

4. ЗУБЧАТЫЙ МЕХАНИЗМ

Зубчатые передачи являются наиболее распространенными узлами современных машин и в значительной степени определяют их качество и конкурентоспособность. Они предназначены для передачи вращения и крутящего момента от одного вала механизма к другому с заданным отношением угловых скоростей. Наибольшее распространение в современном машиностроении получили эвольвентные зубчатые передачи. Они отличаются компактностью, высоким КПД, постоянством передаточного отношения, надежностью работы, высокой долговечностью и простотой обслуживания.

Многообразие машин, механизмов и систем приводов сопровождается и многообразием структурных схем зубчатых передач. Они создаются на основе различных сочетаний простых передач с наружным и внутренним зацеплением. Комбинируя число простых передач и связи между их звеньями, можно получать сложные многопоточные и многоступенчатые передачи с необходимыми свойствами. Вследствие компактности и малой массы, получили распространение многопоточные планетарные передачи, а также более сложные приводы, построенные на основе их сочетаний с другими передачами и устройствами.

4.1. Синтез зубчатых передач

4.1.1. Геометрические параметры прямозубых цилиндрических зубчатых передач

Геометрия прямозубой передачи, состоящей из колес, нарезанных в станочном зацеплении с производящей рейкой, полностью определяется следующими параметрами: $z_1, z_2, m, \alpha, h_a^*, c^*, \rho^*, x_1, x_2$, где z_1, z_2 – числа зубьев колес; m – модуль зубьев; $\alpha, h_a^*, c^*, \rho^*$ – параметры исходного производящего контура, соответственно равные (ГОСТ 13755-81): угол профиля $\alpha = 20^\circ$; коэффициент высоты головки зуба $h_a^* = 1$, коэффициент радиального зазора $c^* = 0,25$, коэффициент радиуса переходной кривой $\rho = 0,384$; x_1, x_2 – коэффициент смещения исходного производящего контура, которые выбираются в зависимости от конкретных условий работы зубчатой передачи и требований, предъявляемых к ней.

Геометрические параметры зубчатых колес

Основные размеры зубчатого колеса определяемые из рассмотрения станочного зацепления нарезаемого колеса с производящей рейкой (рис. 4.1) следующие.

Делительный окружной шаг зубьев

$$p = \pi m. \quad (4.1)$$

Радиус делительной окружности r определим из равенства $2\pi r = p_0 z$:

$$r = p_0 z / 2\pi = \frac{\pi m z}{2\pi} = \frac{m z}{2}. \quad (4.2)$$

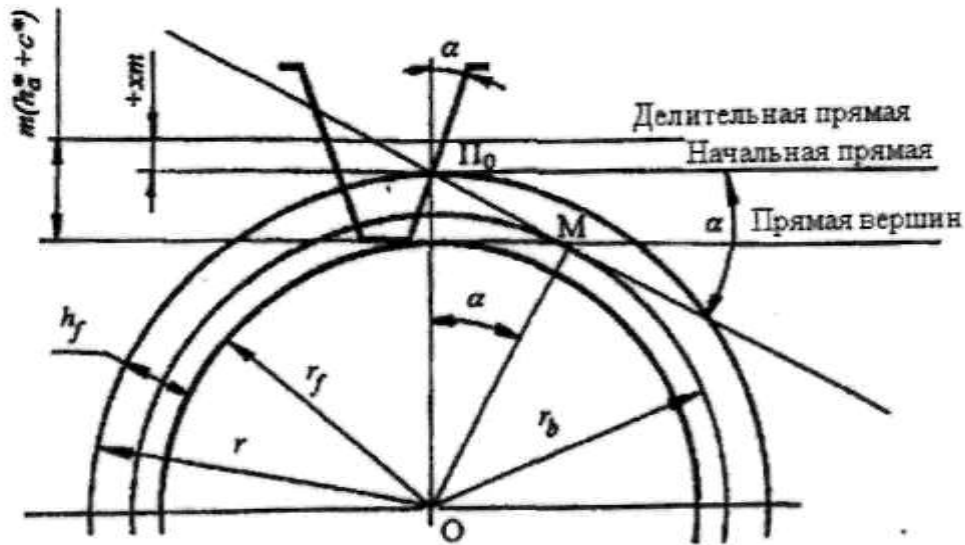


Рис. 4.1. Станочное зацепление

Радиус основной окружности r_b .

Линия станочного зацепления касается основной окружности нарезаемого колеса. Из треугольника OMP_0 (рис. 4.1)

$$r_b = r \cos \alpha = \left(\frac{m z}{2} \right) \cos \alpha. \quad (4.3)$$

Радиус окружности впадин r_f .

Поверхность впадин нарезаемого колеса формируется вершиной зуба производящей рейки, следовательно, радиус окружности впадин будет (рис. 4.1)

$$r_f = r - h_f,$$

где $h_f = m(h_a^* + c^* - x)$ или

$$r_f = m \left(\frac{z}{2} - h_a^* - c^* + x \right) \quad (4.4)$$

Для колёс, нарезаемых без смещения ($x=0$), $r_f = m \left(\frac{z}{2} - h_a^* - c^* \right) = m \left(\frac{z}{2} - 1,25 \right)$.

Делительная толщина зуба S .

Толщина зуба S по делительной окружности равна ширине впадины рейки по начальной прямой (рис. 4.2).

Таким образом,
$$S = \frac{p_0}{2} + 2\Delta e_0 = \frac{\pi m}{2} + 2x m \tan \alpha. \quad (4.5)$$

У колёс, нарезаемых без смещения, $S = \frac{\pi m}{2}$.

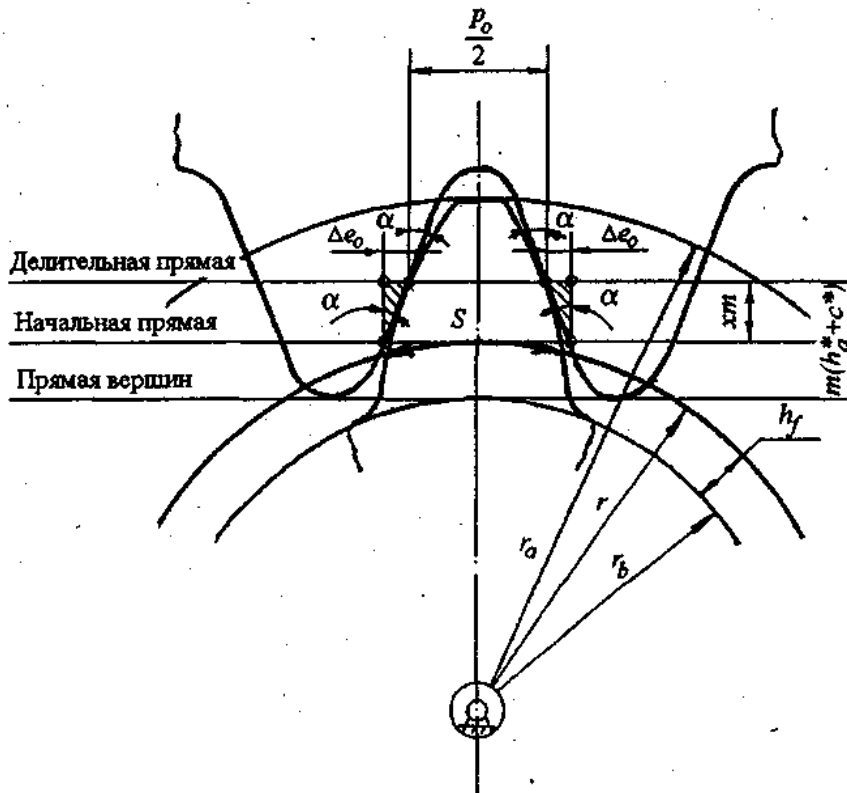


Рис. 4.2. К определению делительной толщины зуба

Толщина зуба на произвольной окружности.

Из рис. 4.3 можно записать

$$\varphi_y + \text{inv}\alpha_y = \varphi + \text{inv}\alpha,$$

где φ – половина угловой толщины зуба по делительной окружности; φ_y – половина угловой толщины зуба на окружности радиуса r_y .

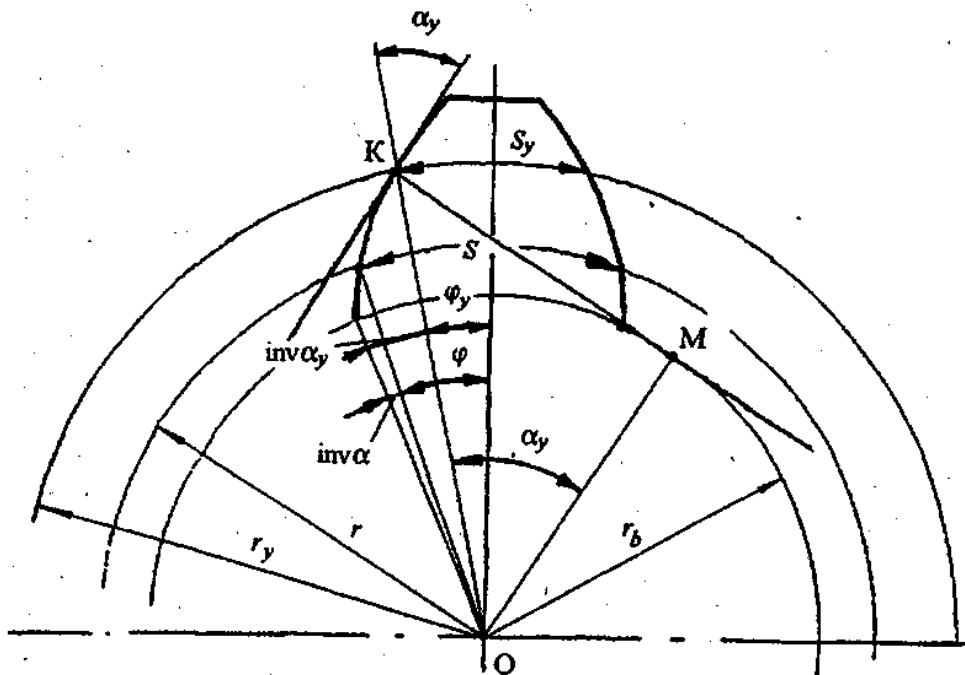


Рис. 4.3. Определение толщины зуба на произвольной окружности

Выразив угловую толщину зуба через окружную, получим

$$\frac{S_y}{2r_y} + \text{inv}\alpha_y = \frac{S}{2r} + \text{inv}\alpha \quad \text{или}$$

$$S_y = 2r_y \left(\frac{S}{2r} + \text{inv}\alpha_y - \text{inv}\alpha \right). \quad (4.6)$$

Угол профиля зуба α_y на окружности радиуса r_y можно определить из треугольника ОМК:

$$\cos\alpha_y = \frac{r_b}{r_y}. \quad (4.7)$$

Геометрические параметры зубчатых передач

Угол зацепления α_w

Теоретическое зацепление не имеет бокового зазора между зубьями.

Отсюда следует, что $S_{w1} = e_{w2}$ и $e_{w1} = S_{w2}$, а так как $S_{w1} + e_{w1} = p_w$, то (рис. 4.4)

$$S_{w1} + S_{w2} = p_w. \quad (4.8)$$

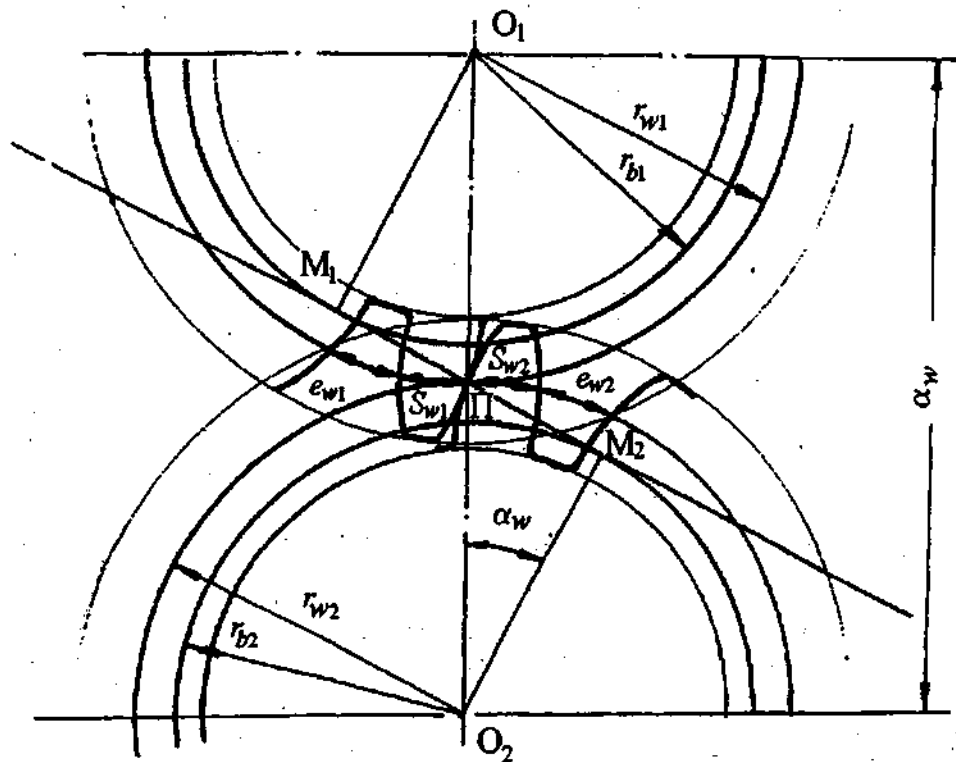


Рис. 4.4. К определению угла зацепления

Толщина зубьев по начальным окружностям:

$$S_{w1} = 2r_{w1} \left(\frac{S_1}{2r_1} + \text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_w \right), \quad (4.9)$$

$$S_{w2} = 2r_{w2} \left(\frac{S_2}{2r_2} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_w \right). \quad (4.10)$$

Подставляя выражения (4.9) и (4.10) в (4.8), получим

$$p_w = 2r_{w1} \left(\frac{S_1}{2r_1} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_w \right) + 2r_{w2} \left(\frac{S_2}{2r_2} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_w \right). \quad (4.11)$$

При этом

$$2r_{w1,2} = \frac{p_w z_{1,2}}{\pi}. \quad (4.12)$$

$$S_{1,2} = \frac{\pi m}{2} + 2x_{1,2} m \text{tg} \alpha, \quad (4.13)$$

$$2r_{1,2} = m z_{1,2}. \quad (4.14)$$

Подставляя в выражение (4.11) выражения (4.12–4.14), будем иметь

$$p_w = \frac{p_w z_1}{\pi} \left(\frac{\pi m / 2 + 2x_1 m \text{tg} \alpha}{m z_1} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_w \right) + \frac{p_w z_2}{\pi} \left(\frac{\pi m / 2 + 2x_2 m \text{tg} \alpha}{m z_2} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_w \right).$$

После простейших преобразований получим

$$2(x_1 + x_2) \text{tg} \alpha + \text{inv} \alpha (z_1 + z_2) - \text{inv} \alpha_w (z_1 + z_2) = 0$$

или

$$\text{inv} \alpha_w = \frac{2(x_1 + x_2) \text{tg} \alpha}{z_1 + z_2} + \text{inv} \alpha. \quad (4.15)$$

Для нулевых передач $x_\Sigma = 0$, $\text{inv} \alpha_w = \text{inv} \alpha$, т.е. угол зацепления равен углу профиля исходного контура (20°).

Радиусы начальных окружностей

Из прямоугольных треугольников $O_1M_1\Pi$ и $O_2M_2\Pi$ (рис. 4.4) определим

$$r_{w1,2} = \frac{r_{b1,2}}{\cos \alpha_w} = r_{1,2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} = \frac{m z_{1,2}}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}. \quad (4.16)$$

Для нулевых передач $r_{w1,2} = r_{1,2} \equiv \frac{m z_{1,2}}{2}$, т.е. в нулевых передачах начальные окружности совпадают с делительными.

Межосевое расстояние

$$a_w = r_{w1} + r_{w2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}. \quad (4.17)$$

Для нулевых передач межосевое расстояние равно делительному межосевому расстоянию a :

$$a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}. \quad (4.18)$$

Радиусы окружностей вершин

Эти радиусы определяются из условия получения необходимого радиального зазора c в зубчатой передаче. Этот зазор обычно принимают равным $c = c^* m$, $c^* = 0,25$.

По рис. 4.5 можно записать

$$\begin{aligned} r_{a1} &= a_w - r_{f2} - c^* m, \\ r_{a2} &= a_w - r_{f1} - c^* m. \end{aligned}$$

В ГОСТ 16532-70 на расчет геометрии зубчатой передачи радиусы окружностей вершин определяются через коэффициенты уравнивающего смещения Δy :

$$r_{a1,2} = r_{1,2} + m(h_a^* + x_{1,2} - \Delta y),$$

где $\Delta y = x_\Sigma - y$, а y – коэффициент воспринимаемого смещения, равный

$$y = \frac{a_w - a}{m},$$

здесь um – воспринимаемое смещение, равное наименьшему расстоянию между делительными окружностями колёс зубчатой передачи.

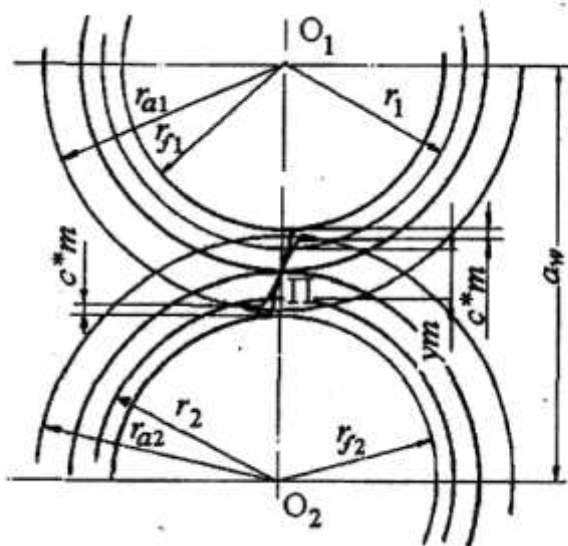


Рис. 4.5. К определению радиуса окружности вершин

Для нулевых передач $x_\Sigma = 0$, $y = 0$, $\Delta y = 0$

$$r_{a1,2} = r_{1,2} + m(h_a^* + x_{1,2}), \quad (4.19)$$

а для передач без смещения ($x_{1,2} = 0$)

$$r_{a1,2} = r_{1,2} + mh_a^* = (m/2)(z_{1,2} + 2). \quad (4.20)$$

4.1.2. Качественные показатели зубчатых передач и их связь с геометрическими параметрами передачи

Причинами выхода из строя зубчатых передач являются: излом зубьев; усталостное выкрашивание поверхностных слоев; абразивный износ и заедание зубьев.

- *Излом зубьев.* Для предотвращения излома зубья рассчитывают на изгиб. Прочность зубьев на изгиб зависит от толщины зуба в основании, которая изменяется пропорционально толщине зуба по делительной окружности. Чем больше окружная делительная толщина зуба, тем выше прочность зубьев на изгиб, а толщины зубьев прямо пропорциональны коэффициентам смещений x_1 и x_2 .

- *Усталостное выкрашивание поверхностных слоев зубьев.* Для предотвращения усталостного выкрашивания поверхностных слоев зубьев зубчатую передачу рассчитывают на контактные напряжения. Контактные напряжения зависят от размеров площади контакта поверхностей зубьев, которые в свою очередь зависят от приведенной кривизны профилей зубьев в точках контакта:

$$1/\rho_{пр} = 1/\rho_1 + 1/\rho_2,$$

где $\rho_{пр}$ – приведенный радиус кривизны; ρ_1, ρ_2 – радиусы кривизны эвольвентных профилей зубьев первого и второго колес.

Чем больше угол зацепления, тем меньше приведенная кривизна, больше размеры площадки контакта, а следовательно, меньше контактные напряжения и опасность усталостного выкрашивания поверхностных слоев зубьев. Угол же зацепления растет с ростом коэффициента суммы смещений.

- *Абразивный износ и заедание зубьев.* Абразивный износ и заедание зубьев возникают при скольжении боковых поверхностей зубьев и зависят от скорости их скольжения, которая определяется по формуле

$$V_s = ПК(\omega_1 + \omega_2),$$

где ω_1, ω_2 – угловые скорости колес; ПК – расстояние от точки контакта профилей до полюса зацепления

Поскольку точки контакта профилей располагаются на активной линии зацепления, то уменьшение ее длины приведет к уменьшению максимальных значений скорости скольжения и снижению износа и опасности заедания. Длина же активной линии зацепления уменьшается с ростом угла зацепления, т.е. с ростом суммарного коэффициента смещения.

Плавность зацепления зубчатой передачи зависит от среднего числа пар зубьев, одновременно находящихся в зацеплении, и характеризуется в прямо-зубых передачах коэффициентом торцового перекрытия:

$$\varepsilon_\alpha = z_1/2\pi (\operatorname{tg}\alpha_{a1} - \operatorname{tg}\alpha_{aw}) + z_2/2\pi (\operatorname{tg}\alpha_{a2} - \operatorname{tg}\alpha_{aw}).$$

Коэффициент торцового перекрытия увеличивается с ростом длины активной линии зацепления, которая в свою очередь увеличивается с уменьшением угла зацепления α_w , т.е. с уменьшением суммарного коэффициента смещения.

4.1.3. Выбор коэффициентов смещения

Величина и знак коэффициентов смещения влияют на геометрию и качественные показатели зубчатой передачи. Применение зубчатых передач со смещением позволяет: повысить долговечность, нагрузочную способность или плавность зацепления зубчатой передачи, уменьшить габариты или вписаться в заданное межосевое расстояние. Коэффициенты смещения необходимо назначать с учетом условий работы зубчатой передачи.

Комплекс проектных условий при выборе коэффициентов смещения учитывается блокирующими контурами.

Блокирующим контуром называется совокупность линий для определенных сочетаний чисел зубьев z_1 и z_2 в системе координат x_1 и x_2 (рис. 4.6). Каждая точка в этой системе соответствует зубчатой передаче z_1, z_2 , с определёнными x_1 и x_2 . Зубчатой передаче без смещения ($x_{1,2} = 0$) соответствует точка начала координат. Точки, расположенные на прямой А-А, соответствуют нулевым равносмещённым передачам с $x_{\Sigma} = 0$. Выше линии А-А располагаются положительные передачи с $x_{\Sigma} > 0$, а ниже – отрицательные с $x_{\Sigma} < 0$. Любая прямая, параллельная прямой А-А, т.е. пересекающая оси под углом 45° , соответствует передачам, у которых x_{Σ} и α_w будут одинаковы.

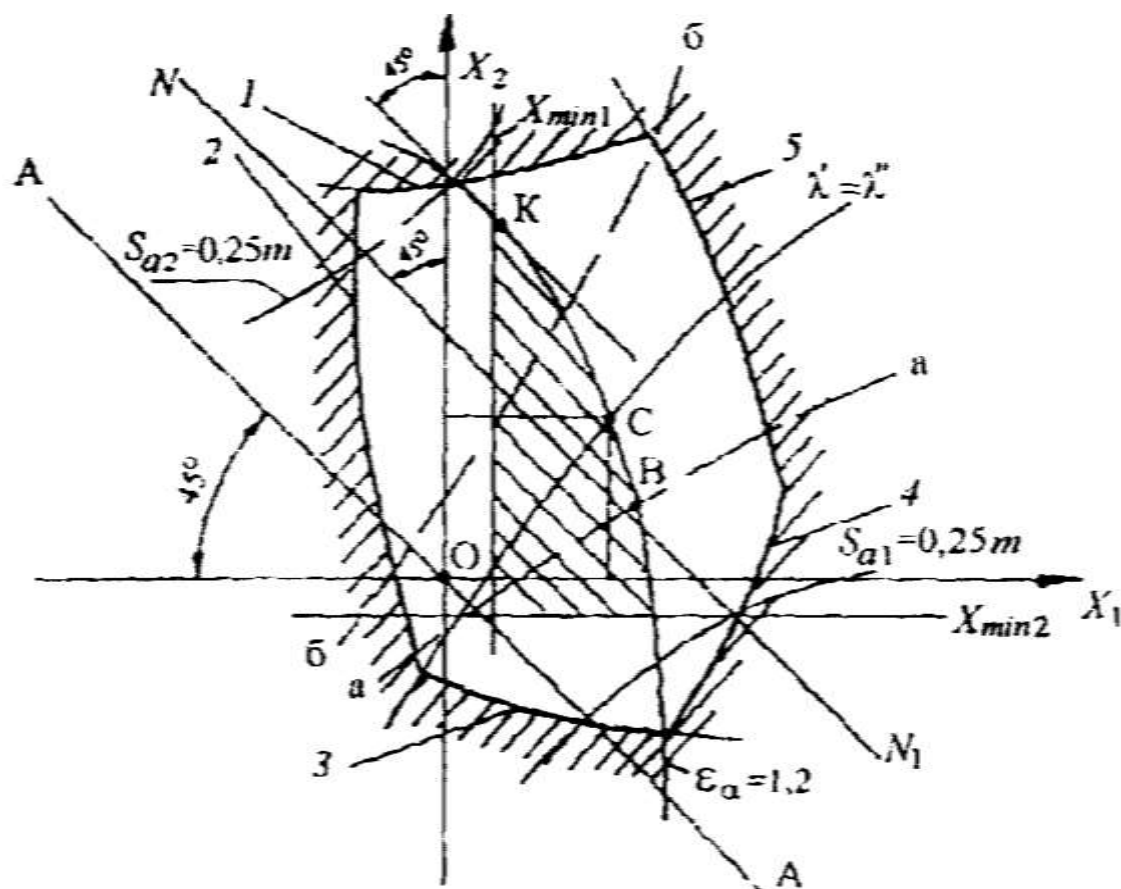


Рис. 4.6. Блокирующий контур

Координатное поле ограничивается линиями, за которыми зубчатая передача не может существовать, так как появляется или интерференция зубьев пе-

редачи или заострение зубьев колёс ($S_{a1} < 0$ или $S_{a2} < 0$), или коэффициент перекрытия становится меньше единицы, или подрез зубьев начинает захватывать активную часть профиля. Совокупность этих линий называется блокирующим контуром.

На рис. 4.6 линии 1, 2 соответствуют началу интерференции на ножке зуба колеса z_2 , а линии 3, 4 – интерференции на ножке зуба колеса z_1 . Линия 5 соответствует предельному значению коэффициента перекрытия ($\varepsilon_a = 1$).

На блокирующий контур наносятся линии условных границ и линии качественных показателей. Условными границами могут быть:

- линии, на которых $S_{a1,2} = 0,25 m$;
- линия, на которой $\varepsilon_a = 1,2$;
- линии начала появления подреза, т.е. $x_1 = x_{\min 1}$ и $x_2 = x_{\min 2}$.

Линий качественных показателей три:

- две линии, обеспечивающие равнопрочность зубьев по изгибу при ведущем колесе z_1 (линия $a-a$) и при ведущем колесе z_2 (линия $b-b$);
- линия, выравнивающая удельные скольжения на ножках зубьев колёс z_1 и z_2 , при контакте в точках A и B линии зацепления.

Методика выбора коэффициентов смещения по блокирующим контурам

1. Выбор коэффициентов смещения, обеспечивающих наивысшую контактную прочность зубчатой передачи z_1, z_2 .

Контактная прочность увеличивается с ростом приведённых радиусов кривизны контактирующих профилей, которые, в свою очередь, увеличиваются с ростом угла зацепления α_w , а следовательно, с возрастанием x_Σ . Проведём к условному контуру в зоне положительных значений x_1 и x_2 касательную под углом 45° к осям координат. Точка касания (точка K на рис. 4.6) определит значения x_1 и x_2 , обеспечивающие максимальную контактную прочность в передаче z_1, z_2 .

2. Выбор коэффициентов смещения, обеспечивающих близкую к максимальной изгибную прочность зубьев колёс передачи z_1, z_2 .

Прочность на изгиб увеличивается с возрастанием толщин зубьев у основания, т.е. с ростом x_1 и x_2 при соблюдении равнопрочности по изгибу зубьев ведущего и ведомого колёс. При ведущем колесе z_1 , будем двигаться вправо по линии $a-a$, а при ведущем колесе z_2 – по линии $b-b$ до пересечения с условным контуром (линия $\varepsilon_a = 1,2$). Точка пересечения (точка B при ведущем z_2) определит коэффициенты x_1 и x_2 , обеспечивающие близкую к максимальной изгибную прочность зубьев колёс передачи z_1, z_2 .

3. Выбор коэффициентов смещения, обеспечивающих наибольшую стойкость по заеданию и абразивному износу зубчатой передачи z_1, z_2 .

Заедание и износ уменьшаются со снижением скорости скольжения профилей V_s , максимальные значения которой становятся меньше g_a – длины активной части линии зацепления, т.е. с ростом угла зацепления α_w и суммарного коэффициента смещения x_Σ при условии равенства удельных скольжений на ножках зубьев колёс z_1, z_2 при контакте в точках A и B линии зацепления. По

линии $\lambda'-\lambda''$ будем двигаться вправо до пересечения с условным контуром. Точка пересечения (точка C) определит коэффициенты x_1 и x_2 , обеспечивающие стойкость по заеданию и абразивному износу зубчатой передачи z_1, z_2 .

4. Расчёт коэффициентов смещения x_1 и x_2 при отсутствии межосевого расстояния α_w производят по условию устранения подрезания ножки зуба. Для реечного зацепления

$$z_{\min} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha}, \text{ при } h_a^* = 1 \text{ и } \alpha = 20^\circ,$$

$$z_{\min} = 17, \text{ а } x_{1\min} = \frac{17 - z_1}{17} \text{ и } x_{2\min} = \frac{17 - z_2}{17},$$

$$x_1 = \frac{(z_{\min} - z_1)}{z_{\min}} \text{ и } x_2 = \frac{(z_{\min} - z_2)}{z_{\min}}.$$

4.1.4. Примеры проектирования эвольвентной прямозубой передачи внешнего зацепления

Пример 4.1. Для прямозубой эвольвентной передачи с параметрами $z_1 = 13$; $z_2 = 20$, колеса которой нарезаны стандартной рейкой модуля $m = 4$ мм, подобрать коэффициенты смещения, обеспечивающие наивысшую контактную прочность.

Исходные данные: числа зубьев колес $z_1 = 13$; $z_2 = 20$; модуль зубьев $m = 4$ мм, параметры исходного производящего контура в соответствии с ГОСТ 13755-81: $\alpha = 20$; $h_a^* = 1$; $c^* = 0,25$; блокирующий контур (рис. 4.7).

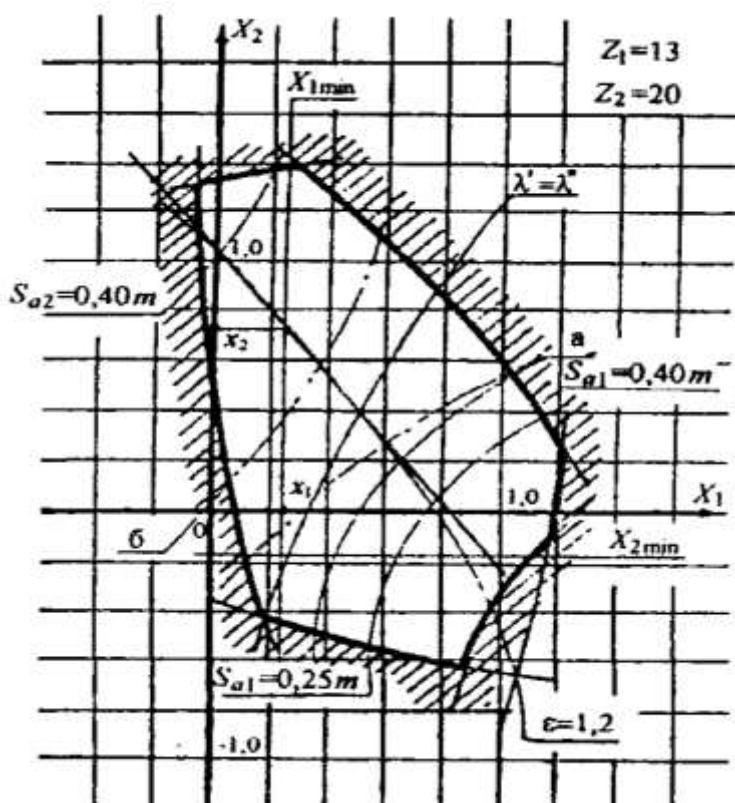


Рис. 4.7. Блокирующий контур для $z_1 = 13$ и $z_2 = 20$

Коэффициенты смещения исходного контура выбираем по блокирующему контуру: $x_1 = 0,257$; $x_2 = 0,743$.

Делительные радиусы:

$$r_i = (mz_i)/2;$$

$$r_1 = (4 \cdot 13)/2 = 26 \text{ мм};$$

$$r_2 = (4 \cdot 20)/2 = 40 \text{ мм}.$$

Основные радиусы:

$$r_{ei} = r_i \cdot \cos \alpha;$$

$$r_{e1} = 26 \cdot 0,939693 = 24,43 \text{ мм};$$

$$r_{e2} = 40 \cdot 0,939693 = 37,59 \text{ мм}.$$

Угол зацепления α_w

$$\text{inv} \alpha_w = \frac{2(x_1 + x_2) \text{tg} \alpha}{z_5 + z_6} + \text{inv} \alpha = \frac{2(0,527 + 0,743)}{13 + 20} \cdot 0,36397 + 0,014904 = 0,036963.$$

$$\alpha_w = 26^\circ 42'.$$

Начальные радиусы r_w :

$$r_{wi} = r_i \cdot \cos \alpha / \cos \alpha_w;$$

$$r_{w1} = 26 \cdot 0,0939693 / 0,893371 = 27,35 \text{ мм};$$

$$r_{w2} = 40 \cdot 0,0939693 / 0,893371 = 42,07 \text{ мм}.$$

Межосевое расстояние $a_w = r_{w1} + r_{w2} = 27,35 + 42,07 = 69,42 \text{ мм}.$

Делительное межосевое расстояние $a = r_1 + r_2 = 26 + 40 = 66 \text{ мм}.$

Коэффициент воспринимаемого смещения

$$y = (a_w - a)/m = (69,42 - 66)/4 = 0,855.$$

Коэффициент уравнительного смещения

$$\Delta y = x_\Sigma - y = x_1 + x_2 - y = 0,257 + 0,743 - 0,855 = 0,145.$$

Радиусы вершин зубьев:

$$r_{ai} = r_i + m(h_a^* + x_i - \Delta y);$$

$$r_{a1} = 26 + 4(1 + 0,257 - 0,145) = 30,45 \text{ мм};$$

$$r_{a2} = 40 + 4(1 + 0,743 - 0,145) = 46,39 \text{ мм}.$$

Радиусы впадин:

$$r_{fi} = r_i - m(h_a^* + c^* - x_i);$$

$$r_{f1} = 26 - 4(1 + 0,25 - 0,257) = 22,03 \text{ мм};$$

$$r_{f2} = 40 - 4(1 + 0,25 - 0,743) = 37,97 \text{ мм}.$$

Делительный окружной шаг зубьев $p = \pi m = 3,141592 \cdot 4 = 12,57 \text{ мм}.$

Делительные окружные толщины зубьев:

$$S_i = \pi m / 2 + 2x_i m \text{tg} \alpha;$$

$$S_1 = 3,141592 \cdot 4 / 2 + 2 \cdot 0,257 \cdot 4 \cdot 0,36397 = 7,03 \text{ мм};$$

$$S_2 = 3,141592 \cdot 4 / 2 + 2 \cdot 0,743 \cdot 4 \cdot 0,36397 = 8,45 \text{ мм}.$$

Начальные окружные толщины зубьев:

$$S_{wi} = 2r_{wi} (S_i / (2r_i) + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_w).$$

$$S_{w1} = 2 \cdot 27,35 (7,03 / (2 \cdot 26) + 0,014904 - 0,036963) = 6,19 \text{ мм};$$

$$S_{w2} = 2 \cdot 42,07 (8,45 / (2 \cdot 40) + 0,014904 - 0,036963) = 7,03 \text{ мм}.$$

Толщины зубьев по окружностям вершин:

$$S_{ai} = 2r_{ai}(S_i/(2r_i) + \text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_{ai});$$

$$\cos\alpha_{ai} = r_{bi}/r_{ai};$$

$$\cos\alpha_{a1} = 24,43/30,45 = 0,802299;$$

$$\alpha_{a1} = 36^\circ 39';$$

$$\cos\alpha_{a2} = 37,59/46,39 = 0,810304;$$

$$\alpha_{a2} = 35^\circ 52';$$

$$S_{a1} = 2 \cdot 30,45(7,03/(2 \cdot 26) + 0,014904 - 0,10452) = 2,78 \text{ мм};$$

$$S_{a2} = 2 \cdot 46,39(8,45/(2 \cdot 40) + 0,014904 - 0,097033) = 2,18 \text{ мм}.$$

Коэффициент перекрытия

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{z_1(\text{tg}\alpha_{a1} - \text{tg}\alpha_w) + z_2(\text{tg}\alpha_{a2} - \text{tg}\alpha_w)}{2\pi} = \\ &= \frac{13 \cdot (0,744020 - 0,502948) + 20 \cdot (0,723082 - 0,502948)}{2 \cdot 3,141592} = 1,2. \end{aligned}$$

Пример 4.2. Спроектировать прямозубую эвольвентную передачу z_4, z_5 с данным межосевым расстоянием. Колеса нарезаны стандартной рейкой модуля $m = 2,5$ мм.

Исходные данные: межосевое расстояние $a_w = 52$ мм; передаточное отношение $i_{45} = 1,8$; модуль зубьев $m = 2,5$ мм; параметры исходного производящего контура в соответствии с ГОСТ 13755-81: $\alpha = 20^\circ$, $h_a^* = 1$; $c^* = 0,25$.

Межосевое расстояние можно представить в виде

$$a_w = \frac{mz_\Sigma}{2} + my = 0,5mz_4(1 + i_{45}) + my, \text{ откуда}$$

$$z_4 \leq \frac{2a_w}{m(1 + i_{45})} \text{ при } y \geq 0, \text{ т.е. } z_4 \leq \frac{2 \cdot 52}{2,5(1 + 1,8)} = 14,86.$$

Принимаем в соответствии со знаком неравенства ближайшее меньшее $z_4 = 14$. Определяем число зубьев колеса $z_5 = z_4 i_{45} = 14 \cdot 1,8 = 25,2 \approx 25$.

Проверяем заданное передаточное отношение:

$$i_{45} = \frac{z_5}{z_4} = \frac{25}{14} = 1,786.$$

Находим суммарное число зубьев $z_\Sigma = 14 + 25 = 39$ и рассчитываем делительное межосевое расстояние $a = \frac{mz_\Sigma}{2} = \frac{2,5 \cdot 39}{2} = 48,75$ мм.

$$\text{Коэффициент воспринимаемого смещения } y = \frac{a_w - a}{m} = \frac{52 - 48,75}{2,5} = 1,3.$$

Угол зацепления

$$\cos\alpha_w = \frac{a \cos\alpha}{a_w} = \frac{48,75 \cdot 0,93969}{52} = 0,881;$$

$$\alpha_w = 28^\circ 14'; \text{ inv}\alpha_w = 0,044222.$$

$$\sin\alpha_w = 0,47319; \text{ tg}\alpha_w = 0,53713.$$

Коэффициент суммы смещений

$$x_{\Sigma} = \frac{z_{\Sigma}(\operatorname{inv}\alpha_w - \operatorname{inv}\alpha)}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{39(0,044222 - 0,014904)}{2 \cdot 0,36397} = 1,571.$$

Определяем минимальные коэффициенты, обеспечивающие устранение подрезания ножки зуба у основания:

$$x_{4\min} = \frac{17 - Z_4}{17} = \frac{17 - 14}{17} = 0,176; \quad x_{5\min} = \frac{17 - Z_5}{17} = \frac{17 - 25}{17} = -0,471.$$

Коэффициент суммы смещений x_{Σ} распределяем по колесам обратно пропорционально числу зубьев.

$$\text{Для шестерни } x_4 = \frac{x_{\Sigma} i_{45}}{i_{45} + 1} = \frac{1,571 \cdot 1,786}{1,786 + 1} = 1,007;$$

$$\text{для колеса } x_5 = x_{\Sigma} - x_4 = 1,571 - 1,007 = 0,564.$$

Так как коэффициенты больше минимально необходимых для устранения подрезания, их принимаем в качестве расчетных коэффициентов смещения.

Вычисляем коэффициент уравнивающего смещения

$$\Delta y = x_{\Sigma} - y = 1,571 - 1,3 = 0,271.$$

Определяем геометрические параметры прямозубых цилиндрических колес.

Делительные радиусы:

$$r_4 = \frac{mz_4}{2} = \frac{2,5 \cdot 14}{2} = 17,5 \text{ мм}; \quad r_5 = \frac{mz_5}{2} = \frac{2,5 \cdot 25}{2} = 31,25 \text{ мм}.$$

Основные радиусы:

$$r_{64} = r_4 \cdot \cos\alpha = 17,5 \cdot 0,93969 = 16,44 \text{ мм};$$

$$r_{65} = r_5 \cdot \cos\alpha = 31,25 \cdot 0,93969 = 29,37 \text{ мм}.$$

Угол зацепления $\alpha_w = 28^\circ 14'$.

Начальные радиусы

$$r_{w4} = r_4 \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w} = 17,5 \frac{0,93969}{0,8810} = 18,67 \text{ мм};$$

$$r_{w5} = r_5 \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w} = 31,25 \frac{0,93969}{0,8810} = 33,33 \text{ мм}.$$

Межосевое расстояние $a_w = 52$ мм. Делительное межосевое расстояние $a = 48,75$ мм.

Радиусы вершин зубьев:

$$r_{a4} = r_4 + m(h_a^* + x_4 - \Delta y) = 17,5 + 2,5(1 + 1,007 - 0,271) = 21,84 \text{ мм};$$

$$r_{a5} = r_5 + m(h_a^* + x_5 - \Delta y) = 31,25 + 2,5(1 + 0,564 - 0,271) = 34,48 \text{ мм}.$$

Делительный окружной шаг зубьев $p = \pi m = 3,141592 \cdot 2,5 = 7,85$ мм.

Делительные окружные толщины зубьев:

$$S_4 = \frac{\pi m}{2} + 2x_4 m \operatorname{tg}\alpha = \frac{3,14 \cdot 2,5}{2} + 2 \cdot 1,007 \cdot 2,5 \cdot 0,36397 = 5,76 \text{ мм};$$

$$S_5 = \frac{\pi m}{2} + 2x_5 m \operatorname{tg}\alpha = \frac{3,14 \cdot 2,5}{2} + 2 \cdot 0,564 \cdot 2,5 \cdot 0,36397 = 4,95 \text{ мм}.$$

Начальные окружные толщины зубьев:

$$S_{w4} = 2r_{w4} \left(\frac{S_4}{2r_4} + \operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_w \right) = 2 \cdot 18,67 \left(\frac{5,76}{2 \cdot 17,5} + 0,014904 - 0,044222 \right) = 5,05 \text{ мм};$$

$$S_{w5} = 2r_{w5} \left(\frac{S_5}{2r_5} + \operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_w \right) = 2 \cdot 33,33 \left(\frac{4,95}{2 \cdot 31,25} + 0,014904 - 0,044222 \right) = 3,33 \text{ мм}.$$

Толщины зубьев по окружности вершин:

$$\cos\alpha_{a4} = \frac{r_{a4}}{r_4} = \frac{16,44}{21,84} = 0,7527;$$

$$\alpha_{a4} = 41^\circ 10,5' \quad \operatorname{inv}\alpha_{a4} = 0,15602;$$

$$S_{a4} = 2r_{a4} \left(\frac{S_4}{2r_4} + \operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_{a4} \right) = 2 \cdot 21,84 \left(\frac{5,76}{2 \cdot 17,5} + 0,014904 - 0,15602 \right) = 1,02 \text{ мм};$$

$$\cos\alpha_{a5} = \frac{r_{a5}}{r_5} = \frac{29,37}{34,48} = 0,8518;$$

$$\alpha_{a5} = 31^\circ 35' \quad \operatorname{inv}\alpha_{a5} = 0,06357;$$

$$S_{a5} = 2r_{a5} \left(\frac{S_5}{2r_5} + \operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_{a5} \right) = 2 \cdot 34,48 \left(\frac{4,95}{2 \cdot 31,25} + 0,014904 - 0,06357 \right) = 2,11 \text{ мм}.$$

Коэффициент перекрытия

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{z_4(\operatorname{tg}\alpha_{a4} - \operatorname{tg}\alpha_w) + z_5(\operatorname{tg}\alpha_{a5} - \operatorname{tg}\alpha_w)}{2\pi} = \\ &= \frac{14(0,87465 - 0,53713) + 25(0,6152 - 0,53713)}{2 \cdot 3,141592} = 1,06. \end{aligned}$$

4.1.5. Построение картины зацепления эвольвентной цилиндрической зубчатой передачи в торцовом сечении

Вычерчиванию зацепления зубчатой передачи должен предшествовать ее геометрический расчет, выполняемый для прямозубой передачи по формулам.

Построение зацепления удобно проводить в следующем порядке:

1. Отложить межосевое расстояние a_w .
2. Провести окружности: начальные, делительные, основные, вершин зубьев и впадин. Произвести контроль построения: радиальные зазоры должны быть равны $0,25 m$, расстояние между делительными окружностями – um .
3. Касательно к основным окружностям провести линию зацепления. Произвести контроль построения: линия зацепления должна пройти через полюс зацепления - точку касания начальных окружностей, а угол зацепления на построении должен совпадать с расчетным α_w (α_{tw}).
4. Отметить границы линии зацепления M_1 и M_2 – точки касания линии за-

цепления с основными окружностями, и границы активной линии зацепления – точки пересечения линии зацепления с окружностями вершин зубьев (точки A и B).

5. Построить эвольвентные профили зубьев, проходящие через полюс зацепления следующим способом: от полюса зацепления т. П (рис. 4.8) откладывают толщины зубьев по начальным окружностям $S_{w1,2}$. Через середины толщин зубьев проводят линии симметрии зубьев. От точек линии симметрии откладывают половины толщин зубьев по различным окружностям: основной, делительной, вершин зубьев и произвольной. Полученные точки соединяют плавной кривой.

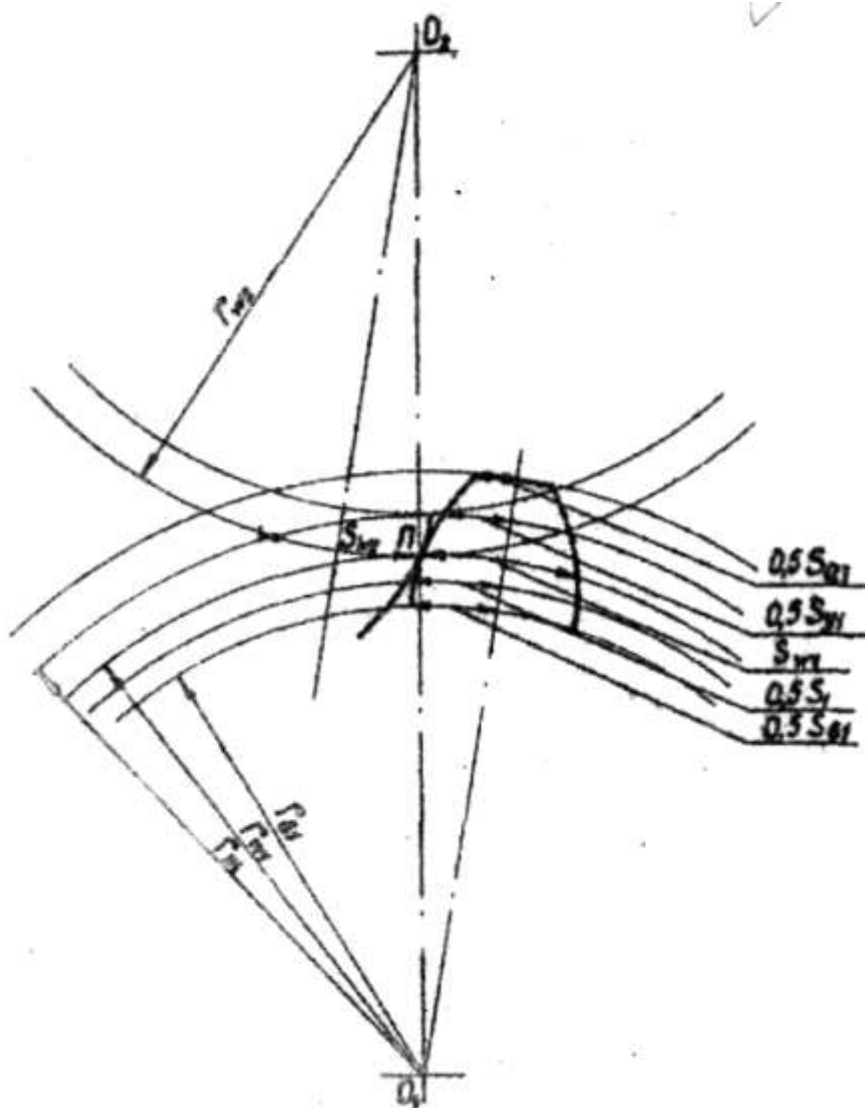


Рис. 4.8. Построение эвольвентных профилей зубьев

6. Построить разноименные профили зубьев. Для этого находят оси симметрии зубьев. Точки разноименных профилей располагаются симметрично точкам, ранее построенных профилей (рис. 4.9, а).

7. Построить переходную кривую, соединяющую эвольвентный профиль с окружностями впадин. Переходная кривая образуется автоматически в процессе нарезания зубьев, как огибающая семейства окружностей, описанного за-

кругленной частью профиля производящей рейки в ее движении относительно нарезаемого колеса. Переходную кривую можно построить упрощенно. Если $r_f < r_b$, то для получения переходной кривой проводят радиальную прямую через начальную точку эвольвенты, а затем дугу окружности радиуса $\rho_f = 0,4m$, сопряженную с радиальной прямой и окружностью впадин (рис. 4.9, а). Если $r_f > r_b$, то переходная кривая очерчивается дугой окружности радиуса $\rho_f = 0,4m$, сопряженной с эвольвентой и окружностью впадин.

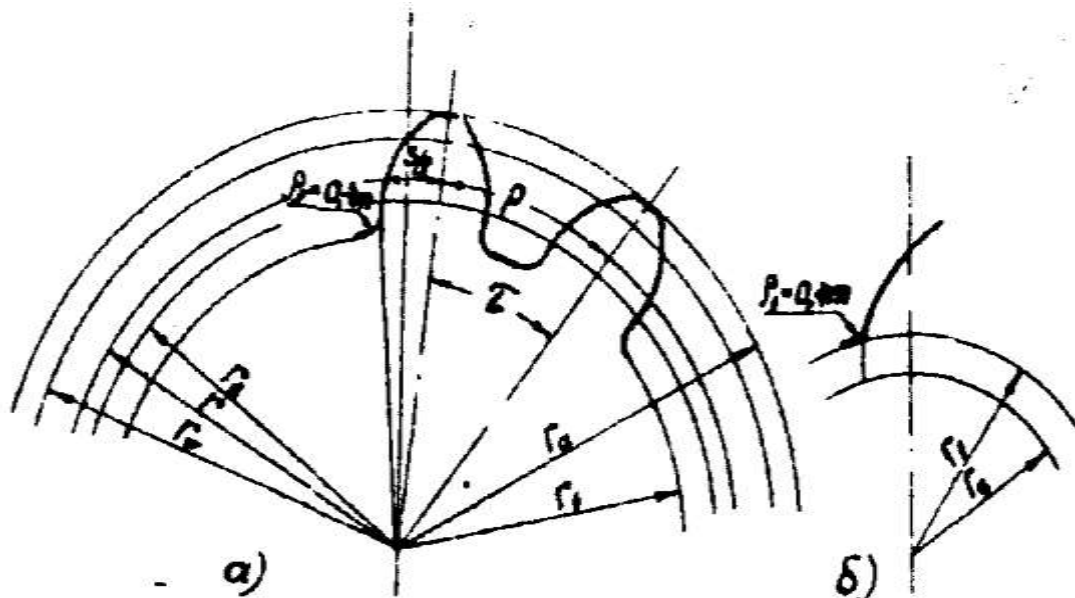


Рис. 4.9. Построение переходной кривой

4.1.6. Последовательность проектирования зубчатой передачи в курсовом проекте

1. Ознакомиться с исходными данными и условиями работы передачи.
2. Ознакомиться с параметрами исходного производящего контура.
3. При заданном межосевом расстоянии a_w рассчитать требуемые коэффициенты смещения x_1 и x_2 (см. пример 2, п. 1.3), а при свободном выборе межосевого расстояния назначить коэффициенты смещения с учетом условий работы передачи, используя блокирующие контуры.
4. Рассчитать параметры зубчатой передачи и зубчатых колес.
5. Вычертить зубчатое зацепление колес z_1 и z_2 , на которых показать основные размеры.

4.2. Синтез сателлитных механизмов

Зубчатые механизмы с подвижными осями некоторых зубчатых колёс называются *сателлитными*. Сателлитная передача, в которой на отдельные звенья наложена дополнительная кинематическая связь путём закрепления одного из центральных колёс, называется *планетарной*, а без дополнительной связи – *дифференциальной*. Эта связь может быть осуществлена соединением

двух его звеньев замыкающей цепью, в результате чего образуется замкнутая дифференциальная передача.

Сателлитные механизмы дают возможность при небольшом количестве колёс, лёгкости и компактности конструкции воспроизводить большие передаточные отношения. Поэтому они получили широкое распространение в машиностроении и приборостроении. Планетарные механизмы и замкнутые дифференциалы применяются для реализации передаточных отношений, а дифференциалы – для сложения угловых скоростей или разложения независимого вращательного движения двух выходных звеньев механизма.

Существует несколько методов определения передаточных отношений сателлитных механизмов: аналитический, основанный на принципе обращения движения, и графический, с помощью построения треугольников скоростей.

4.2.1. Графоаналитический метод определения передаточного отношения (способ Л.П. Смирнова)

Сущность метода определения передаточного отношения с помощью треугольников скоростей основан на том, что линейная скорость при вращении тела относительно неподвижной оси прямо пропорциональна радиусу вращения ($V = \omega r$), и, следовательно, линейные скорости точек, лежащих на любом радиусе, изменяются по закону прямой линии (рис. 4.10).

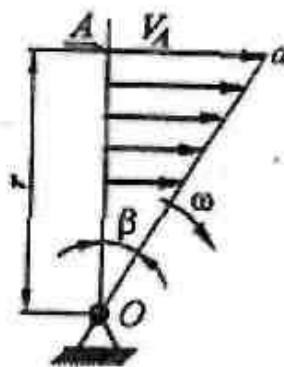


Рис. 4.10. Треугольники скоростей

На рис. 4.11 показаны начальные окружности колёс, соприкасающиеся в точке A , линейная скорость V_A которых изображается вектором \overline{Aa} .

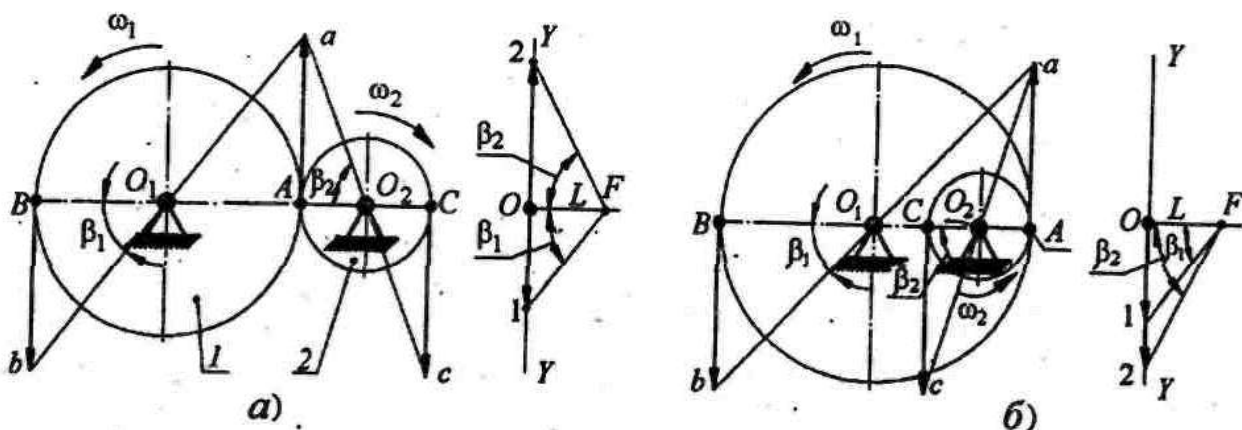


Рис. 4.11. Начальные окружности колёс, соприкасающиеся в точке A

Для колеса 1 изменение скоростей точек, расположенных на диаметре BA , изображается в виде треугольников O_1Aa и O_1Bb . Для колеса 2 скорости точек, расположенных на диаметре AC , изменяются по закону треугольников: O_2Aa и O_2Cc .

Длина отрезка Aa на чертеже равна $\overline{Aa} = \frac{V_A}{\mu_V}$, отрезка $OA - \overline{OA} = \frac{r}{\mu_l}$

(рис. 4.10), тогда $\omega = \frac{V_A}{r} = \frac{(Aa\mu_V)}{(OA\mu_l)} = \frac{(\mu_V)}{(\mu_l)} \operatorname{tg}\beta$, где μ_V – масштаб скорости; μ_l –

масштаб длины. Поскольку $\omega = \pi n/30$, то получим $n = \left(\frac{30\mu_V}{\pi\mu_l} \right) \operatorname{tg}\beta$. Векторы ли-

нейных скоростей точек прямой OA в масштабе μ_V ограничиваются наклонной Oa , составляющей угол β с прямой OA и характеризующей распределение этих скоростей на отрезке OA .

Следовательно, угловая скорость и число оборотов пропорциональны тангенсу угла с вершиной в точке O . Полученная зависимость позволяет перейти к графическим построениям для определения передаточного отношения механизмов с вращательным движением звеньев.

В зубчатой передаче (рис. 4.11) на плане скоростей наклонные ab и ac составляют углы β_1 и β_2 с линией центров O_1O_2 и характеризуют закон изменения линейных скоростей на диаметрах колёс 1 и 2 .

Проведём прямую YU перпендикулярно O_1O_2 и от некоторой точки O на перпендикуляре к YU отложим отрезок произвольной длины $OF = L$. Затем через точку F проведём лучи $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ параллельно ba и ca . Точки 1 и 2 пересечения лучей с прямой YU ограничивают длины отрезков $\overline{O_1}$ и $\overline{O_2}$.

В результате получаем

$$\operatorname{tg}\beta_1 = -\frac{\overline{O_1}}{OF} = -\frac{\overline{O_1}}{L}; \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{\overline{O_2}}{OF} = \frac{\overline{O_2}}{L}.$$

Отсюда

$$\omega_1 = \frac{\mu_V}{\mu_l} \operatorname{tg}\beta_1 = -\overline{O_1} \frac{\mu_V}{\mu_l} \frac{1}{L},$$

$$\omega_2 = \frac{\mu_V}{\mu_l} \operatorname{tg}\beta_2 = \overline{O_2} \frac{\mu_V}{\mu_l} \frac{1}{L},$$

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Числа оборотов колёс 1 и 2 определяются по зависимостям:

$$n_1 = \frac{30\mu_V}{\pi\mu_l} \operatorname{tg}\beta_1 = -\overline{O_1} \frac{30\mu_V}{\pi\mu_l} \frac{1}{L},$$

$$n_2 = \frac{30\mu_V}{\pi\mu_l} \operatorname{tg}\beta_2 = \overline{O_2} \frac{30\mu_V}{\pi\mu_l} \frac{1}{L}.$$

Следовательно,

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = -\frac{\overline{O_1}}{\overline{O_2}}.$$

Для случая зубчатой передачи с внутренним зацеплением (рис. 4.11, б)

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\overline{O1}}{\overline{O2}}.$$

Из изложенного видно, что отрезки $\overline{O1}$ и $\overline{O2}$ изображают угловые скорости $\omega_{1,2}$ в масштабе $\mu_\omega = \frac{\mu_V}{\mu_l} \frac{1}{L}$, а числа оборотов $n_{1,2}$ в масштабе $\mu_n = \frac{30 \mu_V}{\pi \mu_l} \frac{1}{L}$.

Если отрезки на плане угловых скоростей располагаются по разным сторонам от точки O , то колеса вращаются в противоположные стороны: одно – по часовой стрелке, другое – против. Следовательно, передаточное отношение оказывается отрицательным. В случае, когда отрезки $\overline{O1}$ и $\overline{O2}$ лежат по одну сторону от прямой OF , передаточное отношение является положительной величиной.

4.2.2. Планетарные механизмы

Механизмы, включающие неподвижные колёса, называются *планетарными* (рис. 4.12). Они состоят из центральных колёс 1 и 3, оси которых совпадают, водила H и сателлита 2 (их может быть несколько). Сателлит вращается относительно своей оси и одновременно обкатывается вокруг колеса 1. Зубья колеса 1 нажимают на зубья колеса 2 и поворачивают его относительно неподвижного (опорного) колеса 3. При этом сателлит нажимает на свою ось и заставляет водило H вращаться.

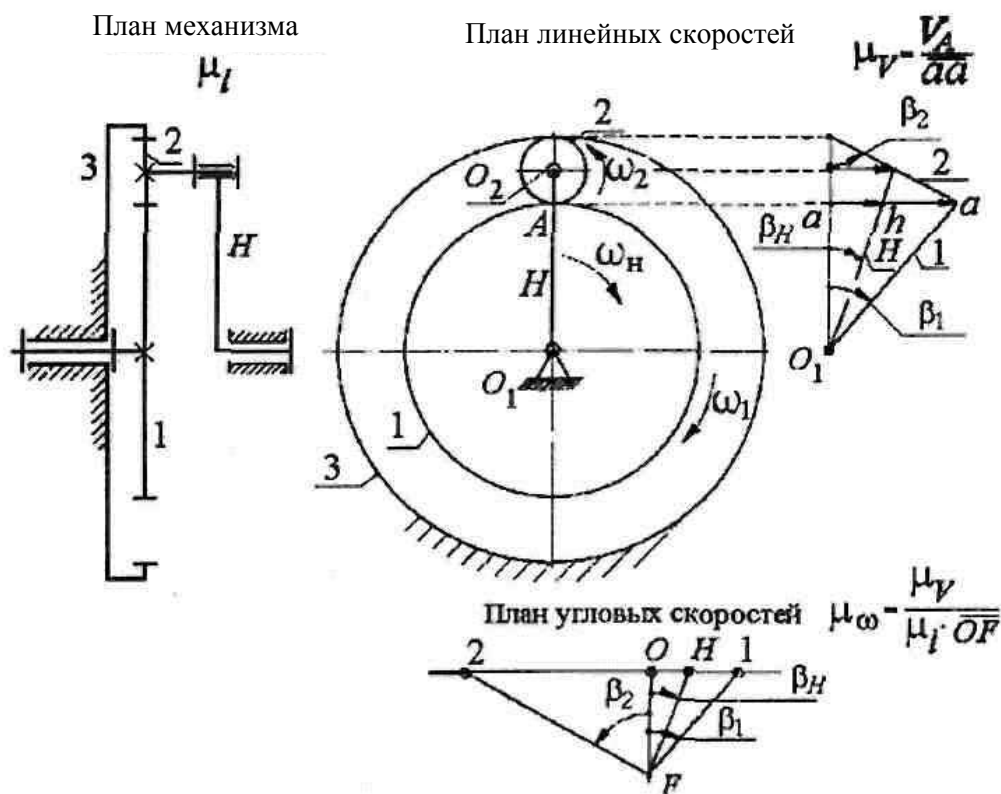


Рис. 4.12. Планетарный механизм

Кинематический анализ планетарных механизмов

Кинематический анализ планетарных механизмов выполняется по методу Виллиса, основанному на остановке водила. Для этого всей планетарной передаче (рис. 4.12) мысленно сообщается вращение с угловой скоростью водила, но направленной в обратную сторону, т.е. $-\omega_H$. Таким образом, получается обращенное движение, при котором водило мысленно останавливается, а другие колёса освобождаются. Преобразованный механизм представляет собой рядовой зубчатый механизм, скорость звеньев в котором составляет $\omega_H = 0$; $\omega_1^{(H)} = \omega_1^{(3)} - \omega_H^{(3)}$; колесо 3 было неподвижно, а в преобразованном механизме его угловая скорость равна $\omega_H^{(3)}$.

Верхний индекс показывает неподвижное звено. Мысленная остановка водила равноценна вычитанию его угловой скорости из угловых скоростей подвижных колёс. Передаточное отношение в преобразованном механизме в итоге представляется как

$$i_{1-3}^{(H)} = \frac{\omega_1^{(3)} - \omega_H^{(3)}}{\omega_3^{(3)} - \omega_H^{(3)}}. \text{ Но поскольку } \omega_3^{(3)} = 0, \text{ то получается}$$

$$i_{1-3}^{(H)} = 1 - \frac{\omega_1^{(3)}}{\omega_H^{(3)}} = 1 - i_{1-H}^{(3)}, \text{ откуда передаточное отношение планетарного ме-}$$

ханизма будет $i_{1-H}^{(3)} = 1 - i_{1-3}^{(H)}$. При этом $i_{1-H}^{(3)} = i_{1-2}^{(H)} \cdot i_{2-3}^{(H)} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \left(+\frac{z_3}{z_2} \right) = \left(-\frac{z_3}{z_1} \right)$.

В обращенном механизме сателлит 2 является "паразитным" колесом и лишь изменяет направление вращения ведомого колеса. Окончательно будем иметь:

$$i_{1-H}^{(3)} = 1 + \frac{z_3}{z_1}; \omega_H^{(3)} = \omega_1^{(3)} \frac{z_1}{z_1 + z_3};$$

$$i_{2-H}^{(3)} = 1 - i_{2-3}^{(H)} = 1 - \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_2 - z_3}{z_2} = \frac{\omega_2^{(3)}}{\omega_H^{(3)}};$$

$$\omega_2^{(3)} = \omega_H^{(3)} \frac{z_2 - z_3}{z_2} = \omega_1^{(3)} \frac{z_1(z_2 - z_3)}{z_2(z_1 + z_3)}.$$

В общем виде формула Виллиса представляется как

$$i_{n-H}^l = 1 - i_{n-l}^{(H)},$$

где n и l – центральные колёса. При этом

$$i_{H-n}^{(l)} = \frac{1}{i_{n-H}^{(l)}} = \frac{1}{1 - i_{n-l}^{(H)}}.$$

При графическом методе определения передаточных отношений в планетарном механизме строятся планы линейных и угловых скоростей (рис. 4.12). Тогда

$$i_{1-H}^{(3)} = \frac{\omega_1^{(3)}}{\omega_H^{(3)}}; \omega_1^{(3)} = \frac{\overline{aa} \cdot \mu_V}{aO_1 \cdot \mu_l} = \operatorname{tg}\beta_1 \frac{\mu_V}{\mu_l}; \omega_H^{(3)} = \frac{\overline{ah} \cdot \mu_V}{aO_1 \cdot \mu_l} = \operatorname{tg}\beta_H \frac{\mu_V}{\mu_l}.$$

Из плана угловых скоростей:

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\overline{O1}}{\overline{OF}}; \operatorname{tg}\beta_H = \frac{\overline{OH}}{\overline{OF}}; i_{1-H}^{(3)} = \frac{\overline{O1}}{\overline{OH}};$$

$$\omega_1^{(3)} = \overline{O1}\mu_\omega; \omega_H^{(3)} = \overline{OH}\mu_\omega; \mu_\omega = \frac{\mu_V}{\mu_l \overline{OF}};$$

где μ_ω – масштабный коэффициент плана угловых скоростей.

Передаточное отношение $i_{1-H}^{(3)}$ оказывается положительным, так как отрезки $\overline{O1}$ и \overline{OH} располагаются по одну и ту же сторону от вертикали OF .

Наиболее распространённые схемы планетарных механизмов

Основные схемы планетарных механизмов представлены на рис. 4.13. В этих схемах неподвижным колесом может быть колесо 3 либо колесо 1.

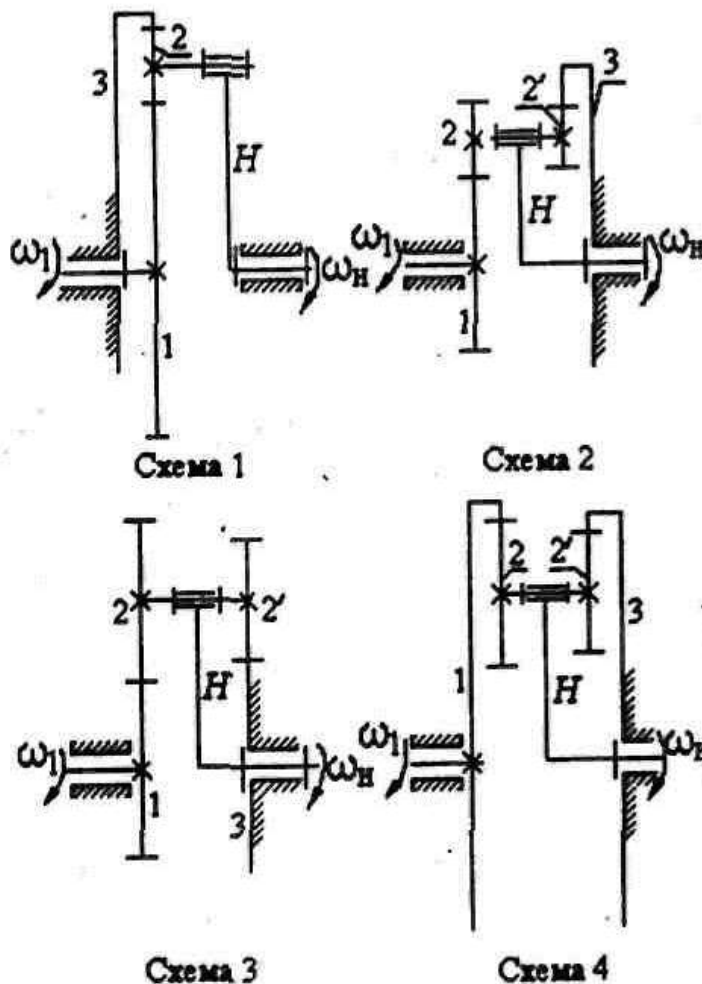


Рис. 4.13. Основные схемы планетарных механизмов

Схема 1. Планетарная передача (Джемса) работает как силовой редуктор, т.е. уменьшает угловую скорость входного звена, если водило является выходным. Передаточное отношение $i_{1-H}^{(3)} = 1 + \frac{z_3}{z_1} = 3...9$.

Наименьшие габариты механизм имеет при $i_{1-H}^{(3)} = 4$. Максимальное передаточное отношение можно получить в случае, когда неподвижным звеном является большое центральное колесо.

Эта передача работает как мультипликатор, т.е. увеличивает угловую скорость, когда входным звеном является водило. Направление угловой скорости входного звена в механизме не изменяется.

Схема 2. Редуктор со сдвоенными сателлитами по габаритам мало отличается от редуктора Джемса при $i_{1-H}^{(3)} = 7$. Передаточное отношение передачи $i_{1-H}^{(3)} = 1 + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'} = 7...25$.

Направление вращения выходного звена совпадает с направлением угловой скорости входного колеса.

Схема 3. Редуктор Давида применяется в несиловых передачах, в основном в приборостроении. Передаточное отношение равно

$$i_{1-H}^{(3)} = 1 - \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'} = 100...5000.$$

Схема 4. Редуктор Давида понижает скорость только при передаче от водила H к колесу 1 . Он имеет меньшие габариты по сравнению со схемой 3, но изготовление колёс с внутренним зацеплением более затруднительно. Передаточное отношение равно

$$i_{H-1}^{(3)} = \frac{1}{i_{1-H}^{(3)}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z_2}{z_1}\right)\left(\frac{z_3}{z_2'}\right)} \approx 30...1000.$$

В редукторах Давида (схемы 3 и 4) знак передаточного отношения всегда отрицательный, т.е. входное и выходное звенья вращаются в разные стороны.

Выбор чисел зубьев колес планетарной передачи

При назначении чисел зубьев планетарного механизма учитывается ряд ограничений, важнейшие из которых следующие:

- числа зубьев должны быть целыми числами;
- сочетание чисел зубьев колес должно обеспечивать заданное передаточное отношение с допустимой точностью;
- при отсутствии специальных требований в передаче целесообразно использовать нулевые колеса. Это ограничение записывается в форме отсутствия подреза зубьев: $z > z_{\min} = 17$ – для колес с внешними зубьями, нарезанными стандартным инструментом, и $z > z_{\min} = 85$ при $h_a^* = 1$ и $z > z_{\min} = 58$ при $h_a^* = 0,8$ – для колес с внутренними зубьями, в зависимости от параметров долбяка;

- для обеспечения движения точек по соосным окружностям оси центральных колес и водила H должны совпадать между собой (условие соосности);
- при расположении сателлитов в одной плоскости, т.е. без смещения в осевом направлении, соседние сателлиты должны располагаться с таким окружным шагом, чтобы между окружностями вершин обеспечивался гарантированный зазор (условие соседства);
- сборка нескольких сателлитов должна осуществляться без натягов при равных окружных шагах между ними (условие сборки).

Условие правильного зацепления, обуславливающее отсутствие заклинивания и интерференции зубьев, обеспечивается числами зубьев зацепляющихся колес в случае нарезания их долбяком, приведенными в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Числа зубьев зацепляющихся колес, нарезанных долбяком

Внешнее зацепление		Внутреннее зацепление			
z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2
13	< 17	17	?	23	> 41
14	< 27	18	> 144	24	> 38
15	< 48	19	> 81	25	> 36
16	< 112	20	> 60	26	> 35
17	любое	21	> 50	27...79	> z_1+8
и выше	любое	22	> 44	80 и выше	> z_1+7

Примечание: z_1, z_2 – число зубьев меньшего колеса и большего колеса соответственно.

Условие соосности. Сущность условия соосности заключается в том, что оси центральных колес $1, 3$ и водила H должны лежать на одной прямой, т.е. колеса $1, 3$ и водило H должны быть соосными.

Условие соосности выражается через радиусы начальных окружностей (рис.4.13) для схем:

- $1 - r_1+r_2 = r_3-r_2$;
- $2 - r_1+r_2 = r_3-r_2'$;
- $3 - r_1+r_2 = r_3+r_2'$;
- $4 - r_1-r_2 = r_3-r_2'$.

Для нулевых зубчатых колес радиусы начальных окружностей вычисляются по формуле $r = \frac{mz}{2}$, где m – модуль зубчатого колеса.

Обозначим m_1 – модуль зубчатых колес 1 и 2; m_2 – модуль зубчатых колес 2' и 3. Тогда для нулевых зубчатых колес условие соосности выражается через числа зубьев колес для схем:

- $1 - z_1 + z_2 = z_3 - z_2$;
- $2 - (z_1 + z_2)m_1 = (z_3 - z_2')m_2$;
- $3 - (z_1 + z_2)m_1 = (z_3 + z_2')m_2$;
- $4 - (z_1 - z_2)m_1 = (z_3 - z_2')m_2$.

В случае, если $m_1 = m_2$:

- $1 - z_3 = z_1 + 2z_2$;
- $2 - z_1 + z_2 = z_3 - z_2'$;
- $3 - z_1 + z_2 = z_3 + z_2'$;
- $4 - z_1 - z_2 = z_3 - z_2'$.

Условие соседства. Выигрыш в размерах у планетарного редуктора по сравнению с простой многоступенчатой передачей происходит также при применении нескольких сателлитов.

В силовых редукторах располагают возможно большее число сателлитов, чтобы уменьшить нагрузку на каждую пару зубьев. Для несилowych передач увеличение числа сателлитов приводит к повышению плавности передачи.

Максимальное число сателлитов, которые могут быть установлены, ограничивается условием отсутствия касания окружностей головок двух соседних сателлитов, т.е. условием соседства. В дифференциальных и планетарных механизмах сателлиты располагаются по окружности симметрично в одной плоскости так, чтобы соседние сателлиты не накладывались друг на друга или не задевали вершинами зубьев. Для условия соседства можно получить математическое выражение. На рис. 4.14 показаны два соседних сателлита в предельном положении, когда окружности их вершин не касаются друг друга. Соединив центры вращения колес, получим равнобедренный треугольник OO_1O_1' , у которого $O_1O_1' = 2CO_1 = 2R\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$, где R – радиус окружности, на которой располагаются центры сателлитов; k – число сателлитов.

Поскольку $R = r_1 + r_2$, а радиусы начальных окружностей равны $r = \frac{mz}{2}$ –

для нулевых колес, то $R = \frac{m}{2}(z_1 + z_2)$.

Предельный случай (4.14), недопустим, так как при малейших неточностях сборки вершины зубьев начнут задевать друг друга. Поэтому между окружностями вершин сателлитов должен быть зазор, т.е. $2r_a < 2R\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$ или

$$2r_a < m(z_1 + z_2)\sin\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

Для нулевых зубчатых колес $r_a = 0,5m(z_2 + 2h_a^*)$, где h_a^* – коэффициент высоты головки зуба. Следовательно: $m(z_1 + 2h_a^*) < m(z_1 + z_2) \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$ или $(z_1 + z_2) \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > z_2 + 2h_a^*$.

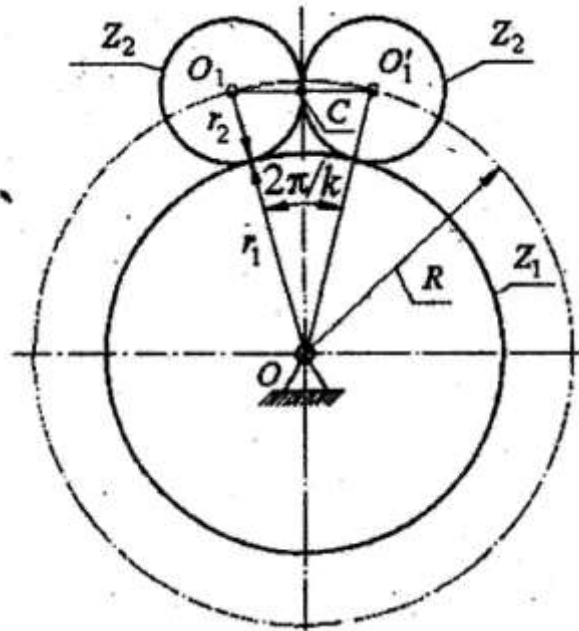


Рис. 4.14. К определению условия соседства

Число сателлитов или блоков сателлитов вычисляется в соответствии с выражением

$$k < \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2 + 2h_a^*}{z_1 + z_2}}$$

Эта формула получена для внешнего зацепления. В случае внутреннего зацепления (рис. 4.15) аналогичным путем выводится неравенство при рассмотрении двух соседних сателлитов z_2 и центрального колеса z_3 .

$$k < \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2 + 2h_a^*}{z_3 - z_2}}$$

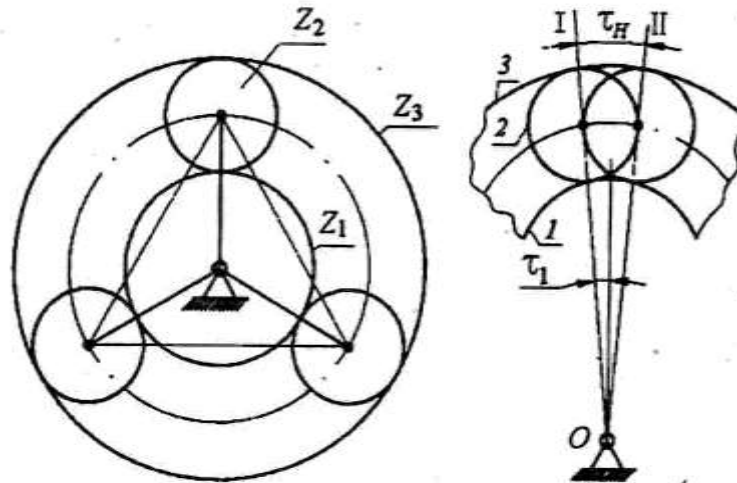


Рис. 4.15. К определению условия сборки

Для двухрядных планетарных механизмов (см. рис. 4.13, схемы 2, 3, 4), у которых блок сателлитов состоит из двух колес 2 и 2', проверка условия соседства производится по сателлиту, имеющему больший радиус начальной окружности, и соединенному с ним центральному колесу. Определенное по неравенствам и округленное всегда в меньшую сторону число блоков сателлитов является максимально возможным для данного механизма при размещении сателлитов в одной плоскости.

Таким образом, условие соседства выражается для схем:

- $1 - (z_1 + z_2) \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > z_2 + 2h_a^*$;
- $2 - (z_1 + z_2) \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > z_2 + 2h_a^*$ – для внешнего зацепления;
 $(z_3 - z_{2'}) \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > z_{2'} + 2h_a^*$ – для внутреннего зацепления;
- $3 - (z_1 + z_2) \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > z_2 + 2h_a^*$ – для внешнего зацепления;
 $(z_1 + z_{2'}) \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > z_{2'} + 2h_a^*$ – для внешнего зацепления.
- 4 – обычно у этих редукторов один блок сателлитов.

Задача. Проверить, выполняется ли условие соседства сателлитов для механизма, соответствующего схеме 3 (рис. 4.13), при одинаковом модуле колес.

Дано: $K = 3$ – число блоков сателлитов; число зубьев: $z_1=45$; $z_2=18$; $z_3=46$; $z_{2'}=19$; $h_a^* = 1$.

Решение. Поскольку $z_{2'} > z_2$ проверку по условию соседства производим по внешнему зацеплению колес z_3 и z_{2}' .

$$k < \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_{2'} + 2h_a^*}{z_3 + z_{2'}}} = \frac{3,14}{\arcsin \frac{19 + 2}{46 + 19}} = \frac{180^\circ}{19^\circ 8'}$$

т.е. число сателлитов по условию соседства может быть до 9. Следовательно, число сателлитов $K=3$ удовлетворяет условию соседства.

Условие сборки. Условие сборки (или условие равных углов между сателлитами) заключается в том, чтобы зубья каждого сателлита могли одновременно войти в зацепление с обоими центральными колесами при симметричном расположении зон зацепления (рис. 4.15).

Планетарная передача может быть собрана в том случае, если головки зубьев сателлита 2 войдут во впадины центральных колес 1 и 3 одновременно, и при этом ось сателлита совпадет с осью соответствующего пальца на водиле. Допустим, что колесо 3 неподвижно. Расположим центральное колесо 1 таким образом, чтобы ось симметрии какой-либо впадины его совпадала с осью симметрии впадины колеса 3 (рис. 4.15). Тогда между колесами 1 и 3 можно установить сателлит.

Для определенности примем, что сателлит имеет четное число зубьев. Если колесо 1 повернуть на один угловой шаг, т.е. на угол $\tau_1 = \frac{2\pi}{z_1}$, то на линии OI

вновь расположится ось симметрии впадины колеса 1. Если сателлиты располагаются в параллельных плоскостях, то после поворота колеса 1 на угол τ_1 можно установить второй сателлит. При повороте колеса 1 на угол τ_1 водило должно повернуться на угол τ_H :

$$\tau_H = \frac{\tau_1}{i_{1-3}^{(H)}} = \frac{2\pi}{z_1 i_{1-H}^{(3)}}$$

где $i_{1-H}^{(3)}$ – передаточное отношение при условии, что колесо 1 – ведущее звено, а колесо 3 – неподвижное. Очевидно, что максимальное число сателлитов

$$k_{\max} = \frac{2\pi}{\tau_H}$$

Учитывая, что $i_{1-H}^{(3)} = \frac{z_1 + z_3}{z_1}$ получим $k_{\max} = z_1 i_{1-H}^{(3)} = z_1 + z_3$.

Сателлиты могут быть установлены не в параллельных плоскостях, а в одной. Тогда для установки второго сателлита колесо 1 надо повернуть не на один угловой шаг, а на угол $l \cdot \tau_1$, где l – целое число. При этом $k = \frac{z_1 + z_3}{l}$. Для разгрузки центральных подшипников и возможности передачи большей мощности в планетарных редукторах устанавливается несколько симметрично расположенных сателлитов. Число k сателлитов обычно колеблется в пределах от 2 до 12, иногда больше; в машиностроении чаще всего применяют передачи с числом $k = 3-6$.

Для редуктора Джемса (рис. 4.13, схема 1) максимальное число сателлитов в зависимости от передаточного отношения указано в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Количество сателлитов в планетарном механизме Джемса

Передаточное отношение $i_{1-H}^{(3)}$, не более	14,92	6,82	4,85	4	3,53	3,28
Максимальное число сателлитов, k	3	4	5	6	7	8

Условие сборки выражается для схем:

- $1 - z_1 + z_3 = kl$;
- $2 - \frac{z_3 z_2 + z_1 z_2'}{z_2} = kl$;
- $3 - \frac{z_3 z_2 - z_1 z_2'}{z_2} = kl$.

Для схем 2 и 3 условие сборки представляется еще и так:

$$i_{1-3}^{(H)} = \frac{z_1 + z_2'}{D_1} = kl, \text{ где } D_1 - \text{общий наибольший делитель чисел } z_1 \text{ и } z_2'.$$

Поскольку условие сборки фактически сводится к проверке, будет ли при установке сателлитов целым числом интервал числа зубьев центрального колеса, то его выражают соотношением:

$$\frac{z_1 i_{1-H}^{(3)}}{k} = (1 + kl),$$

где z_1 – число зубьев центрального колеса; k – число сателлитов; B и l – целые числа ($l = 1, 2, 3, \dots$; $B = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Методика выбора числа зубьев в планетарных механизмах

Проектирование планетарной передачи рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1. Ознакомиться с исходными данными и условиями работы планетарного механизма;
2. Определить требуемое передаточное отношение между угловыми скоростями входного и выходного валов планетарной передачи;
3. Выбрать структурную схему механизма;
4. Используя формулу Виллиса, получить соотношение между передаточным отношением и числами зубьев колес;
5. Проанализировать ограничения, которые необходимо учитывать при выборе чисел зубьев колес;

6. Выбрать методику поиска наиболее подходящего варианта кинематической схемы планетарной передачи;
7. Методом перебора проанализировать несколько вариантов решения и дать им оценку;
8. Вычертить кинематическую схему спроектированной передачи в масштабе длины;
9. Построить треугольники распределения линейных скоростей звеньев и диаграмму угловых скоростей звеньев планетарного механизма;
10. Определить графически передаточное отношение спроектированного механизма и его отклонение от требуемого значения.

Числа зубьев должны быть в практически осуществимых пределах (обычно от 18 до 100). При их назначении целесообразно руководствоваться рекомендациями, изложенными выше. В иных случаях все качественные показатели зубчатого зацепления (отсутствие интерференции, заострения и т.п.) обеспечиваются соответствующим выбором коэффициента смещения.

Пример подбора чисел зубьев колес однорядного планетарного механизма

Для механизма Джемса (рис. 4.13, схема 1) значение передаточного отношения $i_{1-H}^{(3)}$ всегда положительно, поэтому колесо 1 и водило H вращаются в одном направлении. Так как $i_{1-H}^{(3)} > 1$, то передача этого типа при ведущем звене 1 служит для уменьшения скорости вращения ведомого звена – водила H , а при ведущим звене H – для увеличения скорости вращения ведомого колеса 1 .

На основании ранее изложенного для планетарного механизма, соответствующего схеме 1:

- передаточное отношение $i_{1-H}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1-3}^{(H)} = 1 + \frac{z_3}{z_1}$;
- условие соосности: $z_3 = z_1 + 2z_2$;
- условие сборки сателлитов: $z_1 + z_3 = k\ell$ или $k = \frac{z_1 i_{1-H}^{(3)}}{\ell}$;
- максимальное число сателлитов из условия соседства

$$k < \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2 + 2h_a^*}{z_1 + z_2}}$$

Из формулы для передаточного отношения выражаем $z_3 = z_1(i_{1-H}^{(3)} - 1)$, которое подставляем в уравнение соосности:

$$z_2 = \frac{z_1(i_{1-H}^{(3)} - 2)}{2}$$

Получаем общее уравнение для определения чисел зубьев однорядного планетарного механизма:

$$z_1 : z_2 : z_3 : l = \left[1 : \frac{i_{1-H}^{(3)} - 2}{2} : (i_{1-H}^{(3)} - 1) : \frac{i_{1-H}^{(3)}}{k} \right] z_1.$$

Решение этой задачи возможно в неопределенном числе вариантов, так как при трех неизвестных числах зубьев имеем два уравнения с дополнительными условиями сборки и соседства.

Исходя из требований наименьших габаритов передачи и условия отсутствия подрезания, выбираем наименьшее число z_1 зубьев центрального колеса 1 , а по заданному передаточному отношению $i_{1-H}^{(3)}$ находим из общего уравнения числа зубьев сателлитов z_2 и колеса z_3 .

Задача. Подобрать числа зубьев колес однорядного планетарного механизма.

Дано: $i_{1-H}^{(3)} = 4,5$; $m = 10$ мм; $h_a^* = 1$.

Решение. Подставляем значение $i_{1-H}^{(3)}$ в общее уравнение для определения чисел зубьев:

$$z_1 : z_2 : z_3 : l = \left[1 : \frac{4,5 - 2}{2} : (4,5 - 1) : \frac{4,5}{k} \right] z_1.$$

После вычислений получим $z_1 : z_2 : z_3 : l = \left[1 : 1,25 : 3,5 : \frac{4,5}{k} \right] z_1$.

Для обеспечения минимальных габаритов механизма при отсутствии подрезания или заклинивания передачи, согласно табл. 4.1 принимаем $z_1 = 20$. Тогда

$$z_1 : z_2 : z_3 : k = 20 : 25 : 70 : \frac{90}{k_1},$$

откуда $z_2 = 25$, $z_3 = 70$.

Максимальное возможное число сателлитов из условия соседства:

$$k < \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2 + 2h_a^*}{z_1 + z_2}} = \frac{3,14}{\arcsin \frac{25 + 2}{20 + 25}} = \frac{180^\circ}{36,9^\circ} = 4,9.$$

Практически k может быть равным 4,3 или 2. Принимаем $k = 3$, тогда последний член пропорции $90/k = 30$. Условие сборки при этом удовлетворяется, так как $l = 30$. Это означает, что каждый последующий сателлит устанавливается на место предыдущего при простом повороте водила на угол $360^\circ/k = 360^\circ/3 = 120^\circ$, и повороте центрального колеса 1 на 30 угловых шагов.

Задача. Для механизма по схеме 1 (рис. 4.13) подобрать числа зубьев, обеспечивающие передаточное отношение $i_{1-H}^{(3)} = 6$ при числе сателлитов $k = 3$ и $h_a^* = 1$.

Решение: передаточное отношение механизма $i_{1-H}^{(3)} = 1 - i_{1-3}^{(H)} = 6$; $i_{1-3}^{(H)} = 1 - 6 = -5$.

Находим число зубьев колеса 3: $i_{1-3}^{(H)} = -\frac{z_3}{z_1}$; $z_3 = -i_{1-3}^{(H)} z_1 = 5z_1$. Принимаем $z_1=20$, тогда $z_3=5 \cdot 20=100$. Из условия соосности $z_3 = z_1+2z_2$. Определяем $z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2} = \frac{100 - 20}{2} = 40$.

Проверяем выполнение условия соседства:

$$(z_1 + z_2) \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > z_2 + 2;$$

$$(20 + 40) \sin\left(\frac{180^\circ}{3}\right) > 40 + 2;$$

$$60 \cdot 0,866 > 42;$$

$$51,96 > 42.$$

Проверяем условие сборки:

$$l = \frac{(z_1 + z_3)}{k} = \frac{20 + 100}{3} = 40.$$

Произведенный расчет показывает, что подобранные числа зубьев при числе сателлитов $k = 3$ удовлетворяют условиям соосности, соседства и сборки.

Задача. Спроектировать редуктор, передаточное отношение которого $i_{3-H}^{(5)} = \frac{i_{1-H}}{i_{1-2}} = 5$; .Редуктор должен быть соосным.

Выбор схемы редуктора: так как $i_{3-H}^{(5)} = \frac{i_{1-H}}{i_{1-2}} = 5$; > 25 , то размеры редукто-

ра со сдвоенными сателлитами (3-я схема) будут недопустимо большими. Редуктор Давида (4-я схема) из-за низкого КПД можно использовать только в несиловых передачах. Следовательно, проектируемый редуктор должен быть многоступенчатым. При двух ступенях среднее передаточное отношение каждой ступени $i_{3-H}^{(5)} = \frac{i_{1-H}}{i_{1-2}} = 5$; $= \sqrt{37,2} = 6,1$, и их можно выполнить планетарными типа Джемса (рис. 4.16, б).

Возможен и другой вариант: последнюю ступень оставить планетарной, а в начале использовать простые ступени, причем, чтобы редуктор был соосным, их должно быть две (рис. 4.16, а).

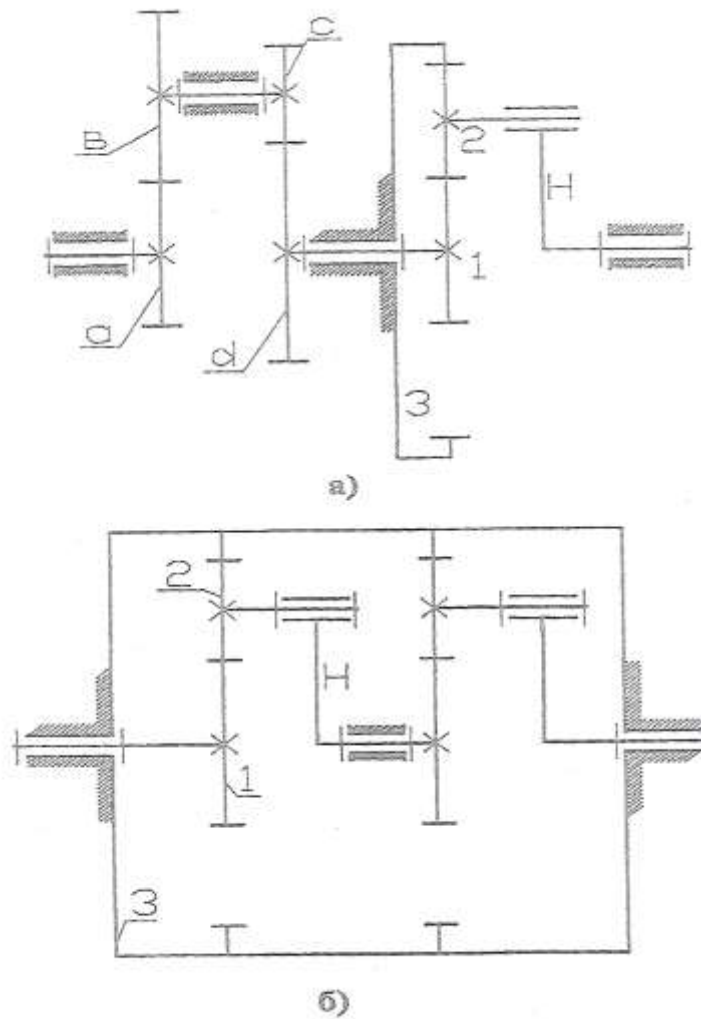


Рис. 4.16. Ступени редуктора

Решение 1. Редуктор Джемса с двумя простыми ступенями (рис. 4.16, а). Наибольшей компактности можно достигнуть, если выдержать условие $r_a + 2r_b = r_3$.

Можно допустить, что $r_a = r_c = r_1$. Из условия соосности $r_b = r_d$.

Общее передаточное отношение равно:

$$i_{a-H}^{(3)} = i_{a-b} i_{c-d} i_{1-H}^{(3)} = \frac{z_b z_d}{z_a z_c} \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right) = \left(\frac{z_b}{z_a}\right)^2 \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right).$$

При одинаковом модуле всех колес с учетом условия соосности

$$i_{a-H}^{(3)} = \left(\frac{z_b}{z_a}\right)^2 \left(1 + \frac{z_a + 2z_b}{z_a}\right).$$

Принимаем $z_a = z_c = z_1 = 17$. Тогда $37,2 = \left(\frac{z_b}{17}\right)^2 \left(1 + \frac{17 + 2z_b}{17}\right)$.

Чтобы найти z_b , надо решить кубическое уравнение, поэтому определяем его подбором, учитывая, что эта величина может быть только целым чис-

лом. Если принять $z_b=40$, то общее передаточное отношение

$$i_{3-H}^{(5)} = \frac{i_{1-H}}{i_{1-2}} = 5; \quad a-H = 37,2.$$

Таким образом, при $z_a = z_c = z_1 = 17; z_d = z_b = 40$;

$$i_{3-H}^{(5)} = \frac{i_{1-H}}{i_{1-2}} = 5; \quad a-b \quad i_{3-H}^{(5)} = \frac{i_{1-H}}{i_{1-2}} = 5; \quad c-d = \left(\frac{40}{17}\right)^2 = 5,536; \quad i_{1-H}^{(3)} = \frac{37,2}{5,536} = 6,72.$$

$$\text{Определяем } z_3: z_3 = z_1(i_{1-H}^{(3)} - 1) = 17(6,72 - 1) = 97.$$

$$\text{Из условия соосности } z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2} = \frac{97 - 17}{2} = 40.$$

Проверяем условие сборки: $z_1 + z_3 = kl; 17 + 97 = 114; k = 3; l = 38$. Если же принять $z_1=18, z_3 = 18 \cdot (7,533 - 1) = 118; z_2 = \frac{118 - 18}{2} = 50$;

$$z_1 + z_3 = k^l = \frac{(z_1 + z_3)}{k} = \frac{20 + 100}{3} = 40; 18 + 118 = 12,6; k = 4; l = 34.$$

Большее число сателлитов благоприятнее.

Решение 2. Два последовательно соединенных механизма (рис. 4.16, б). Для упрощения изготовления редуктора возьмем одинаковые ступени:

$$i_1 = i_2 = \sqrt{i} = \sqrt{37,2} = 6,1.$$

$$\text{Принимаем } z_1=17. \text{ Тогда } z_3 = z_1(i_1 - 1) = 17(6,1 - 1) = 87;$$

$$z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2} = \frac{87 - 17}{2} = 35.$$

$$\text{Условие сборки: } z_1 + z_3 = kl; 17 + 87 = 104.$$

Можно принять $k = 4$, что при данном передаточное число не нарушает условие соседства.

По габаритным размерам (рис. 4.16) предпочтение следует отдать второму варианту.

Выполним расчет КПД редуктора при условии, что к.п.д. каждой пары колес равен 0,96.

Для трехступенчатого редуктора (рис. 4.16, а):

$$\eta = \eta_{a-b} \eta_{c-d} \eta_{1-H}; \quad \eta_{c-d} = 0,96; \quad \eta_{a-b} = 0,96.$$

КПД планетарной ступени определяем по формуле

$$\eta_{пл} = \eta_{1-H} = \frac{1}{i_{1-H}^{(3)}} [1 - \eta^{(H)}(1 - i_{1-H}^{(3)})] = \frac{1}{6,7} [1 - 0,96^2(1 - 6,7)] = 0,934.$$

$$\text{Общий КПД } \eta = \eta_{a-b} \eta_{c-d} \eta_{пл} = 0,96^2 \cdot 0,934 = 0,86.$$

Для двухступенчатого редуктора (рис. 4.16, б):

$$\eta = \eta_{пл}^2; \quad \eta_{пл} = \eta_{1-H} = \frac{1}{6,7} [1 - 0,96^2(1 - 6,7)] = 0,935,$$

$$\eta = 0,935^2 = 0,873.$$

Таким образом, схема редуктора, выполненная из двух планетарных ступеней, оказывается более выгодной по габаритным размерам и КПД. Для окончательной оценки обеих схем необходимо сравнить их также по себестоимости,

которая зависит от количества деталей и узлов, точности их изготовления, веса деталей, качества применяемых материалов и др. Синтез планетарных передач по сложным схемам целесообразно выполнять с применением ЭВМ для перебора всех возможных вариантов.

Пример подбора чисел зубьев двухрядного планетарного механизма с одним внешним и одним внутренним зацеплением

Для механизма, соответствующего схеме 2 (рис. 4.13), значение передаточного отношения $i_{1-H}^{(3)}$ всегда положительно, поэтому колесо 1 и водило H вращаются в одном направлении. На основании ранее изложенного для этого механизма передаточное отношение равно:

$$i_{1-H}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1-3}^{(H)} = 1 + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}$$

Из уравнения следует, что $i_{1-H}^{(3)} > 1$ и, следовательно, эта передача при вращении звена 1 является замедляющей.

Условие соосности:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)m_1 &= (z_3 - z_2')m_2; \\ (z_1 + z_2)m_1/m_2 &= z_3 - z_2'. \end{aligned}$$

Условие сборки сателлитов:

$$\frac{z_3 z_2 + z_1 z_2}{z_2} = kl; \quad \frac{z_1 i_{1-H}^{(3)}}{k} (1 + kl) = B.$$

Максимально возможное число блоков сателлитов из условия соседства:

$$\begin{aligned} k_{\max} &< \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2 + 2h_a^*}{z_3 + z_2}} && \text{при } r_2' < r_2; \\ k_{\max} &< \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2' + 2h_a^*}{z_3 + z_2'}} && \text{при } r_2' < r_2. \end{aligned}$$

Спроектировать механизм по схеме 2 можно, используя условие Левитской О.Н., согласно которому $z_1 = z_2' = z_{\min}$.

Методика обосновывается следующими рассуждениями.

Передаточное отношение $i_{1-H}^{(3)} = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}$, с учетом, что из условия соосности

при $m_1 = m_2$ и $z_2' = z_3 - z_1 - z_2$, вычисляется как $i_{1-H}^{(3)} = \frac{z_2 z_3}{z_1 (z_3 - z_1 - z_2)}$.

Отсюда $z_3 = \frac{z_1 z_2 + z_1 i_{1-3}^{(H)}}{i_{1-3}^{(H)} z_1 - z_2}$. Это выражение дифференцируем по z_1 :

$$\frac{dz_3}{dz_1} = i_{1-3}^{(H)} \frac{(z_1 i_{1-3}^{(H)} - z_2)(2z_1 + z_2) - z_1 i_{1-3}^{(H)}(z_1 + z_2)}{(i_{1-3}^{(H)} z_1 - z_2)^2}.$$

Из условия, что размер z_3 будет минимальным, т.е. $\frac{dz_3}{dz_1} = 0$, получаем

$$z_{\min} = 18 - 26.$$

Аналогично выводим формулу для определения числа зубьев z_2' , так же полагая, что z_3 имеет минимальное значение:

$$z_2' = \frac{z_2 \left(1 + \sqrt{1 + i_{1-3}^{(H)}} \right)}{i_{1-3}^{(H)}}.$$

Выражения для z_1 и z_2' получаются совершенно одинаковыми. Следовательно, минимум величины z_3 при заданном $i_{1-3}^{(H)}$ и z_2 возможно только при условии $z_1 = z_2' = z_{\min}$. Тогда условие соосности при одинаковом модуле колес будет $z_1 + z_2 = z_3 - z_1$ или $z_3 = 2z_1 + z_2$.

При этом

$$i_{1-H}^{(3)} = 1 + \frac{z_2 z_3}{z_1^2} = 1 + \frac{z_2}{z_1} (2z_1 + z_2) = 1 + \frac{2z_1 z_2 + z_2^2}{z_1^2} = \frac{z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2}{z_1^2} = \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1^2};$$

$$z_1^2 i_{1-H}^{(3)} = (z_1 + z_2)^2; \quad z_1 \sqrt{i_{1-H}^{(3)}} = z_1 + z_2.$$

Таким образом, получаем $z_2 = z_1 \left(\sqrt{i_{1-H}^{(3)}} - 1 \right)$.

Значение z_2 округляют до целого числа, но чтобы удовлетворять заданному передаточному отношению, условиям соосности и соседства. Например, при $i_{1-H}^{(3)} = 15,5$ и $m_1 = m_2$ принимаем $z_1 = z_2' = z_{\min} = 18$. Тогда

$$z_2 = z_1 \left(\sqrt{i_{1-H}^{(3)}} - 1 \right) = 18 \left(\sqrt{15,5} - 1 \right) = 53.$$

Из условия соосности $z_3 = z_1 + z_2 + z_2' = 18 + 53 + 18 = 89$. Число сателлитов из условия соседства

$$k_{\max} < \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}} = \frac{\pi}{\arcsin \frac{53 + 2}{12 + 53}} = 3,53.$$

Принимаем $k = 3$.

Условие сборки соблюдать необязательно, так как с центральными колесами входят в зацепление различные сателлиты. Поэтому перед закреплением второго сателлита на оси водила, его можно повернуть на нужный угол так, чтобы он вошел в зацепление со своим центральным колесом. Чаще всего, задача подбора чисел зубьев планетарного редуктора по схеме 2 заключается в составлении четырех уравнений для определения четырех неизвестных – чисел зубьев z_1 , z_2 , z_2' и z_3 колес механизма.

Наиболее распространенным методом подбора чисел зубьев для планетарного механизма со сдвоенными сателлитами является метод сомножителей, при котором числа зубьев определяются только по двум условиям – передаточному отношению и условию соосности, а проверка производится по условиям сборки и соседства. Рассмотрим сущность этого метода.

Из уравнения передаточного отношения схемы 2 $i_{1-H}^{(3)} = 1 + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}$ находят-

ся значение $\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'} = 1 - i_{1-H}^{(3)} = \frac{M}{N}$ – несократимая дробь. Простые числа M и N

представляются в виде сомножителей $\frac{M}{N} = \frac{C_2 C_3}{C_1 C_2'}$, каждый из которых пропор-

ционален числам зубьев. Полагая C_2/C_1 пропорциональным z_2/z_1 , получаем $z_2 = z_1(C_2/C_1)$, а C_3/C_2' пропорциональным z_3/z_2' , имеем $z_3 = z_2'(C_3/C_2')$. Подставляя эти значения в условие соосности при $m_1 = m_2$ $z_1 + z_2 = z_3 - z_2'$, получаем $z_1 + z_1(C_2/C_1) = z_2'(C_3/C_2') - z_2'$ или $z_1[(C_1 + C_2) - C_2] = z_2'[(C_3 - C_2') - C_1]$. Чтобы это соотношение было тождественно, проще всего положить, что $z_1 = (C_3 - C_2')C_1$, $z_2' = (C_1 + C_2)C_2'$. Аналогичные рассуждения дают $z_2 = C_2(C_3 - C_2')$, $z_3 = C_3(C_1 + C_2)$. Чтобы выполнялось условие правильного зацепления, вводится множитель γ (любое положительное число). Тогда окончательно имеем для этой схемы: $z_1 = \gamma(C_3 - C_2')C_1$, $z_2' = \gamma(C_1 + C_2)C_2'$, $z_2 = \gamma C_2(C_3 - C_2')$, $z_3 = \gamma C_3(C_1 + C_2)$. Полученные значения z_1, z_2, z_2', z_3 проверяют по условиям сборки и соседства.

Например, если $i_{1-H}^{(3)} = 30$, то $i_{1-H}^{(3)} - 1 = 29$ и варианты разложения на сомножители будут:

$$\frac{C_2 C_3}{C_1 C_2'} = 29 = \frac{29 \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{29 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \frac{29 \cdot 3}{3 \cdot 1} = \frac{29 \cdot 4}{4 \cdot 1} = \frac{29 \cdot 5}{5 \cdot 1} = \frac{29 \cdot 6}{6 \cdot 1} \text{ и т.д.}$$

Из этих сомножителей следует выбрать такие, которые бы обеспечивали наиболее подходящую кинематическую схему передачи, например, по критерию минимальных размеров и массы зубчатых колес. Эти требования конкретизируются в каждом случае с учетом условий работы передачи. Принимаем соотношение C_2/C_1 и C_3/C_2' близкими к значению $\sqrt{i_{1-H}^{(3)}} = \sqrt{30} = 5,48$, т.е. $C_2/C_1 = 29/5$ и $C_3/C_2' = 5/1$ или $C_2/C_1 = 29/6$ и $C_3/C_2' = 6/1$. Это обусловливается тем, что для данной схемы минимальные габариты механизма соответствуют передачам, колеса которых имеют наибольшую разность диаметров колес z_2 и z_2' на сателлите.

Выбираем комбинацию коэффициентов: $C_1 = 5$; $C_2 = 29$, $C_2' = 1$; $C_3 = 5$.

Тогда $z_1 = 5(5-1)\gamma = 20\gamma$; $z_2 = 29(5-1)\gamma = 116\gamma$;

$z_2' = 1(5+29)\gamma = 34\gamma$; $z_3 = 5(5+29)\gamma = 170\gamma$.

При $\gamma = 1$ числа зубьев равны: $z_1 = 20$; $z_2 = 116$; $z_2' = 34$; $z_3 = 170$ (целые числа).

Проверяют на условие сборки при $k = 3$: $\frac{z_1 i_{1-H}^{(3)}}{k} = \frac{20 \cdot 30}{3} = 200$ – целое

число, т.е. передача собирается без натягов.

Условие соседства $\sin \frac{\pi}{3} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}$ при $h_a^* = 1$,

$$0,866 > \frac{116 + 2}{20 + 116} = \frac{118}{136} = 0,8676$$

не выполняется, т.е. окружности вершин зубьев соседних сателлитов пересекаются между собой, что недопустимо.

Анализируем второй вариант сомножителей: $C_1=6, C_2=29, C_2'=1, C_3=6$.

Тогда $z_1=6(6-1)\gamma=30\gamma$; $z_2=29(6-1)\gamma=145\gamma$;

$z_2'=1(6+29)\gamma=35\gamma$; $z_3=6(6+29)\gamma=210\gamma$.

При $\gamma = 1$ числа зубьев равны $z_1=30$; $z_2=145$; $z_2'=35$; $z_3=210$.

Условие сборки при $k = 3$: $\frac{z_1 i_{1-H}^{(3)}}{k} = \frac{30 \cdot 30}{3} = 300$ – целое число, т.е. передача собирается без натягов. Условие соседства выполняется, так как

$0,866 > \frac{145 + 2}{30 + 145} = \frac{147}{175} = 0,840$.

Сопоставляя рассмотренные числовые варианты, приходим к выводу, что первый вариант имеет меньшую сумму (или разность) чисел зубьев в каждой ступени по сравнению со вторым вариантом:

$$1) z_1 + z_2 = z_3 - z_2' = 20 + 116 = 170 - 34 = 136;$$

$$2) z_1 + z_2 = z_3 - z_2' = 30 + 145 = 210 - 35 = 175.$$

Однако первый вариант не может быть реализован из-за невыполнения условия соседства между смежными сателлитами.

Задача. Подобрать числа зубьев планетарного механизма по схеме 2 (рис. 4.13), чтобы обеспечить передаточное отношение $i_{1-H}^{(3)}=15$. Модуль колес одинаков, $h_a^* = 1$.

Решение. Передаточное отношение $i_{1-H}^{(3)} = 1 - i_{1-3}^{(H)} = 1 + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}$.

$$\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'} = 15 - 1 = 14.$$

Таким образом, $\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'} = \frac{C_2 C_3}{C_1 C_2'} = 14$.

Варианты разложения на сомножители будут:

$$\frac{C_2 C_3}{C_1 C_2'} = 14 = \frac{2 \cdot 7}{1 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 7}{1 \cdot 2} \text{ и т.д.}$$

Рассмотрим первый вариант при $C_1=1, C_2=2, C_2'=1, C_3=7$.

$z_1 = \gamma(C_3 - C_2')C_1 = 6\gamma$, $z_2' = \gamma(C_1 + C_2)C_2' = 3\gamma$,

$z_2 = C_2(C_3 - C_2')\gamma = 12\gamma$, $z_3 = C_3(C_1 + C_2)\gamma = 21\gamma$.

Поделив выражение на 3, имеем: $z_1=2\gamma$; $z_2=4\gamma$; $z_2'=\gamma$; $z_3=7\gamma$. Наименьшее колесо 2', а число его зубьев должно быть >17 .

Принимаем $z_2 = 19$, тогда $\gamma = 19$ и $z_1 = 2 \cdot 19 = 38$; $z_2 = 4 \cdot 19 = 76$; $z_3 = 7 \cdot 19 = 133$.
 Определяем возможное число блоков сателлитов по внешнему зацеплению:

$$k < \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}} = \frac{\pi}{\arcsin \frac{76 + 2}{38 + 76}} = 4,19.$$

Выбираем $k = 4$ и проверяем условие сборки:

$$l = \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3}{k z_2} = \frac{38 \cdot 19 + 76 \cdot 133}{4 \cdot 76} = 142,5.$$

Условие сборки не удовлетворяется, поэтому принимаем $k = 3$ и снова проверяем условие сборки: $l = 190$. Условие сборки обеспечивается при $k = 3$.

Пример подбора чисел зубьев колес двухрядного планетарного механизма с двумя внешними зацеплениями

Этот механизм представляет собой редуктор Давида по схеме 3 (рис. 4.13). Передаточное отношение $i_{1-H}^{(3)} = 1 - i_{1-3}^{(H)}$ механизма, в зависимости от числового значения $i_{1-3}^{(H)} = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}$ может быть, согласно формуле Виллиса, и положитель-

ным, и отрицательным, т.е. водило H и колесо I могут вращаться либо в одном и том же, либо в противоположном направлении.

В первом случае будет неравенство $1 > i_{1-3}^{(H)} > 0$ и при ведущем колесе I передача является ускоряющей, т.е. ведомое звено H вращается с большей угловой скоростью, чем ведущее колесо I . Во втором случае наблюдается неравенство $i_{1-3}^{(H)} < 0$, т.е. абсолютная величина $i_{1-H}^{(3)}$ может принимать любые значения. Поэтому в зависимости от абсолютного значения $i_{1-H}^{(3)}$ передача может быть ускоряющей при $|i_{1-H}^{(3)}| < 1$, так и замедляющей при $|i_{1-H}^{(3)}| > 1$.

Для этого механизма условие соосности имеет выражение:

$$(z_1 + z_2) m_1 = (z_2' + z_3) \cdot m_2.$$

$$\text{Условие сборки: } \frac{z_3 z_2 - z_1 z_2'}{z_2} = kl, \quad \frac{z_1 i_{1-H}^{(3)}}{k} (1 + kl) = B.$$

Максимальное число сателлитов из условия соседства:

$$k_{\max} < \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2 + h_a^*}{z_1 + z_2}} \quad \text{при } r_2 > r_2';$$

$$k_{\max} < \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2 + h_a^*}{z_3 + z_2'}} \quad \text{при } r_2 < r_2'.$$

Решение задачи подбора чисел зубьев механизма z_1, z_2, z_2', z_3 возможно в неопределенном числе вариантов, так как при четырех неизвестных имеем два уравнения (уравнение Виллиса и условие соосности).

Воспользуемся методами, рассмотренными подробно для схемы 2. Согласно методу отношений обозначим: $z_1/z_2 = x$; $z_3/z_2' = y$; $m_1/m_2 = q$. Тогда уравнение соосности запишется так: $(z_1+z_2)q = z_3+z_2' = (x+1)z_2q$. Отношение:

$$\frac{x}{y} = \frac{z_1 z_2'}{z_2 z_3} = i_{3-1}^{(H)}.$$

Задаваясь значением x , определяем из этого равенства величину $y = x i_{3-1}^{(H)}$.

Уравнение сборки принимает вид $\frac{y-x}{k} z_2' = l$, а условия соседства будут:

$$(x+1) \sin \frac{\pi}{k} > 1 + \frac{2h_a^*}{z_2}; \quad (y+1) \sin \frac{\pi}{k} > 1 + \frac{2h_a^*}{z_2'}.$$

Принимаем число сателлитов $k = 3; 4; 5; 6$ и т.д., а числа зубьев на каждом из них - в пределах от 150 до 18. Подставив значения k и z в формулы, получаем предельные значения x и y , удовлетворяющие условиям соседства: $x \geq e_k, y \geq e_k$, где e_k в зависимости от числа k сателлитов принимает следующие значения:

$$e_3 \geq 0,17 - 0,31; \quad e_4 \geq 0,43 - 0,6; \quad e_5 \geq 0,72 - 0,92; \quad e_6 \geq 1,03 - 1,25 \text{ и т.д.}$$

Наибольшая величина передаточного отношения для одной зубчатой пары $i_{(n-1)-n} = 6 - 10$ зависит от числа зубьев $z_{(n-1)}$ меньшего сопряженного колеса.

При подборе чисел зубьев редуктора по схеме 3 задаемся параметром x , ограничивая его величину предельными значениями:

$$\text{при } i_{1-3}^{(H)} > 1; \quad i_{(n-1)-n} \geq x \geq e_k; \quad y < i_{(n-1)-n};$$

$$\text{при } i_{1-3}^{(H)} < 1; \quad i_{(n-1)-n} \geq y \geq e_k; \quad x < i_{(n-1)-n}.$$

Если $x > 1$ и $y > 1$, то при числе сателлитов $k = 3, 4, 5$ условия соседства всегда удовлетворяются.

Задачу подбора чисел зубьев этого редуктора следует выполнять в следующем порядке:

- подбирают значения параметра x , определяя его нижний предел при возможно наибольшем числе сателлитов;
- определив по формуле $y = x i_{1-3}^{(H)}$ значение $y = z_3/z_2'$, из уравнения сборки $z_2'(y-x)/k = l$, находят величины, пропорциональные количеству зубьев сателлита 2' и $z_3 = z_2'y$ центрального колеса 3;
- составляют уравнение $z_3 + z_2' = (x+1)z_2$, из которого определяют коэффициент пропорциональности, и затем - числа зубьев колес 1, 2, 2', 3;

- расчет заканчивают проверкой по уравнению соседства $(z_1 + z_2) \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > z_2 + 2$ найденного числа зубьев и по формуле $i_{1-H}^{(3)} = 1 - i_{1-3}^{(H)}$ – полученного передаточного отношения редуктора.

Если вместо $i_{1-H}^{(3)}$ задано передаточное отношение $i_{H-1}^{(3)}$, т.е. ведущим звеном является водила H , то задачу решают аналогично рассмотренной в соответствии с формулой

$$i_{1-H}^{(3)} = \frac{1}{i_{1-H}^{(3)}} = \frac{i_{1-3}^{(H)}}{i_{1-3}^{(H)} - 1}.$$

Подобрав числа зубьев редуктора и зная угловую скорость ω_H водила H , можно определить угловую скорость $\omega_2 = \omega_2'$ сателлитов 2 и 2'. Так как скорость V_A точки А водила и скорость центров сателлитов равны, а точка C является мгновенным центром вращения колеса 2', можно записать

$$\omega_H \cdot OA = \omega_2 \cdot CA \text{ или } \omega_H \cdot (z_2 + z_3) = \omega_2 \cdot z_2',$$

откуда определяют величину ω_2' .

Задача. Подобрать числа зубьев редуктора, если дано: $i_{1-H}^{(3)} = -11$; $q = 1,6$; $h_a^* = 1$ (рис. 4.13, схема 2).

Решение. Так как $i_{1-3}^{(H)} = 12$, то величина x должна быть меньше 1. Число $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $q = \frac{16}{10} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 5}$, то можно предварительно задаться величинами

$$x = \frac{3}{8}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4} \text{ и др.}$$

Принимаем:

$$\text{а) } x = \frac{3}{8}, \text{ находим } y = xi_{1-3}^{(H)} = \frac{9}{2};$$

$$\frac{y-x}{k} z_2' = \frac{33}{8 \cdot 3} z_2' = l;$$

$$z_2' = 8a; \quad z_3 = yz_2' = \frac{9}{2} 8a = 36a; \quad (z_1 + z_2)q = (x+1)z_2 1,6 = z_2' + z_3;$$

$$z_2' = \frac{z_2' + z_3}{(x+1)1,6} \text{ или } \frac{11}{8} z_2 \cdot 1,6 = 44a,$$

откуда $z_2 = 20a$, $a = 1; 2; 3; 4 \dots$ Принимаем $a = 2$, тогда будем иметь $z_2 = 40$:

$$z_1 = x \cdot z_2 = 15; \quad z_2' = 16; \quad z_3 = 72.$$

$$\text{б) } x = \frac{1}{2}; \quad y = 6$$

$$\frac{y-x}{k} z_2' = \frac{11}{2 \cdot 3} z_2' = l;$$

$$z_2' = 6a; \quad z_3 = 36a;$$

$$(x+1)z_2 1,6 = 42a; \quad z_2 = \frac{35l}{2}; \quad a = 2; 4; 6; 8 \dots$$

При $a = 4$ числа зубьев $z_2 = 70$; $z_1 = x \cdot z_2 = 35$; $z_2' = 24$; $z_3 = 144$.

$$\text{в) } x = \frac{2}{3}; y = 8$$

$$\frac{y-x}{k} z_{2'} = \frac{22}{3 \cdot 4} z_{2'} = l;$$

$$z_{2'} = 6a; \quad z_3 = 48a; \quad \left(\frac{5}{3}\right) z_2 q = 54a; \quad z_2 = \frac{81l}{4}; \quad a = 4, 8, 16 \dots$$

При $a = 4$ $z_2 = 81$; $z_1 = x z_2 = 54$; $z_2' = 24$; $z_3 = 192$.

$$\text{г) } x = \frac{3}{4}; y = 9$$

$$\frac{y-x}{k} z_{2'} = \frac{33}{4 \cdot 4} z_{2'} = l;$$

$$z_{2'} = 16a;$$

$$z_3 = 144a; \quad z_2 = (400a)/7; \quad a = 7; 14; 21.$$

При $a = 7$; $z_1 = 300$; $z_2 = 400$; $z_2' = 112$; $z_3 = 1008$.

Приняв число сателлитов $k = 3$, получим редуктор с меньшим числом зубьев: $z_1 = 35$; $z_2 = 70$; $z_2' = 24$; $z_3 = 144$.

Во всех вариантах подобранные числа зубьев удовлетворяют условиям соседства, сборки, наименьшим габаритам и передаточное отношение $i_{1-H}^{(3)}$ равно заданному.

Задача. Определить числа зубьев, если дано передаточное отношение редуктора $i_{1-H}^{(3)} = 0,1$; $q = 1,5$; $h_a^* = 1$.

Решение: используют методику сомножителей, при которой число зубьев определяют по передаточному отношению и условию соосности, а проверку производят по условиям сборки и соседства.

Для механизма по схеме 3 (рис. 4.13), составленного из нулевых колес:

$$i_{1-H}^{(3)} = 1 - \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}$$

находится значение несократимой дроби

$$\frac{M}{N} = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}} = \frac{C_2 C_3}{C_1 C_{2'}} = 1 - i_{1-H}^{(3)}.$$

$$\text{При этом } \frac{z_2}{z_1} \approx \frac{C_2}{C_1} \text{ и } z_2 = z_1 \frac{C_2}{C_1}; \quad \frac{z_3}{z_{2'}} \approx \frac{C_3}{C_{2'}} \text{ и } z_3 = z_{2'} \frac{C_3}{C_{2'}}.$$

По условию соосности имеем при $m_1 = m_2$:

$$z_2 + z_1 = z_3 + z_{2'}; \quad z_1 + z_1 (C_2/C_1) = z_{2'} + z_{2'} (C_3/C_{2'});$$

$$z_1 [(C_1 + C_2) C_{2'}] = z_{2'} [(C_3 + C_{2'}) C_1].$$

Чтобы это соотношение было тождественно, проще всего положить

$$z_1 = (C_3 + C_{2'}) C_1; \quad z_{2'} = (C_1 + C_2) C_{2'}.$$

$$\text{Аналогичные рассуждения дают } z_2 = (C_3 + C_{2'}) C_2; \quad z_3 = (C_1 + C_2) C_3.$$

Чтобы выполнялось условие правильного зацепления, вводится множитель γ (любое положительное число). Тогда окончательно имеем для этой схемы:

$$z_1 = \gamma(C_3 + C_{2'})C_1; \quad z_2 = \gamma(C_1 + C_{2'})C_2,$$

$$z_{2'} = \gamma(C_1 + C_2)C_{2'}; \quad z_3 = \gamma(C_1 + C_2)C_3.$$

Для схемы 3 отношения сомножителей принимаются близкими к единице, так как при этом получаются минимальные значения $z_1, z_2, z_{2'}, z_3$, которые проверяют затем по условиям сборки и соседства. Подбор чисел зубьев планетарных механизмов по заданному передаточному отношению требует выполнения большого числа математических операций. Поэтому такую задачу практически решают с помощью ЭВМ. Для этого используется программа разложения заданного передаточного отношения на сомножители и последующего определения z с учетом ограничений и наименьших габаритов. Иногда в программу вводятся требуемые $I = M/N$, $z_{i \min}, z_{i \max}$ ограничения и путем перебора определяют комбинации чисел зубьев, из которых выбирается нужное сочетание $z_1, z_2, z_{2'}, z_3$ при минимальных габаритах, сохранения заданного соотношения передаточного отношения по ступеням.

Задача. Определить $z_1, z_2, z_{2'}, z_3$ для механизма схемы 3, у которого $i_{1-H}^{(3)} = -\frac{1}{24}$; $k = 3$; $m = 1$ мм.

Решение: находим $\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}} = 1 - \left(-\frac{1}{24}\right) = \frac{25}{24}$, которое раскладываем по

сомножителям:

$$\frac{C_2 C_3}{C_1 C_{2'}} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 8} \text{ и т.д.}$$

Так как таких комбинаций сомножителей может быть много, то и возможных вариантов решений, удовлетворяющих указанным условиям, тоже много. Рассчитывая число зубьев для четырех вариантов сочетаний сомножителей, имеем:

- 1) $z_1 = 6(5+4)\gamma = 54\gamma$; $z_2 = 5(5+4)\gamma = 45\gamma$; $z_{2'} = 4(6+5)\gamma = 44\gamma$;
 $z_3 = 5(6+5)\gamma = 55\gamma$;
- 2) $8 \cdot 8\gamma = 64 \cdot \gamma$; $5 \cdot 8\gamma = 40\gamma$; $3 \cdot 13\gamma = 39\gamma$; $5 \cdot 13\gamma = 65\gamma$;
- 3) $4 \cdot 11\gamma = 44\gamma$; $5 \cdot 11\gamma = 55\gamma$; $6 \cdot 9\gamma = 54\gamma$; $5 \cdot 9\gamma = 45\gamma$;
- 4) $3 \cdot 13\gamma = 39\gamma$; $5 \cdot 13\gamma = 65\gamma$; $8 \cdot 8\gamma = 64\gamma$; $5 \cdot 8\gamma = 40\gamma$.

По условиям правильного зацепления во всех вариантах можно выбрать $\gamma = 1$. Наименьшие габариты будут для вариантов 1 и 3. Проверяем их по условию сборки:

$$l = \frac{z_1 i_{1-H}^{(3)}}{k} = \frac{54}{3} \left(-\frac{1}{24}\right) = -\frac{3}{4}.$$

Если l – не целое число, то условие сборки следует расширить, взяв $1 + i_{1-3}^{(H)} k$.

$$B = \frac{z_1 i_{1-H}^{(3)}}{k} (1 + kl) = -\frac{3}{4} (1 + 3l).$$

В данном случае необходимо иметь $(1+3l)$ кратным 4, что имеет место при $l = 1$. Это означает, что при сборке водило необходимо повернуть на угол $\varphi_H = \left(\frac{2\pi}{3}\right)(1+3l) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$, т.е. на угол 120° , плюс два полных оборота, и тогда обеспечивается сборка механизма с тремя равномерно распределенными по окружности сателлитами.

Проверяем условие соседства: $\sin \frac{\pi}{k} > \frac{45+2}{54+45}$, оно тоже выполняется. Для

3-го варианта $-\left(\frac{44}{3}\right)\left(-\frac{1}{24}\right)(1+3l) \neq B$, т.е. левая часть не является целым числом и вариант отбрасываем. Таким образом, выбираем вариант 1: $z_1=54$; $z_2=45$; $z_2'=44$; $z_3=55$.

Пример подбора чисел зубьев двухрядного планетарного механизма с двумя внутренними зацеплениями

Для механизма по схеме 4 (рис. 4.13) с двумя внутренними зацеплениями передаточное отношение

$$i_{1-H}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1-3}^{(H)} = 1 - \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}$$

Условие соосности $(z_1 - z_2)m_1 = (z_3 - z_2')m_2$.

Условие сборки сателлитов

$$\frac{z_1 i_{1-H}^{(3)}}{k} (1 + kl) = B.$$

Максимальное число сателлитов из условия соседства:

$$k_{\max} \leq \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2 + h_a^*}{z_3 + z_2}} \quad \text{при } r_2 > r_2';$$

$$k_{\max} \leq \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2' + h_a^*}{z_3 + z_2'}} \quad \text{при } r_2 < r_2'.$$

Однако для этих редукторов чаще всего устанавливается только один блок сателлитов. При $k=1$ условия соседства и сборки не являются ограничениями.

При известных $i_{1-H}^{(3)}$, m , k формулы для определения чисел зубьев по методу сомножителей выводятся на основе рассуждений, аналогичных схемам 2 и 3, с учетом особенностей условия соосности. При $m_1=m_2$ уравнения для подсчета будут:

$$\begin{aligned} z_1 &= \gamma(C_3 - C_2')C_1; & z_2' &= \gamma(C_1 - C_2)C_2; \\ z_2 &= \gamma(C_3 - C_2')C_2; & z_3 &= \gamma(C_1 - C_2)C_3. \end{aligned}$$

Общий множитель γ выбирается так, чтобы все числа зубьев были целыми и выполнялось условие правильного зацепления. Для схем 3 и 4 отношения сомножителей целесообразно применять близкими к единице, так как при этом получают минимальные размеры механизма.

Например, для схемы 4 при $i_{1-H}^{(3)} = \frac{1}{i_{H-1}^{(3)}} = \frac{1}{30}$.

$$\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}} = 1 - i_{1-H}^{(3)} = 1 - \frac{1}{i_{H-1}^{(3)}} = \frac{i_{H-1}^{(3)} - 1}{i_{H-1}^{(3)}} = \frac{29}{30};$$

$$\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}} = \frac{C_2 C_3}{C_1 C_{2'}} = \frac{29 \cdot 1}{30 \cdot 1} = \frac{29 \cdot 28}{30 \cdot 28} = \dots$$

Сомножители $C_1=30; C_2=29; C_2'=C_3=1$ не дают решения, так как $C_3 - C_2' = 0$.

Сомножители $C_1=30; C_2=28; C_2'=28; C_3=29$ после подстановки в соответствующие выражения приводят к результату:

$$Z_1 = \gamma(C_3 - C_{2'})C_1 = \gamma(29 - 28) \cdot 30 = 30\gamma;$$

$$Z_2 = \gamma(C_3 - C_{2'})C_2 = \gamma(29 - 28) \cdot 28 = 28\gamma;$$

$$z_{2'} = \gamma(C_1 - C_2)C_{2'} = \gamma(30 - 28) \cdot 28 = 56\gamma;$$

$$z_3 = \gamma(C_1 - C_2)C_3 = \gamma(30 - 28) \cdot 29 = 58\gamma.$$

Коэффициент γ назначают по ограничению отсутствия подреза зубьев во внутреннем зацеплении (≥ 85). При $\gamma = 2$ числа зубьев равны: $z_1=60; z_2=56; z_2'=112; z_3=116$. Разность чисел зубьев во внутреннем зацеплении рекомендуется выбирать не менее 8. В связи с этим следует принять $\gamma = 4$ и числа зубьев колес $z_1=120; z_2=112; z_2'=224; z_3=232$. Однако условие соседства не выполняется, поэтому необходимо рассчитать новый вариант или использовать передачу с одним блоком сателлитов ($k = 1$), уравнив его путем установки корректирующей массы на водиле.