	2	$5\cos(2t)$	45	-	2
	3	3	3	0,15	2	$\sin(t)\cos(t)$	60	-	5
	4	2	2,2	0,2	2	$2t^2-3t$	75	-	3
	5	3	4	0,1	2	$5t^3+2$	15	-	6
	6	10	1	0,3	2	$2-\sin(\pi t/2)$	60	-	7

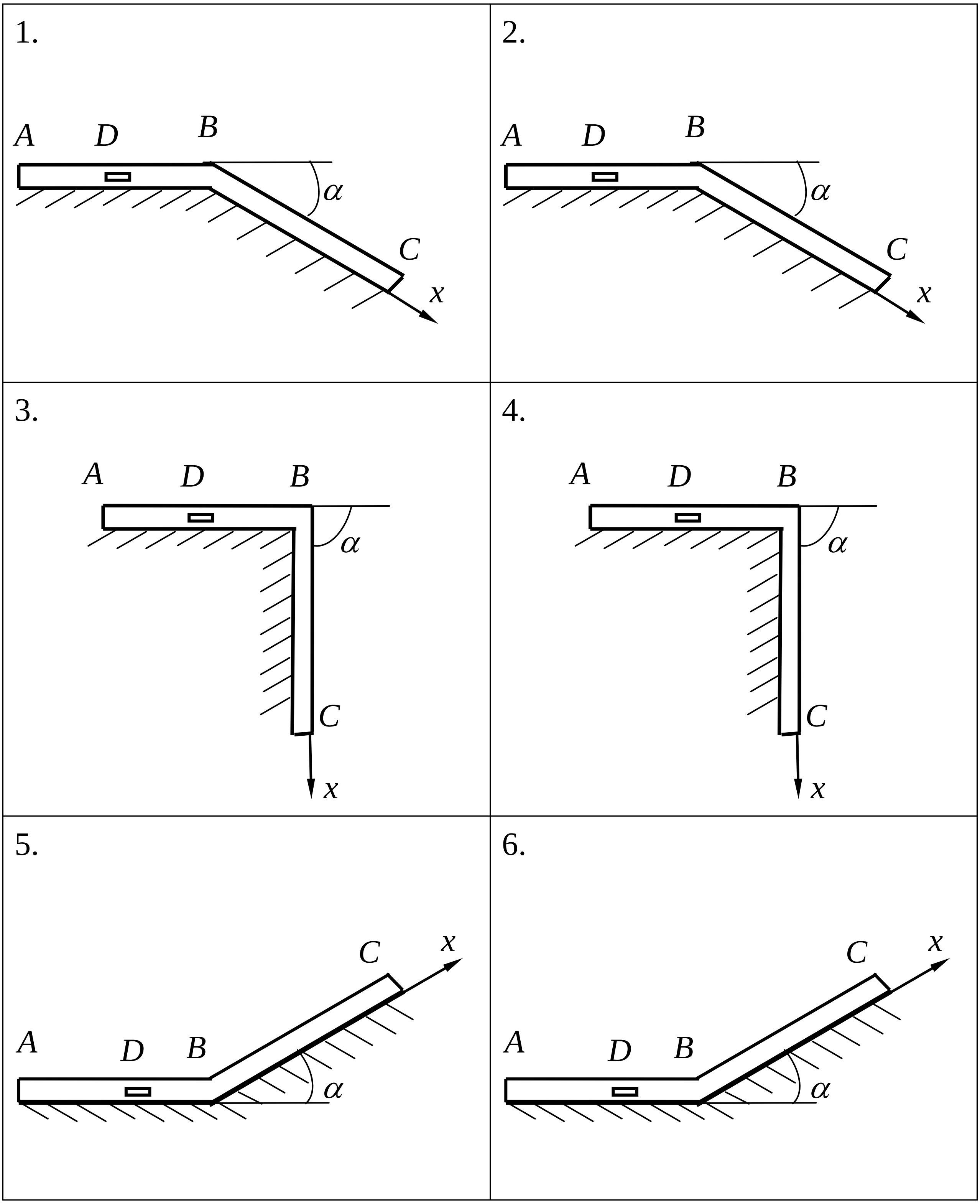
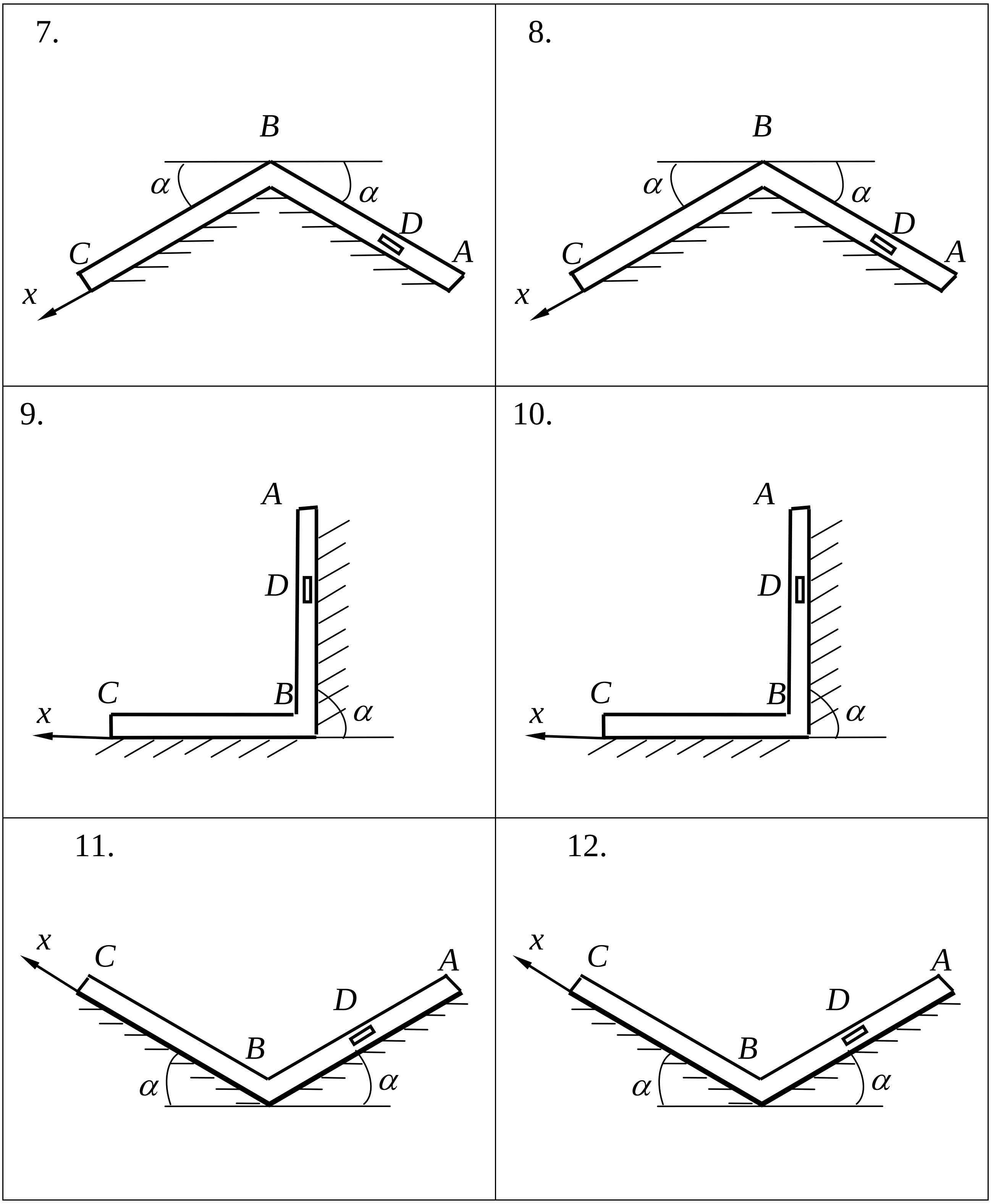
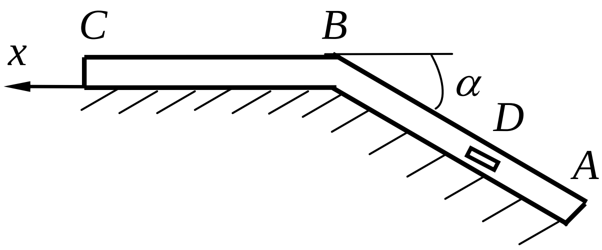


Рис. 2.1

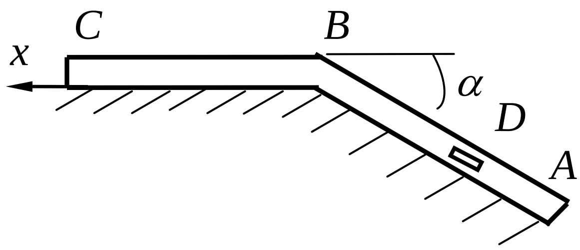


Продолжение рис. 2.1

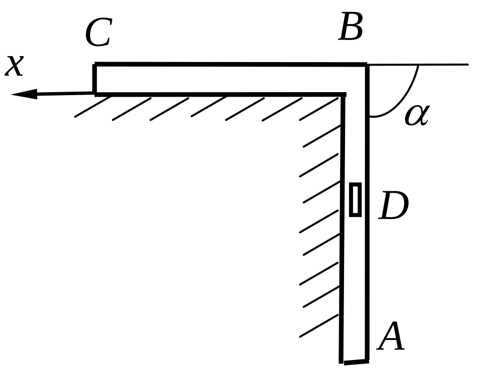
13.



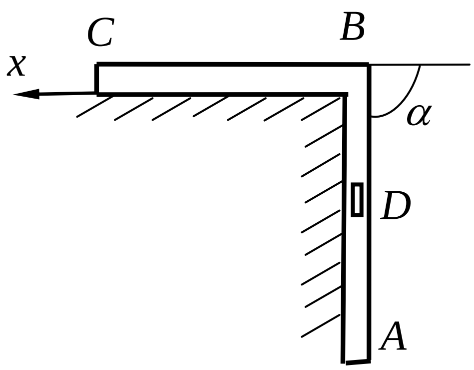
14.



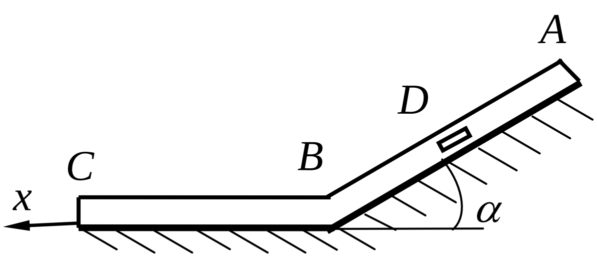
15.



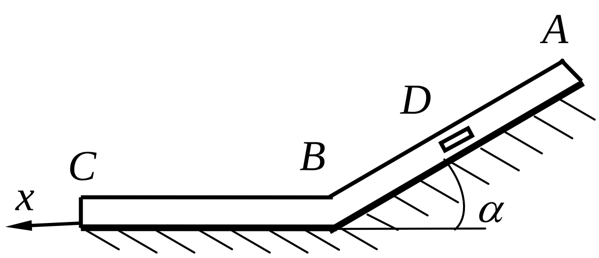
16.



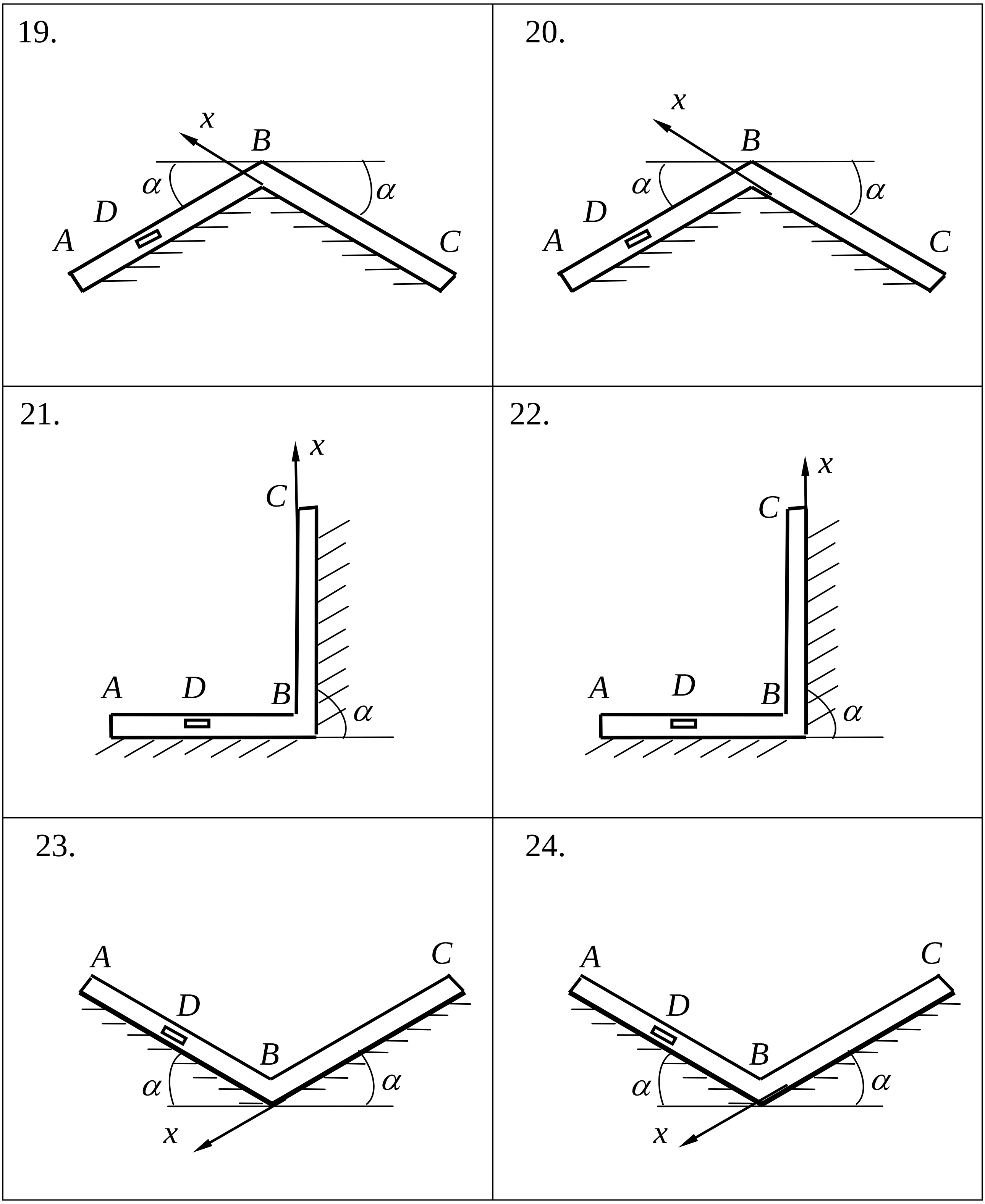
17.



18.

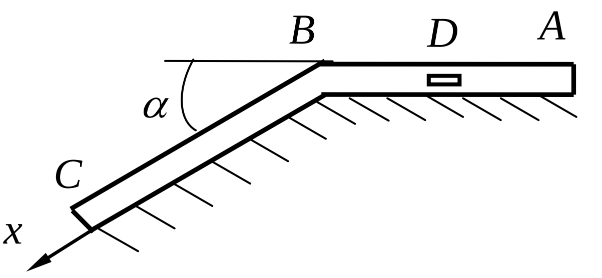


Продолжение рис. 2.1

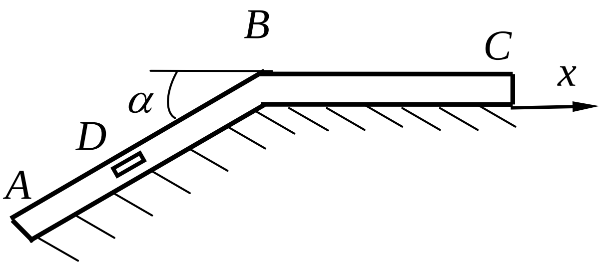


Продолжение рис. 2.1

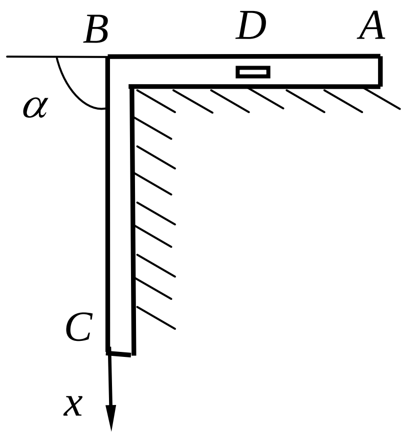
25.



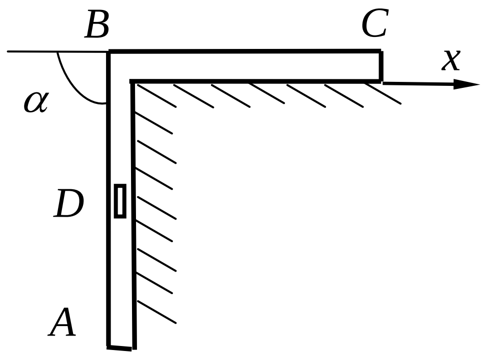
26.



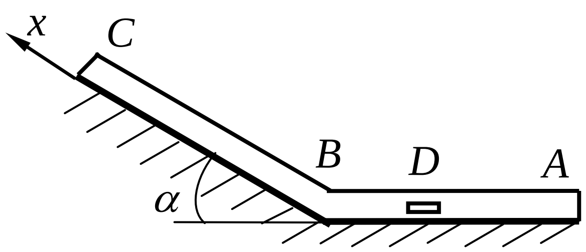
27.



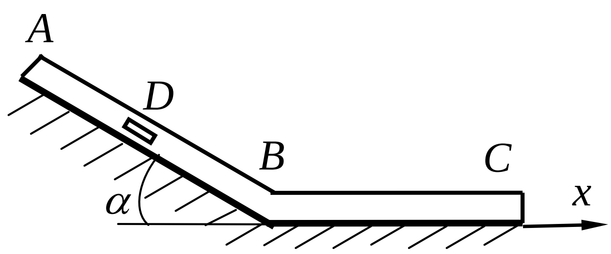
28.



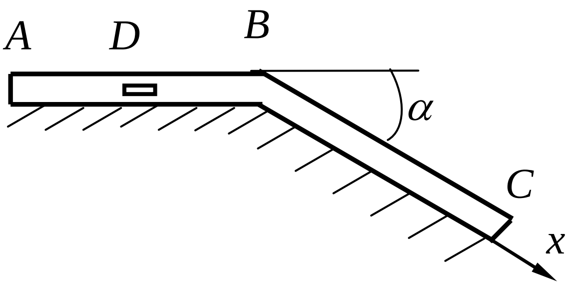
29.



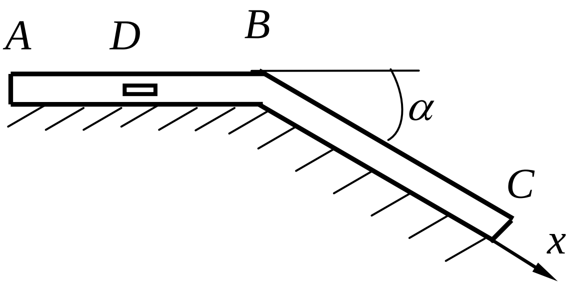
30.



31.



32.



Окончание рис. 2.1

2.3. Пример выполнения задания

2.3.1. Условие примера

На участке трубы *AB* на груз *D* действует постоянная сила $\vec{Q}$, направление которой показано на рис. 2.2, и сила сопротивления $R = \mu V^n$. Длина участка *AB*=*l*. На участке *BC* на груз действует сила трения $F_{ТР}$ (коэффициент трения *f*=0,1) и переменная сила $F = 6\cos 4t$, где *F* измеряется в ньютонах, а t - в секундах.

Определить уравнение движения груза *D* на участке *BC* при следующих значениях параметров: m=4 кг, Q=10 Н, μ=0,8 Нс^2/м^2, n=2, V_0=12м/с, l=2,5 м, g=9,9 м/с^2.

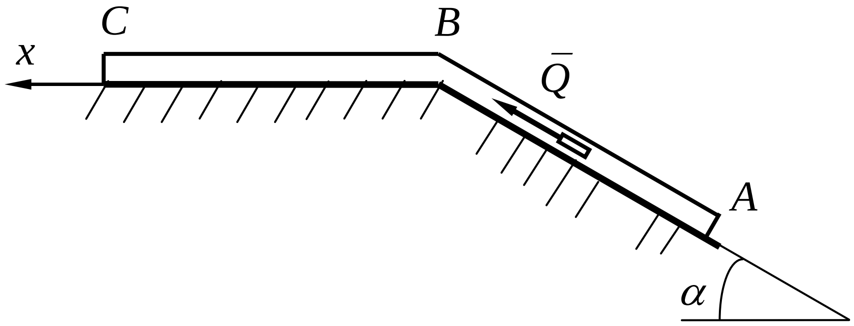


Рис. 2.2

2.3.2. Решение примера

Дифференциальное уравнение движения груза *D* на участке *AB* (рис.2.3) запишется

$$m\ddot{x} = Q - mg\cos 60^o - R.$$

Начальные условия ($t = 0$): $x_1(0) = 0,\ \dot{x}_1(0) = V_0 = 12$ м/с.

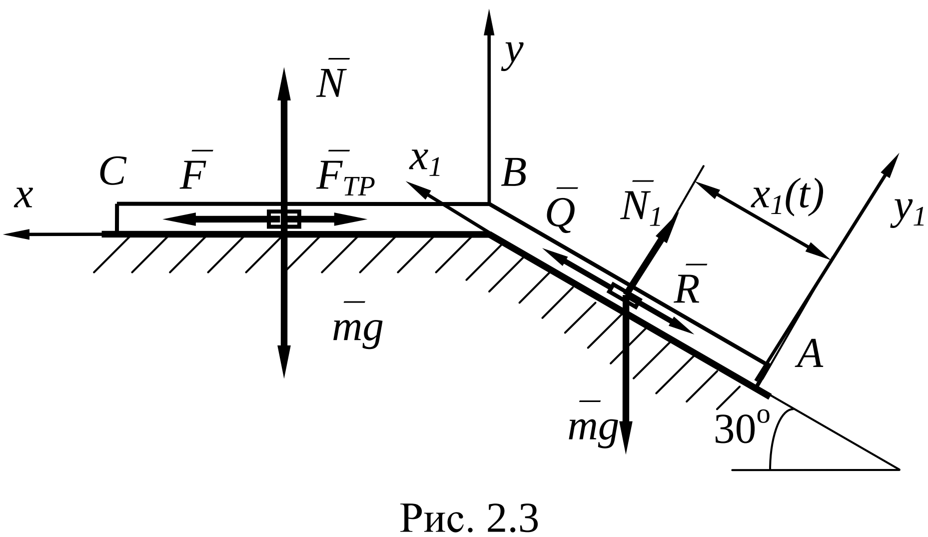


Рис. 2.3

При прямолинейном движении скорость точки $V_1 = \dot{x}_1$, а ускорение $\ddot{x}_1 = \dfrac{dV_1}{dt}$.

Тогда дифференциальное уравнение движения груза *D* примет вид:

$$4\frac{dV_1}{dt} = 10 - 4\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5 - 0{,}8\cdot V_1^2.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{dV_1}{dt} = 0{,}2(12 + V_1^2).$$

Производную $\dfrac{dV_1}{dt}$ представим в виде:

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} = \frac{V_1 dV_1}{dx_1}.$$

Тогда получим следующее дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{V_1 dV_1}{dx_1} = -0{,}2(12 + V_1^2).$$

Разделив переменные, имеем

$$\frac{V_1 dV_1}{(12 + V_1^2)} = -0{,}2\,dx_1.$$

Интегрирование этого дифференциального уравнения дает:

$$\frac{1}{2}\ln(12 + V_1^2)\Big|_{V_0}^{V_B} = -0{,}2\,x_1\Big|_0^l.$$

После подстановки пределов интегрирования, получаем:

$$\ln\frac{12+V_B^2}{(12+V_0^2)} = -0{,}4l.$$

Потенцируя обе части последнего равенства, находим скорость V_B груза *D* в конце участка *AB*:

$$V_B = \sqrt{(12 + V_0^2)e^{-0{,}4l} - 12} = \sqrt{156e^{-1} - 12} \approx 6{,}73 \text{ м/с}.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения груза D на участке BC (рис.2.3):

$$m\ddot{x} = F_x - F_{mp},$$

где $F_{mp} = fN$.

$$4\ddot{x} = 6\cos 4t - 0,4 \cdot 0,98;$$
$$\ddot{x} = 1,5\cos 4t - 0,98.$$

Начальные условия:

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = V_B = 6,73 \text{ м/с.}$$

При прямолинейном движении $\dot{x} = V$ и $\ddot{x} = \dfrac{dV}{dt}$, поэтому имеем:

$$\frac{dV}{dt} = 1{,}5\cos(4t)\text{-}0{,}98.$$

Разделяем переменные

$$dV = 1{,}5\cos(4t)dt\text{-}0{,}98dt.$$

После интегрирования, получим:

$$V = 0{,}375\sin(4t)\text{-}0{,}98t + C_1.$$

Из второго начального условия:

$$0{,}375 \cdot 0 \text{ - } 0{,}98 \cdot 0 + C_1 = 6,73;$$
$$C_1 = 6,73 \text{ м/с.}$$

Следовательно,

$$V = 0{,}375\sin(4t)\text{-}0{,}98t + 6{,}73.$$

Но $V = \dfrac{dx}{dt}$, поэтому $\dfrac{dx}{dt} = 0{,}375\sin(4t)\text{-}0{,}98t + 6{,}73$.

Отсюда, после разделения переменных, имеем:

$$dx = 0{,}375\sin(4t)dt\text{-}0{,}98tdt + 6{,}73dt.$$

И, после интегрирования, получим:

$$x = -0{,}09375\cos(4t) - 0{,}49t^2 + 6{,}73t + C_2.$$

Из первого начального условия:

$$0 = -0,09375 \cdot 1 - 0,49 \cdot 0 + 6,73 \cdot 0 + C_2$$
$$C_2 = 0,09375 \text{ м.}$$

Окончательно имеем:

$$x = 0,09375(1 - \cos 4t) - 0,49t^2 + 6,73t \text{ (м).}$$

3. Задание №2. Колебания материальной точки

3.1 Содержание задания

Груз А прикрепленный к горизонтальной пружине совершает горизонтальные колебания под действием возмущающей силы $F_B = F_0 \sin \omega t$, как показано на рис. 3.1.

Масса груза m, амплитуда возмущающей силы F_0 и ее круговая частота ω, а также начальные условия задачи даны в табл. 3.1.

Номер строки таблицы соответствует варианту задачи.

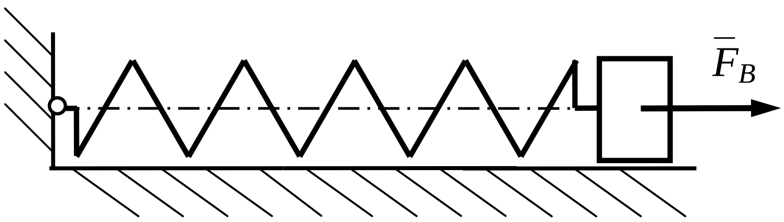


Рис. 3.1

Определить коэффициент c упругости пружины для заданного в табл. 3.1 значения коэффициента динамичности k_D при $k > \omega$, где k - круговая частота свободных колебаний без учета сил сопротивления.

Найти уравнение движения груза при заданных в таблице начальных условиях и найденном значении коэффициента упругости пружины. Начало отсчета на оси взять на конце недеформированной пружины.

Построить график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от коэффициента расстройки для значений 0; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9; 1,0; 1,1; 1,25; 1,5; 1,75; 2,0.

При решении задачи считать, что сила упругости пружины прямо пропорциональна ее деформации, а силами сопротивления движению пренебречь.

Определить зависимость амплитуды вынужденных колебаний от сопротивления движению, считая силу сопротивления пропорциональной величине скорости груза. При заданном в табл. 3.1 значении коэффициента затухания, построить график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от коэффициента расстройки $z = \dfrac{\omega}{k}$ для значений 0; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9; 1,0; 1,1; 1,25; 1,5; 1,75; 2,0.

3.2. Краткие указания к выполнению задания

3.2.1. Проработать раздел “Колебания материальной точки”, пользуясь конспектом лекций и рекомендуемыми учебниками [1 – 4].

3.2.2. Определить коэффициент c упругости пружины для заданного значения коэффициента динамичности k_D при $k > \omega$.

3.2.3. Выбрать ось в направлении движения груза. Начало отсчета на оси взять на конце недеформированной пружины.

3.2.4. Изобразить груз A в произвольный момент времени и расставить действующие на него силы.

3.2.5. Составить дифференциальное уравнение движения груза A.

3.2.6. Записать дифференциальное уравнение колебаний груза в канонической форме.

3.2.7. Определить решение дифференциальное уравнение колебаний груза с учетом начальных условий.

3.2.8. Построить амплитудно-частотные характеристики системы без учета и с учетом сопротивления.

Таблица 3.1

Варианты числовых значений параметров задания №2

№ Вар.	№ Подвар.	Масса груза m, кг	Амплитуда силы F_0, Н	Круговая частота ω, c^{-1}	Начальн. коорд. x_0, м	Начальн. скорость V_0, м/с	Коэфф. динам. k_D	Коэфф. затух. n, c^{-1}
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1.	1	0,4	40	50	0,03	0	1,2	10
	2	0,5	35	55	0,05	0,5	1,3	9
	3	0,6	30	60	0,07	1	1,4	8
	4	0,7	25	65	0,09	1,5	1,5	7
	5	0,8	20	70	0, 11	2	1,6	6
	6	0,9	15	75	0, 13	2,5	1,7	5
2.	1	2	180	60	0	1,2	1,5	15
	2	3	190	55	0,2	1	1,6	14
	3	4	200	50	0,4	0,8	1,7	13
	4	5	210	45	0,6	0,6	1,8	12
	5	6	220	40	0,8	0,4	1,9	11
	6	7	230	35	1	0,2	2	10
3.	1	0,8	400	70	0,04	0	2	20
	2	1	350	60	0,05	0,2	1,8	25
	3	1,2	300	50	0,06	0,4	1,6	30
	4	1,4	250	40	0,07	0,6	1,4	35
	5	1,6	200	30	0,08	0,8	1,2	40
	6	1,8	150	20	0,09	1	1	45
4.	1	10	500	100	0,1	2	2	25
	2	11	450	90	0,01	1,8	2,2	30
	3	12	400	80	0,02	1,6	2,4	35
	4	13	350	70	0,03	1,4	2,6	40
	5	14	300	60	0,04	1,2	2,8	45
	6	15	250	50	0,05	1	3	50
5.	1	3	600	90	0,05	0	1,8	20
	2	4	700	80	0,04	0,1	2	25
	3	5	800	70	0,03	0,2	2,2	30
	4	6	500	60	0,02	0,3	2,4	35
	5	7	400	50	0,01	0,4	2,6	40
	6	8	300	40	0	0,5	2,8	45

Продолжение табл. 3.1

№ Вар.	№ Подвар.	Масса груза m, кг	Амплитуда силы F_0, Н	Круговая частота ω, $с^{-1}$	Начальн. коорд. x_0, м	Начальн. скорость V_0, м/с	Коэфф. динам. k_D	Коэфф. затух. n, $с^{-1}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
6.	1	5	300	120	0	1	1,5	30
	2	6	400	110	0,01	0,9	1,6	35
	3	7	500	100	0,02	0,8	1,7	40
	4	8	600	90	0,03	0,7	1,8	45
	5	9	700	80	0,04	0,6	1,9	50
	6	10	800	70	0,05	0,5	2	55
7.	1	8	200	80	0,05	0	1,4	30
	2	7	210	75	0,04	0,2	1,6	40
	3	6	220	70	0,03	0,4	1,8	50
	4	5	230	65	0,02	0,6	2	60
	5	4	240	60	0,01	0,8	2,2	70
	6	3	250	55	0	1	2,4	80
8.	1	1	150	90	0	2	1,8	25
	2	2	160	80	0,01	1,8	1,6	30
	3	3	170	70	0,02	1,6	1,4	35
	4	4	180	60	0,03	1,4	1,2	40
	5	5	190	50	0,04	1,2	1	45
	6	6	200	40	0,05	1	0,8	55
9.	1	4	450	150	0,02	0	1,5	40
	2	5	440	140	0,03	0,1	2	50
	3	6	430	130	0,04	0,2	2,5	60
	4	7	420	120	0,05	0,3	3	70
	5	8	410	110	0,06	0,4	3,5	80
	6	9	400	100	0,07	0,5	4	90
10.	1	3	300	85	0	3	2	20
	2	4	350	80	0,02	2,5	2,2	30
	3	5	400	75	0,04	2	2,4	40
	4	6	450	70	0,06	1,5	2,6	50
	5	7	500	65	0,08	1	2,8	60
	6	8	550	60	0,1	0,5	3	70

Продолжение табл. 3.1

№ Вар.	№ Подвар.	**Масса груза** m, кг	**Амплитуда силы** F_0, Н	**Круговая частота** ω, c^{-1}	**Начальн. коорд.** x_0, м	**Начальн. скорость** V_0, м/с	**Коэфф. динам.** k_D	**Коэфф. затух.** n, c^{-1}
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
11.	1	6	240	70	0,01	0	2,5	10
	2	7	250	65	0,02	0,1	2,6	12
	3	8	260	60	0,03	0,2	2,7	14
	4	9	270	55	0,04	0,3	2,8	16
	5	10	280	50	0,05	0,4	2,9	18
	6	11	290	45	0,06	0,5	3	20
12.	1	8	50	55	0	1	1,6	16
	2	7	60	50	0,02	0,8	1,7	17
	3	6	70	45	0,04	0,6	1,8	18
	4	5	80	40	0,06	0,4	1,9	19
	5	4	90	35	0,08	0,2	2	20
	6	3	100	30	0,1	0	2,1	21
13.	1	7	140	40	0,2	0	1,8	14
	2	6	130	45	0,3	0,3	1,7	15
	3	5	120	50	0,4	0,6	1,6	16
	4	4	110	55	0,5	0,9	1,5	17
	5	3	100	60	0,6	1,2	1,4	18
	6	2	90	65	0,7	1,5	1,3	19
14.	1	14	700	110	0	2	2	22
	2	13	650	100	0,03	1,8	2,1	23
	3	12	600	90	0,06	1,6	2,2	24
	4	11	550	80	0,09	1,4	2,3	25
	5	10	500	75	0,12	1,2	2,4	26
	6	9	450	70	0,15	1	2,5	27
15.	1	12	1600	140	0,01	0	2,5	35
	2	13	1500	150	0,02	0,1	2,4	40
	3	14	1400	160	0,03	0,2	2,3	45
	4	15	1300	170	0,04	0,3	2,2	50
	5	16	1200	180	0,05	0,4	2,1	55
	6	17	1100	190	0,06	0,5	2	60

Продолжение табл. 3.1

№ Вар.	№ Подвар.	Масса груза m, кг	Амплитуда силы F_0, Н	Круговая частота ω, с$^{-1}$	Начальн. коорд. x_0, м	Начальн. скорость V_0, м/с	Коэфф. динам. k_D	Коэфф. затух. n, с$^{-1}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
16.	1	10	900	100	0	1,5	1,4	30
	2	11	920	90	0,2	2	1,6	40
	3	12	940	80	0,4	2,5	1,8	50
	4	13	960	70	0,6	3	2	60
	5	14	980	60	0,8	3,5	2,2	70
	6	15	1000	50	1	4	2,4	80
17.	1	20	2000	60	0,1	0	1,5	25
	2	22	2020	65	0,2	0,5	1,6	30
	3	24	2040	70	0,3	1	1,7	35
	4	26	2060	75	0,4	1,5	1,8	40
	5	28	2080	80	0,5	2	1,9	45
	6	30	2100	85	0,5	2,5	2	50
18.	1	3	300	80	0	0,5	3	8
	2	4	310	75	0,01	0,4	2,8	12
	3	5	320	70	0,02	0,3	2,6	16
	4	6	330	65	0,03	0,2	2,4	20
	5	7	340	60	0,04	0,1	2,2	24
	6	8	350	55	0,05	0	2	28
19.	1	11	1800	120	0,02	0	2,2	18
	2	10	1820	110	0,03	0,2	2,3	19
	3	9	1840	100	0,04	0,4	2,4	20
	4	8	1860	90	0,05	0,6	2,5	21
	5	7	1880	80	0,06	0,8	2,6	22
	6	6	1900	70	0,08	1	2,8	23
20.	1	18	3600	180	0	3	2,8	50
	2	19	3500	170	0,2	2,5	2,6	45
	3	20	3400	160	0,4	2	2,4	40
	4	21	3300	150	0,6	1,5	2,2	35
	5	22	3200	140	0,8	1	2,1	30
	6	23	3100	130	7	0,5	2	25

Продолжение табл. 3.1

№ Вар.	№ Подвар.	Масса груза m, кг	Амплитуда силы F_0, Н	Круговая частота ω, с$^{-1}$	Начальн. коорд. x_0, м	Начальн. скорость V_0, м/с	Коэфф. динам. k_D	Коэфф. затух. n, с$^{-1}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
21.	1	7	2800	130	0,05	0	1,9	45
	2	8	2700	135	0,04	0,2	2	46
	3	9	2600	140	0,03	0,4	2,1	47
	4	10	2500	145	0,02	0,6	2,2	48
	5	11	2400	150	0,01	0,8	2,3	49
	6	12	2300	155	0	1	2,4	50
22.	1	1,5	750	75	0	1,8	2	20
	2	2	755	70	0,01	1,6	1,9	30
	3	2,5	760	65	0,02	1,4	1,8	40
	4	3	765	60	0,03	1,2	1,7	50
	5	3,5	770	55	0,04	1	1,6	60
	6	4	775	50	0,05	0,8	1,5	70
23.	1	3,5	700	60	0,3	0	3	15
	2	4	705	70	0,4	0,3	2,5	16
	3	4,5	710	80	0,5	0,6	2	17
	4	5	715	90	0,6	0,9	1,5	18
	5	5,5	720	100	0,7	1,2	1	19
	6	6	725	110	0,8	1,5	0,5	20
24.	1	0,5	100	90	0	1	2,5	17
	2	1	110	80	0,01	1,1	2,4	20
	3	1,5	120	70	0,02	1,2	2,3	23
	4	2	130	60	0,03	1,3	2,2	26
	5	2,5	140	50	0,04	1,4	2,1	29
	6	3	150	40	0,05	1,5	2	32
25.	1	13	390	40	0,15	0	2,3	10
	2	12	380	42	0,14	0,1	2,4	12
	3	11	370	44	0,13	0,2	2,5	14
	4	10	360	46	0,12	0,3	2,6	16
	5	9	350	48	0,11	0,4	2,7	18
	6	8	340	50	0,1	0,5	2,8	20
26.	1	2,5	750	80	0	4	1,6	28
	2	3	760	75	0,1	3,5	1,7	30
	3	3,5	770	70	0,2	3	1,8	32
	4	4	780	65	0,3	2,5	1,9	34
	5	4,5	790	60	0,4	2	2	36
	6	5	800	55	0,5	1,5	2,1	38

Окончание табл. 3.1

№ Вар.	№ Подвар.	Масса груза m, кг	Амплитуда силы F_0, Н	Круговая частота ω, с$^{-1}$	Начальн. коорд. x_0, м	Начальн. скорость V_0, м/с	Коэфф. динам. k_D	Коэфф. затух. n, с$^{-1}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
27.	1	5	100	30	0,2	0	1,3	15
	2	6	110	40	0,3	0,1	1,4	20
	3	7	120	50	0,4	0,2	1,5	25
	4	8	130	60	0,5	0,3	1,6	30
	5	9	140	70	0,6	0,4	1,7	35
	6	10	150	80	0,7	0,5	1,8	40
28.	1	9	1800	70	0	1,5	1,7	17
	2	8	1600	75	0,1	1,4	1,6	20
	3	7	1400	80	0,2	1,3	1,5	23
	4	6	1200	85	0,3	1,2	1,4	26
	5	5	1000	90	0,4	1,1	1,3	29
	6	4	800	95	0,5	1	1,2	32
29.	1	15	1500	45	0,08	0	1,5	6
	2	14	1600	44	0,07	0,5	2	8
	3	13	1700	43	0,06	1	2,5	10
	4	12	1800	42	0,05	1,5	3	12
	5	11	1900	41	0,04	2	3,5	14
	6	10	2000	40	0,03	2,5	4	16
30.	1	13	2600	100	0	2,5	2	30
	2	14	2650	95	0,2	2,4	2,1	35
	3	15	2700	90	0,4	2,3	2,2	40
	4	16	2750	85	0,6	2,2	2,3	45
	5	17	2800	80	0,8	2,1	2,4	50
	6	18	2850	75	1	2	2,5	55
31.	1	1	60	25	0,1	0	3	40
	2	2	70	30	0,2	0,2	2,8	50
	3	3	80	35	0,3	0,4	2,6	60
	4	4	90	40	0,4	0,6	2,4	70
	5	5	100	45	0,5	0,8	2,2	80
	6	6	110	50	0,6	1	2	90
32.	1	10	1500	80	0	1,5	0,4	35
	2	9	1400	70	0,2	1,4	0,8	40
	3	8	1300	60	0,4	1,3	1,2	45
	4	7	1200	50	0,6	1,2	1,6	55
	5	6	1100	40	0,8	1,1	2	60
	6	5	1000	30	1	1	2,4	65

3.3. Пример выполнения задания

3.3.1. Условие примера

Груз *A* прикрепленный к горизонтальной пружине совершает горизонтальные колебания под действием возмущающей силы $F_B = F_0 \sin \omega t$, как показано на рис. 3.1.

Масса груза m=0,8 кг, амплитуда возмущающей силы F_0=28,8 Н, ее круговая частота $\omega = 40$ с$^{-1}$, начальные условия движения груза на пружине $x_0 = 0,025$ м, $V_0 = -3$ м/с.

Определить коэффициент c упругости пружины для значения коэффициента динамичности $k_D = 1{,}8$ при $\kappa > \omega$.

Найти уравнение движения груза при заданных начальных условиях и найденном значении коэффициента упругости пружины. Начало отсчета на оси взять на конце недеформированной пружины.

Построить график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от коэффициента расстройки для значений 0; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9; 1,0; 1,1; 1,25; 1,5; 1,75; 2,0.

При решении задачи считать, что сила упругости пружины прямо пропорциональна ее деформации, а силами сопротивления движению пренебречь.

Определить зависимость амплитуды вынужденных колебаний от сопротивления движению, считая силу сопротивления пропорциональной величине скорости груза. При значении коэффициента затухания $n = 12$ с$^{-1}$, построить график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от коэффициента расстройки $z = \dfrac{\omega}{k}$ для значений 0; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9; 1,0; 1,1; 1,25; 1,5; 1,75; 2,0.

3.3.2. Решение примера

Определим коэффициент с упругости пружины.

При отсутствии сил сопротивления коэффициент динамичности вычисляется по формуле

$$k_D = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{k^2}},$$

откуда

$$k^2 = \frac{\omega^2}{1 - \frac{1}{k_D}} = \frac{40^2}{1 - \frac{1}{1,8}} = 3600 \text{ с}^{-2}.$$

С другой стороны, квадрат круговой частоты свободных колебаний без учета сил сопротивления равен

$$k^2 = \frac{c}{m},$$

следовательно

$$c = k^2 \cdot m = 3600 \cdot 0,8 = 2880 \text{ Н/м}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний определяется произведением

$$B = \lambda_{ст} \cdot k_D.$$

Здесь $\lambda_{ст} = \dfrac{F_0}{c}$ - деформация пружины при статическом действии силы F_0.

В нашем примере

$$\lambda_{ст} = \frac{F_0}{c} = \frac{28,8}{2880} = 0,01 \text{ м}, \quad b = \lambda_{ст} \cdot k_D = 0,01 \cdot 1,8 = 0,018 \text{ м}.$$

Силы, приложенные к грузу А в произвольный момент времени, изображены на рис. 3.2

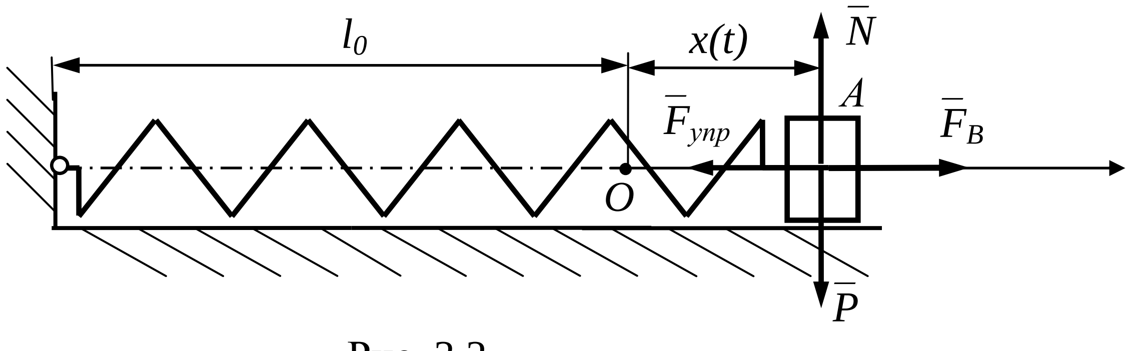


Рис. 3.2

Составляем дифференциальное уравнение движения груза

$$m\ddot{x} = F_B - F_{упр}, \tag{3.1}$$

где $F_{упр}$ - сила упругости пружины:

$$F_{упр} = c \cdot \lambda = c \cdot x.$$

Подставляя выражения возмущающей силы и силы упругости в уравнение (3.1), получаем следующее дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза:

$$m\ddot{x} = F_0 \cdot \sin \omega t - c \cdot x,$$

которое приводится к канонической форме

$$\ddot{x} + k^2 x = h \cdot \sin \omega t. \tag{3.2}$$

Здесь $h = \dfrac{F_0}{m} = \dfrac{28{,}8}{0{,}8} = 36$ м/с^2.

Это дифференциальное уравнение необходимо решать при начальных условиях:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = 0{,}025 \text{ м}, \\ \dot{x}(0) &= V_0 = -3 \text{ м/с}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Общее решение уравнения (3.2) является суммой двух функций

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1- общее решение однородного уравнения, а x_2- частное решение неоднородного уравнения.

Однородное уравнение имеет решение

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

где и C_1 и C_2 - постоянные интегрирования.

Частное решение неоднородного уравнения следующее

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t = B \cdot \sin \omega t.$$

Таким образом, в нашем примере

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + 0{,}018 \sin 40t. \tag{3.4}$$

Постоянные интегрирования находим из начальных условий (3.3).

Подставляя функцию (3.4) в первое начальное условие, имеем:

$$x = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 0{,}018 \cdot 0 = 0{,}025,$$

откуда

$$C_1 = 0{,}025 \text{ м}.$$

Далее определяем производную по времени от функции (3.4)

$$\dot{x} = -k \cdot C_1 \sin kt + k \cdot C_2 \cos kt + 0,72 \cos 40t .$$

Тогда из второго начального условия (3.3), следует

$$\dot{x}(0) = -60 \cdot C_1 \cdot 0 + 60 \cdot C_2 \cdot 1 + 0,72 \cdot 1 = -3.$$

Получаем

$$C_2 = -\frac{3,72}{60} = -0,062 \text{ м.}$$

Уравнение колебательного движения груза A окончательно примет вид

$$x = 0,025 \cos 60t - 0,062 \sin 60t + 0,018 \sin 40t \text{, м.}$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от коэффициента расстройки следующая

$$B = \frac{\lambda_{ст}}{\left|1 - z^2\right|} \tag{3.5}$$

Результаты вычислений по формуле (3.5) для различных значений z приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

z	0	0,25	0,5	0,75	0,9	1,0	1,1	1,25	1,5	1,75	2,0
$B \cdot 10^2$, м	1,0	1,07	1,33	2,29	5,26	∞	4,76	1,78	0,8	0,485	0,333

По данным табл. 3.2 строим кривую 1 на рис. 3.3, которая называется амплитудно–частотной характеристикой системы при отсутствии сопротивления.

При наличии силы сопротивления окружающей среды, пропорциональной скорости груза, дифференциальное уравнение движения системы будет иметь вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \cdot \sin \omega t ,$$

где n – коэффициент затухания (c^{-1}).

Величина амплитуды вынужденных колебаний находится по формуле

$$B = \frac{\lambda_{ст}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4b^2 \cdot z^2}} \tag{3.6}$$

где b - относительный коэффициент затухания $b = \dfrac{n}{k}$.

В нашем случае $b = \dfrac{n}{k} = \dfrac{12}{60} = 0,2$.

Результаты вычислений по формуле (3.6) для различных значений z приведены в табл. 3.

Таблица 3.3

z	0	0,25	0,5	0,75	0,9	1,0	1,1	1,25	1,5	1,75	2,0
$B \cdot 10^2$, м	1,0	1,06	1,29	1,89	2,46	2,5	2,05	1,33	0,72	0,459	0,322

По данным табл. 3.3 строим кривую 2 на рис. 3.3, которая дает представление о влиянии сопротивления на амплитуду вынужденных колебаний груза.

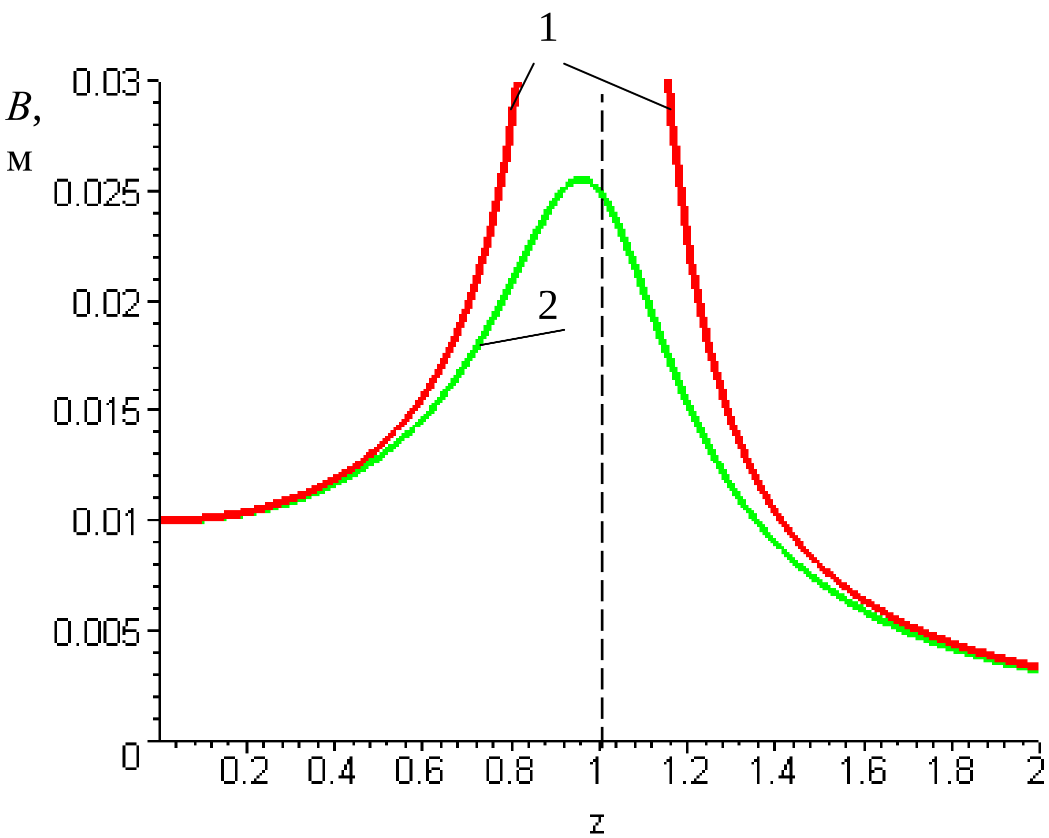


Рис. 3.3

4. Задание №3. Применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости твердого тела

4.1. Содержание задания

Тело *D* массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью ω_0. Варианты расчетных схем изображены на рис. 4.1. При этом в точке *M* желоба *AB* тела *D* на расстоянии *AM* от точки *A*, отсчитываемом вдоль желоба, закреплена материальная точка *K* массой m_2. В момент времени $t = 0$ на систему начинает действовать пара сил с моментом $M_z = M_z(t)$. При $t = t_1$ действие пары сил прекращается; одновременно точка *K* начинает относительное движение по желобу согласно закону $MK = S = S(t - t_1)$. Варианты числовых значений параметров приведены в табл. 4.1.

Примечание. Знак минус перед M_z и ω соответствует направлению движения часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси *z*.

Определить угловые скорости тела *D* соответственно в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$.

Тело *D* рассматривать как тонкую однородную пластину. Форма пластины выбирается в соответствии с вариантом задачи (см. рис. 4.1). Осевой момент инерции тела определять по формуле приведенной в табл. 4.2.

4.2. Краткие указания к выполнению задания

4.2.1. Прежде, чем приступить к выполнению задания, необходимо проработать соответствующие разделы лекций и рекомендуемой литературы [1 – 4].

4.2.2. Определить положение точки *K* на теле *D* в отрезке времени $[0; t_1]$.

4.2.3. Записать выражение кинетического момента системы относительно оси вращения тела в этом отрезке времени, как функцию угловой скорости.

4.2.4. Изобразить внешние силы, действующие на систему в произвольный момент времени и определить главный момент внешних сил относительно оси вращения.

4.2.5. Записать дифференциальное уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно оси вращения тела, с учетом выражений полученных в п.п. 4.2.3 и 4.2.4.

4.2.6. Разделить в полученном уравнении переменные и проинтегрировать левую и правую его части.

4.2.7. Определить угловую скорость тела в момент времени t_1.

4.2.8. Определить кинетический момент системы относительно оси вращения тела в момент времени t_1.

4.2.9. Определить положение точки K на теле D в момент времени t_2.

4.2.10. Изобразить внешние силы, действующие на систему в отрезке времени $[t_1; t_2]$. Показать, что главный момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю.

4.2.11. Записать равенство, выражающее закон сохранения кинетического момента системы относительно оси вращения тела.

4.2.12. Определить относительную и переносную скорости точки в момент времени t_2.

4.2.13. Записать выражение кинетического момента системы относительно оси вращения тела в момент времени t_2.

4.2.14. Приравнять выражение кинетического момента системы относительно оси вращения тела в момент времени t_2 его значению в момент времени t_1.

4.2.15. Определить угловую скорость тела в момент времени t_2.

Таблица 4.1

Варианты числовых значений параметров задания №3

N Вар.	№ подвар.	m_1, кг	m_2, кг	ω_0, сек$^{-1}$	*a*, м	*b*, м	*R*, м	α, град	*AM*, м	$M_z = M_z(t)$, Нм	t_1, сек	t_2, сек	$MK = S = S(t - t_1)$, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1.	1	32	10	-1	1	1,5	1,2	-	$\frac{\pi R}{6}$	$30t^2$	3	4	$\pi R(t - t_1)/3$
	2			1							2	3	
	3			-2							1,5	2,5	
	4			2							2,5	3,5	
	5			-3							0,5	1,5	
	6			3							1	2	
2.	1	200	60	-2	-	-	2	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	120	5	6	$(t - t_1)^2$
	2			2							4	5	
	3			-3							3	4	
	4			3							2	3	
	5			-4							1	2	
	6			4							0,5	1,5	
3.	1	120	40	0	2	-	-	-	0	$-120t$	4	6	$0{,}25\sqrt{2}(t - t_1)^2$
	2			1							3	5	
	3			-1							2	4	
	4			2							1	3	
	5			-2							1,5	3,5	
	6			3							0,5	2,5	

Продолжение табл. 4.1

N Вар.	№ подвар.	m_1, кг	m_2, кг	ω_0, сек$^{-1}$	**a,** м	**b,** м	**R,** м	α, град	**AM,** м	$M_z = M_z(t)$, Нм	t_1, сек	t_2, сек	$MK = S = S(t - t_1)$, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4.	1	16	5	-3	-	-	2	30	0,4	$21t$	2	6	$0{,}6\sqrt{t - t_1}$
	2			3							1	5	
	3			-2							1,5	5,5	
	4			2							0,5	4,5	
	5			-1							0,25	4,25	
	6			1							1,25	5,25	
5.	1	66	10	-1,5	2	1,5	-	-	0	$15t^2$	4	6	$0{,}5(t - t_1)$
	2			1,5							3	5	
	3			-2							2	4	
	4			2							1	3	
	5			-2,5							2,5	4,5	
	6			2,5							0,5	2,5	
6.	1	160	80	-1	1,5	-	2,5	-	$\frac{\pi a}{2}$	$-720t$	1	2	$\frac{\pi a}{6}(t - t_1)^2$
	2			1							2	3	
	3			-2							3	4	
	4			2							4	5	
	5			-3							5	6	
	6			3							6	7	

Продолжение табл. 4.1

N Вар.	**№ подвар.**	m_1, **кг**	m_2, **кг**	ω_0, **сек$^{-1}$**	***a*, м**	***b*, м**	***R*, м**	α, **град**	***AM*, м**	$M_z = M_z(t)$, **Нм**	t_1, **сек**	t_2, **сек**	$MK = S = S(t - t_1)$, **м**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
7.	1	300	50	-2	1,6	1	0,8	-	$\frac{\pi R}{2}$	960	1	2	$\frac{\pi R}{2}(t - t_1)^2$
	2			2							2	3	
	3			-3							3	4	
	4			3							4	5	
	5			-4							5	6	
	6			4							6	7	
8.	1	80	20	5	1,2	-	2	-	$\frac{\pi a}{2}$	$240t^3$	4	8	$\frac{\pi a}{6}\sqrt{t - t_1}$
	2			-5							3	7	
	3			4							2	6	
	4			-4							1	5	
	5			3							0,5	4,5	
	6			-3							1,5	5,5	
9.	1	20	5	5	1,2	-	0,4	45	0	$-20t$	3	4	$\frac{\pi R}{2}(t - t_1)^2$
	2			-5							2	3	
	3			6							1	2	
	4			-6							1,5	2,5	
	5			7							0,5	1,5	
	6			-7							2,5	3,5	

Продолжение табл. 4.1

N Вар.	**№ подвар.**	m_1, **кг**	m_2, **кг**	ω_0, **сек$^{-1}$**	***a*, м**	***b*, м**	***R*, м**	α, **град**	***AM*, м**	$M_z = M_z(t)$, **Нм**	t_1, **сек**	t_2, **сек**	$MK = S = S(t - t_1)$, **м**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10.	1	100	40	2	2	$\sqrt{2}$	-	-	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-90t^2$	4	5	$\sqrt{2}(t - t_1)/4$
	2			-2							3	4	
	3			3							2	3	
	4			-3							1	2	
	5			4							5	6	
	6			-4							6	7	
11.	1	60	20	-1	2	-	-	30	0	$40t$	2	4	$0,4(t - t_1)^2$
	2			1							3	4	
	3			-2							1	3	
	4			2							2	3	
	5			-3							4	5	
	6			3							5	6	
12.	1	40	10	-3	1	-	2	-	0	$50t^2$	3	5	$\pi a(t - t_1)/3$
	2			3							2	5	
	3			-2							1	2	
	4			2							2	4	
	5			-1							4	5	
	6			1							1	3	

Продолжение табл. 4.1

N Вар.	№ подвар.	m_1, кг	m_2, кг	ω_0, сек$^{-1}$	*a*, м	*b*, м	*R*, м	α, град	*AM*, м	$M_z = M_z(t)$, Нм	t_1, сек	t_2, сек	$MK = S = S(t - t_1)$, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
13.	1	24	4	4	1	-	-	-	0,5	$-36t^3$	1	3	$0,3(t - t_1)$
	2			-4							1	4	
	3			3							1	5	
	4			-3							2	6	
	5			2							2	7	
	6			-2							2	4	
14.	1	40	10	2	-	-	1	-	0	$120t$	1	4	$0,5(t - t_1)$
	2			-2							2	5	
	3			3							3	6	
	4			-3							4	8	
	5			4							5	7	
	6			-4							6	9	
15.	1	120	50	-4	1	-	2	-	$\frac{\pi a}{2}$	$330t^2$	2	3	$\frac{\pi a}{6}(t - t_1)$
	2			4							2	4	
	3			-3							1	4	
	4			3							4	5	
	5			2							1	3	
	6			-2							2	5	

Продолжение табл. 4.1

N Вар.	**№ подвар.**	m_1, **кг**	m_2, **кг**	ω_0, **сек**$^{-1}$	***a*, м**	***b*, м**	***R*, м**	α, **град**	***AM*, м**	$M_z = M_z(t)$, **Нм**	t_1, **сек**	t_2, **сек**	$MK = S = S(t - t_1)$, **м**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16.	1	60	10	-5	1	1,2	-	30	0,4	74	2	6	$0{,}4\sqrt{t - t_1}$
	2			5							1	10	
	3			-4							4	8	
	4			4							2	11	
	5			-3							5	9	
	6			3							5	21	
17.	1	50	10	-2	-	-	1,6	30	0,6	$69t$	4	6	$0{,}6(t - t_1)$
	2			2							1	3	
	3			3							2	5	
	4			-3							7	8	
	5			4							3	6	
	6			-4							6	7	
18.	1	120	50	3	2	3	0,8	-	$\frac{\pi R}{2}$	324	3	5	$\frac{\pi R}{8}(t - t_1)^2$
	2			-3							1	3	
	3			4							1	2	
	4			-4							2	4	
	5			5							4	5	
	6			-5							6	8	

Продолжение табл. 4.1

N Вар.	№ подвар.	m_1, кг	m_2, кг	ω_0, сек$^{-1}$	**a,** м	**b,** м	**R,** м	α, град	**AM,** м	$M_z = M_z(t)$, Нм	t_1, сек	t_2, сек	$MK = S = S(t - t_1)$, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
19.	1	90	30	1	1,5	-	-	-	0	$-135t$	2	3	$a\sqrt{t - t_1}$
	2			-1							3	5	
	3			2							2	6	
	4			-2							5	6	
	5			3							4	8	
	6			-3							3	6	
20.	1	50	12	3	1	-	1,2	-	$\frac{\pi a}{6}$	$-14t^2$	3	5	$\frac{\pi a}{12}(t - t_1)^2$
	2			-3							1	4	
	3			4							4	5	
	4			-4							2	4	
	5			5							3	6	
	6			-5							2	3	
21.	1	40	10	-6	-	-	1	-	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$72t$	1	3	$\frac{\sqrt{2}}{8}(t - t_1)^2$
	2			6							4	5	
	3			5							2	4	
	4			-5							5	6	
	5			-4							6	8	
	6			4							2	3	

Продолжение табл. 4.1

N Вар.	№ подвар.	m_1, кг	m_2, кг	ω_0, сек$^{-1}$	*a*, м	*b*, м	*R*, м	α, град	*AM*, м	$M_z = M_z(t)$, Нм	t_1, сек	t_2, сек	$MK = S = S(t - t_1)$, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
22.	1	150	50	-1	1,6	1,2	0,6	-	$\frac{\pi R}{2}$	160	4	5	$\frac{\pi R}{2}\sqrt{t - t_1}$
	2			1							1	2	
	3			-2							3	4	
	4			2							5	6	
	5			-3							6	7	
	6			3							8	9	
23.	1	90	20	2	$\sqrt{2}$	1	-	-	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-210	2	3	$\frac{\sqrt{3}}{2}(t - t_1)$
	2			-2							3	5	
	3			3							4	7	
	4			-3							5	6	
	5			4							6	8	
	6			-4							3	6	
24.	1	50	12	-3	0,6	-	-	60	0,2	$27t^2$	2	6	$0{,}4\sqrt{t - t_1}$
	2			3							1	2	
	3			-2							3	4	
	4			2							1	4	
	5			-1							1	5	
	6			1							1	3	

Продолжение табл. 4.1

N Вар.	№ подвар.	m_1, кг	m_2, кг	ω_0, сек$^{-1}$	*a*, м	*b*, м	*R*, м	α, град	*AM*, м	$M_z = M_z(t)$, Нм	t_1, сек	t_2, сек	$MK = S = S(t - t_1)$, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
25.	1	36	8	-5	-	-	0,5	-	0	$20t$	2	4	$\frac{\pi R}{6}(t - t_1)$
	2			5							1	4	
	3			-4							4	8	
	4			4							2	8	
	5			-3							3	4	
	6			3							5	7	
26.	1	150	40	-4	1,5	-	2	-	$\frac{\pi a}{2}$	$1600t^3$	1	2	$\frac{\pi a}{12}(t - t_1)^2$
	2			4							1	3	
	3			-3							4	5	
	4			3							4	6	
	5			-2							3	4	
	6			2							3	5	
27.	1	20	5	-5	0,6	-	0,6	-	0	-240	4	5	$\frac{\pi R}{6}(t - t_1)$
	2			5							2	4	
	3			-4							3	6	
	4			4							2	6	
	5			-3							3	8	
	6			3							1	7	

Окончание табл. 4.1

N Вар.	№ подвар.	m_1, кг	m_2, кг	ω_0, сек$^{-1}$	*a*, м	*b*, м	*R*, м	α, град	*AM*, м	$M_z = M_z(t)$, Нм	t_1, сек	t_2, сек	$MK = S = S(t-t_1)$, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
28.	1	150	50	1	1,6	1,2	-	-	0,8	$680t$	2	4	$0,2(t-t_1)^2$
	2			-1							3	6	
	3			2							1	2	
	4			-2							5	7	
	5			3							7	10	
	6			-3							3	4	
29.	1	120	20	4	5	-	-	-	5	$80t^3$	4	7	$0,4\sqrt{t-t_1}$
	2			-4							1	3	
	3			3							5	9	
	4			-3							7	11	
	5			2							2	7	
	6			-2							3	27	
30.	1	30	5	3	3	1	-	-	1,5	$15t^2$	2	3	$1,5(t-t_1)$
	2			-3							4	5	
	3			4							5	6	
	4			-4							6	7	
	5			5							8	9	
	6			-5							9	10	

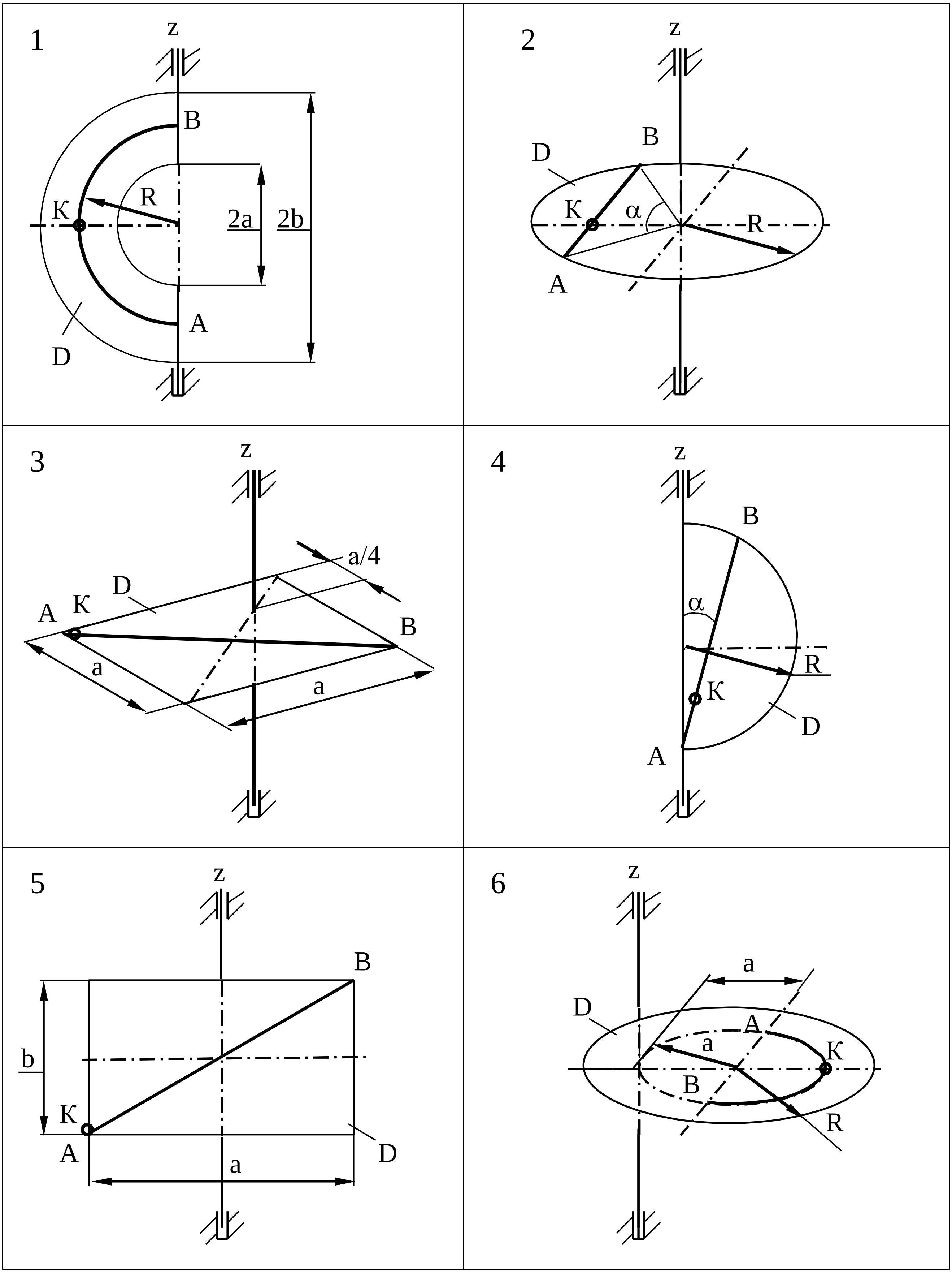
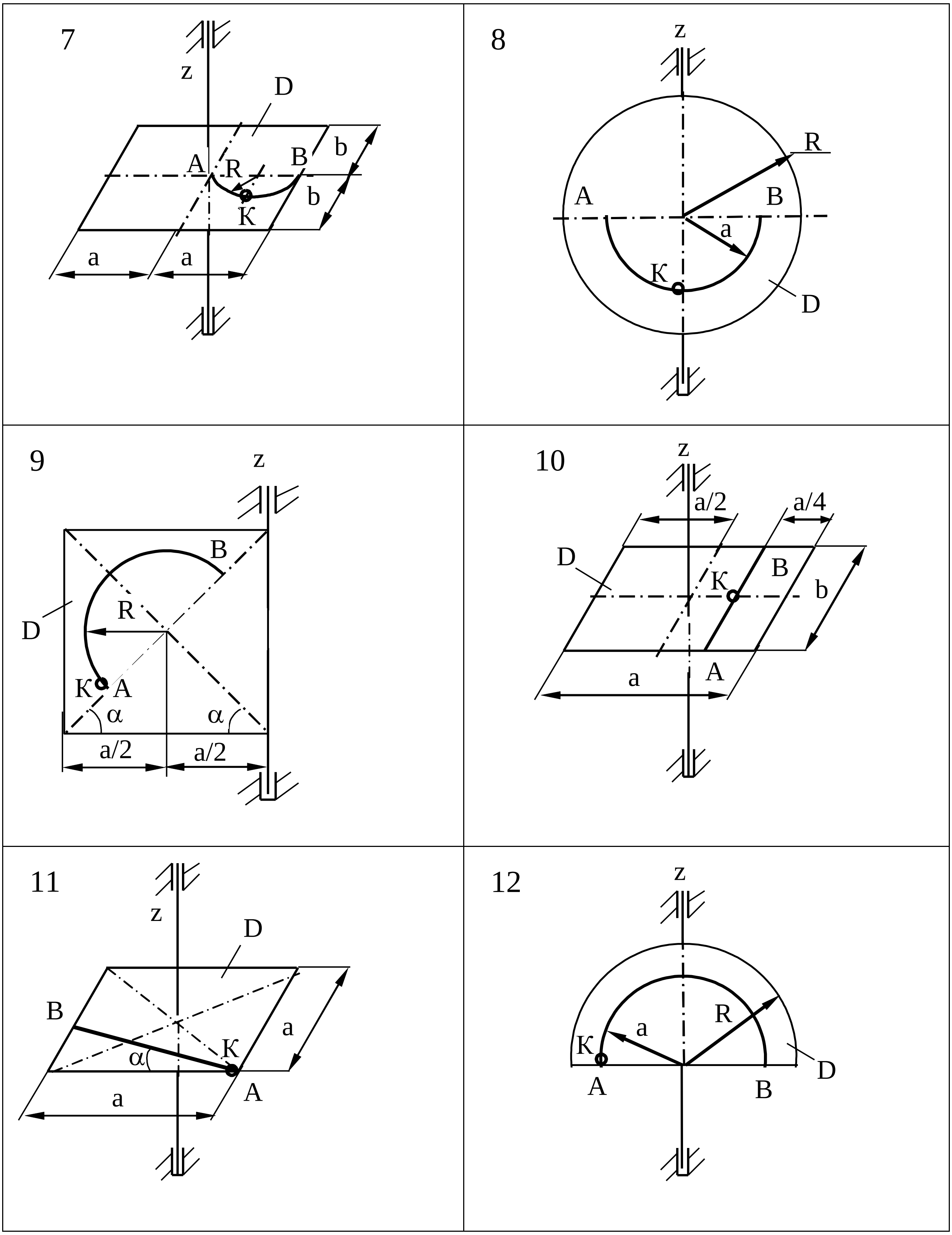
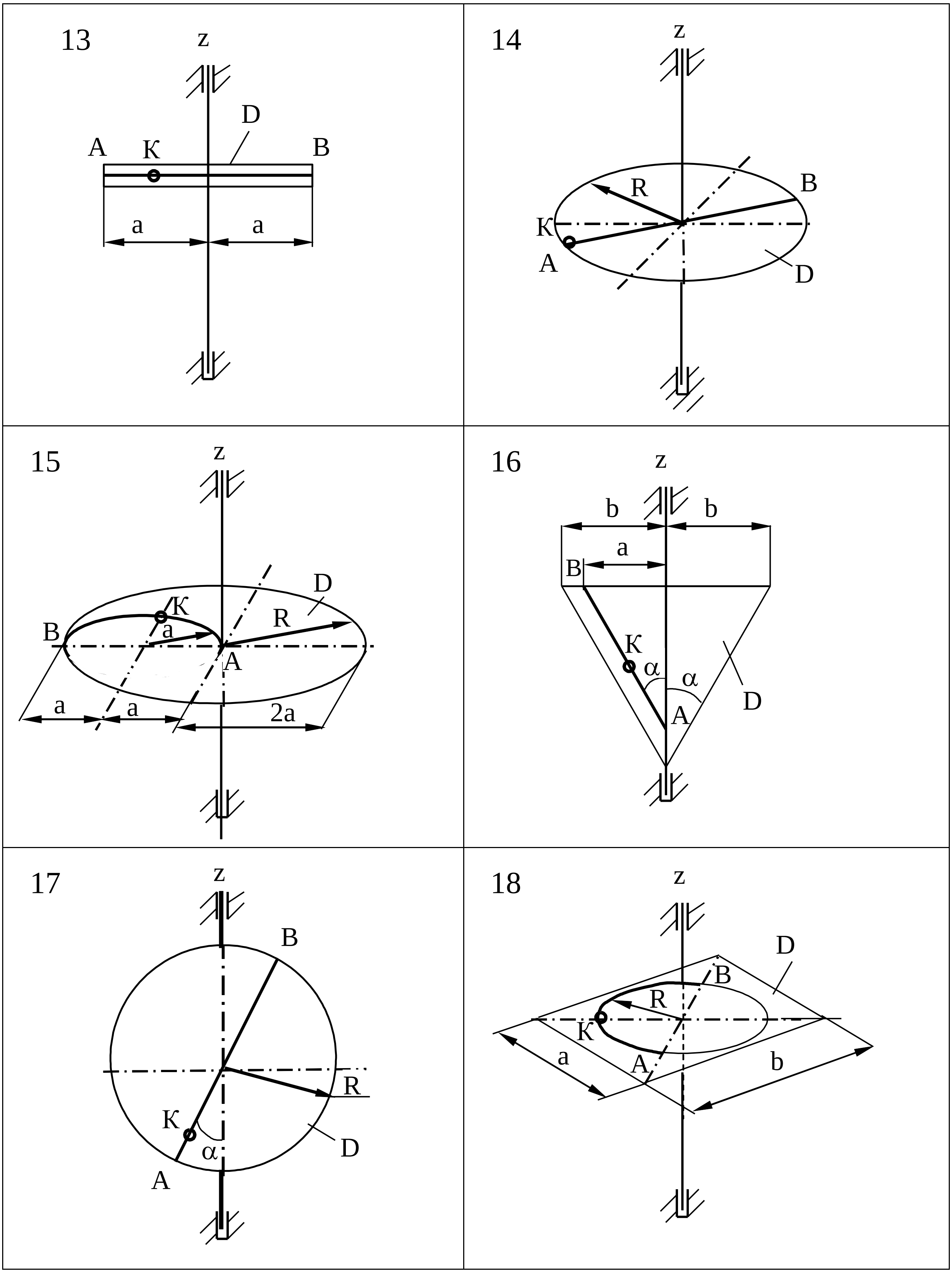

1
z
B
R
K
2a
2b
A
D
2
z
B
D
K
α
R
A
3
z
a/4
D
A
K
B
a
a
4
z
B
α
R
K
D
A
5
z
B
b
K
A
D
a
6
z
a
D
A
a
K
B
R

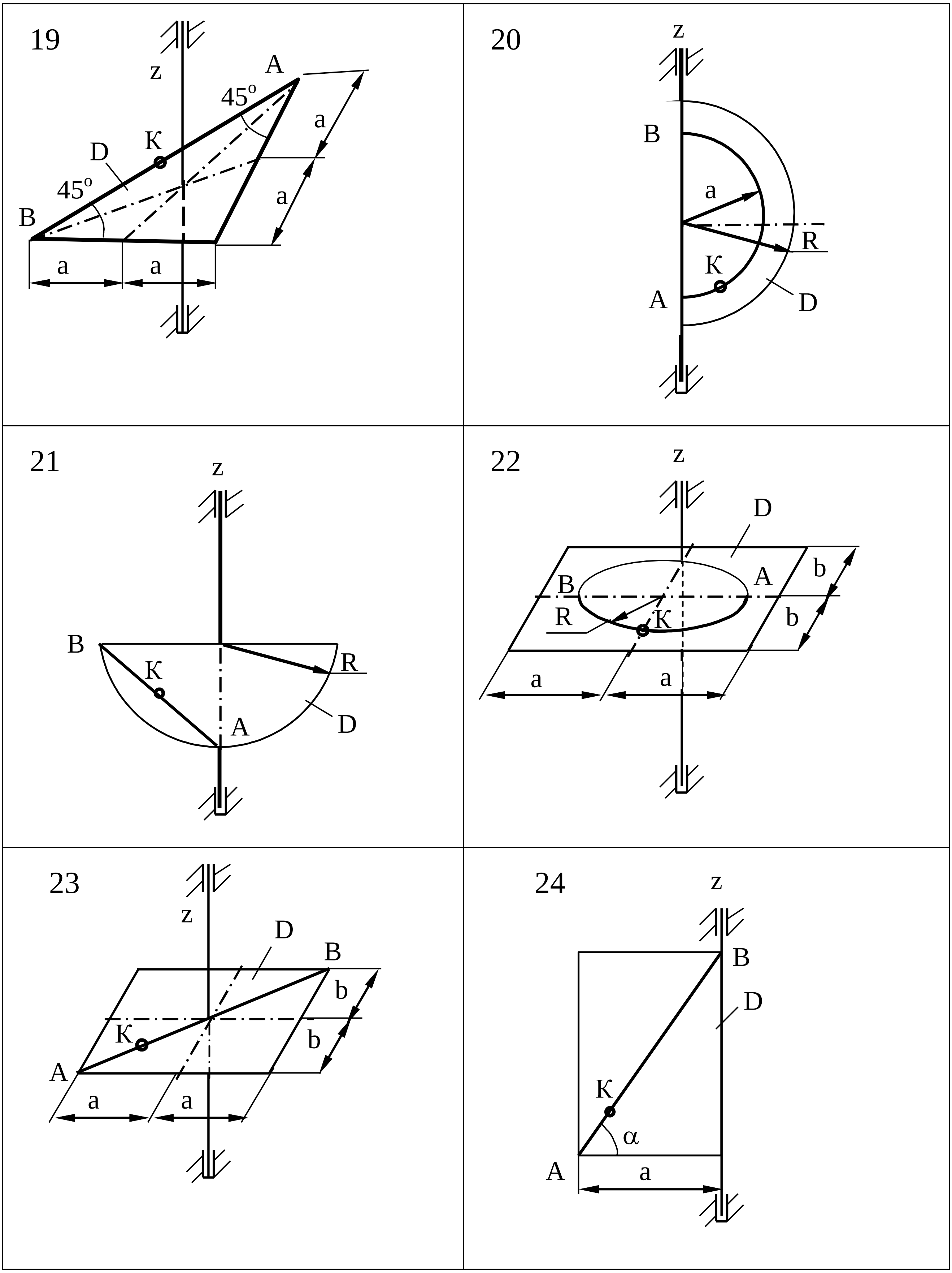
Рис. 4.1



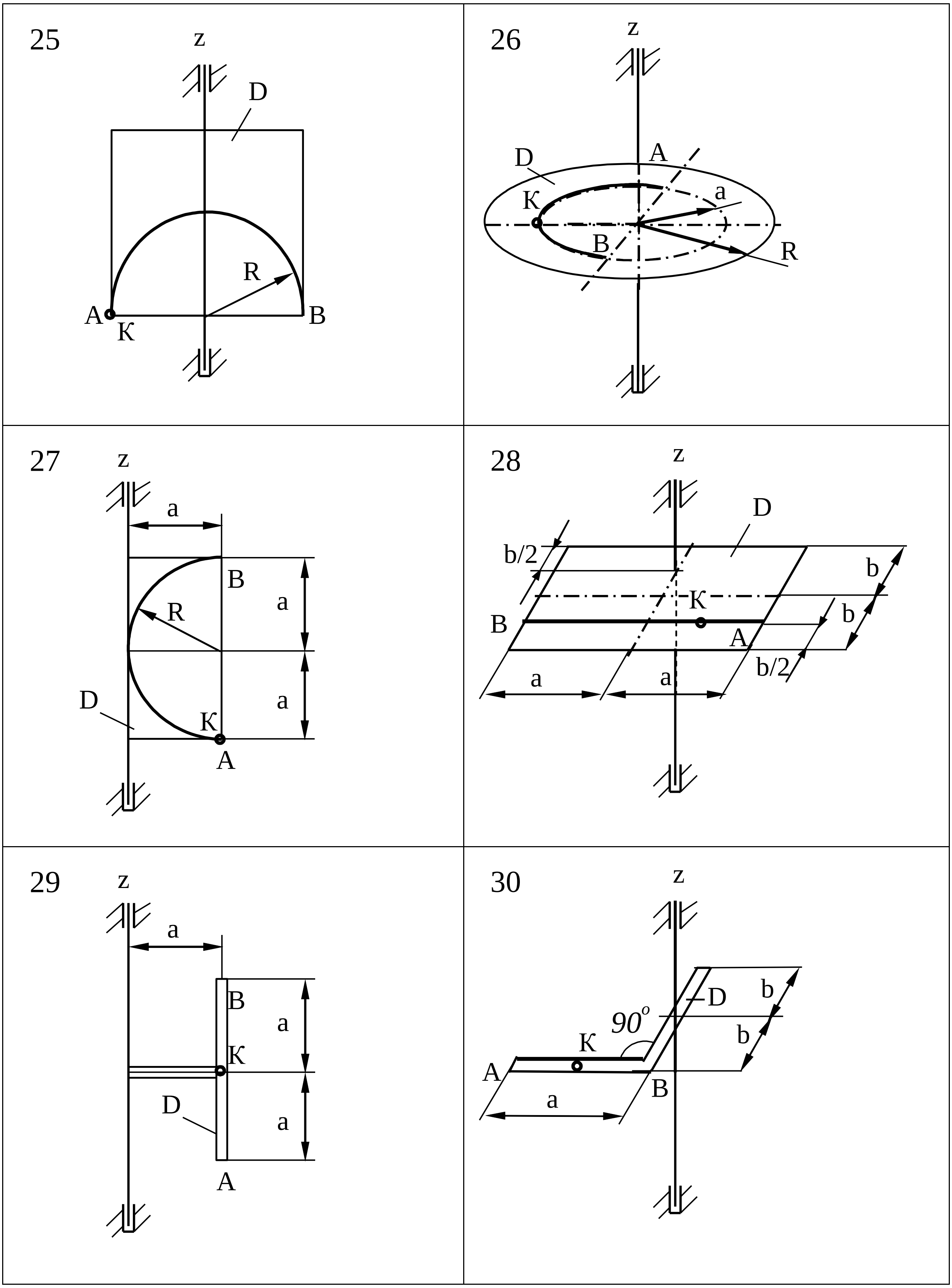
Продолжение рис. 4.1



Продолжение рис. 4.1



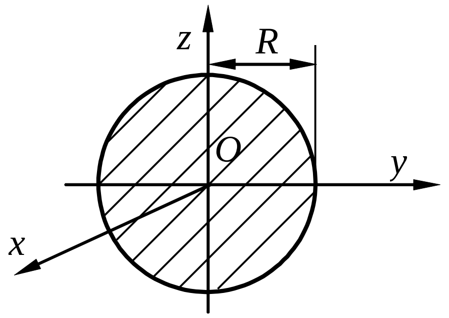
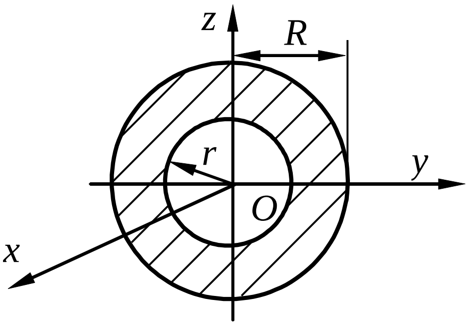
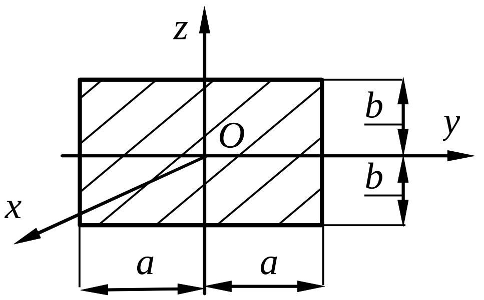
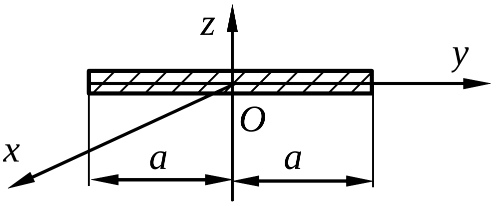
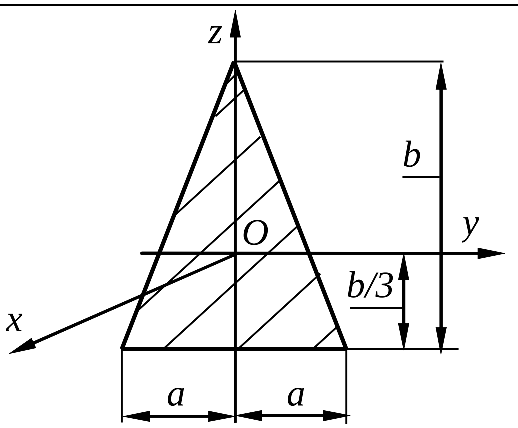
Продолжение рис. 4.1



Окончание рис.4.1

Таблица 4.2

Осевые моменты инерции однородных пластинок

Форма пластинки	J_x	J_y	J_z
	$\dfrac{mR^2}{2}$	$\dfrac{mR^2}{4}$	$\dfrac{mR^2}{4}$
	$\dfrac{m\left(R^2+r^2\right)}{2}$	$\dfrac{m\left(R^2+r^2\right)}{4}$	$\dfrac{m\left(R^2+r^2\right)}{4}$
	$\dfrac{m\left(a^2+b^2\right)}{3}$	$\dfrac{mb^2}{3}$	$\dfrac{ma^2}{3}$
	$\dfrac{ma^2}{3}$	0	$\dfrac{ma^2}{3}$
	$\dfrac{m\left(3a^2+b^2\right)}{18}$	$\dfrac{mb^2}{18}$	$\dfrac{ma^2}{6}$

4.3. Пример выполнения задания

4.3.1. Условие примера

Тело D, имеющее форму прямоугольной пластины, показанной на рис. 4.2, массой m_1=20 кг вращается вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью ω_0=2 с$^{-1}$. При этом в точке M желоба AB тела D на расстоянии $\cup AM=\frac{\pi R}{3}$ от точки A, отсчитываемом вдоль желоба, закреплена материальная точка K массой m_2=8 кг. В момент времени $t=0$ на систему начинает действовать пара сил с моментом $M_z=30t^2$ Нм. При $t=t_1$=4 с действие пары сил прекращается; одновременно точка K начинает относительное движение по желобу согласно закону $MK=S=S(t-t_1)=\frac{2\pi R}{3}(t-t_1)^2$ м.

Определить угловые скорости тела D соответственно в моменты времени $t=t_1$ и t=t_2=5 с, если R=0,6 м, a=1,2 м; b=0,9 м

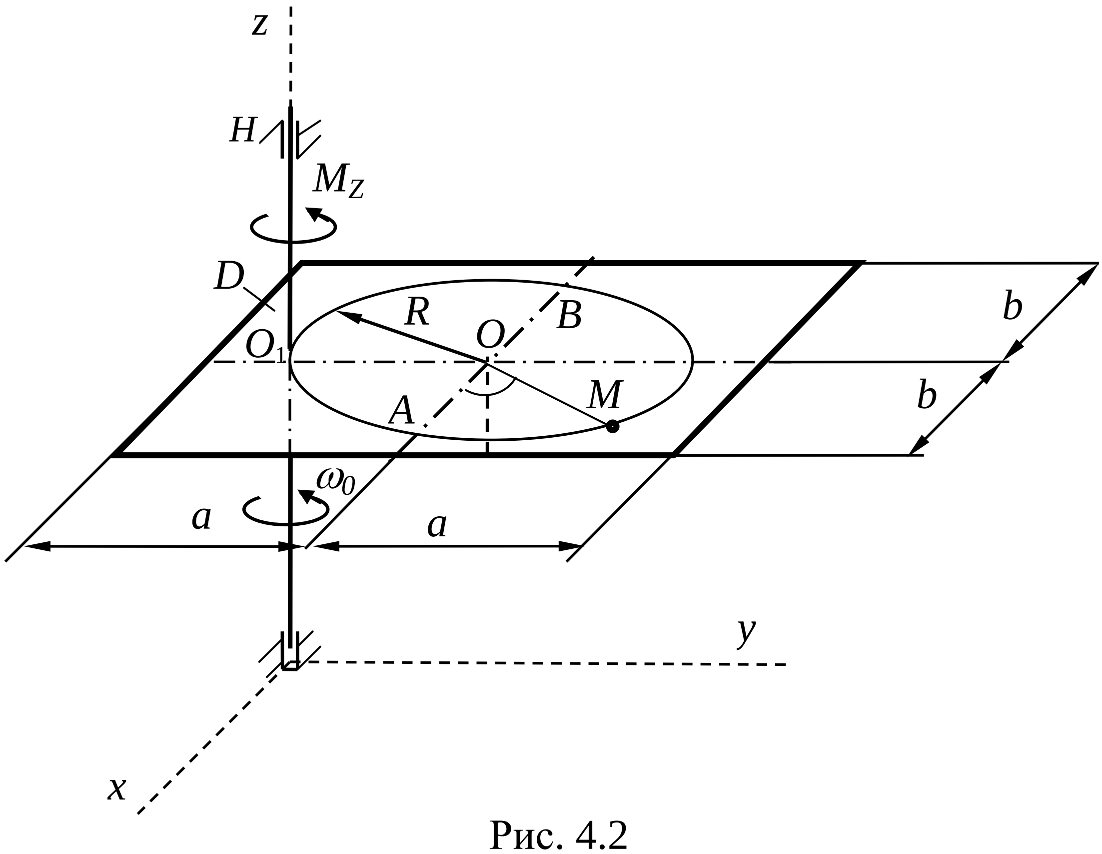


Рис. 4.2

4.3.2. Решение примера

Запишем равенство, выражающее теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно оси z

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e, \tag{4.1}$$

где K_z - кинетический момент механической системы, состоящей в данном случае из кинетического момента тела D и кинетического момента точки K, относительно оси z;

$M_z^e = \sum M_{iz}^e$ - главный момент внешних сил, приложенных к системе, относительно оси z.

Рассмотрим движение системы в отрезке времени $[0;t_1]$.

В произвольный момент времени на систему действуют внешние силы $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $\vec{X}_E$, $\vec{Y}_E$, $\vec{Z}_E$, $\vec{X}_H$, $\vec{Y}_H$, M_z (рис. 4.3), главный момент которых относительно оси z равен вращающему моменту M_z, то есть

$$M_z^e = M_z = 30t^2. \tag{4.2}$$

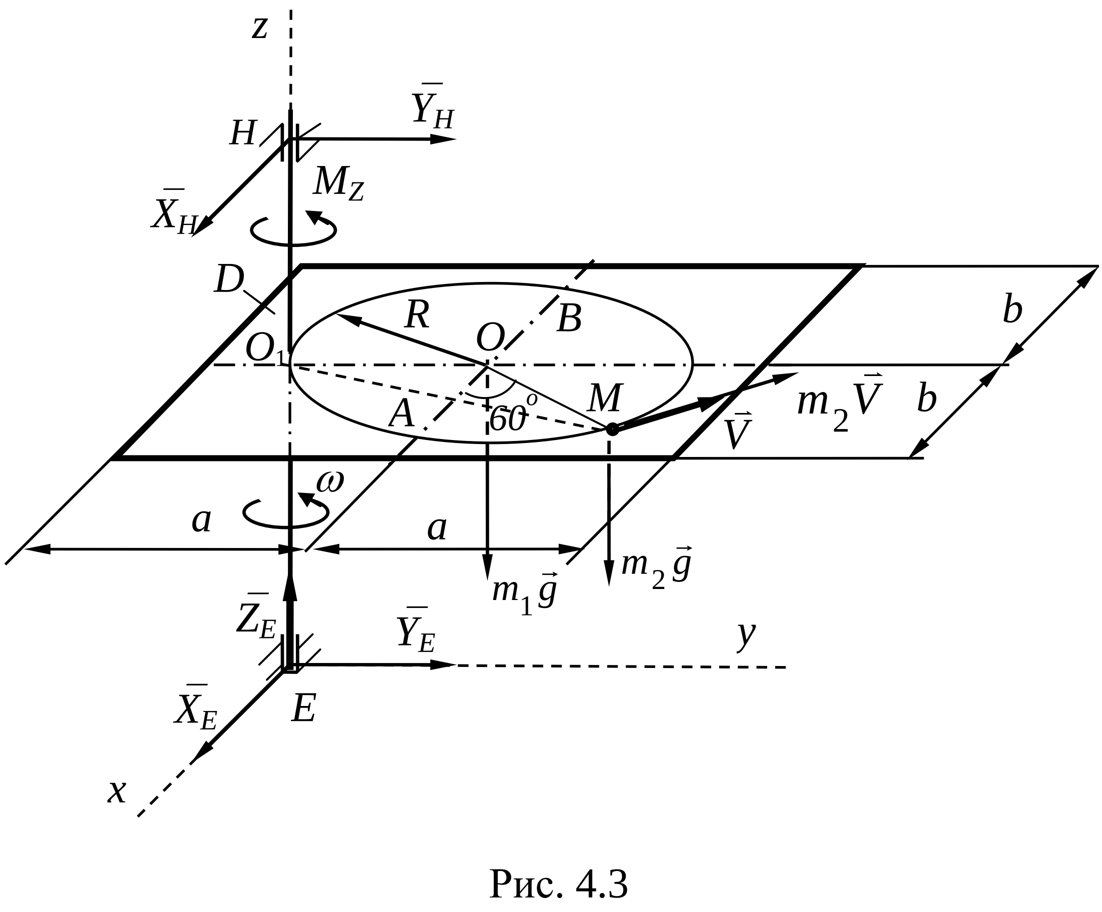


Рис. 4.3

Кинетический момент данной системы равен сумме

$$K_z = K_{Dz} + K_{Tz},$$

где K_{Dz} K_{Tz} - кинетические моменты тела D и точки K относительно оси z.

Тело D вращается относительно неподвижной оси, поэтому

$$K_{Dz} = J_{zz}\omega.$$

Здесь ω - угловая скорость тела, а J_{zz} - его момент инерции относительно оси z.

Момент инерции $J_{z'z'}$ тела относительно оси z', параллельной оси z и проходящей через центр масс O тела, определяется по формуле (табл. 4.2)

$$J_{z'z'} = \frac{m_1(a^2 + b^2)}{3}.$$

По теореме Штейнера

$$J_{zz} = J_{z'z'} + m_1 \cdot O_1O^2.$$

Таким образом

$$K_{Dz} = m_1\left(\frac{a^2 + b^2}{3} + O_1O^2\right)\omega.$$

Кинетический момент материальной точки K, закрепленной в точке M желоба

$$K_{Tz} = mom_z(m_2\vec{V}) = m_2V \cdot O_1M.$$

Скорость точки K

$$V = \omega \cdot O_1M.$$

Очевидно, что $\vec{V} \perp O_1M$.

Согласно условию задачи длина дуги окружности $\cup AM = \frac{\pi R}{3}$, тогда центральный угол $AOM = \frac{\cup AM}{R} = \frac{\pi}{3}$. Следовательно, в равнобедренном треугольнике OMO_1 $\angle O_1OM = 150^o$ и $O_1M = 2 \cdot O_1O \sin 75^o$.

Имеем

$$K_{Tz} = 4m_2 \cdot \omega \cdot O_1O^2 \sin^2 75^o.$$

Окончательное выражение кинетического момента системы относительно оси z следующее

$$K_z = \left[m_1 \left(\frac{a^2 + b^2}{3} + O_1O^2 \right) + 4m_2 \cdot O_1O^2 \sin^2 75^o \right] \omega =$$
$$= \left[20 \left(\frac{1{,}2^2 + 0{,}9^2}{3} + 0{,}6^2 \right) + 4 \cdot 8 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}966^2 \right] \omega \approx 33{,}0\omega. \quad (4.3)$$

Подставляя выражения (4.2) и (4.3) в равенство (4.1), имеем

$$33{,}0 \frac{d\omega}{dt} = 30t^2,$$

откуда

$$\frac{d\omega}{dt} = 0{,}909t^2.$$

Разделяем в последнем уравнении переменные и интегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega = \int_0^{t_1} 0{,}909t^2 dt.$$

Тогда

$$\omega_1 = \omega_0 + 0{,}909 \frac{t_1^3}{3} = 2 + 0{,}909 \frac{4^3}{3} \approx 21{,}4 \text{ с}^{-1}.$$

В момент времени t_1 из выражения (4.3) имеем

$$K_z(t_1) = 33{,}0\omega_1 = 33{,}0 \cdot 21{,}4 \approx 706 \text{ Нмс}.$$

Рассмотрим теперь движение системы в отрезке времени $\lfloor t_1 ; t_2 \rfloor$.

После прекращения действия момента M_z на тело D, главный момент внешних сил относительно оси z $M_z^e = 0$ (см. рис. 4.4).

Тогда равенство (4.1) примет вид

$$\frac{dK_z}{dt} = 0,$$

то есть $K_z = const$.

Это означает, что кинетические моменты системы относительно оси в начале t_1 и в конце t_2 отрезка времени [t_1; t_2] равны

$$K_z(t_1) = K_z(t_2).$$

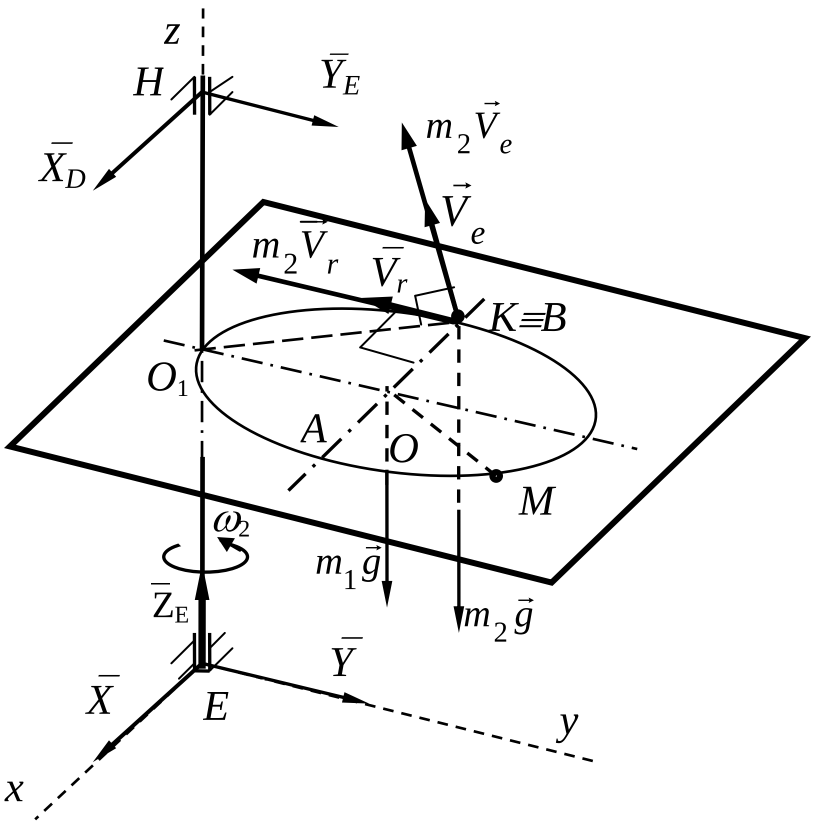


Рис. 4.4

В момент времени t_2 тело D вращается с угловой скоростью ω_2 (см. рис. 4.4). При этом точка K, совершая сложное движение, оказывается в точке B желоба. Действительно, центральный угол

$$\angle BOM = \frac{\cup MK}{R} = \frac{\frac{2\pi}{3}R(t_2 - t_1)^2}{R} = \frac{\frac{2\pi}{3}R(5-4)^2}{R} = \frac{2\pi}{3}.$$

Кинетический момент системы $K_z(t_2)$ относительно оси в конце t_2 отрезка времени [t_1; t_2] также равен сумме кинетических моментов тела $K_{Dz}(t_2)$ и точки $K_{Tz}(t_2)$:

$$K_z(t_2) = K_{Dz}(t_2) + K_{Tz}(t_2).$$

Очевидно, что

$$K_{Dz}(t_2) = J_{zz}\omega_2 = m_1\left(\frac{a^2+b^2}{3} + O_1O^2\right)\omega_2 =$$

$$= 20\left(\frac{1{,}2^2+0{,}9^2}{3} + 0{,}6^2\right)\omega_2 = 22{,}2\omega_2.$$

По теореме о сложении скоростей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e,$$

где $\vec{V}_a$, $\vec{V}_r$, $\vec{V}_e$ - абсолютная, относительная и переносная скорости точки.

Умножая обе части этого равенства на m_2, получаем:

$$m_2\vec{V}_a = m_2\vec{V}_r + m_2\vec{V}_e.$$

Следовательно, кинетический момент точки K в конце отрезка времени t_2 равен сумме моментов векторов $m_2\vec{V}_r$ и $m_2\vec{V}_e$ относительно оси z

$$K_{Tz}(t_2) = mom_z(m_2\vec{V}_a) = mom_z(m_2\vec{V}_r) + mom_z(m_2\vec{V}_e) =$$
$$= m_2V_r \cdot R + m_2V_e \cdot O_1B.$$

Относительная скорость точки K

$$V_r = \dot{S} = \frac{4\pi R}{3}(t - t_1).$$

При t=t_2=5 с найдем величину относительной скорости точки K

$$V_r = \frac{4 \cdot \pi \cdot 0{,}6}{3}(5 - 4) \approx 2{,}51 \text{ м/с}.$$

Переносная скорость точки K

$$V_e = \omega_2 \cdot O_1B.$$

Из прямоугольного треугольника O_1OB по теореме Пифагора имеем:

$$O_1B = \sqrt{O_1O^2 + OB^2} = R\sqrt{2}.$$

Окончательно получаем

$$K_{Tz}(t_2) = m_2\left(V_r \cdot R + O_1B^2 \cdot \omega_2\right) = m_2\left(V_r \cdot R + 2 \cdot R^2 \cdot \omega_2\right) =$$
$$= 8\left(2{,}51 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}6^2 \cdot \omega_2\right) \approx 12 + 5{,}76\omega_2.$$

Тогда

$$K_z(t_2) = 22{,}2\omega_2 + 12 + 5{,}76\omega_2 \approx 12 + 28\omega_2.$$

Приравнивая $K_z(t_1)$ и $K_z(t_2)$:

$$706 = 12 + 28\omega_2,$$

находим

$$\omega_2 \approx 24{,}8 \text{ с}^{-1}.$$

5. Задание №4. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

5.1. Содержание задания

Механическая система, изображенная на рис. 5.1, приводится в движение из состояния покоя. При этом колесо B катится без скольжения по плоскости. Массы тел A, B и D (m_A, m_B, m_D), заданная нагрузка (F и M) приведены в табл. 5.1. Радиусы колеса B и блока D соответственно равны $R_B = 0{,}8$ м, $r_B = 0{,}5$ м, $R_D = 0{,}2$ м. Радиус инерции колеса B: $\rho_B = 0{,}65$ м. Углы α и β имеют значения: $\alpha = 30^O$, $\beta = 60^O$. Коэффициент трения качения колеса B равен $k = 0{,}05 R_B$; коэффициент трения скольжения тела A равен $f = 0{,}1$.

Используя теорему об изменении кинетической энергии системы, определить скорость и ускорение тела A после того, как оно переместится на расстояние $S_A = 2$ м. Блок D считать однородным сплошным диском; силами сопротивления движению, трением в подшипниках, массой троса, его растяжением и проскальзыванием по ободу блока пренебречь.

5.2. Краткие указания к выполнению задания

5.2.1. Прежде, чем приступить к выполнению задания, необходимо проработать соответствующие разделы лекций и рекомендуемой литературы [1 – 4].

5.2.2. Записать равенство, выражающее теорему об изменении кинетической энергии механической системы.

5.2.3. Записать выражения кинетической энергии механической системы в начальном и конечном положениях, как функции искомой скорости тела A.

5.2.4. Определить суммарную работу внешних и внутренних сил на перемещениях их точек приложения при переходе системы из начального положения в конечное и выразить ее в зависимости от перемещения тела A.

5.2.5. Определить скорость и ускорение тела A.

Таблица 5.1

Варианты числовых значений параметров задания №4

№ Вар.	№ Подвар.	m_A, кг	m_B, кг	m_D, кг	M, Нм	F, Н
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1.	1	100	40	30	200	800
	2	200	50	10	400	600
	3	150	90	20	800	1200
	4	50	10	25	50	100
	5	300	60	50	100	500
	6	250	70	40	300	900
2.	1	120	90	25	400	300
	2	160	50	40	500	200
	3	200	100	50	200	600
	4	250	80	10	600	200
	5	80	50	30	300	100
	6	30	20	5	10	100
3.	1	150	50	20	30	200
	2	50	100	25	80	100
	3	300	150	50	500	200
	4	250	90	40	40	300
	5	120	60	25	20	100
	6	160	80	40	60	30
4.	1	20	100	50	40	100
	2	15	80	10	80	200
	3	5	40	30	50	120
	4	30	150	20	100	150
	5	25	100	40	30	150
	6	12	60	50	40	100
5.	1	25	10	1	50	20
	2	12	60	3	20	100
	3	16	8	5	6	20
	4	200	100	20	30	10
	5	150	50	25	100	200
	6	50	50	50	30	120

Продолжение табл. 5.1

№ Вар.	№ Подвар.	m_A, кг	m_B, кг	m_D, кг	**M, Нм**	**F, Н**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
6.	1	20	10	40	80	150
	2	15	6	25	50	150
	3	50	40	40	40	180
	4	30	10	50	20	300
	5	25	20	10	60	900
	6	20	50	30	50	400
7.	1	160	80	50	100	100
	2	200	100	20	300	200
	3	250	120	40	400	120
	4	80	50	50	50	150
	5	300	100	10	20	500
	6	150	40	30	60	800
8.	1	50	80	50	30	200
	2	30	20	20	10	50
	3	100	120	25	30	180
	4	120	80	50	8	600
	5	160	100	40	50	200
	6	20	100	35	40	100
9.	1	150	180	40	200	200
	2	50	40	50	60	30
	3	300	200	90	400	150
	4	50	100	30	80	180
	5	120	160	50	50	250
	6	50	80	45	100	80
10.	1	20	50	10	30	600
	2	60	60	20	40	500
	3	200	100	25	50	900
	4	20	40	50	200	200
	5	20	20	40	60	100
	6	100	80	25	100	800

Продолжение табл. 5.1

№ Вар.	№ Подвар.	m_A, кг	m_B, кг	m_D, кг	M, Нм	F, Н
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
11.	1	50	60	50	30	200
	2	30	90	10	80	300
	3	25	50	30	50	150
	4	120	100	50	400	250
	5	100	120	20	200	300
	6	200	100	25	600	200
12.	1	250	80	50	80	200-
	2	80	50	40	50	100
	3	30	20	25	10	40
	4	150	50	40	30	80
	5	50	100	50	40	20
	6	30	15	10	50	10
13.	1	250	90	30	20	150
	2	100	60	20	60	20
	3	160	80	40	30	100
	4	200	100	50	100	100
	5	150	80	10	30	20
	6	50	40	30	80	15
14.	1	30	150	50	50	200
	2	250	100	20	40	150
	3	20	60	30	20	100
	4	25	100	50	60	150
	5	120	60	40	40	100
	6	160	80	25	80	200
15.	1	200	100	40	50	200
	2	150	50	50	10	100
	3	50	50	10	30	100
	4	200	100	30	40	150
	5	150	60	50	50	100
	6	50	20	20	20	30

Продолжение табл. 5.1

№ Вар.	№ Подвар.	m_A, кг	m_B, кг	m_D, кг	M, Нм	F, Н
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
16.	1	30	100	40	60	120
	2	25	90	50	30	80
	3	12	50	10	10	60
	4	10	80	30	30	100
	5	20	100	50	80	80
	6	25	120	20	50	150
17.	1	80	50	25	40	200
	2	300	100	50	20	600
	3	150	40	40	60	400
	4	50	20	10	50	150
	5	30	20	40	10	100
	6	250	120	50	30	500
18.	1	120	80	10	40	600
	2	160	60	30	50	900
	3	200	100	50	20	120
	4	150	80	40	60	800
	5	50	40	50	30	300
	6	300	200	10	10	40
19.	1	25	10	30	30	800
	2	12	60	50	80	700
	3	25	80	20	50	900
	4	10	40	25	40	600
	5	16	6	50	20	400
	6	20	10	40	60	500
20.	1	16	20	25	40	100
	2	20	40	40	80	200
	3	25	70	50	50	300
	4	8	50	10	10	400
	5	30	100	30	30	600
	6	150	200	20	40	800

Продолжение табл. 5.1

№ Вар.	№ Подвар.	m_A, кг	m_B, кг	m_D, кг	M, Нм	F, Н
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
21.	1	50	50	40	50	120
	2	30	90	50	20	200
	3	25	90	10	60	900
	4	120	70	30	30	100
	5	100	30	50	100	200
	6	20	10	20	30	100
22.	1	14	90	30	800	300
	2	50	50	50	500	120
	3	80	40	40	400	70
	4	30	60	25	800	180
	5	40	70	40	600	60
	6	35	80	10	700	100
23.	1	150	100	50	30	200
	2	50	50	40	8	50
	3	20	40	25	5	100
	4	15	10	40	4	20
	5	50	15	50	20	100
	6	30	10	10	60	90
24.	1	25	30	10	80	20
	2	12	50	30	50	10
	3	100	60	50	10	100
	4	20	40	40	30	80
	5	25	20	50	15	50
	6	80	25	10	15	40
25.	1	120	80	10	40	30
	2	160	60	30	50	10
	3	200	100	50	20	16
	4	150	80	40	60	12
	5	50	40	50	30	12
	6	300	200	10	10	6

Окончание табл. 5.1

№ Вар.	№ Подвар.	m_A, кг	m_B, кг	m_D, кг	M, Нм	F, Н
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
26.	1	16	30	25	50	200
	2	20	80	40	40	90
	3	150	40	50	20	120
	4	50	200	10	60	100
	5	30	150	30	40	80
	6	25	40	20	80	240
27.	1	120	100	40	50	200
	2	250	120	80	10	400
	3	100	160	60	30	250
	4	160	200	100	50	120
	5	200	150	80	40	360
	6	160	50	40	50	200
28.	1	20	30	200	100	400
	2	250	120	280	10	400
	3	80	160	260	30	500
	4	30	20	100	50	200
	5	150	150	80	40	600
	6	50	50	40	50	300
29.	1	30	120	80	200	40
	2	25	160	60	300	50
	3	120	200	100	500	20
	4	100	150	80	400	60
	5	40	50	40	450	30
	6	35	30	200	600	10
30.	1	100	100	60	40	800
	2	50	90	30	50	700
	3	20	100	50	20	600
	4	150	50	40	60	900
	5	50	60	20	30	700
	6	30	80	100	10	500

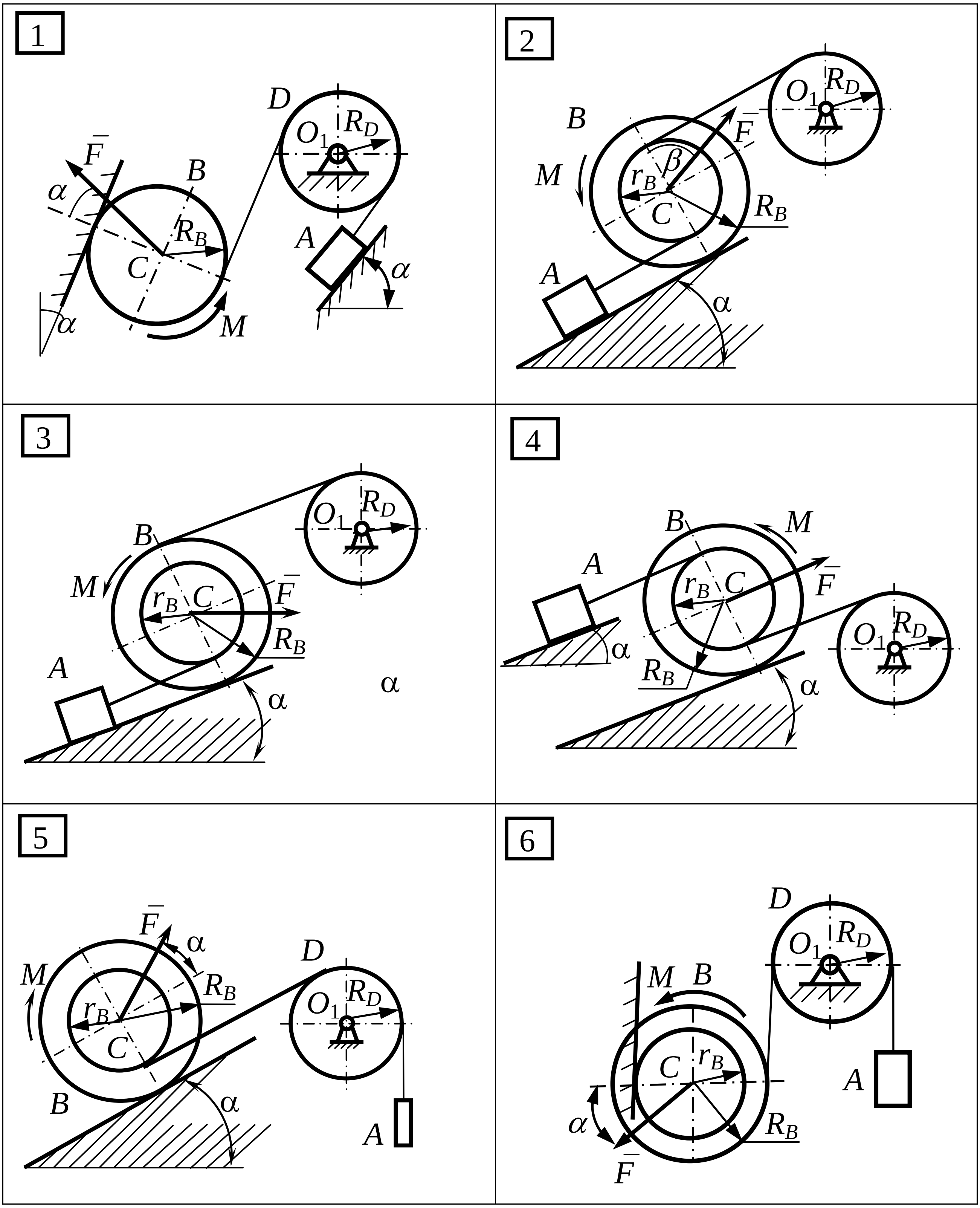
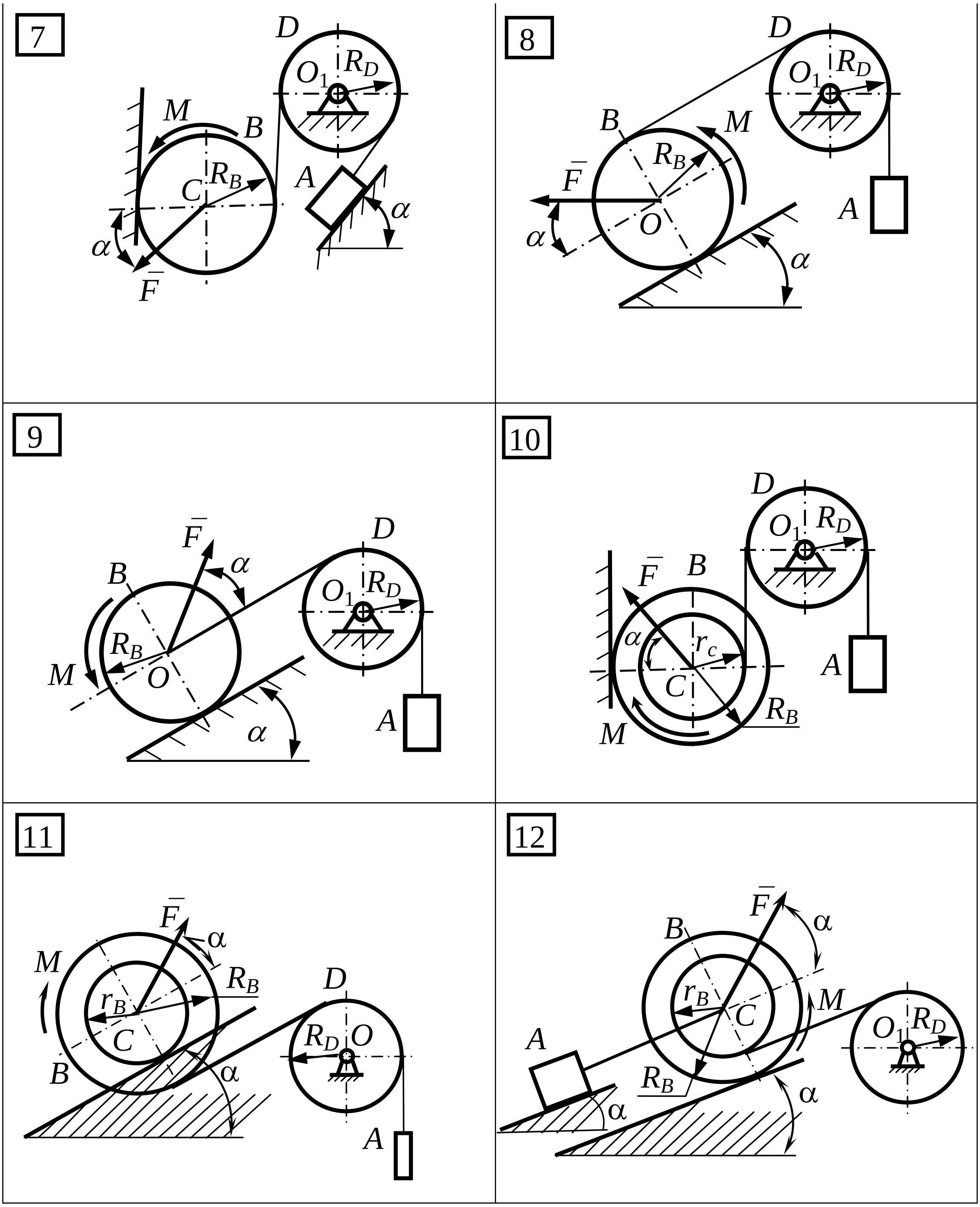
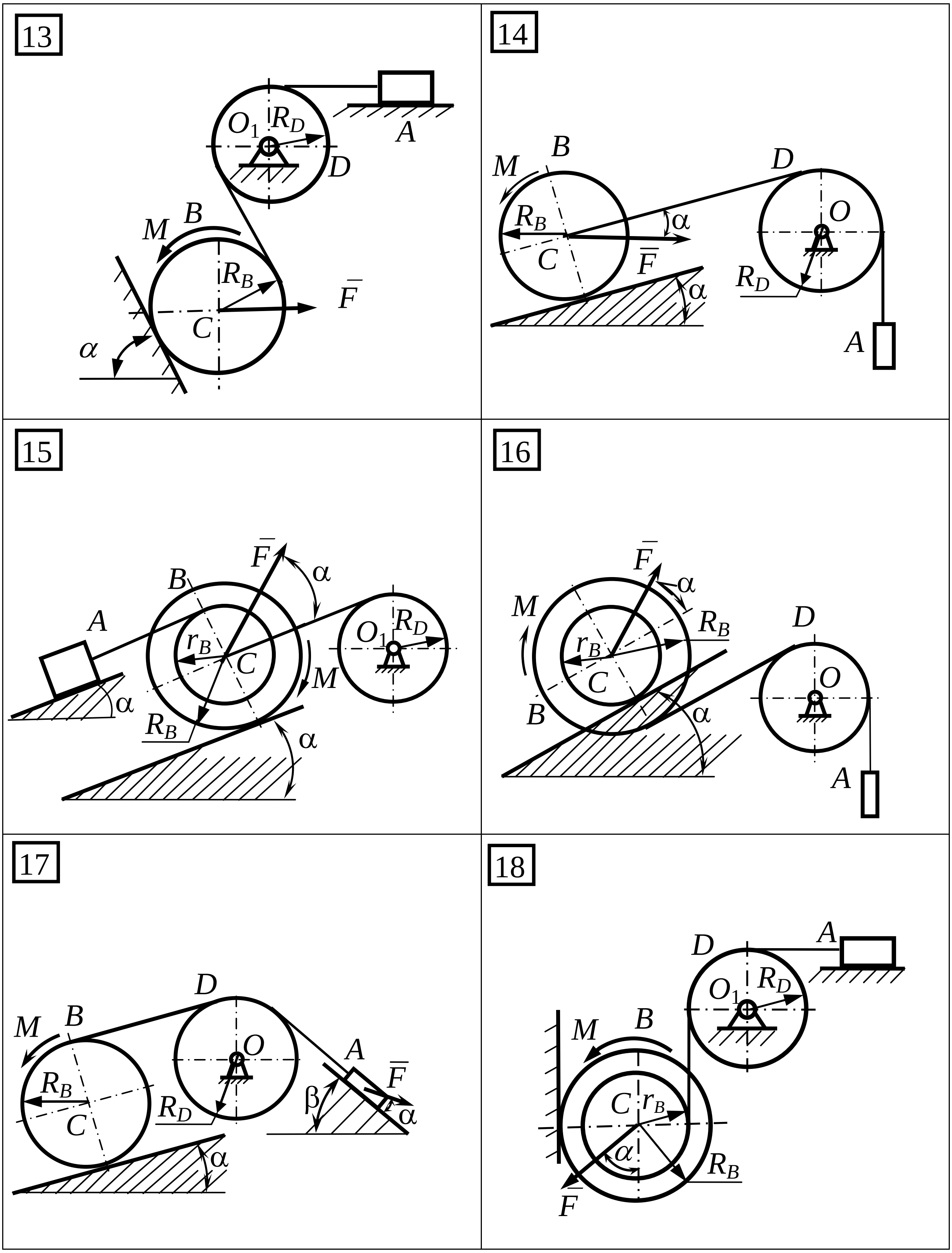

1
F
α
B
D
O1
RD
RB
C
A
α
M
α
2
B
O1
RD
F
M
β
rB
C
RB
A
α
3
O1
RD
B
M
rB
C
F
RB
A
α
α
4
B
M
A
rB
C
F
O1
RD
α
RB
α
5
F
α
M
RB
D
rB
O1
RD
C
B
α
A
6
D
O1
RD
M
B
C
rB
A
α
RB
F

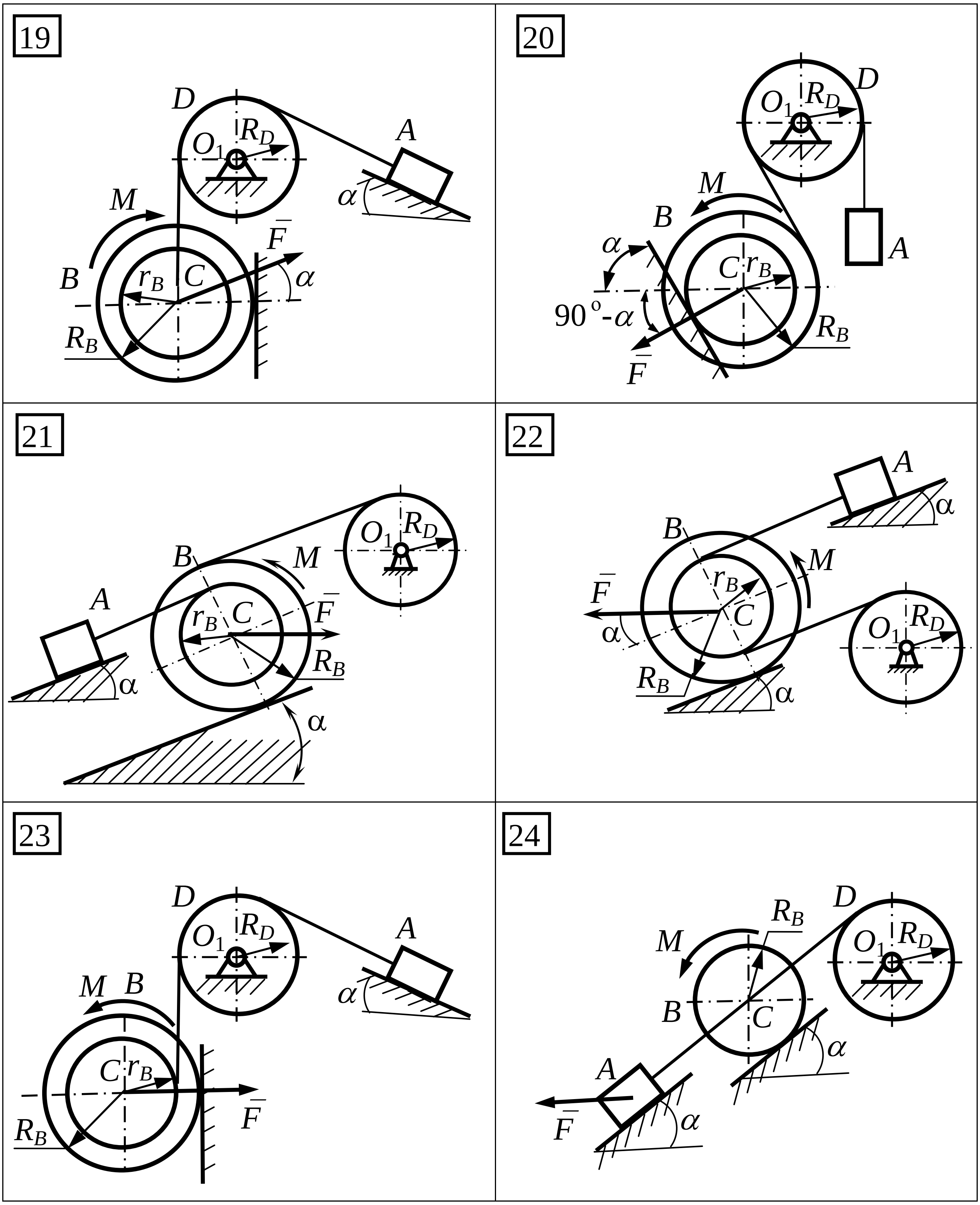
Рис. 5.1



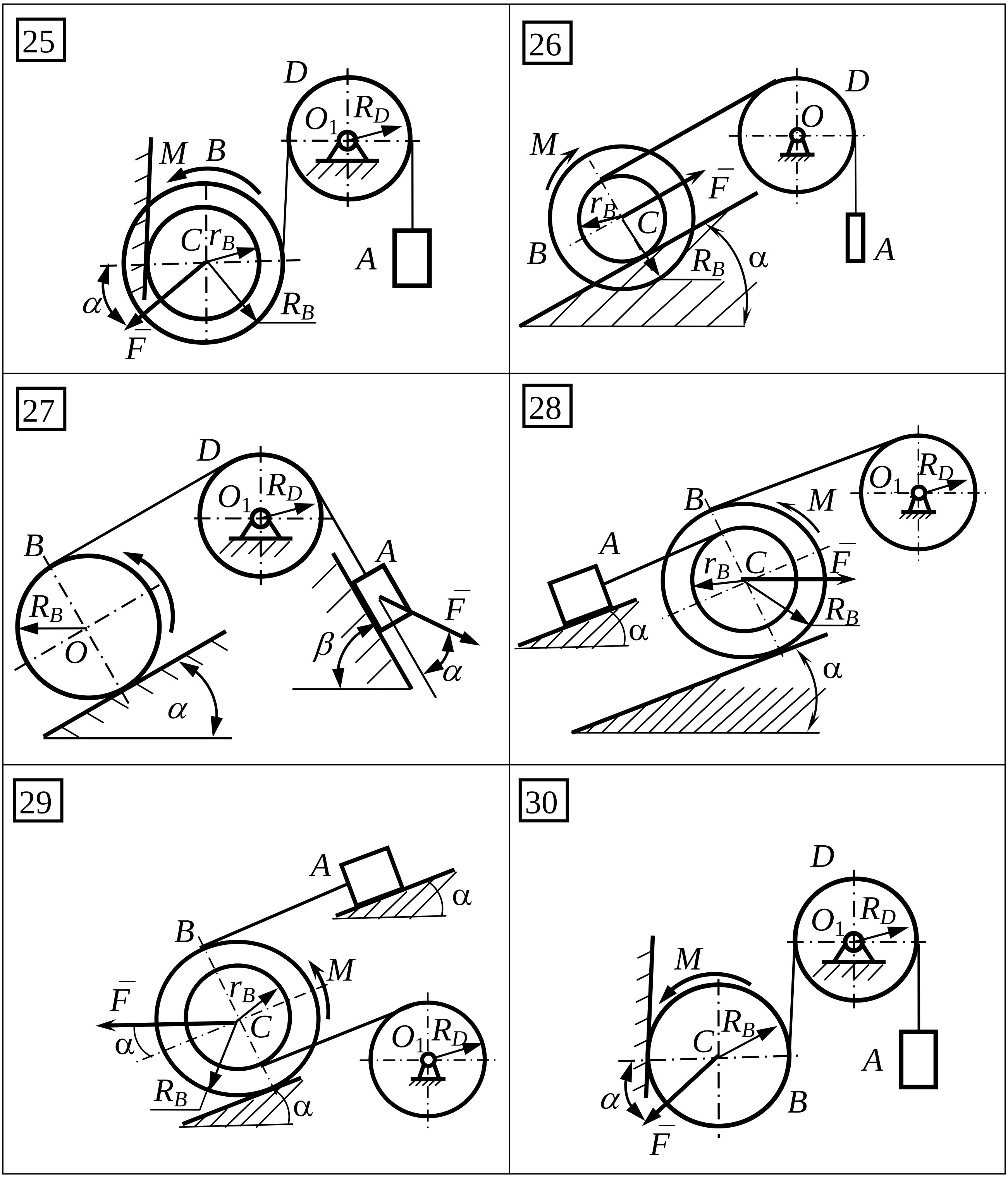
Продолжение рис. 5.1



Продолжение рис. 5.1



Продолжение рис. 5.1



Окончание рис. 5.1

5.3 Пример выполнения задания

5.3.1. Условие примера

Рассматривается движение механической системы, изображенной на рис. 5.2. Даны следующие значения параметров: $m_A = 10$ кг, $m_B = 20$ кг, $m_C = 8$ кг, $F = 60$ Н, $M_0 = 80$ Нм, $R_B = 0{,}8$ м, $r_B = 0{,}5$ м, $\rho_B = 0{,}6$ м, $r_C = 0{,}2$ м, $\alpha = 30^o$, $\beta = 60^o$, $f = 0{,}1$, $k = 0{,}04$ м, $S_A = 2$ м, $g = 9{,}8$ м/с^2.

Определить скорость V_A и ускорение a_A тела A.

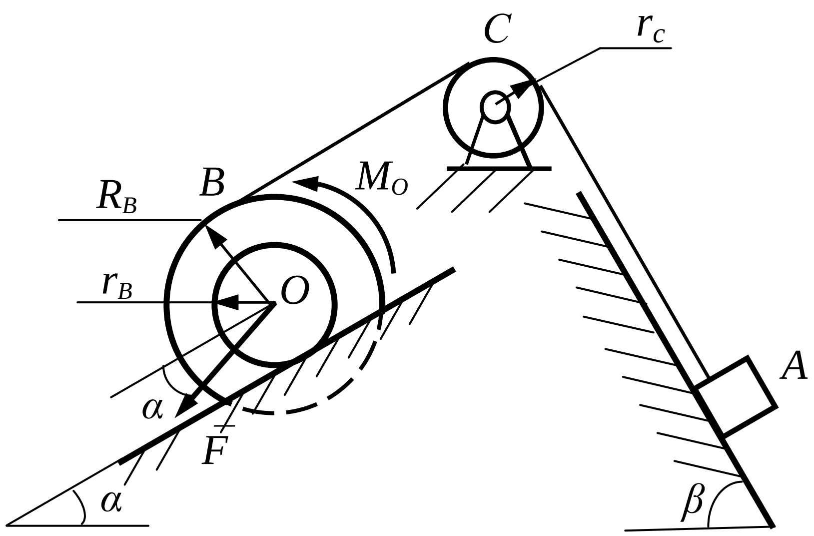


Рис. 5.2

5.3.2. Решение примера

Равенство, выражающее теорему об изменении кинетической энергии механической системы, имеет вид

$$T - T_0 = A^i + A^e, \tag{5.1}$$

где T_0 и T - кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях,

A^i и A^e - суммарные работы внутренних и внешних сил, приложенных к системе, при ее переходе из первого положения во второе.

На рис. 5.3 условно изображены начальное и конечное положения данной системы.

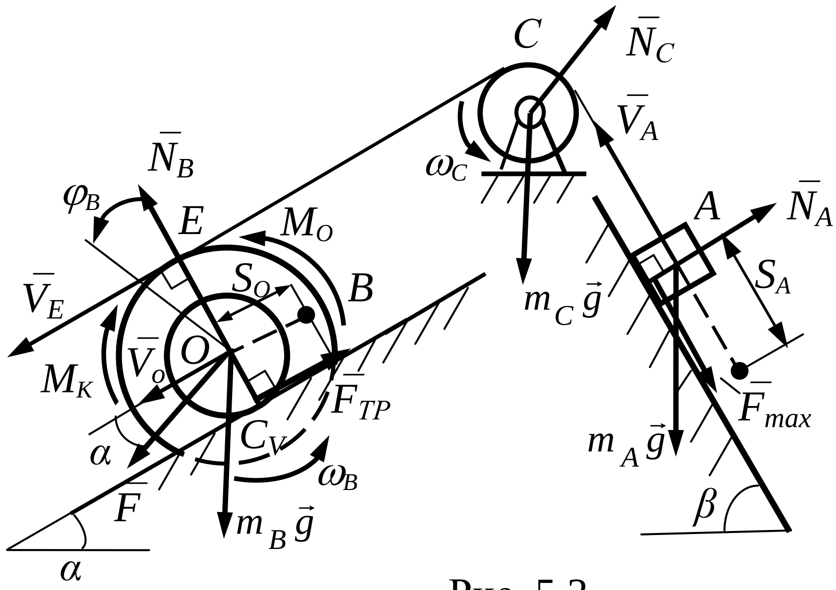


Рис. 5.3

Согласно условию задачи система начинает движение из состояния покоя, поэтому $T_0 = 0$.

Кроме того, поскольку тела, образующие систему, абсолютно твердые и трос не растягивается, то $A^i = 0$.

Таким образом, равенство (5.1) запишется

$$T = A^e. \tag{5.2}$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = T_A + T_C + T_B$$

Груз *A* движется поступательно со скоростью V_A, поэтому

$$T_A = \frac{1}{2} m_A V_A^2 \tag{5.3}$$

Шкив *C* вращается с угловой скоростью ω_C, следовательно,

$$T_C = \frac{1}{2} J_{O1} \omega_C^2 \tag{5.4}$$

Момент инерции J_{O1} шкива C относительно оси, проходящей через точку O_1, определяется по формуле:

$$J_{O1} = \frac{1}{2} m_C r_C^2 \tag{5.5}$$

Угловая скорость ω_C шкива *C* равна

$$\omega_C = \frac{V_A}{r_C}. \tag{5.6}$$

Подставляя выражения (5.5) и (5.6) в равенство (5.4), получаем:

$$T_C = \frac{1}{4} m_C V_A^2. \tag{5.7}$$

Кинетическую энергию колеса *B*, совершающего плоское движение, находим по формуле:

$$T_B = \frac{1}{2} m_B V_O^2 + \frac{1}{2} J_O \omega_B^2. \tag{5.8}$$

Здесь V_O - линейная скорость центра *O* масс колеса *B*,

ω_B - мгновенная угловая скорость колеса *B*,

J_O - момент инерции колеса *B* относительно оси, проходящей через центр *O*.

На рисунке 5.3 буквой C_V обозначен мгновенный центр скоростей колеса *B*. Очевидно, что мгновенная угловая скорость колеса *B*

$$\omega_B = \frac{V_E}{EC_V}.$$

Но для нормальной работы системы скорости $V_E = V_A$, а $EC_V = R_B + r_B$, тогда

$$\omega_B = \frac{V_A}{R_B + r_B}. \tag{5.9}$$

Скорость центра *O* колеса *B* равна

$$V_O = \omega_B \cdot OC_V = \frac{V_A}{R_B + r_B} \cdot r_B. \tag{5.10}$$

Момент инерции колеса В равен

$$J_O = m_B \rho_B^2. \tag{5.11}$$

После подстановки выражений (5.9) и (5.10) в формулу (5.8), получаем:

$$T_B = \frac{m_B V_A^2}{2(R_B + r_B)^2}\left(r_B^2 + \rho_B^2\right). \tag{5.12}$$

Далее, суммируя выражения (5.3),(5.7) и (5.12), окончательно имеем

$$T = \frac{V_A^2}{2}\left[m_A + \frac{1}{2} m_C + m_B \frac{r_B^2 + \rho_B^2}{\left(R_B + r_B\right)^2} \right]. \tag{5.13}$$

Внешние силы, действующие на рассматриваемую механическую систему, показаны на рисунке 5.3. Причем сила трения скольжения действующая на тело А имеет максимальное значение, которое находится по формуле Кулона:

$$F_{\max} = f \cdot N_A. \tag{5.14}$$

Здесь N_A - нормальная реакция плоскости находится по формуле

$$N_A = m_A g \cos\beta. \tag{5.15}$$

Суммарная работа внешних сил действующих на рассматриваемую механическую систему равна

$$\begin{gathered} A^e = A_{mAg} + A_{NA} + A_{F\max} + A_{mcg} + A_{Nc} + A_{mBg} + A_F + \\ + A_{Mo} + A_{Mk} + A_{NB} + A_{mpB}. \end{gathered} \tag{5.16}$$

Работа силы тяжести $m_A\vec{g}$ тела *A*:

$$A_{mAg} = -m_A g \cdot S_A \cdot \sin\beta. \tag{5.17}$$

Работа максимальной силы трения скольжения $F_{\max}$ тела *A*:

$$A_{F\max} = -F_{\max} \cdot S_A.$$

С учетом равенств (5.14) и (5.15), последнее выражение примет вид

$$A_{F\max} = -f m_A g \cos\beta \cdot S_A. \tag{5.18}$$

Работа нормальной реакции $\vec{N}_A$:

$$A_{NA} = 0, \tag{5.19}$$

так как $\vec{N}_A \perp \vec{S}_A$.

Точки приложения сил $m_C\vec{g}$ и $\vec{N}_C$ не перемещаются, поэтому

$$A_{mcg} = A_{Nc} = 0. \tag{5.20}$$

Работа силы тяжести $m_B\vec{g}$ колеса *B*:

$$A_{mBg} = m_B g \cdot S_O \cdot \sin\alpha. \tag{5.21}$$

Работа постоянной силы $\vec{F}$:

$$A_F = F \cdot S_O \cdot \cos\alpha. \tag{5.22}$$

Работа постоянного момента M_O:

$$A_{Mo} = M_O \cdot \varphi_B. \tag{5.23}$$

Работа нормальной реакции $\vec{N}_B$ наклонной плоскости:

$$A_{NB} = 0, \tag{5.24}$$

так как эта сила перпендикулярна вектору перемещения ее точки приложения.

Сила трения скольжения колеса В приложена в мгновенном центре скоростей колеса В, поэтому:

$$A_{трB} = 0. \tag{5.25}$$

Работа максимально момента трения качении M_K:

$$A_{Mk} = -M_K \cdot \varphi_B. \tag{5.26}$$

Величина максимального момента трения качения дается формулой

$$M_K = kN_B = k(m_B g \cos\alpha + F \sin\alpha). \tag{5.27}$$

Для определения зависимостей перемещения S_O центра O и угла φ_B поворота колеса B от перемещения S_A тела A умножим обе части выражений (5.9), (5.10) на dt. Имеем

$$\omega_B \cdot dt = \frac{V_A \cdot dt}{R_B + r_B}, \qquad V_O \cdot dt = \frac{V_A \cdot dt}{R_B + r_B} \cdot r_B.$$

Или

$$d\varphi_B = \frac{dS_A}{R_B + r_B}, \qquad dS_O = \frac{dS_A}{R_B + r_B} \cdot r_B.$$

Интегрируя обе части последних двух уравнений, получаем

$$\varphi_B = \frac{S_A}{R_B + r_B}, \qquad S_O = \frac{S_A}{R_B + r_B} \cdot r_B. \tag{5.28}$$

Подставляя выражения (5.17)-(5.26) в сумму (5.16), с учетом формул (5.27), (5.28), имеем

$$A^e = \left\{ \frac{1}{R_B + r_b} \left[r_B \left(F\cos\alpha + m_B g \sin\alpha \right) + M_O - k\left(m_B g \cos\alpha + F \sin\alpha \right) \right] - \right.$$
$$\left. - m_A g \left(\sin\beta + f\cos\beta \right) \right\} S_A. \tag{5.29}$$

Тогда равенство (5.2) с учетом выражений (5.13) и (5.29) примет вид

$$\frac{V_A^2}{2}\left[m_A+\frac{1}{2}m_C+m_B\,\frac{r_B^2+\rho_B^2}{(R_B+r_B)^2}\right]=$$

$$=\left[\frac{r_B(F\cos\alpha+m_Bg\sin\alpha)+M_O-k(m_Bg\cos\alpha+F\sin\alpha)}{R_B+r_B}-\right. \tag{5.30}$$

$$\left.-m_Ag(\sin\beta+f\cos\beta)\right]S_A.$$

Отсюда

$$V_A=\left\{2S_A\left[\frac{r_B(F\cos\alpha+m_Bg\sin\alpha)+M_O-k(m_Bg\cos\alpha+F\sin\alpha)}{R_B+r_B}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-m_Ag(\sin\beta+f\cos\beta)\right]\right\}^{0,5}\cdot\left[m_A+\frac{1}{2}m_C+m_B\,\frac{r_B^2+\rho_B^2}{(R_B+r_B)^2}\right]^{-0,5}.$$

Для определения ускорения тела A продифференцируем обе части равенства (5.30) по времени t. Имеем

$$\frac{2V_A}{2}\frac{dV_A}{dt}\left[m_A+\frac{1}{2}m_C+m_B\,\frac{r_B^2+\rho_B^2}{(R_B+r_B)^2}\right]=$$

$$=\left\{\frac{1}{R_B+r_B}\left[r_B(F\cos\alpha+m_Bg\sin\alpha)+M_O-k(m_Bg\cos\alpha+F\sin\alpha)\right]-\right.$$

$$\left.-m_Ag(\sin\beta+f\cos\beta)\right\}\frac{dS_A}{dt}.$$

Поскольку

$$\frac{dS_A}{dt}=V_A \text{ и } a_A=\frac{dV_A}{dt},$$

то

$$a_A = \left[\frac{r_B(F\cos\alpha + m_B g\sin\alpha) + M_O - k(m_B g\cos\alpha + F\sin\alpha)}{R_B + r_B} - \right.$$

$$\left. - m_A g(\sin\beta + f\cos\beta) \right] \cdot \left[m_A + \frac{1}{2} m_C + m_B \frac{r_B^2 + \rho_B^2}{(R_B + r_B)^2} \right]^{-1}. \tag{5.30}$$

Таким образом, для заданных числовых значений параметров, скорость и ускорение тела *A* равны:

$$V_A = \left\{ 2 \cdot 2 \left[\frac{0{,}5(60 \cdot 0{,}866 + 20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5) + 80 - 0{,}04(20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}866 + 60 \cdot 0{,}5)}{0{,}8 + 0{,}5} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 10 \cdot 9{,}8(0{,}866 + 0{,}1 \cdot 0{,}5) \right] \right\}^{0,5} \cdot \left[10 + \frac{1}{2} 8 + 20 \frac{0{,}5^2 + 0{,}6^2}{(0{,}8 + 0{,}5)^2} \right]^{-0,5} \approx 2{,}36 \text{ м/с},$$

$$a_A = \left[\frac{0{,}5(60 \cdot 0{,}866 + 20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5) + 80 - 0{,}04(20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}866 + 60 \cdot 0{,}5)}{0{,}8 + 0{,}5} - \right.$$

$$\left. - 10 \cdot 9{,}8(0{,}866 + 0{,}1 \cdot 0{,}5) \right] \cdot \left[10 + \frac{1}{2} 8 + 20 \frac{0{,}5^2 + 0{,}6^2}{(0{,}8 + 0{,}5)^2} \right]^{-1} \approx 1{,}4 \text{ м/с}^2.$$

6. Задание №5. Применение общего уравнения динамики к изучению движения механической системы с одной степенью свободы

6.1. Содержание задания

Механическая система, изображенная на рис. 5.1, приводится в движение из состояния покоя. При этом колесо B катится без скольжения по плоскости. Массы тел A, B и D (m_A, m_B, m_D), заданная нагрузка (F и M) приведены в табл. 5.1. Радиусы колеса B и блока D соответственно равны $R_B = 0{,}8$ м, $r_B = 0{,}5$ м, $R_D = 0{,}2$ м. Радиус инерции колеса B: $\rho_B = 0{,}65$ м. Углы α и β имеют значения: $\alpha = 30^O$, $\beta = 60^O$. Коэффициент трения качения колеса B равен $k = 0{,}05R_B$; коэффициент трения скольжения тела A равен $f = 0{,}1$.

Используя общее уравнение динамики и принцип Даламбера для механической системы, определить ускорение тела A и натяжения в ветвях троса. Блок D считать однородным сплошным диском; силами сопротивления движению, трением в подшипниках, массой троса, его растяжением и проскальзыванием по ободу блока пренебречь.

6.2. Краткие указания к выполнению задания

6.2.1. Прежде, чем приступить к выполнению задания, необходимо проработать соответствующие разделы лекций и рекомендуемой литературы [1 – 4].

6.2.2. Записать равенство, выражающее общее уравнение динамики.

6.2.3. Изобразить активные силы, нагружающие систему, и силы инерции.

6.2.4. Сообщить системе возможное перемещение.

6.2.5. Записать выражение элементарной работы активных сил и сил инерции на этом возможном перемещении.

6.2.6. Определить ускорение тела A.

6.2.7. Применить принцип Даламбера отдельно к телу A и шкиву C.

6.2.8. Определить из уравнений условного равновесия этих тел силы натяжения в ветвях троса.

6.3. Пример выполнения задания

6.3.1. Условие примера

Рассматривается движение механической системы, изображенной на рис. 5.2. Даны следующие значения параметров: $m_A = 10$ кг, $m_B = 20$ кг, $m_C = 8$ кг, $F = 60$ Н, $M_0 = 80$ Нм, $R_B = 0{,}8$ м, $r_B = 0{,}5$ м, $\rho_B = 0{,}6$ м, $r_C = 0{,}2$ м, $\alpha = 30^O$, $\beta = 60^O$, $f = 0{,}1$, $k = 0{,}04$ м, $g = 9{,}8$ м/с^2.

Определить ускорение a_A тела A и натяжения T_1 и T_2 в ветвях троса.

6.3.2. Решение примера

Общее уравнение динамики системы имеет вид

$$\delta A^a + \delta A^u = 0, \tag{6.1}$$

где δA^a и δA^u - суммарные работы активных (заданных сил) и сил инерции на любом возможном перемещении механической системы.

Связи, наложенные на рассматриваемую механическую систему, можно считать идеальными, если максимальную силу $\overline{F}_{\max}$ трения скольжения и максимальный момент $M_{k\max}$ трения качения отнести к активным силам. Тогда активными силами, действующими на данную систему, будут: $\overline{F}$, $m_A\overline{g}$, $m_B\overline{g}$, $m_C\overline{g}$, $\overline{F}_{\max}$, M_0 и $M_{k\max}$, изображенные на рис. 6.1.

Величина максимальной силы трения $\overline{F}_{\max}$ скольжения равна:

$$F_{\max} = fN_A = fm_A g\cos\beta. \tag{6.2}$$

Модуль максимального момента $M_{k\max}$ трения качения вычисляется по формуле

$$M_{k\max} = kN_B = k(m_B g\cos\alpha + F\sin\alpha). \tag{6.3}$$

Далее применяем к рассматриваемой механической системе принцип Даламбера. С этой целью предварительно определяем главные векторы и главные моменты сил инерции тел, которые затем условно присоединяем к этим телам противоположно их ускорениям.

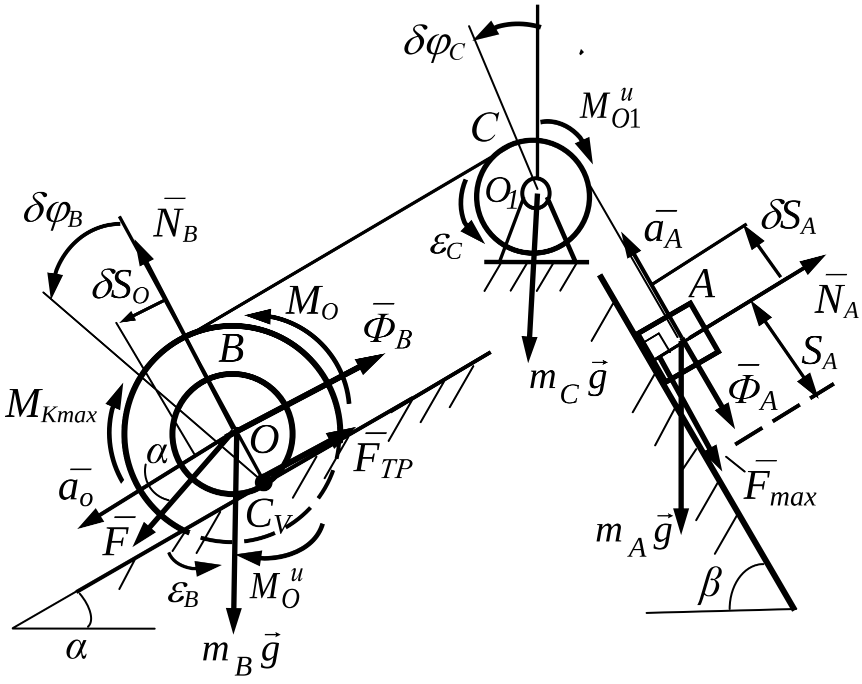


Рис. 6.1

Модуль главного вектора $\overline{\Phi}_A$ поступательного движущегося тела А:

$$\Phi_A = m_A a_A. \tag{6.4}$$

Модуль главного момента сил инерции M_{01}^{u} шкива C, вращающегося с угловым ускорением ε_C:

$$M_{01}^{u} = I_{01}\varepsilon_C.$$

Момент инерции шкива С относительно оси, проходящей через точку O_1:

$$I_{01} = \frac{1}{2} m_C r_C^2.$$

Имеют место следующие кинематические соотношения:

$$\omega_C = \frac{V_A}{r_C}, \qquad \omega_B = \frac{V_A}{R_B + r_B}, \qquad V_0 = \frac{V_A}{R_B + r_B} r_B. \tag{6.5}$$

Дифференцируя по времени обе части этих соотношений, получаем:

$$\varepsilon_C = \frac{a_A}{r_C}, \qquad \varepsilon_B = \frac{a_A}{R_B + r_B}, \qquad a_0 = \frac{a_A}{R_B + r_B} r_B. \tag{6.6}$$

Таким образом,

$$M_{01}^{u} = \frac{1}{2} m_C r_C a_A. \tag{6.7}$$

Модуль главного вектора $\overline{\Phi}_B$ и главного момента M_0^u сил инерции колеса B вычисляем по формулам:

$$\Phi_B = m_B a_0, \qquad M_0^u = I_0 \varepsilon_B, \tag{6.8}$$

где $I_0 = m_B \rho_B^2$ - момент инерции колеса B относительно оси, проходящей через его центр масс O.

С учетом соотношений (6.6) формулы (6.8) примут вид:

$$\Phi_B = m_B \frac{a_A}{R_B + r_B} r_B, \qquad M_0^u = m_B \rho_B^2 \frac{a_A}{R_B + r_B}. \tag{6.9}$$

Данная механическая система имеет одну степень свободы и ее положение в любой момент времени однозначно определяется одной обобщенной координатой. В качестве этой координаты назначим перемещение S_A тела A (см. рис. 6.1).

Сообщаем системе возможное перемещение, при котором обобщенная координата S_A увеличится на бесконечно малую величину δS_A.

Запишем общее уравнение динамики системы:

$$\begin{gathered} -m_A g \delta S_A \sin\beta - F_{\max} \delta S_A - \Phi_A \delta S_A - M_{01}^u \delta\varphi_C + F \delta S_0 \cos\alpha + \\ + M_0 \delta\varphi_B - M_{k\max} \delta\varphi_B + m_B g \delta S_0 \sin\alpha - \Phi_B \delta S_0 - M_0^u \delta\varphi_B = 0 \end{gathered} \tag{6.10}$$

Возможные перемещения $\delta\varphi_C$, δS_0 и $\delta\varphi_B$ могут быть выражены через основную вариацию δS_A следующим образом. Умножим обе части соотношений (6.5) на бесконечно малое время dt:

$$\omega_C dt = \frac{V_A dt}{r_C}, \qquad \omega_B dt = \frac{V_A dt}{R_B + r_B}, \qquad V_0 dt = \frac{V_A dt}{R_B + r_B} r_B,$$

откуда имеем

$$d\varphi_C = \frac{dS_A}{r_C}, \qquad d\varphi_B = \frac{dS_A}{R_B + r_B}, \qquad dS_0 = \frac{dS_A}{R_B + r_B} r_B. \tag{6.11}$$

Заменяя в уравнениях (6.11) значки дифференциала “d” на значки вариации “δ”, получаем

$$\delta\varphi_C = \frac{\delta S_A}{r_C}, \qquad \delta\varphi_B = \frac{\delta S_A}{R_B + r_B}, \qquad \delta S_0 = \frac{\delta S_A}{R_B + r_B} r_B. \tag{6.12}$$

Подставляя выражения (6.2), (6.4), (6.7), (6.9), и (6.12) в уравнение (6.10), имеем:

$$[-m_A g\sin\beta - f m_A g\cos\beta - m_A a_A - \frac{1}{2}m_C a_A + \frac{F\cos\alpha}{R_B+r_B}r_B + M_0\frac{1}{R_B+r_B} -$$

$$-k(m_B g\cos\alpha + F\sin\alpha)\frac{1}{R_B+r_B} + m_B g\frac{r_B\sin\alpha}{R_B+r_B} - m_B\frac{r_B^2}{(R_B+r_B)^2}a_A -$$

$$-m_B\frac{\rho_B^2}{(R_B+r_B)^2}a_A]\delta S_A = 0.$$

Поскольку $\delta S_A \neq 0$, из равенства нулю выражения в квадратных скобках находим

$$a_A = \frac{\frac{1}{R_B+r_B}[r_B(F\cos\alpha + m_B g\sin\alpha) + M_0 - k(m_B g\cos\alpha + F\sin\alpha)]}{m_A + \frac{1}{2}m_C + m_B\frac{r_B^2+\rho_B^2}{(R_B+r_B)^2}} -$$

$$-\frac{m_A g(\sin\beta + f\cos\beta)}{m_A + \frac{1}{2}m_C + m_B\frac{r_B^2+\rho_B^2}{(R_B+r_B)^2}}.$$

Для заданных числовых значений параметров ускорение a_A тела *A* равно

$$a_A = \frac{\frac{1}{1{,}3}[0{,}5(60\cdot 0{,}866 + 20\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5) + 80 - 0{,}04(20\cdot 9{,}8\cdot 0{,}866 + 60\cdot 0{,}5)] - 10\cdot 9{,}8(0{,}866 + 0{,}1\cdot 0{,}5)}{10 + 4 + 20\frac{0{,}5^2+0{,}6^2}{1{,}3^2}} \approx 1{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Рассмотрим отдельно условное равновесие груза A изображенного на рис. 6.2.

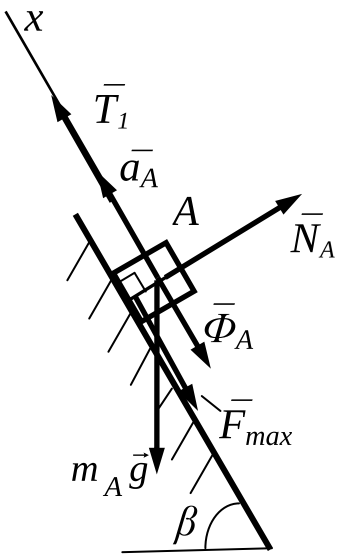


Рис. 6.2

Запишем уравнение условного равновесия:

$$\sum F_{kx} = T_1 - F_{\max} - \varPhi_A - m_A g \sin\beta = 0$$

Отсюда находим силу T_1 натяжения правой ветви троса

$$T_1 = m_A g(\sin\beta + f\cos\beta) + m_A a_A =$$
$$= 10\cdot 9{,}8(0{,}866 + 0{,}1\cdot 0{,}5) + 10\cdot 1{,}4 \approx 104 \text{ Н.}$$

Теперь рассмотрим условное равновесие шкива C, изображенного на рис. 6.3.

Уравнение моментов относительно точки O_1 следующее

$$\sum M_{01}(\overline{F}_k) = T_2 r_C - M_{01}^u - T_1^| r_C = 0.$$

Здесь согласно закону равенства действия и противодействия $T_1^| = T_1$.

Решая это уравнение с учетом выражения (6.7), определяем силу T_2 натяжения левой ветви троса:

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} m_C a_A = 104 + \frac{1}{2} 8\cdot 1{,}4 \approx 110 \text{ Н.}$$

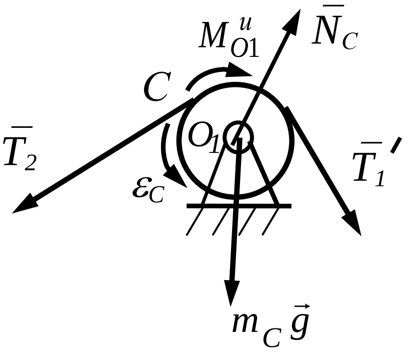


Рис. 6.3

7. Задание №6. Применение уравнений Лагранжа второго рода к изучению движения механической системы с двумя степенями свободы

7.1. Содержание задания

Тело D массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси O_1z под действием пары сил с моментом $M_z = M_z(t)$. Варианты расчетных схем изображены на рис. 7.1. При этом по желобу AB тела D под действием внутренней силы F, направленной по касательной к желобу (управляющее воздействие), движется материальная точка M массой m_2. Согласно закону равенства действия и противодействия с такой же по величине силой, но направленной в противоположную сторону, точка M действует на тело D. Варианты числовых значений параметров приведены в табл. 7.1.

Используя уравнения Лагранжа второго рода, составить дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах. Сопротивлением движению пренебречь.

Тело D рассматривать как тонкую однородную пластину. Форма пластины выбирается в соответствии с вариантом задачи (см. рис. 7.1). Осевой момент инерции тела определять по формуле приведенной в табл. 4.2.

7.2. Краткие указания к выполнению задания

7.2.1. Прежде, чем приступить к выполнению задания, необходимо проработать соответствующие разделы лекций и рекомендуемой литературы [1 – 4].

7.2.2. Установить число степеней свободы механической системы и назначить обобщенные координаты.

7.2.3. Записать уравнения Лагранжа второго рода в соответствии с назначенными обобщенными координатами.

7.2.4. Записать выражение кинетической энергии системы, как сумму кинетических энергий тела D и материальной точки M.

7.2.5. Представить кинетическую энергию системы как функцию обобщенных координат и обобщенных скоростей.

7.2.6. Изобразить активные силы, нагружающие систему.

7.2.7. Для определения обобщенных сил, соответствующих назначенным обобщенным координатам, сообщить системе возможные перемещения.

7.2.8. Записать выражения элементарных работ активных сил на этих возможных перемещениях и определить обобщенные силы.

7.2.9. Найти частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям, а затем вычислить их обыкновенные производные по времени.

7.2.10. Определить частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам.

7.2.11. Полученные в п.п. 7.2.8 – 7.2.10 выражения подставить в уравнения Лагранжа второго рода.

7.2.12. Записать в окончательном виде дифференциальные уравнения движения механической системы с учетом заданных числовых значений параметров.

Таблица 7.1

Варианты числовых значений параметров задания №6

№ Вар.	№ Подвар.	m_1, кг	m_2, кг	a, м	b, м	R, м	α, град	$M_z = M_z(t)$, Нм	$F = F(t)$, Н
1.	1	32	10	1	1,5	1,2	-	$-29{,}6t^2$	$3\sin(\pi t)$
	2							101	$3t^2$
	3							$-120t$	$2\cos(2\pi t)$
	4							$21t$	$0{,}6\sqrt{t}$
	5							$15\sqrt{t}$	$5(t+2)$
	6							$-700t$	$(t^2-3)^2$
2.	1	200	60	-	-	2	60	968	$2\sin(t/2)$
	2							$240\sqrt{t}$	$\sqrt{(t^2+1)}$
	3							-29,2t	$(t+3)^2$
	4							$-90\sqrt{t}$	$(3t+1)$
	5							$40t$	$0{,}4(t^3+1)$
	6							$50t^2$	$\pi\sin(\pi t)$
3.	1	120	40	2	-	-	-	$-27\sqrt{t}$	$0{,}3(t^2+2)$
	2							$120t$	$\sin(2t)$
	3							$330t^2$	$(t+1)^3$
	4							74	$0{,}3\sqrt{t+3}$
	5							$69t$	$0{,}6t$
	6							324	$(t^4+2)^2$
4.	1	16	5	-	-	2	30	$-135t$	$\sqrt{2t+5}$
	2							$-14t^2$	$(t^3+4)^2$
	3							$75\sqrt{t}$	$t\sin(2t)$
	4							163	$\sqrt{3t+2}$
	5							-210	$2\sin(t/2)$
	6							$27t^2$	$0{,}4\sqrt{t}+1$

Продолжение табл.7.1

№ Вар.	№ Подвар.	m_1, кг	m_2, кг	a, м	b, м	R, м	α, град	$M_z = M_z(t)$, Нм	$F = F(t)$, Н
5.	1	66	10	2	1,5	-	-	$20t$	$3\cos(t)+1$
	2							$1170\sqrt{t}$	$2t+\sqrt{t}$
	3							$-6{,}3\sqrt{t}$	$\pi+t^4$
	4							$688t$	$0{,}2(t+\cos(\pi t))$
	5							$75t^3$	$\sqrt{t+\sin(t)}$
	6							$15t^2\text{-}10t^3$	$1{,}5(t^2+3)$
6.	1	160	80	1,5	-	2,5	-	$-29{,}6t^2$	$3\sin(\pi t)$
	2							101	$3t^2$
	3							$40t$	$0{,}4(t^3+1)$
	4							$50t^2$	$\pi\sin(\pi t)$
	5							$-120t$	$2\cos(2\pi t)$
	6							$21t$	$0{,}6\sqrt{t}$
7.	1	300	50	1,6	1	0,8	-	$-135t$	$\sqrt{2t+5}$
	2							$-14t^2$	$(t^3+4)^2$
	3							$-120t$	$2\cos(2\pi t)$
	4							$21t$	$0{,}6\sqrt{t}$
	5							$-27\sqrt{t}$	$0{,}3(t^2+2)$
	6							$120t$	$\sin(2t)$
8.	1	80	20	1,2	-	2	-	$-14t^2$	$(t^3+4)^2$
	2							$75\sqrt{t}$	$t\sin(2t)$
	3							101	$3t^2$
	4							$-120t$	$2\cos(2\pi t)$
	5							$69t$	$0{,}6t$
	6							324	$(t^4+2)^2$

Продолжение табл.7.1

№ Вар.	№ Подвар.	m_1, кг	m_2, кг	a, м	b, м	R, м	α, град	$M_z = M_z(t)$, Нм	$F = F(t)$, Н
9.	1	20	5	1,2	-	0,4	45	$40t$	$0,4(t^3+1)$
	2							$50t^2$	$\pi\sin(\pi t)$
	3							$120t$	$\sin(2t)$
	4							$330t^2$	$(t+1)^3$
	5							$-135t$	$\sqrt{2t+5}$
	6							$-14t^2$	$(t^3+4)^2$
10.	1	100	40	2	√2	-	-	163	$\sqrt{3t+2}$
	2							-210	$2\sin(t/2)$
	3							$20t$	$3\cos(t)+1$
	4							$1170\sqrt{t}$	$2t+\sqrt{t}$
	5							968	$2\sin(t/2)$
	6							$240\sqrt{t}$	$\sqrt{(t^2+1)}$
11.	1	60	20	2	-	-	15	$15\sqrt{t}$	$5(t+2)$
	2							$-700t$	$(t^2-3)^2$
	3							$120t$	$\sin(2t)$
	4							$69t$	$0,6t$
	5							324	$(t^4+2)^2$
	6							$-29,2t$	$(t+3)^2$
12.	1	40	10	1	-	2	-	$-90\sqrt{t}$	$(3t+1)$
	2							$40t$	$0,4(t^3+1)$
	3							$50t^2$	$\pi\sin(\pi t)$
	4							$21t$	$0,6\sqrt{t}$
	5							$75\sqrt{t}$	$t\sin(2t)$
	6							163	$\sqrt{3t+2}$

Продолжение табл.7.1

№ Вар.	№ Подвар.	m_1, кг	m_2, кг	a, м	b, м	R, м	α, град	$M_z = M_z(t)$, Нм	$F = F(t)$, Н
13.	1	24	4	1	-	-	-	74	$0,3\sqrt{t+3}$
	2							$69t$	$0,6t$
	3							324	$(t^4+2)^2$
	4							$-135t$	$\sqrt{2t+5}$
	5							$-14t^2$	$(t^3+4)^2$
	6							$75\sqrt{t}$	$t\sin(2t)$
14.	1	40	10	-	-	1	-	$21t$	$0,6\sqrt{t}$
	2							$15\sqrt{t}$	$5(t+2)$
	3							$-700t$	$(t^2-3)^2$
	4							968	$2\sin(t/2)$
	5							$240\sqrt{t}$	$\sqrt{(t^2+1)}$
	6							$-29,2t$	$(t+3)^2$
15.	1	120	50	1	-	2	-	$-90\sqrt{t}$	$(3t+1)$
	2							$40t$	$0,4(t^3+1)$
	3							$50t^2$	$\pi\sin(\pi t)$
	4							$-27\sqrt{t}$	$0,3(t^2+2)$
	5							$120t$	$\sin(2t)$
	6							$330t^2$	$(t+1)^3$
16.	1	60	10	1	1,2	-	30	$75t^3$	$\sqrt{t+\sin(t)}$
	2							$15t^2-10t^3$	$1,5(t^2+3)$
	3							$20t$	$3\cos(t)+1$
	4							$1170\sqrt{t}$	$2t+\sqrt{t}$
	5							$-6,3\sqrt{t}$	$\pi+t^4$
	6							$688t$	$0,2(t+\cos(\pi t))$

Продолжение табл.7.1

№ Вар.	№ Подвар.	m_1, кг	m_2, кг	a, м	b, м	R, м	α, град	$M_z = M_z(t)$, Нм	$F = F(t)$, Н
17.	1	50	10	-	-	1,6	30	$-29{,}6t^2$	$3\sin(\pi t)$
	2							101	$3t^2$
	3							$-120t$	$2\cos(2\pi t)$
	4							$21t$	$0{,}6\sqrt{t}$
	5							$15\sqrt{t}$	$5(t+2)$
	6							$-700t$	$(t^2-3)^2$
18.	1	120	50	2	3	0,8	-	968	$2\sin(t/2)$
	2							$240\sqrt{t}$	$\sqrt{(t^2+1)}$
	3							$-29{,}2t$	$(t+3)^2$
	4							$-90\sqrt{t}$	$(3t+1)$
	5							$40t$	$0{,}4(t^3+1)$
	6							$50t^2$	$\pi\sin(\pi t)$
19.	1	90	30	1,5	-	-	-	$-27\sqrt{t}$	$0{,}3(t^2+2)$
	2							$120t$	$\sin(2t)$
	3							$330t^2$	$(t+1)^3$
	4							74	$0{,}3\sqrt{t+3}$
	5							$69t$	$0{,}6t$
	6							324	$(t^4+2)^2$
20.	1	50	12	1	-	1,2	-	$-135t$	$\sqrt{2t+5}$
	2							$-14t^2$	$(t^3+4)^2$
	3							$75\sqrt{t}$	$t\sin(2t)$
	4							163	$\sqrt{3t+2}$
	5							-210	$2\sin(t/2)$
	6							$27t^2$	$0{,}4\sqrt{t}+1$

Продолжение табл.7.1

№ Вар.	№ Подвар.	m_1, кг	m_2, кг	a, м	b, м	R, м	α, град	$M_z = M_z(t)$, Нм	$F = F(t)$, Н
21.	1	40	10	-	-	1	-	$40t$	$0,4(t^3+1)$
	2							$50t^2$	$\pi\sin(\pi t)$
	3							$120t$	$\sin(2t)$
	4							$330t^2$	$(t+1)^3$
	5							$-135t$	$\sqrt{2t+5}$
	6							$-14t^2$	$(t^3+4)^2$
22.	1	150	50	1,6	1,2	0,6	-	163	$\sqrt{3t+2}$
	2							-210	$2\sin(t/2)$
	3							$20t$	$3\cos(t)+1$
	4							$1170\sqrt{t}$	$2t+\sqrt{t}$
	5							968	$2\sin(t/2)$
	6							$240\sqrt{t}$	$\sqrt{(t^2+1)}$
23.	1	90	20	√2	1	-	-	$15\sqrt{t}$	$5(t+2)$
	2							$-700t$	$(t^2-3)^2$
	3							$120t$	$\sin(2t)$
	4							$69t$	$0,6t$
	5							324	$(t^4+2)^2$
	6							$-29{,}2t$	$(t+3)^2$
24.	1	50	12	0,6	-	-	60	$-90\sqrt{t}$	$(3t+1)$
	2							$40t$	$0,4(t^3+1)$
	3							$50t^2$	$\pi\sin(\pi t)$
	4							$21t$	$0,6\sqrt{t}$
	5							$75\sqrt{t}$	$t\sin(2t)$
	6							163	$\sqrt{3t+2}$

Продолжение табл.7.1

№ Вар.	№ Подвар.	m_1, кг	m_2, кг	a, м	b, м	R, м	α, град	$M_z = M_z(t)$, Нм	$F = F(t)$, Н
25.	1	36	8	-	-	0,5	-	$20t$	$3\cos(t)+1$
	2							$1170\sqrt{t}$	$2t+\sqrt{t}$
	3							$-6{,}3\sqrt{t}$	$\pi + t^4$
	4							$688t$	$0{,}2(t+\cos(\pi t))$
	5							$75t^3$	$\sqrt{t+\sin(t)}$
	6							$15t^2\text{-}10t^3$	$1{,}5(t^2+3)$
26.	1	150	40	1,5	-	2	-	$-29{,}6t^2$	$3\sin(\pi t)$
	2							101	$3t^2$
	3							$40t$	$0{,}4(t^3+1)$
	4							$50t^2$	$\pi\sin(\pi t)$
	5							$-120t$	$2\cos(2\pi t)$
	6							$21t$	$0{,}6\sqrt{t}$
27.	1	20	5	0,6	-	0,6	-	$-135t$	$\sqrt{2t+5}$
	2							$-14t^2$	$(t^3+4)^2$
	3							$-120t$	$2\cos(2\pi t)$
	4							$21t$	$0{,}6\sqrt{t}$
	5							$-27\sqrt{t}$	$0{,}3(t^2+2)$
	6							$120t$	$\sin(2t)$
28.	1	150	50	1,6	1,2	-	-	$-14t^2$	$(t^3+4)^2$
	2							$75\sqrt{t}$	$t\sin(2t)$
	3							101	$3t^2$
	4							$-120t$	$2\cos(2\pi t)$
	5							$69t$	$0{,}6t$
	6							324	$(t^4+2)^2$

Окончание табл.7.1

№ Вар.	№ Подвар.	m_1, кг	m_2, кг	a, м	b, м	R, м	α, град	$M_z = M_z(t)$, Нм	$F = F(t)$, Н
29.	1	120	20	5	-	-	-	$-27\sqrt{t}$	$0,3(t^2 + 2)$
	2							$120t$	$\sin(2t)$
	3							$330t^2$	$(t+1)^3$
	4							74	$0,3\sqrt{t+3}$
	5							$69t$	$0,6t$
	6							324	$(t^4 + 2)^2$
30.	1	30	5	3	1	-	-	$-135t$	$\sqrt{2t+5}$
	2							$-14t^2$	$(t^3 + 4)^2$
	3							$75\sqrt{t}$	$t\sin(2t)$
	4							163	$\sqrt{3t+2}$
	5							-210	$2\sin(t/2)$
	6							$27t^2$	$0,4\sqrt{t} + 1$

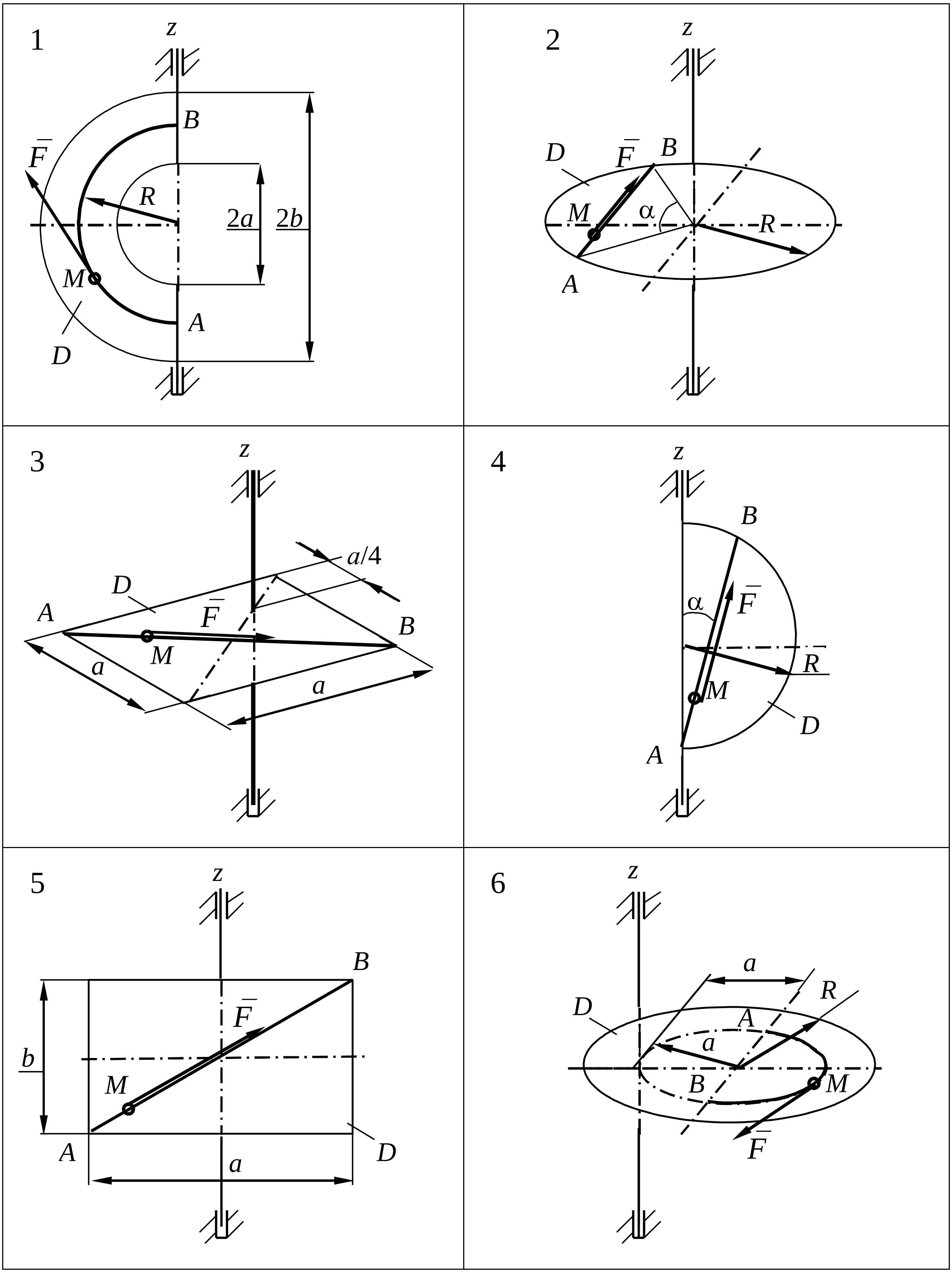
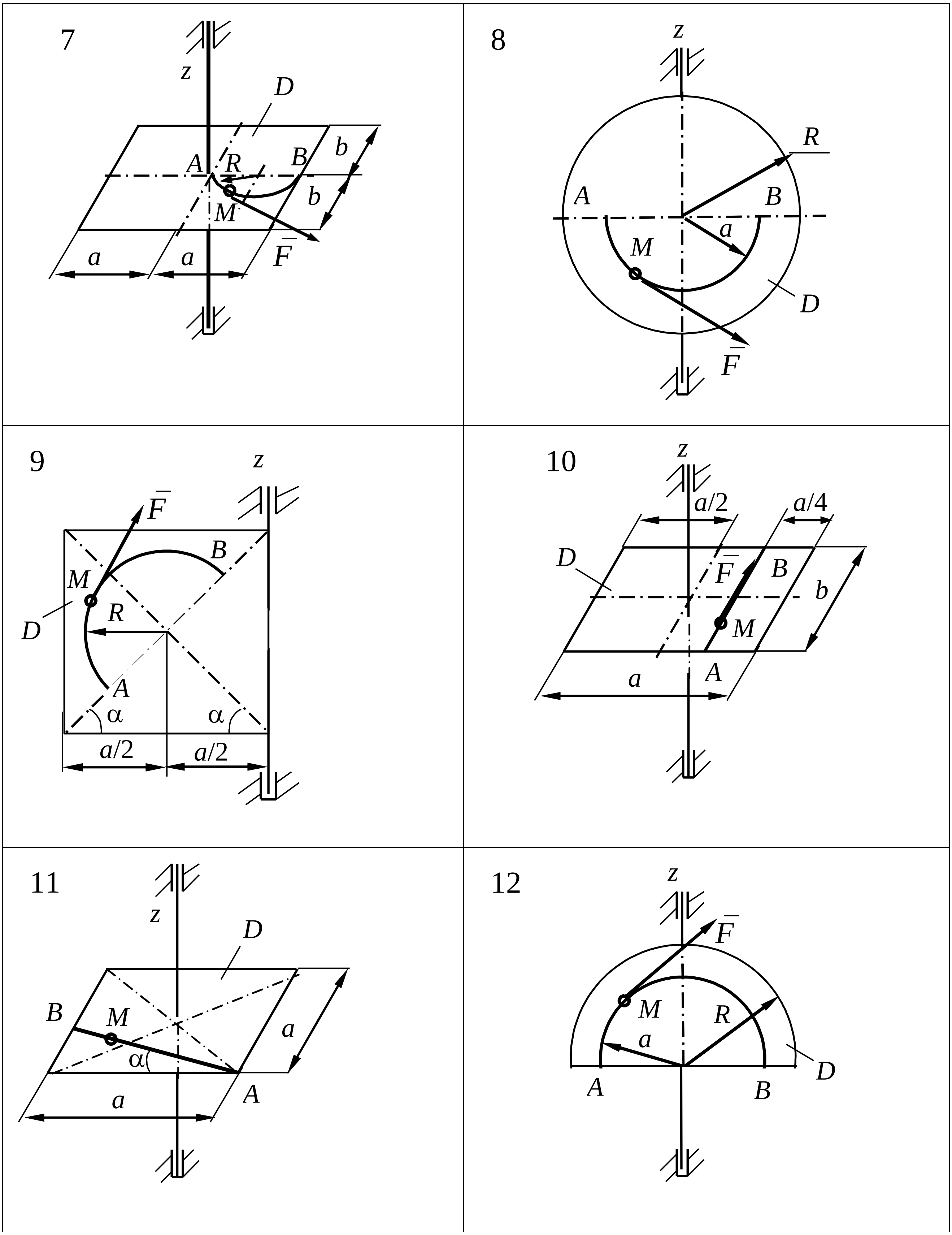
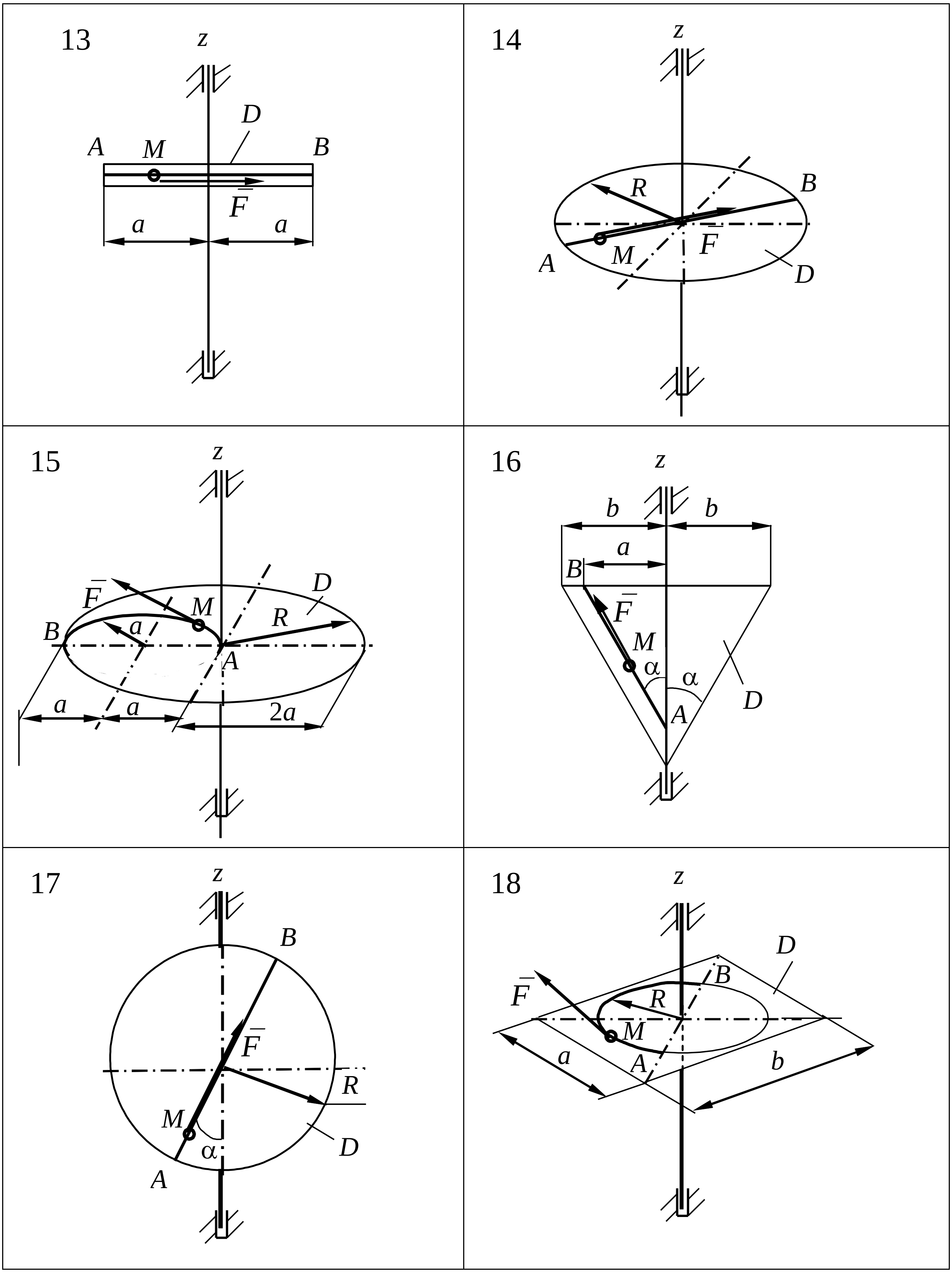

1
z
B
F
R
2a
2b
M
A
D
2
z
D
F
B
M
α
R
A
3
z
a/4
D
A
F
B
M
a
a
4
z
B
α
F
R
M
D
A
5
z
B
F
b
M
A
D
a
6
z
a
R
D
A
a
B
M
F

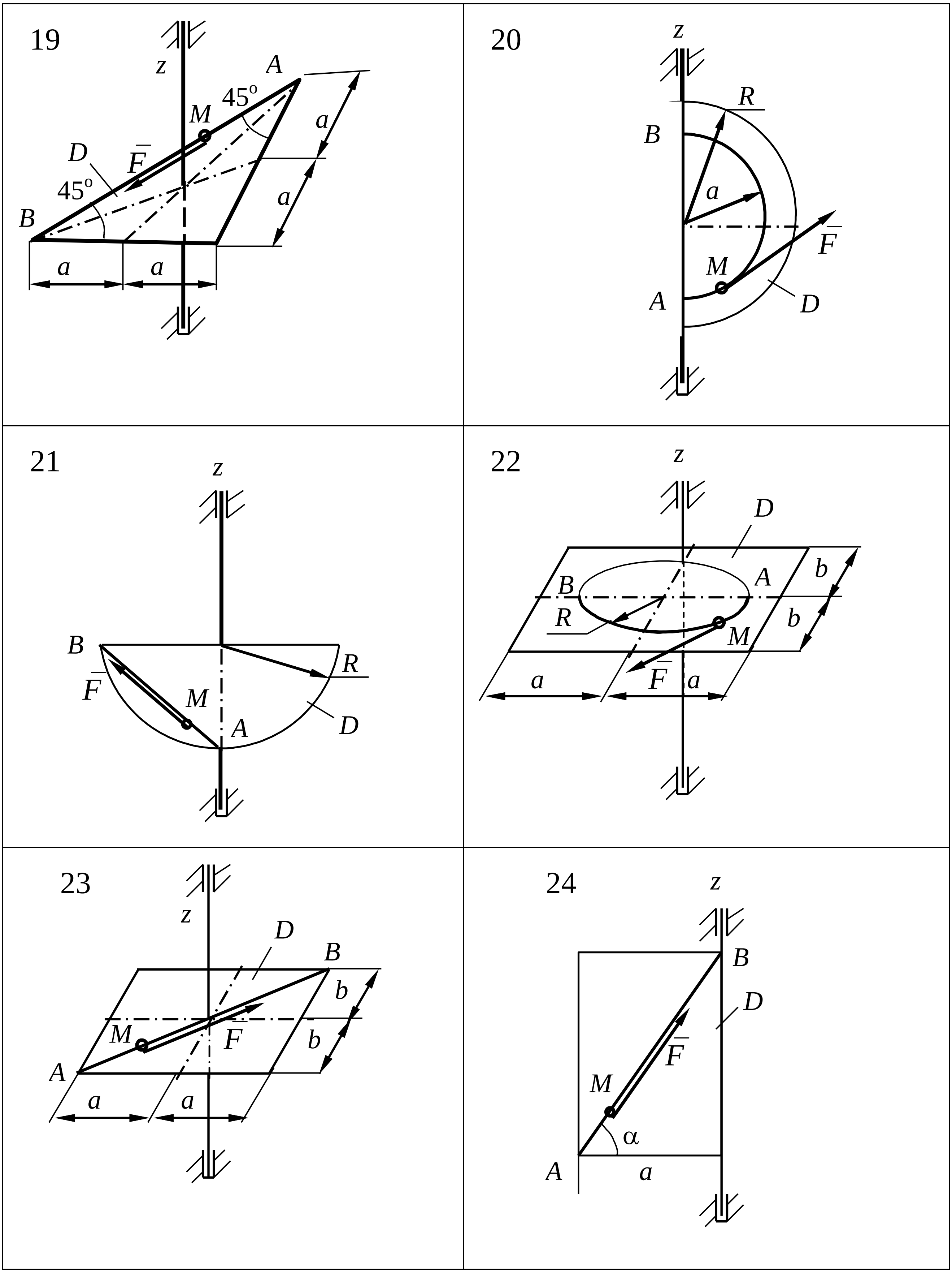
Рис. 7.1



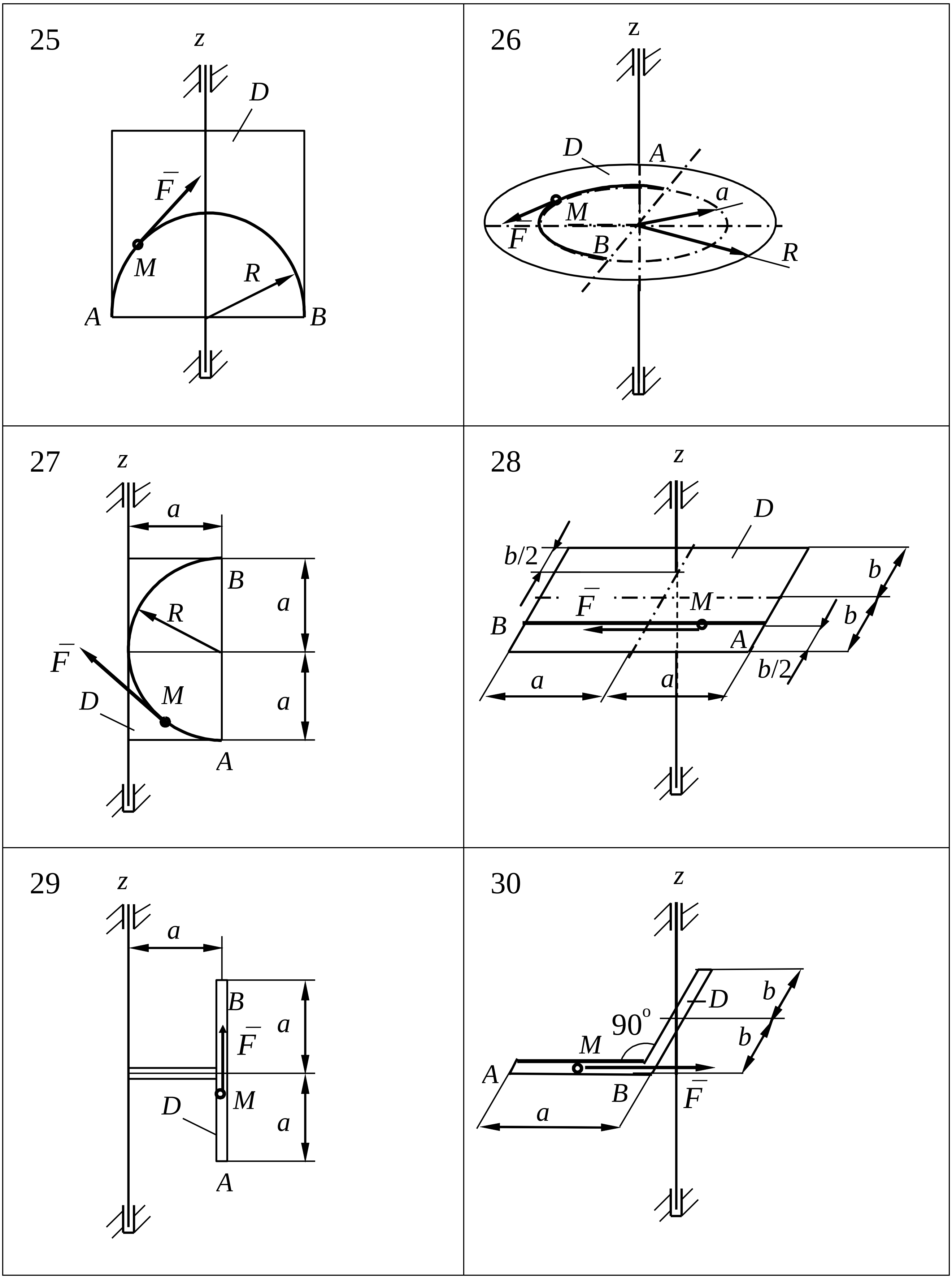
Продолжение рис. 7.1



Продолжение рис. 7.1



Продолжение рис. 7.1



Окончание рис. 7.1

7.3. Пример выполнения задания

7.3.1. Условие примера

Изучается движение механической системы, представленной на рис. 7.2. Даны следующие значения параметров: $M_z = 30t^2$ Нм, $F = 0{,}6\cos(\pi t)$ Н, $m_1 = 20$ кг, $m_2 = 8$ кг, $R = 0{,}6$ м, $a = 1{,}2$ м, $b = 0{,}9$ м.

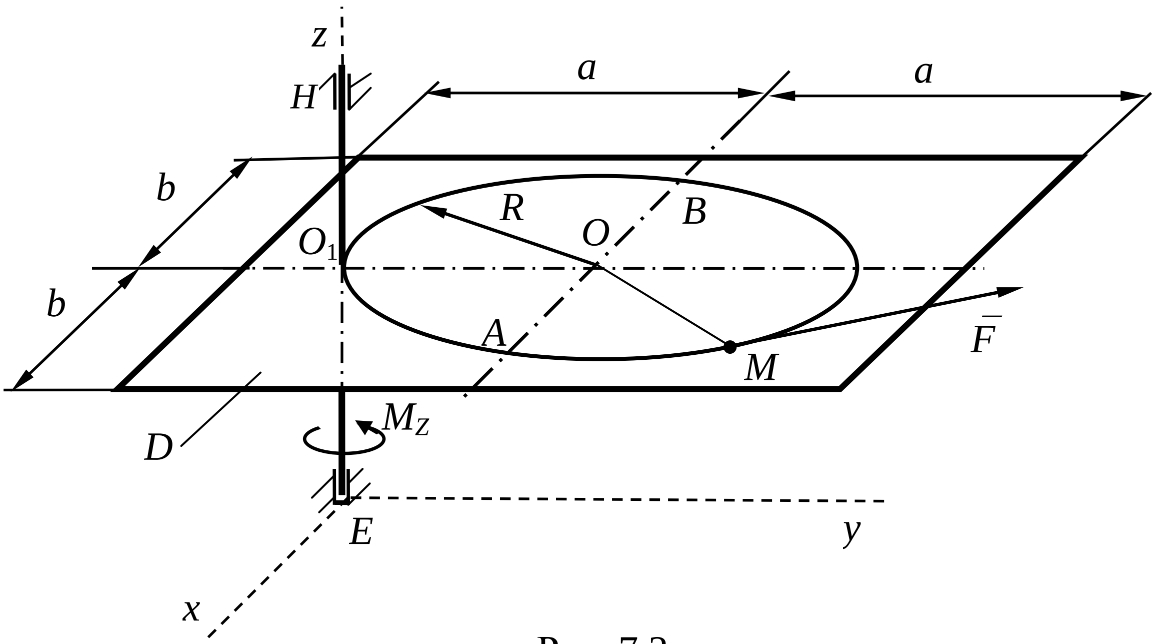


Рис. 7.2

7

3.2. Решение примера

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы (n=2). В качестве обобщенных координат назначим угол φ поворота пластины вокруг вертикальной оси $O_1 z$ и центральный угол θ, определяющий положение материальной точки M на круговом желобе AB (рис. 7.3).

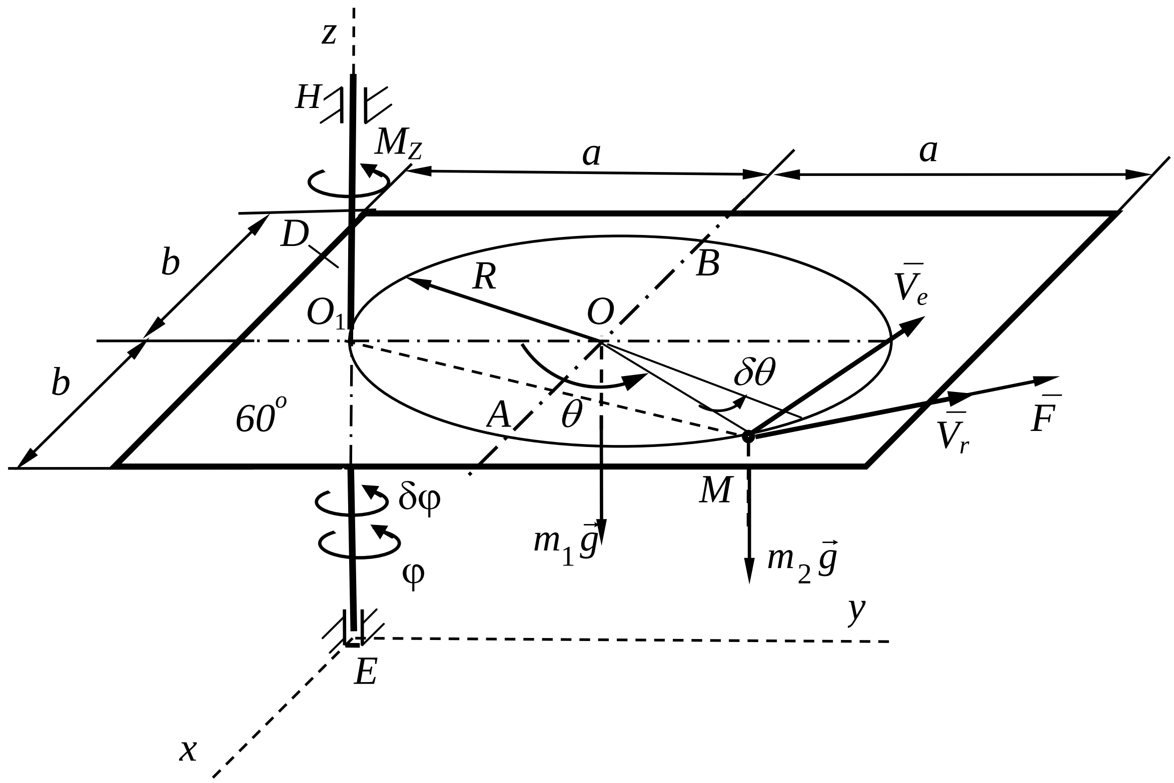


Рис. 7.3

6

Уравнения Лагранжа второго рода для данной механической системы могут быть представлены в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)=Q_{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)=Q_{\theta}. \tag{7.1}$$

Здесь T - кинетическая энергия системы, Q_φ и Q_θ - обобщенные силы, соответствующие назначенным обобщенным координатам.

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии пластины $T_П$ и материальной точки T_M:

$$T = T_П + T_M$$

Пластина совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси $O_1 z$, поэтому:

$$T_П = \frac{1}{2} J_{zz}\dot{\varphi}^2.$$

Момент инерции пластины относительно оси J_{zz} определяем по теореме Штейнера.

Имеем

$$J_{zz} = m_1 \frac{a^2 + b^2}{3} + m_1 R^2.$$

Таким образом,

$$T_П = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{a^2 + b^2}{3} + R^2 \right) \dot{\varphi}^2.$$

Кинетическая энергия материальной точки равна

$$T_M = \frac{1}{2} m_2 V_a^2,$$

где V_a - абсолютная скорость точки M.

По теореме о сложении скоростей

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e.$$

Величина относительной скорости V_r точки M

$$V_r = \dot{\theta} \cdot R. \tag{7.2}$$

Переносная скорость V_e точки M

$$V_e = \dot{\varphi} \cdot O_1 M = 2 R \dot{\varphi} \sin \frac{\theta}{2}. \tag{7.3}$$

Векторы $\vec{V}_r$ и $\vec{V}_e$ изображены на рис.7.3. Очевидно, что:

$$\vec{V}_r \perp OM, \quad \vec{V}_e \perp O_1 M \quad \text{и} \quad \angle OMO_1 = (\vec{V}_e \hat{\ } \vec{V}_r) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}.$$

Квадрат модуля абсолютной скорости точки M вычисляется по формуле

$$V_a^2 = V_r^2 + V_e^2 + 2 V_r V_e \cos\left(\vec{V}_e \hat{\ } \vec{V}_r\right)$$

Тогда с учетом равенств (7.2) и (7.3), получаем

$$V_a^2 = \dot{\theta}^2 \cdot R^2 + 4 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot R^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 4 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot R^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Кинетическая энергия точки M

$$T_M = \frac{1}{2} m_2 R^2 \left[\dot{\theta}^2 + 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \right) \right].$$

Окончательное выражение кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{a^2+b^2}{3}+R^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\left[\dot{\theta}^2 + 4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}\cdot\dot{\varphi}\right)\right] \qquad (7.4)$$

Для определения обобщенных сил Q_φ и Q_θ сообщаем системе возможные перемещения.

Первое возможное перемещение:

$$\delta\varphi \neq 0,\ \delta\theta = 0.$$

Сумма работ активных сил на этом возможном перемещении равна

$$\delta A_\varphi = M_z\delta\varphi.$$

Тогда

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = M_z. \qquad (7.5)$$

Второе возможное перемещение:

$$\delta\theta \neq 0,\ \delta\varphi = 0.$$

В этом случае сумма работ активных сил запишется

$$\delta A_\theta = F\cdot R\cdot\delta\theta.$$

Следовательно,

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\theta}{\delta\theta} = F\cdot R. \qquad (7.6)$$

Вычисляем частные производные от функции (7.4) кинетической энергии по обобщенным скоростям:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = m_1\left(\frac{a^2+b^2}{3}+R^2\right)\dot{\varphi} + 2m_2R^2\left(2\dot{\varphi}+\dot{\theta}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad (7.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = m_2R^2\left(\dot{\theta} + 2\cdot\dot{\varphi}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad (7.8)$$

Далее находим обыкновенные производные по времени от полученных выражений (7.7) и (7.8):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = m_1\left(\frac{a^2+b^2}{3}+R^2\right)\ddot{\varphi} + $$
$$+ 2m_2R^2\left[\left(2\dot{\varphi}+\dot{\theta}\right)\frac{\dot{\theta}}{2}\sin\theta + \left(2\ddot{\varphi}+\ddot{\theta}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \qquad (7.9)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_2 R^2 \left[\ddot{\theta} + 2\left(\dot{\varphi} \cdot \frac{\dot{\theta}}{2} \sin\theta + \ddot{\varphi} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{7.10}$$

Затем вычисляем частные производные от кинетической энергии (7.4) по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial T}{d\varphi} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = m_2 R^2 \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi}\right) \sin\theta \tag{7.11}$$

Подставляя равенства (7.5),(7.6),(7.9)--(7.11) в уравнения (7.1), получаем:

$$m_1 \left(\frac{a^2 + b^2}{3} + R^2\right) \ddot{\varphi} + +2 m_2 R^2 \left[\left(2\dot{\varphi} + \dot{\theta}\right) \frac{\dot{\theta}}{2} \sin\theta + \left(2\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}\right] = M_z,$$

$$m_2 R^2 \left[\ddot{\theta} + 2\left(\dot{\varphi} \cdot \frac{\dot{\theta}}{2} \sin\theta + \ddot{\varphi} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)\right] - m_2 R^2 \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi}\right) \sin\theta = F \cdot R.$$

С учетом числовых значений исходных данных дифференциальные уравнения движения рассматриваемой механической системы примут вид:

$$22{,}2\ddot{\varphi} + 1{,}92 \left[\left(2\dot{\varphi} + \dot{\theta}\right) \frac{\dot{\theta}}{2} \sin\theta + \left(2\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}\right] = 30t^2,$$

$$\ddot{\theta} + 2\left(\dot{\varphi} \cdot \frac{\dot{\theta}}{2} \sin\theta + \ddot{\varphi} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) - \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi}\right) \sin\theta = 0{,}125 \cos \pi t.$$

8. Критерии оценки выполненных заданий

Варианты заданий задаются преподавателем для самостоятельного выполнения студентам и после проверки преподавателем защищаются исполнителем.

При защите заданий выставляется оценка в журнал преподавателя, в котором отмечается дата сдачи ее преподавателю.

Рекомендуется учитывать следующие факторы:

-ритмичность работы над заданием и соблюдение срока сдачи, установленного учебным планом;

- полноту и качество пояснительной записки и графической части работы;

- степень самостоятельности студента при решении различных вопросов и уровнем ответов при защите.

Оценка «отлично»

Ставится, если в задании в полной мере отражены все вопросы и решения, связанные с расчетом данной задачи. Структура и содержание работы соответствует предъявляемым требованиям. Графическая часть содержит необходимые данные для расчетов статических, кинематических и динамических характеристик. Студент четко и правильно отвечает на поставленные преподавателем вопросы, Правильно выводит необходимые расчетные формулы и зависимости.

Оценка «хорошо»

Ставится, если в работе в полной мере отражены все вопросы и решения, связанные с расчетом данной задачи. Структура и содержание работы не в полной мере соответствует предъявляемым требованиям. Работа содержит незначительные ошибки или неточности. Ответы студента на поставленные преподавателем вопросы содержат незначительные неточности и погрешности.

Оценка «удовлетворительно»

Ставится, если в работе не в полной мере отражены все вопросы и решения, связанные с решением данной задачи. Работа содержит незначительные ошибки или неточности. Студент неуверенно отвечает на поставленные преподавателем вопросы. Допускает существенные неточности, ошибается в определениях и выводах соотношений.

Оценка «неудовлетворительно»

Ставится, если в работе не отражены все вопросы и решения, связанные с данной задачей. Содержание пояснительной записки не соответствует предъявляемым требованиям. Графическая и расчетная части не выполнена в полном объёме. Работа содержит значительные ошибки или неточности. Студент затрудняется при ответах на поставленные вопросы, допускает принципиальные ошибки в письменных расчетах, не может сформулировать важные определения и наименования при ответах на вопросы, не самостоятельно выполнил данную работу.

9. Контрольные вопросы

1. Предмет динамики. Некоторые понятия и определения. Основные законы (аксиомы) динамики.
2. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки и их применение к решению двух основных задач динамики.
3. Свободные колебания материальной точки. Амплитуда, период и фаза колебаний. График свободных колебаний.
4. Влияние силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, на свободные колебания. Затухающие колебания. Период, декремент и логарифмический декремент колебаний. Апериодическое затухающее движение. Графическая иллюстрация.
5. Вынужденные колебания материальной точки при отсутствии сопротивления среды. Коэффициент динамичности. Резонанс.
6. Влияние линейного сопротивления на вынужденные колебания. Зависимость коэффициента динамичности и сдвига по фазе от коэффициента расстройки.
7. Геометрия масс. Центр масс механической системы и его координаты. Общие формулы для координат центра тяжести. Моменты инерции, основные понятия и общие формулы.
8. Осевые, полярные, плоскостные и центробежные моменты инерции. Некоторые свойства моментов инерции тел.

9. Моменты инерции простейших однородных тел (прямолинейный стержень; круглое кольцо-обруч; круглый диск и цилиндр). Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Момент инерции тела относительно произвольной оси. Эллипсоид инерции.

10. Внутренние и внешние силы. Свойства внутренних сил.

11. Теорема об изменении количества движения для точки и системы (в дифференциальной и интегральной формах). Следствия.

12. Теорема о движении центра масс системы. Следствия.

13. Теорема об изменении кинетического момента для точки и системы. Следствия. Геометрическая интерпретация теоремы об изменении кинетического момента (теорема Резаля).

14. Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси. Физический и математический маятники.

15. Дифференциальные уравнения поступательного и плоского движений твердого тела.

16. Элементарная и полная работа. Работа сил тяжести и линейной силы упругости.

17. Работа сил, приложенных к твердому телу (при поступательном движении тела; при вращении; для внутренних сил; общий случай движения).

18. Теорема об изменении кинетической энергии для точки и системы в дифференциальной и интегральной формах.

19. Кинетическая энергия точки и системы. Теорема Кенига. Вычисление кинетической энергии твердого тела в различных случаях его движения (при поступательном движении тела; при вращении вокруг неподвижной оси; при плоском движении тела).

20. Силовое поле. Силовая функция и потенциальная энергия. Примеры потенциальных силовых полей (поле силы тяжести, поле центральной силы). Понятие о рассеивании механической энергии. Закон сохранения механической энергии для точки и системы в потенциальном силовом поле.

21. Принцип Даламбера для точки и механической системы. Главный вектор и главный вектор-момент сил инерции.

22. Вычисление главного вектора и главного вектор-момента сил инерции при поступательном, вращательном и плоском движениях твердого тела.

23. Определение динамических реакций в точках закрепления оси вращающегося твердого тела. Условия динамической и статической уравновешенности тела.
24. Основные понятия аналитической механики. Связи и их классификация. Действительные и виртуальные (возможные) перемещения. Идеальные связи.
25. Обобщенные координаты и число степеней свободы механической системы. Обобщенные силы и способы их нахождения.
26. Принцип возможных (виртуальных) перемещений (необходимость и достаточность). Общее уравнение статики. Условия равновесия механической системы в обобщенных координатах.
27.Общее уравнение динамики механической систем.
28.Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа 2-го рода). Кинетический потенциал. Уравнения Лагранжа второго рода для консервативных систем.

Список литературы

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Б., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики.– СПБ.: Издательство «Лань», 2009. – 736 с.
2. Дронг В.И. и др. Под ред. Колесникова К.С. Курс теоретической механики. М.: Из-во МГТУ им. Баумана Н.Э. 2005.-736 с.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высш. школа. 2011.-720 с.
4. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. СПБ: Из-во «Лань»,2006.-603 с.