

В.С. ЖЕРНАКОВ

*Сопротивление материалов –  
механика материалов  
и конструкций*

Уфа 2012

УДК 539.4(07)  
ББК 30.121 я7  
Ж60

*Рецензенты:*

*кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин  
Южно-Уральского государственного университета,  
д-р техн. наук, профессор О. Ф. Чернявский;  
кафедра механики и конструирования машин  
Уфимского государственного Нефтяного технического  
университета,  
зав. кафедрой, д-р техн. наук, профессор, С. Г. Зубаиров*

**Жернаков В.С.**

**Ж** Сопротивление материалов – механика материалов и конструкций: Учебник. – Уфа: УГАТУ, 2012. – 495 с.  
**ISBN978-5-4221-0286-0**

Изложены основные понятия и предпосылки, используемые в сопротивлении материалов – механике материалов и конструкций, приведены теоретические выводы законов сопротивления материалов действию внешних сил, методы расчета элементов конструкций при продольном нагружении, сдвиге, кручении, изгибе и при сложном сопротивлении, дано изложение вопросов о кручении тонкостенных стержней открытого и замкнутого профиля, тонкостенных осесимметричных оболочек, об энергетических методах расчета конструкций. Рассмотрены законы устойчивости элементов конструкций, а также поведение материалов при действии динамических и переменных нагрузок. Приведены примеры расчетов.

Книга предназначена для студентов технических вузов, изучающих курс сопротивления материалов – механики материалов и конструкций.

Табл. 32 Ил. 470. Библиограф.: 6 назв.

УДК 539.4(07)  
ББК 30.121я7

**ISBN978-5-4221-0286-0**

© Уфимский государственный  
авиационный технический университет, 2012

## Введение

Развитие техники, задачи создания новых более совершенных машин и сооружений, применение новых материалов, обладающих специфическими свойствами, требуют от современного инженера глубоких знаний в области прочности, надежности, живучести и безопасности. При этом фундаментальные основы прочности остаются базой традиционных инженерных расчетов на прочность, жесткость и устойчивость. Эти основы формировались и совершенствовались на протяжении столетий и получили законченное отражение в сопротивлении материалов, теориях упругости, пластичности, ползучести, механике разрушения и прочности. Основы расчета на прочность изучаются в курсе сопротивления материалов (механике материалов и конструкций).

Включенный в учебник материал, очевидно, более обширен, чем это требуется в обычном курсе высшего учебного заведения, поэтому каждый студент и преподаватель имеют возможность отобрать именно ту информацию, которая представляется им наиболее важной и интересной.

Твердые деформируемые тела, рассматриваемые в учебнике, это стержни, валы, балки, стойки, а также конструкции из этих элементов. Рассмотрены простейшие виды деформации и методы расчета на прочность и жесткость при растяжении, сжатии, сдвиге, кручении, изгибе, сложном сопротивлении прямого стержня, статически определимые и неопределимые системы; основы общей теории напряженного и деформированного состояний, гипотезы пластичности и разрушения.

Большое внимание уделено вопросам расчета конструкций с помощью энергетических методов. В учебнике освещены вопросы расчета на прочность и жесткость при динамическом действии сил (с учетом сил инерции, ударного действия сил; при колебаниях, при напряжениях, переменных во времени). Рассмотрены методы расчета конструкций по предельным нагрузкам, расчета на прочность кривых брусьев, толстостенных труб и вращающихся дисков, тонкостенных оболочек, а также задачи устойчивости прямых стержней при продольном сжатии.

# **Глава 1. Основные предпосылки, понятия и определения, используемые в курсе сопротивления материалов – механике материалов и конструкций**

*Ключевые слова*

*Конструкция, прочность, жесткость, надежность, устойчивость, ползучесть, жаростойкость, жаропрочность, коррозионная стойкость, радиационная стойкость, модель материала, модель формы, модель нагружения, модели разрушения, запасы прочности.*

Сопротивление материалов (механика материалов и конструкций), с одной стороны, – это учебная дисциплина, дающая основы расчета на прочность и жесткость, а с другой стороны – наука о прочности, жесткости и надежности элементов конструкций, приборов и машин. Конструкция – искусственный или природный объект, используемый в процессе жизнедеятельности людей. Надежностью называется способность изделия, конструкции выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определенных пределах в течение требуемого промежутка времени или наработки.

Сопротивление материалов (механика материалов и конструкций) относится к фундаментальным дисциплинам инженерной подготовки специалистов с высшим техническим образованием, это первая дисциплина, которая устанавливает связь между фундаментальными научными дисциплинами (физикой, высшей математикой и теоретической механикой), изучает поведение материалов под действием сил и на этой основе определяет методы выбора материалов, определения формы и размеров деталей машин и элементов сооружений. Твердые тела под действием внешних сил

деформируются, меняют форму и размеры. *Механическое разделение тела на самостоятельные части, включая появление трещин, называется разрушением материала. Сопротивляемость твердых тел разрушению называется прочностью. Способность твердых тел сопротивляться изменению формы и размеров под действием внешних сил называется жесткостью.* Сопротивление материалов (механика материалов и конструкций) разрабатывает инженерные методы расчета элементов сооружений и деталей машин, методы выбора материалов и размеров деталей машин, их формы, при выполнении условия прочности и жесткости. Прочностная надежность определяется отказами, связанными с разрушением или недопустимыми деформациями элементов конструкции. *Устойчивость – сохранение первоначально заданных форм равновесия. Колебания происходят, когда приложенные к конструкции нагрузки переменны. Ползучесть происходит у материалов под действием сил в условиях повышенных температур. Жаростойкость – способность материала противостоять химическому воздействию (в частности газовой среде) при высоких температурах. Жаропрочность – способность материала противостоять пластической деформации и разрушению при приложении нагрузки в условиях высоких температур. Коррозионная стойкость – сопротивляемость действию агрессивных сред. Радиационная стойкость – стабильность работы деталей в условиях радиации. Требования достаточной надежности в прочности, жесткости, устойчивости, виброустойчивости и т.д. должны соблюдаться при неукоснительности требования экономичности конструкции.* Надежность обеспечивается выбором более высокопрочных, более дорогих материалов и увеличением размеров (веса) и стоимости детали. Теория сооружений включает сопротивление материалов, теорию упругости, пластичности и ползучести, строительную механику. Современная наука

сопротивления материалов (механики материалов и конструкций) состоит из теоретической и экспериментальной частей. Теоретическая часть – аналитический путь расчетных формул и соотношений, рассматривается идеализированное твердое тело. Экспериментальная часть изучает реальные механические свойства реальных материалов, проверяются выводы теоретической части.

*Итак, сопротивление материалов (механика материалов и конструкций) изучает поведение различных материалов при действии на них сил и указывает, как подобрать для каждого элемента конструкции надлежащий материал и размеры при условии полной надежности работы и наибольшей дешевизны конструкции.*

Существует много случаев, когда элементарные методы сопротивления материалов оказываются непригодными для того, чтобы дать удовлетворительную информацию о распределении напряжений и деформаций в инженерных конструкциях, тогда приходится прибегать к более совершенным методам теории упругости. Математическая теория упругости изучает вопросы поведения деформируемых тел в более точной постановке. Поэтому при решении задач приходится во многих случаях обращаться к сложному математическому аппарату и производить зачастую громоздкие вычислительные операции. Вследствие этого возможности практического использования методов теории упругости являются ограниченными, зато достигается большая полнота изучаемых явлений.

В сопротивлении материалов исследование вопроса о прочности и надежности элементов конструкции начинается с выбора расчетной схемы. Во-первых, приступая к расчету конструкции, следует отбросить те факторы, которые не могут сколько-нибудь заметным образом повлиять на работу ее в целом.

На рис. 1.1 представлена расчетная схема конструкции.

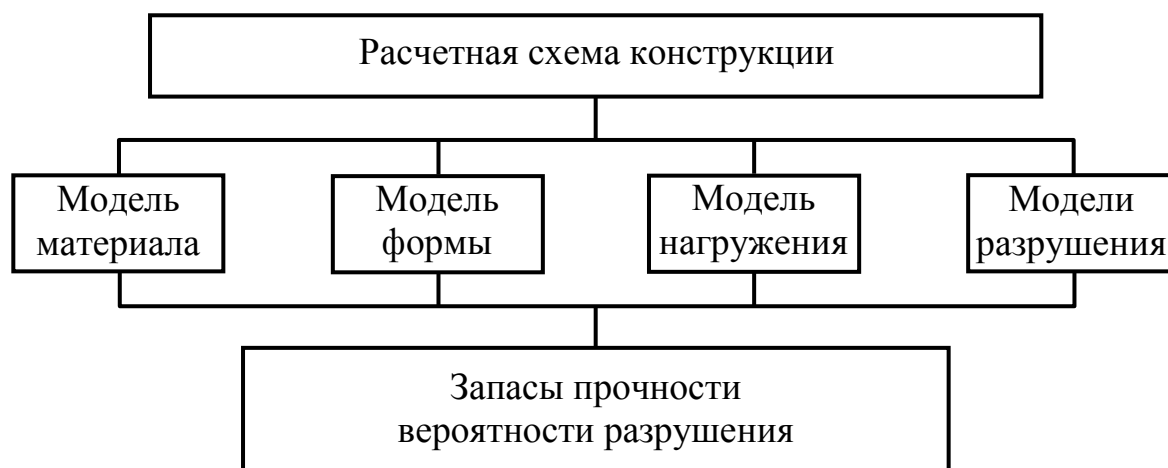


Рис. 1.1. Структура расчетной схемы элемента конструкции

В качестве материала машиностроительных конструкций используются в основном металлы и их сплавы, а также неорганические и органические материалы (полимеры, пластмассы, волокна, керамика и др.).

В последнее время нашли применение композиционные материалы, состоящие из высокопрочных нитей стекла, углерода и связующего (полимеров и металлов). В строительных конструкциях используются бетон (смесь крупных и мелких каменных частиц, скрепленных цементом), железобетон (бетон, усиленный стальными стержнями), кирпич, дерево и другие материалы.

Основными конструкционными материалами в машиностроении являются сплавы черных и цветных металлов.

В сопротивлении материалов свойства материалов схематизируются. Моделью называется совокупность представлений, зависимостей, условий, ограничений, описывающих процесс, явление.

## **1.1. Модель материала. Основные гипотезы о деформируемом теле**

*Ключевые слова*

*Однородная сплошная среда, твердое тело, однородность, упругость, шаровая изотропия.*

**Понятие сплошного однородного тела:** все материалы рассматриваются как однородная сплошная среда, независимо от особенностей их микроструктуры. Реальные твердые тела дискретны, прерывисты в своем строении. Прочность твердого тела обусловлена силами сцепления между материальными частицами. Твердое тело наделяется свойством сплошности, непрерывности и однородности. *Однородность – совпадение свойств тела в разных объемах.* Тело считается однородным. Размеры конструкции неизмеримо превышают размеры кристаллических зерен. Свойства сплошности, однородности позволяют использовать анализ бесконечно малых величин и методы математического анализа.

При решении большинства задач в сопротивлении материалов среда считается совершенно упругой. Свойства тела восстанавливать свои первоначальные размеры называется упругостью.

**Шаровая изотропия** означает, что твердое тело имеет одинаковые механические свойства во всех направлениях. Реальное твердое тело этим свойством не обладает, тела анизотропны, т.е. тела редко обладают шаровой изотропией. Отдельно взятый кристалл металла анизотропен, и все же материал можно рассматривать изотропным, так как в его объеме содержится большое количество хаотически расположенных кристалликов. Встречаются и анизотропные тела: дерево, бумага, стекло и др. Расчетные формулы в сопротивлении материалов исходят из свойств шаровой изотропии, они применимы, так как характеристики материала получаются экспериментальным путем.



## **1.2. Модель формы. Классификация тел (элементов конструкций) по геометрическому признаку**

*Ключевые слова*

*Брус, стержень, балка, оболочки, пластины, массивные тела.*

При выборе расчетной схемы вводятся упрощения в геометрию реального объекта.

Для этих целей в сопротивлении материалов существует классификация тел:

1. *Брус, стержень (балка)* – твердое тело, один размер которого (длина) больше двух других размеров, характеризующих поперечное сечение.

2. *Оболочки и пластины* – твердые тела, один размер которых (толщина) значительно меньше остальных размеров. Поверхность, делящая пополам толщину плоскости или оболочки, называется срединной поверхностью. Тела типа оболочки, и пластинки рассчитываются в сопротивлении материалов приближенно, точный расчет производится при помощи теории упругости.

3. *Массивные тела*, все размеры которых есть величины одного порядка. Например, шарик или ролик в подшипниках качения, фундаменты сооружений, подпорные стенки и др. Эти тела методом сопротивления материалов ни точно, ни приближенно не рассчитываются, задачи решаются с помощью теории упругости.

### 1.3. Модель нагружения. Классификация внешних силовых воздействий

*Ключевые слова*

*Сосредоточенные, распределенные, объемные или массовые нагрузки, статическая нагрузка, переменная нагрузка, малоцикловое и многоцикловое нагружение, ударное нагружение.*

I. По характеру приложения внешние силовые воздействия на элементы конструкции подразделяют на три группы: 1) сосредоточенные нагрузки (силы); 2) распределенные нагрузки (силы); 3) объемные или массовые силы.

*Сосредоточенные нагрузки* – нагрузки (рис. 1.2), действующие на площадках, площадь которых пренебрежимо мала по сравнению с поверхностью детали (например, давление шарика шарикоподшипника на вал, давление колеса на рельсы и т.п.).

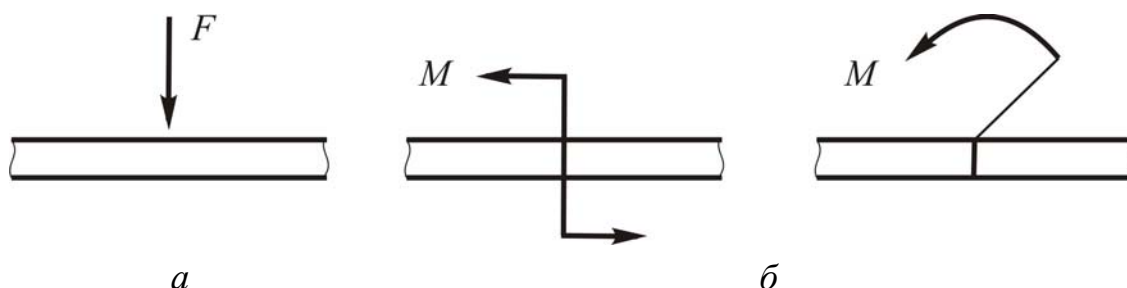


Рис. 1.2. Сосредоточенные нагрузки:

*a* – сила (размерность Н, кН, МН), *б* – пары сил (размерность Н·м, кН·м, МН·м)

*Распределенные нагрузки* по длине (рис. 1.3, 1.4) или по значительным участкам поверхности (рис. 1.5, например, давление воздуха на крыло самолета, давление жидкости или газа на стенки сосуда и т.п.).

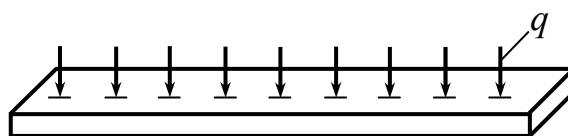


Рис. 1.3. Нагрузка, распределенная по длине

*q* – интенсивность нагрузки (размерность интенсивности Н/м, кН/м или МН/м)

Пример – погонная (на единицу длины) сила тяжести.

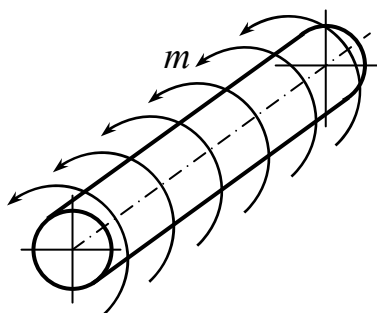


Рис. 1.4. Распределенная по длине пара сил

$m$  – интенсивность момента (размерность Н·м/м или МН·м /м)

Например, момент трения в подшипнике скольжения.

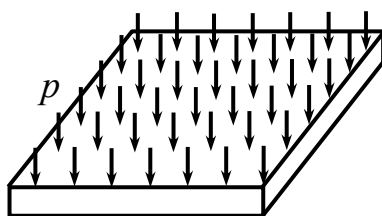


Рис. 1.5. Нагрузка, распределенная по поверхности

$P$  – давление (размерность давления Н/м<sup>2</sup> (Паскаль), МН/м<sup>2</sup> или МПа)

*Объемные (массовые) силы*, приложенные к каждой частице объема (массы) материала (например, силы тяжести, инерционные силы, электромагнитные силы и т.п.).

Размерность объемных сил Н/м<sup>3</sup> или МН/м<sup>3</sup>.

II. По характеру действия нагрузки разделяют на стационарные (постоянные, статические) и нестационарные (переменные).

*Статическая нагрузка* возрастает от нуля до своего номинального значения и остается постоянной во всем процессе нагружения. Статические нагрузки прикладываются постепенно так, что не возникает заметных ускорений, дополнительных сил инерции.

Переменная нагрузка – нагрузка, изменяющаяся во времени. Наиболее важный класс нестационарных нагрузок – нагрузка

при циклическом нагружении. Если циклы образуются за счет запуска и остановки машины, то нагружение обычно не превышает  $10^4 - 10^5$  циклов, и такое нагружение называется малоцикловым. При нагружении, связанным с упругими колебаниями элементов конструкции, число циклов нагружения часто превышает  $10^5 - 10^6$  циклов (многоцикловое нагружение). Обычно частота нагрузки при многоцикловом нагружении составляет  $10^2 - 10^4$  Гц, при малоцикловом нагружении 0,3 Гц.

Часто встречается динамическое ударное нагружение (соударения элементов конструкций, взрывное нагружение и т.п.). Ударное нагружение характеризуется очень высокой скоростью возрастания нагрузки, что влияет на характеристики деформирования материала.

III. Модели нагружения должны также учитывать воздействие полей и сред: дилатационные воздействия (тепловые, нейтронные, водородные), воздействия коррозионно-активных сред.

Итак, модели нагружения представляют собой схематизацию внешних нагрузок по величине, по распределению во времени, а также по воздействию внешних полей и сред. В курсе сопротивления материалов рассматривают детерминированные нагрузки, о которых все известно.

### **Модели разрушения**

Модели разрушения представляют собой условия, связывающие интенсивность внешних воздействий в момент разрушения с характеристиками прочности материала. Обычно рассматриваются четыре модели разрушения в зависимости от условия нагружения: 1) статического разрушения; 2) длительного статического разрушения; 3) малоциклового разрушения; 4) усталостного разрушения.

## 1.4. Внешние и внутренние силы. Напряжения как мера интенсивности внутренних сил

*Ключевые слова*

*Метод воображаемых сечений, условие неразрывности деформаций, внутренние силы, напряжение, полное, нормальное, касательное напряжения.*

Восприятие внешних сил приводит к появлению сил внутренних, деформации и разрушению. Внутренние силы имеются в теле до приложения внешних сил, они обеспечивают их целостность. Но в сопротивлении материалов мы интересуемся дополнительными внутренними силами, которые возникают в теле в результате приложения внешних сил. Мы не учитываем внутренние силы в теле до приложения внешних сил, ибо деформации и возможности разрушения связаны с приложением внешних сил.

*Для определения внутренних сил служит метод воображаемых сечений. Тело произвольной формы подвержено действию произвольной системы сил и находится в равновесии. Мысленно тело рассежем на 2 части плоскостью (рис. 1.6, а), отбросим одну из частей и рассмотрим равновесие первой части (рис. 1.6, б).*

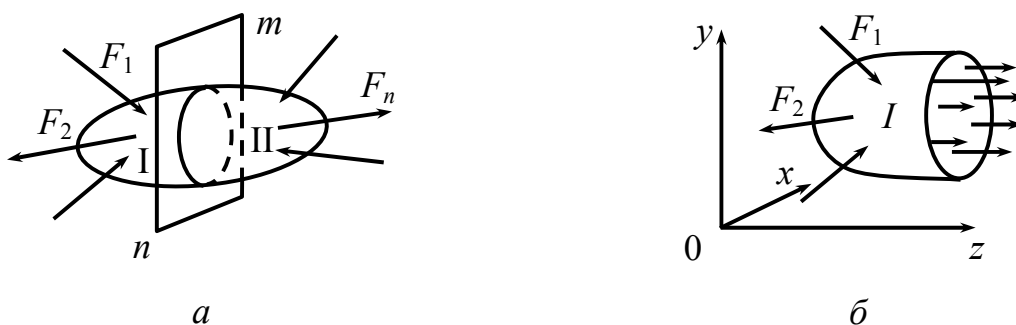


Рис. 1.6. Метод воображаемых сечений

Метод сечений обнаруживает внутренние силы, по отношению к I части эти силы являются внешними.

Закон распределения внутренних сил по сечению неизвестен, но из условия равновесия рассматриваемой части тела можно определить главный вектор сил и главный вектор моментов через их составляющие. Закон распределения внутренних сил может быть установлен, исходя из анализа деформаций. Составим уравнение равновесия I части:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_I^{\text{внеш}} + X^{\text{внут}} &= 0, \\ \sum Y_I^{\text{внеш}} + Y^{\text{внут}} &= 0, \\ \sum Z_I^{\text{внеш}} + Z^{\text{внут}} &= 0, \\ \sum \text{Mom}_x F_I^{\text{внеш}} + \text{Mom}_x R^{\text{внут}} &= 0, \\ \sum \text{Mom}_y F_I^{\text{внеш}} + \text{Mom}_y R^{\text{внут}} &= 0, \\ \sum \text{Mom}_z F_I^{\text{внеш}} + \text{Mom}_z R^{\text{внут}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

*Внутренние силы должны быть распределены по сечению так, чтобы деформированные поверхности сечения при совмещении правой и левой частей тела в точности совпадали. Такое условие в сопротивлении материалов и в теории упругости носит название «условие неразрывности деформаций».*

Вспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил к центру тяжести сечения (рис. 1.7, а).

$$M_0(M_x, M_y, M_z = T) \text{ – главный вектор моментов,} \quad (1.2)$$

$$R_0(N, Q_x, Q_y) \text{ – главный вектор сил.} \quad (1.3)$$

Для суждения о деформациях и опасности разрушения тела нужно знать интенсивность внутренних сил в каждой точке тела, по любому направлению. Мера интенсивности внутренних распределенных сил по площади сечения называется **напряжением**.

Пусть требуется определить интенсивность внутренних сил в точке  $M$  по сечению  $mn$  (рис. 1.7, а). Возьмем элемент площади  $\Delta A$  в окрестности этой точки,  $\nu$  – нормаль к площадке.

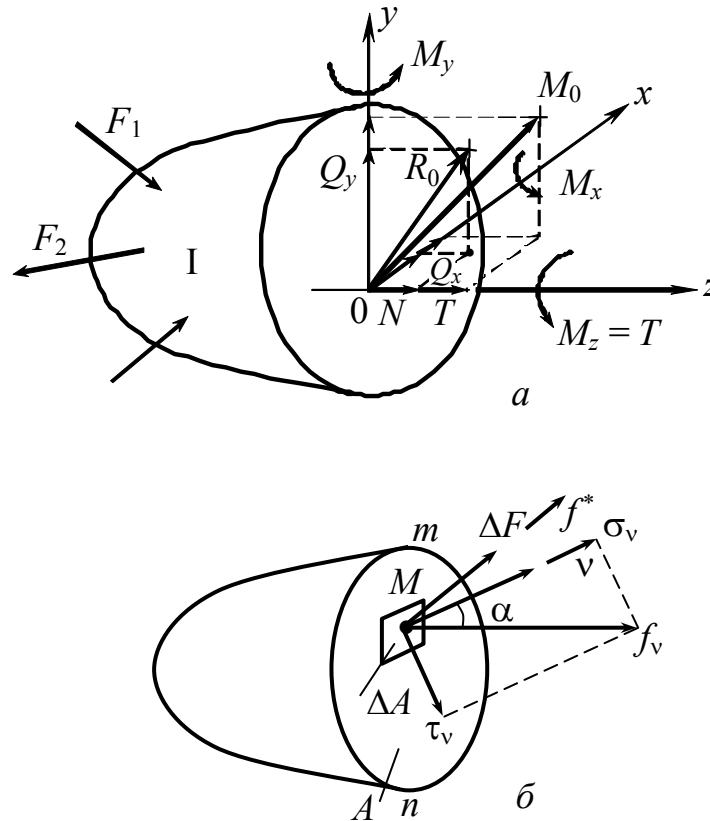


Рис. 1.7. Система внутренних сил:

а – внутренние силы; б –  $\Delta F$  – сила, приложенная к площадке;  $\frac{\Delta F}{\Delta A} = f^*$  – средняя интенсивность внутренних сил в окрестности точки  $M$ , среднее напряжение

Для определения истинной интенсивности внутренних сил в точке  $M$  по заданной площадке осуществим предельный переход:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} = f_\nu \quad - \text{ полное напряжение в точке } M$$

по площадке  $mn$  (вектор). Разлагаем  $f_\nu$  на  $\sigma_\nu$  – нормальное напряжение и  $\tau_\nu$  – касательное напряжение.

$$\sigma_\nu = f_\nu \cdot \cos \alpha, \quad \tau_\nu = f_\nu \cdot \sin \alpha, \quad \sqrt{\sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2} = f_\nu, \quad (1.4)$$

$\sigma_\nu$  связано с линейными деформациями,  $\tau_\nu$  связано с угловыми деформациями.

Если сечение  $mn$  будет перпендикулярно оси  $z$  (рис.1.8, *a*), то полное напряжение  $f_z$  запишется в виде

$$f_z^2 = \sigma_z^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2. \quad (1.5)$$

$$f_z = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}. \quad (1.6)$$

Распределение напряжений по сечению является статически неопределимой задачей (рис.1.8, *б*). Сечение  $A$  перпендикулярно оси  $z$ .

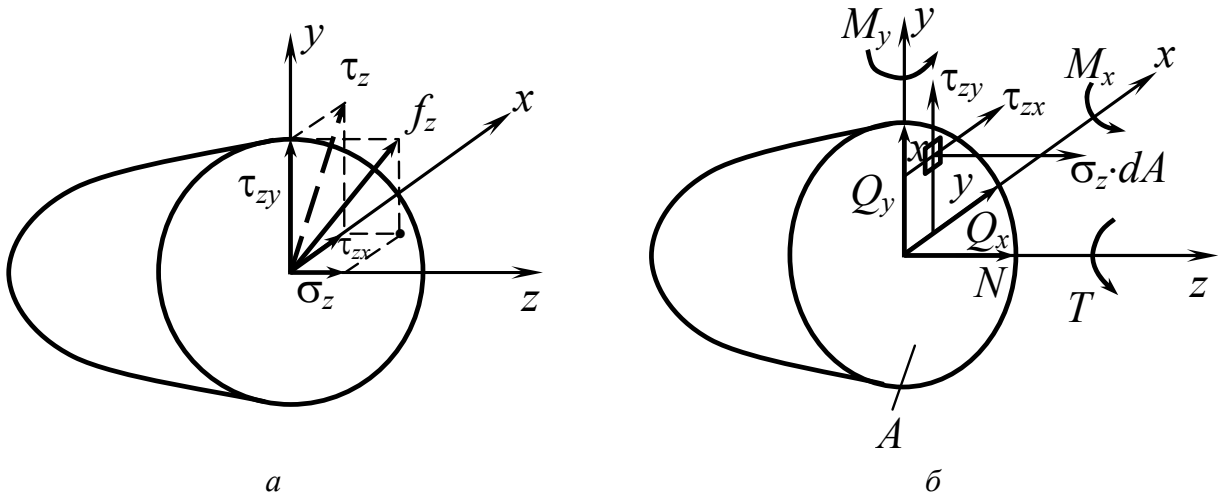


Рис. 1.8. Частный случай расположения сечения  $\perp$  оси  $z$ :

*a* – компоненты полного напряжения, перпендикулярного к оси  $z$ , *б* – внутренние силовые факторы в сечении  $A$ , перпендикулярном оси  $z$

Статическая неопределимость задачи о распределении напряжений по сечению представлена выражениями (1.7):

$$\begin{aligned} N &= \int \sigma_z dA; & Q_x &= \int \tau_{zx} dA; & Q_y &= \int \tau_{zy} dA; \\ M_x &= \int_A \sigma_z y dA; & M_y &= \int_A \sigma_z x dA; & T &= \int_A (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) dA. \end{aligned} \quad (1.7)$$

## 1.5. Понятие о напряженном состоянии

*Ключевые слова*

*Множество площадок, изменение напряжений, совокупность напряжений.*

В каждой точке значения напряжений будут меняться с направлением площадки. Через каждую данную точку можно провести бесконечное множество площадок со своими значениями  $\tau_v, \sigma_v, f_v$ .



*Совокупность напряжений на множестве площадок, проведенных через данную точку, определяет напряженное состояние в точке тела.*

## **1.6. Деформации и перемещения. Принцип начальных размеров**

*Ключевые слова*

*Деформация, перемещения, принцип начальных размеров, абсолютное, относительное удлинения, углы сдвига, деформированное состояние в точке.*

Под действием внешних сил тело деформируется, в результате смещаются точки тела друг относительно друга или относительно опорной поверхности, если тело закреплено (рис. 1.9).

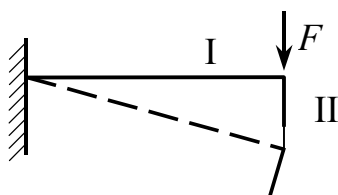


Рис.1.9. Деформации и перемещения тела под действием силы:

I часть деформируется; II часть смещается, перемещается

Перемещения любой точки конструкции являются малыми по сравнению с ее геометрическими размерами.

*Это позволяет сформулировать принцип начальных размеров. Согласно этому принципу при составлении уравнений равновесия конструкция рассматривается как недеформированная, т.е. как имеющая те же геометрические размеры, какие она имела до нагружения.*

Рассмотрим тело, подверженное действию внешних сил (рис. 1.10). Рассмотрим изменение элемента объема, выделенного около точки  $M$ , в процессе деформации.

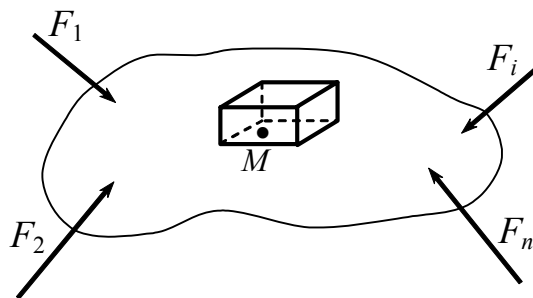


Рис. 1.10. Тело под действием внешних сил

Рассмотрим деформацию элементов параллелепипеда. Деформирование приводит к изменению длин ребер (рис. 1.11), искажению прямых углов между гранями (рис. 1.12), искривлению граней. Если иметь в виду, что элемент объема очень мал, искривлением граней можно пренебречь.

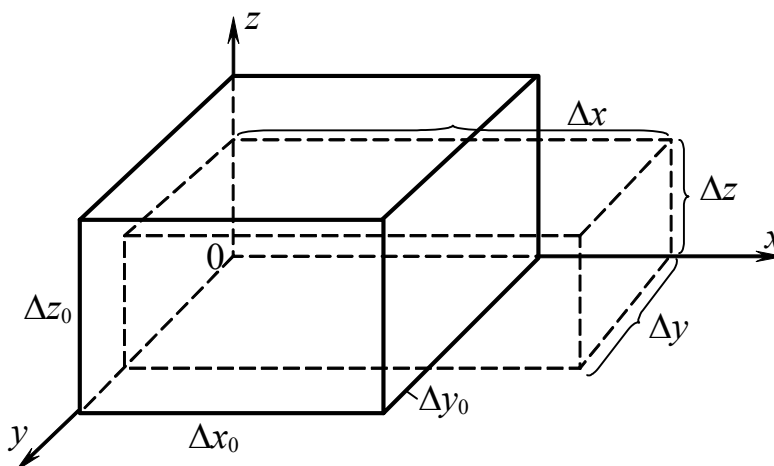


Рис. 1.11. Изменение длин ребер

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x - \Delta x_0 \\ \Delta y - \Delta y_0 \\ \Delta z - \Delta z_0 \end{array} \right\} \text{— абсолютное удлинение (укорочение) длин ребер.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta x - \Delta x_0}{\Delta x_0} = \varepsilon_x^* \\ \frac{\Delta y - \Delta y_0}{\Delta y_0} = \varepsilon_y^* \\ \frac{\Delta z - \Delta z_0}{\Delta z_0} = \varepsilon_z^* \end{array} \right\} \text{— средние линейные деформации.}$$

Для получения истинной характеристики линейной деформации осуществим предельный переход:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - \Delta x_0}{\Delta x_0} = \varepsilon_x, \quad \lim_{\Delta y_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y - \Delta y_0}{\Delta y_0} = \varepsilon_y, \quad \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta z - \Delta z_0}{\Delta z_0} = \varepsilon_z,$$

*это есть истинные линейные деформации в точке тела или просто истинные относительные линейные деформации.  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  суть величины безразмерные, положительные или отрицательные.*

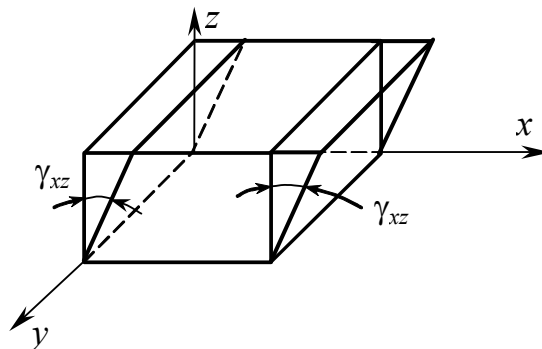


Рис. 1.12. Искажение углов

$\gamma_{xz}$ ;  $\gamma_{yx}$ ;  $\gamma_{zy}$  – УГЛЫ СДВИГА,

$\left. \begin{matrix} \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z \\ \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx} \end{matrix} \right\}$  если эти величины заданы, то они характеризуют

*деформированное состояние в точке тела.*

## 1.7. Простейшие виды напряженного и деформируемого состояния. Растяжение – сжатие.

### Гипотеза Я. Бернулли. Коэффициент Пуассона

*Ключевые слова*

*Плоские поперечные сечения, размерность напряжения, относительные и поперечные деформации, коэффициент Пуассона.*

При решении большинства задач сопротивления материалов используется гипотеза Я. Бернулли, на основании которой принимается, что плоские поперечные сечения в стержне (брусе) до деформации остаются плоскими и после деформации (рис. 1.13).

$\sigma = \frac{F}{A}$  – напряжения распределяются по сечению равномерно (рис. 1.14).

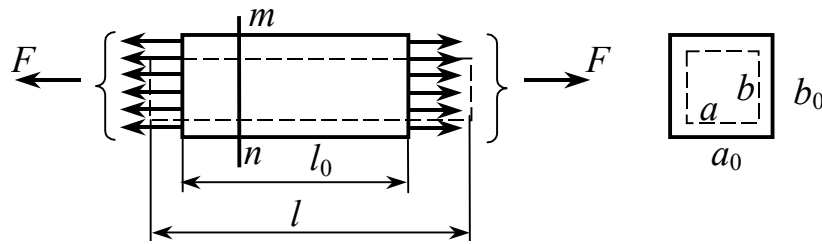


Рис. 1.13. Стержень до и после деформации:

$a_0, b_0$  – размеры сечения до деформации;  $a, b, l$  – размеры стержня после деформации

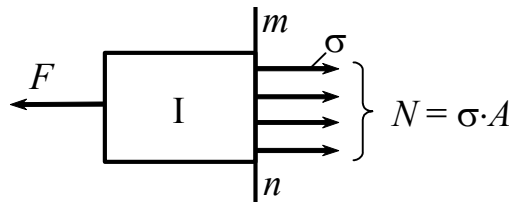


Рис. 1.14. Распределение нормальных напряжений по сечению:

$A$  – площадь сечения  $mn$

$$N = F; \quad N = \int_A \sigma dA = \sigma \cdot A \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{N}{A}. \quad (1.8)$$

Из последнего равенства очевидно, что напряжение имеет размерность силы, деленной на площадь. В Международной системе единиц (СИ) для измерения напряжения (давления) применяется специальная единица – паскаль:  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ . Это очень маленькая величина и при практических расчетах напряжения измеряется в мегапаскалях (МПа):

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 10^6 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Н/мм}^2.$$

В технической литературе напряжение часто измеряют в единицах системы МКС – в килограмм-сила. Связь единиц такова:  $1 \text{ МПа} = 0,1 \text{ кгс/мм}^2$ .

$$\Delta l = l - l_0 \text{ – абсолютная продольная деформация.} \quad (1.9)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \text{ – относительная продольная деформация.} \quad (1.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_{a_0} &= \frac{a - a_0}{a_0} \\ \varepsilon'_{b_0} &= \frac{b - b_0}{b_0} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{— относительные поперечные деформации;} \\ \text{для изотропных материалов они равны: } \varepsilon'_{a_0} = \varepsilon'_{b_0} = \varepsilon'. \end{array}$$

При упругих деформациях  $\varepsilon' = -\nu \cdot \varepsilon$ ,

$$\nu = \left| \frac{-\varepsilon'}{\varepsilon} \right|, \quad (1.11)$$

где  $\nu$  – *коэффициент Пуассона* (безразмерная величина); в начале XIX века назван по имени французского ученого, впервые обратившего внимание на постоянство этого отношения.

Итак, коэффициент Пуассона – это абсолютная величина отношения относительной поперечной и относительной продольной деформации при простом растяжении и сжатии. Коэффициент Пуассона для различных материалов лежит в пределах  $0 \leq \nu \leq 0,5$  (пробка  $\nu = 0$ ; сталь  $\nu = 0,3$ ; резина  $\nu = 0,5$ ).

## 1.8. Сдвиг

*Ключевые слова*

*Деформации сдвига, абсолютный сдвиг, относительный сдвиг, угол сдвига.*

Сдвиги – это деформации, вызывающие изменение формы элемента (рис. 1.15).

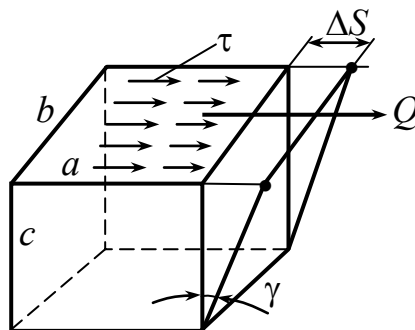


Рис. 1.15. Изменение формы элемента при сдвиге:

$Q$  – сдвигающая сила;  $\Delta S$  – абсолютный сдвиг

$$\tau \cdot ab = Q, \quad (1.12)$$

$$\tau = \frac{Q}{a \cdot b} = \frac{Q}{A}. \quad (1.13)$$

$$\gamma = \frac{\Delta S}{c} - \text{относительный сдвиг, угол сдвига}. \quad (1.14)$$

## 1.9. Связь между напряжениями и деформациями.

### Закон Гука. Принцип независимости действия сил

#### Ключевые слова

*Диаграмма растяжения, упругие и пластические деформации, предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести, условный предел текучести, предел прочности, модуль упругости при растяжении, модуль упругости при сдвиге, условие пропорциональности между перемещениями и внешними силами.*

Физическая связь:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma(\varepsilon), \\ \tau &= \tau(\gamma). \end{aligned}$$

Характер этой взаимосвязи зависит от состояния тела, упругого или пластического, сообразно говоря, от упругой или пластической деформации. В упругом состоянии существует взаимно однозначная зависимость между напряжениями и деформациями. Упругая деформация появляется при действии нагрузки и исчезает полностью после ее снятия. В пластическом состоянии деформация не исчезает полностью после снятия нагрузки. Применительно к реальному состоянию эти понятия не могут быть абсолютными. Наряду с упругими существуют пластические деформации при малых нагрузках деформации упругие, при больших – пластические.

Рассмотрим условную диаграмму напряжений образца из углеродистой стали (рис.1.16).

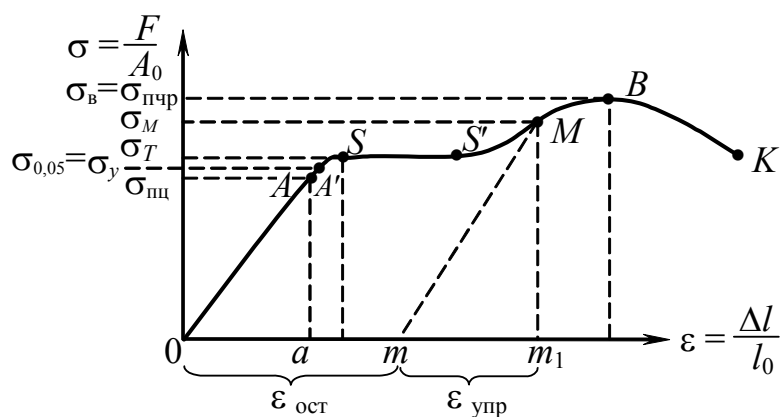


Рис. 1.16. Условная диаграмма напряжений

$0A$ ,  $0a$  – упругая деформация, напряжение, соответствующее точке  $A$ , называется пределом пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}}$  – это наибольшее напряжение, до достижения которого соблюдается закон Гука.

$\sigma_y$  – предел упругости – наибольшее напряжение, до достижения которого в образце не возникает остаточных деформаций.

$SS'$  – площадка текучести, соответствующая пластической деформации; напряжение в точке  $S$  называется пределом текучести –  $\sigma_T$ .

$Mm \parallel 0A$ .

$0m_1$  – полная деформация, соответствующая напряжению  $\sigma_M$ .

$0m$  – остаточная пластическая деформация, соответствующая напряжению  $\sigma_M$  –  $\varepsilon_{\text{ост}}$ .

$mm_1$  – упругая часть деформации –  $\varepsilon_{\text{упр}}$ .

Точка  $B$  соответствует началу разрушения и началу образования шейки в образце.

Точка  $K$  соответствует разрушению образца.

Пределом прочности  $\sigma_{\text{пч}} = \sigma_B$  называется напряжение, соответствующее наибольшей силе при разрушении образца, отнесенной к первоначальной площади поперечного сечения,

т.е. 
$$\sigma_{\text{пч}} = \frac{F_{\text{max}}}{A_0}.$$

Более подробное рассмотрение основных особенностей диаграммы растяжения будет произведено при выполнении лабораторных работ по определению механических характеристик материалов при растяжении.

Детали машин должны работать в пределах упругой деформации.

**Схематизация кривых деформирования.** Для построения приближенных моделей материала часто используют схематизированные кривые деформирования (1.17, а).

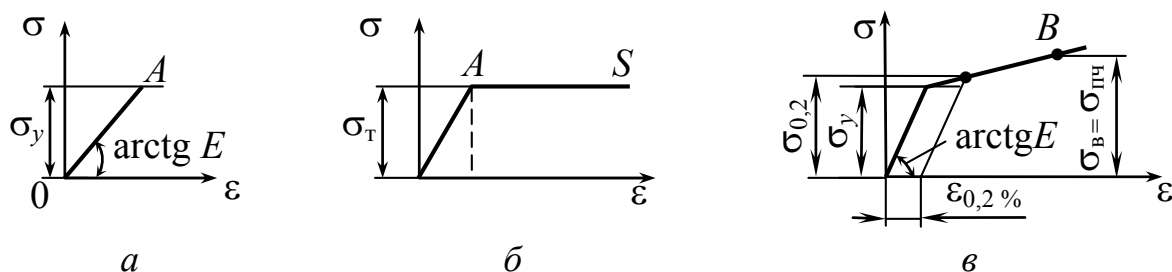


Рис. 1.17. Виды диаграмм растяжения:

а –  $OA$  – упругая деформация; б –  $AS$  – идеальная пластичность;  
в – схема диаграммы деформирования с линейным упрочнением

*В пределах упругих деформаций связь между напряжением и деформацией подчиняется закону Гука – напряжение пропорционально относительной деформации.*

$$\sigma = \varepsilon E \text{ – закон Гука для растяжения, сжатия.} \quad (1.15)$$

$$\tau = \gamma G \text{ – закон Гука для сдвига.} \quad (1.16)$$

*$E$  – модуль упругости при растяжении, сжатии I рода.*

*$G$  – модуль упругости при сдвиге, II рода.*

Модули упругости материала  $E$ ,  $G$  определяются опытным путем, их размерность в Па или МПа.

*$E$ ,  $G$ ,  $\nu$  – основные упругие характеристики материалов.*

*К системам, в которых соблюдается условие пропорциональности между перемещениями и внешними силами, можно применять принцип независимости действия сил. Согласно этому принципу результат одновременного действия нескольких сил, приложенных к телу, равен сумме результатов воздействия каждой силы в отдельности, независимо от порядка приложения сил. Принцип независимости действия сил применяется при определении внутренних сил, а также при определении деформаций и перемещений.*



## 1.10. Принцип Сен-Венана. Схемы простейших расчетов на растяжение и сжатие

*Ключевые слова*

*Равномерное распределение деформаций и напряжений, зависимость напряжений от детального способа приложения внешних нагрузок, проверочный расчет, коэффициент запаса, предельное напряжение, проектировочный расчет, жесткость сечения при растяжении, сжатии.*

При простом равномерном растяжении или сжатии предполагается равномерное распределение деформаций и напряжений (рис.1.18). Зоны, прилегающие к торцам, составляют исключение, так как напряжения и деформации в них неоднородны. Конкретное приложение сил к торцам стержня сказывается на распределении напряжений и деформаций в пределах расстояния от торцов, не превышающего размеров поперечного сечения, что доказывается в теории упругости. Это положение называется принципом Сен-Венана (в точках твердого тела, достаточно удаленных от мест приложения внешних нагрузок, напряжения весьма мало зависят от детального способа осуществления этих нагрузок).

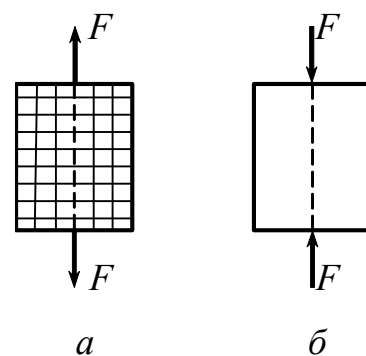


Рис. 1.18: а – растяжение;  
б – сжатие

## 1.11. Схемы расчетов на прочность и жесткость при растяжении и сжатии. Допускаемые напряжения и коэффициенты запаса прочности

1) Произвести проверочный расчет.

Даны  $F$  – нагрузка,  $A$  – площадь поперечного сечения, указан материал.

$$\sigma = \frac{F}{A},$$

$$\sigma \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}, \quad (1.17)$$

где  $\sigma_{\text{пред}}$  – предельное состояние материала;  $[n]$  – коэффициент запаса прочности, назначается с учетом характера действия сил, вида материала, степени ответственности конструкции и т.д.

В некоторых случаях коэффициент  $n$  берется из опыта инженера-конструктора или из табл.1.1. Обычно при статическом действии сил  $[n] = 1,5-2,5$ .

Таблица 1.1

Количественные значения запасов прочности

Отрасль, тип технической системы	Диапазон значений
Авиационная техника	1,25–2,0
Оборудование и трубопроводы атомных энергетических установок	1,07–3,0
Металлургическое оборудование	2,07–8,0
Подвижной состав железных дорог	3,33–5,56
Подъемно-транспортные машины	1,3–1,6
Сосуды и аппараты, работающие под давлением	1,5–4,0

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред.}}}{[n]} - \text{условие прочности, схема проверочного расчета.}$$

Опыты с образцами, проводимые в различных условиях, позволяют изучить ряд свойств материалов. Данные экспериментов позволяют строить феноменологические (т.е. такие теории, в которых описывается поведение материалов под внешним воздействием, обнаруживаемое в макроскопическом опыте без объяснения этого поведения физическими законами) теории связей напряженно-деформированного состояния и теории предельного состояния материала.

Рассмотрим два вида предельных состояний. При определении одним общим термином двух понятий (возникновения пластической

деформации и разрушения) представляется удобным использовать термин *предельное состояние*.

Для каждого конкретного случая интерес представляет лишь одно из двух указанных предельных состояний. Если в материале до разрушения возникают заметные пластические деформации, то именно это возникновение будем считать предельным состоянием материала, тем более, что отделить вязкое разрушение от течения часто вполне допустимо. Если же разрушение наступает без предшествующих заметных пластических деформаций, то в качестве предельного состояния материала будем считать разрушение. Итак, предельные состояния материалов равны:

$\sigma_{\text{пред.}} = \sigma_{\epsilon} = \sigma_{\text{пч}}$  – для хрупких материалов (предел прочности) –  $n_B = n_{\text{пч}}$ .

$\sigma_{\text{пред.}} = \sigma_T$  – для пластичных материалов (предел текучести) –  $n_T$ .

$\sigma_{\text{пред.}} = \sigma_{0,2}$  – для материалов, не имеющих ярко выраженной площадки текучести;

$\sigma_{0,2}$  – предел текучести (условный) – напряжение, при котором относительное остаточное удлинение образца равно 0,2 %.

Обычно пределы текучести составляют  $\sigma_{0,2} = (0,5 - 0,9)(\sigma_{\text{пч}} = \sigma_B)$ , причем большие значения относятся к пределу прочности для легированных сталей и титановых сплавов.

$n_{\text{пч}} = n_B > n_T$ , так как при пределе прочности металл разрушается, а при пределе текучести он течет, не разрушаясь.

2) Даны  $F$  – нагрузка, указан материал, тогда определяем  $A$  – площадь поперечного сечения.

**Выполним проектировочный расчет.**

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]} \text{ – схема проектировочного расчета.} \quad (1.18)$$

3) Даны  $A$ ;  $[\sigma]$  для данного материала; **необходимо определить  $F$ .**

$$F \leq A \cdot [\sigma]. \quad (1.19)$$

4) Расчет на жесткость. Даны  $F$  – нагрузка,  $l$  – длина стержня,  $E$  – модуль упругости,  $A$  – площадь и  $[\Delta l]$  – допускаемое удлинение (укорочение). Произвести расчет на жесткость при растяжении, сжатии.

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad \sigma = \frac{F}{A}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \frac{F}{A} = \frac{\Delta l}{l} \cdot E.$$

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{EA} \text{ – закон Гука при растяжении.} \quad (1.20)$$

$E \cdot A$  – жесткость сечения при растяжении, сжатии.

$$\Delta l = \frac{F}{\frac{E \cdot A}{l}} = \frac{F}{C}, \quad C \text{ – жесткость в механике.}$$

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} \leq [\Delta l],$$

где  $[\Delta l]$  – допускаемое удлинение (укорочение), определяется из условий эксплуатации.

## 1.12. Определение потенциальной энергии деформации

*Ключевые слова*

*Работа внешних и внутренних сил, потенциальная энергия деформации, удельная потенциальная энергия деформации.*

Внешние силы в процессе деформации совершают положительную работу (перемещение происходит в направлении действия внешних сил). Внутренние силы совершают отрицательную работу (либо перемещение происходит в направлении, обратном действию внутренних сил).

$W_F$  – работа внешних сил.

$W_{\text{вн.}}$  – работа внутренних сил.

$$W = U + K.$$

За счет работы внешних сил происходит изменение (увеличение, накопление) потенциальной энергии деформации (1.19).

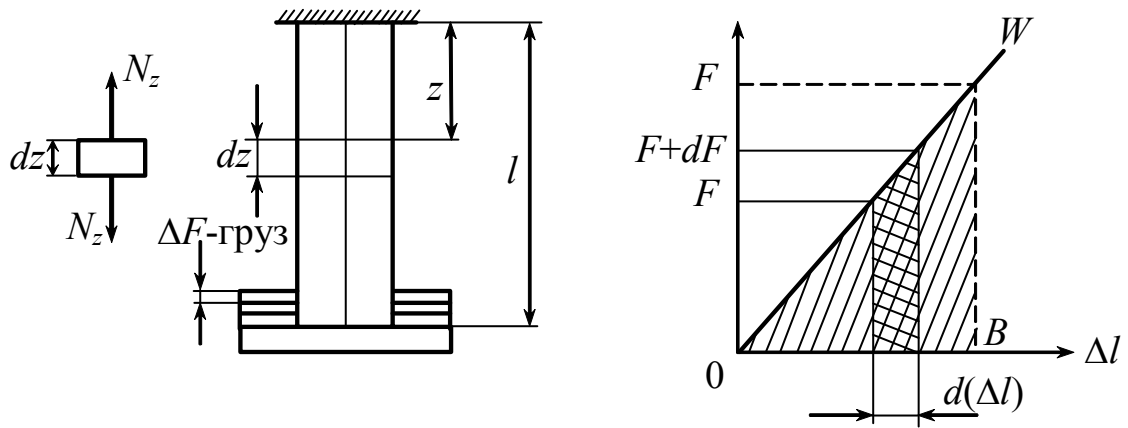


Рис. 1.19

Поскольку на пути  $\Delta l$  сила  $F$  не остается постоянной, затраченная работа должна быть определена интегрированием по элементам участка пути.

$$dW_F = (F + dF) \cdot d(\Delta l) = F \cdot d(\Delta l), \quad (1.21)$$

где  $\Delta l = \frac{F \cdot l}{EA}$ ,

$$W_p = \int_0^F F d\left(\frac{F \cdot l}{EA}\right) = \frac{F^2 l}{2EA} = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l.$$

Если  $W_p = U$ , то удельная потенциальная энергия деформации

будет равна  $u = \frac{U}{V}$ , где  $V = A \cdot l$ , тогда  $u = \frac{F^2 l}{2EA \cdot Al} = \frac{\sigma^2}{2E}$ .

Накопленная при деформировании потенциальная энергия обнаруживает себя, так как при снятии грузов стержень укорачивается, происходит подъем оставшегося груза – эта работа происходит за счет потенциальной энергии деформации. Если бы между силой и деформацией не было прямой пропорциональности, был бы вместо 1/2 другой коэффициент, в частности, при постоянной силе он равен единице.

Если  $N$  – меняется вдоль оси стержня

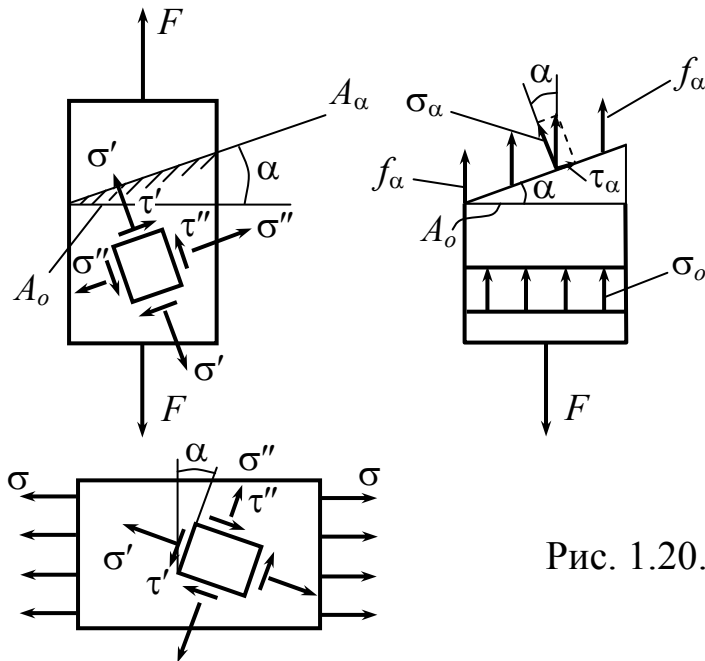
$$dU = \frac{N_z^2 dz}{2EA} \text{ – по участкам; } U = \sum_1^n \int_0^{l_i} \frac{N_{z_i}^2 dz_i}{2E_i A_i} \text{ – для всего стержня, (1.22)}$$

здесь  $n$  – число участков.

### 1.13. Напряжения в наклонных сечениях бруса при растяжении, сжатии

*Ключевые слова*

*Максимальные нормальные и касательные напряжения на наклонных площадках, закон парности касательных напряжений.*



$$f_{\alpha} \cdot A_{\alpha} = F.$$

$$f_{\alpha} = \sqrt{\sigma_{\alpha}^2 + \tau_{\alpha}^2}.$$

$$f_{\alpha} = \frac{F}{A_{\alpha}} = \frac{F}{\frac{A_0}{\cos \alpha}} =$$

$$= \frac{F}{A_0} \cdot \cos \alpha = \sigma_0 \cdot \cos \alpha.$$

Рис. 1.20. Напряжения в наклонных сечениях бруса

$$\sigma_{\alpha} = f_{\alpha} \cdot \cos \alpha = \sigma_0 \cdot \cos^2 \alpha. \quad (1.23)$$

$$\tau_{\alpha} = f_{\alpha} \cdot \sin \alpha = \sigma_0 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sigma_0 \cdot \sin 2\alpha. \quad (1.24)$$

Пользуясь методом сечений, пришли к выводу, что при

$$\alpha = 0 \quad (f_{\alpha})_{\max} = \sigma_0 = (\sigma_{\alpha})_{\max}.$$

$$\alpha = 90^{\circ} \quad (f_{\alpha})_{\min} = 0 = (\sigma_{\alpha})_{\min}.$$

$$(\tau_{\alpha})_{\min} = 0. \quad (\tau_{\alpha})_{\max}_{\alpha=45^{\circ}} = \frac{1}{2} \sigma_0.$$

Как видим, в продольном сечении бруса никаких напряжений не возникает.

Касательное напряжение  $\tau_{\alpha}$  имеет наибольшее значение на площадках, наклоненных под углом  $45^{\circ}$  к оси растянутого

стержня. Переход от произвольной площадки  $\alpha$  к площадке  $(\alpha + 90^\circ)$  не сказывается на абсолютной величине касательного напряжения  $\tau_\alpha$ ,

$$\left| \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\alpha \right| = \left| \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2(\alpha + 90) \right|.$$

*Следовательно, на двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения должны быть равными. Это условие является общей особенностью любого напряженного состояния и носит название закона парности касательных напряжений.*

#### **1.14. Построение эпюры нормальной силы при растяжении или сжатии бруса**

*Ключевые слова*

*Нормальная сила, эпюра нормальной силы, подвижная система координат, дифференциальная зависимость между нормальной силой и интенсивностью распределенной нагрузки.*

Брус находится в равновесии под действием заданной системы внешних сил  $(F_{ez}) = (F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n)$ .

При растяжении или сжатии в поперечных сечениях бруса возникает только нормальная сила  $N$ , а прочие внутренние силовые факторы равны нулю. Поэтому из шести уравнений равновесия для отсеченной части бруса пять удовлетворяются тождественно, а из шестого находится величина нормальной силы:

$$\sum Z = N + \sum (F_{ez})^* = 0, \quad (1.25)$$

где  $\sum (F_{ez})^*$  – сумма проекций сил на ось координат;

$N$  – нормальная сила – проекция главного вектора внутренних сил на ось  $z$ ;

$(F_{ez})^*$  – внешние силы, действующие на отсеченную часть бруса.

*Нормальную силу, соответствующую деформации растяжения, в сопротивлении материалов принято считать положительной, а соответствующую деформации сжатия – отрицательной.*

При растяжении нормальная сила  $N$  направлена от сечения, а при сжатии – к сечению.

Нормальная сила в каком-либо поперечном сечении бруса численно равна, а по направлению противоположна сумме проекций на ось бруса всех внешних сил, расположенных по одну сторону от мысленно проведенного сечения, т.е. сил, действующих на отсеченную часть бруса,

$$\text{или} \quad N = -\sum (F_{ez})^* . \quad (1.26)$$

*График закона изменения нормальной силы по длине бруса называется эпюрой нормальной силы ЭН.* Аргументом при построении ЭН является координата поперечного сечения бруса  $z$ , а функцией – нормальная сила  $N = N(z)$ . Не всегда можно составить одно аналитическое выражение для этой функции, справедливое при всех значениях координаты  $z$ , т.е. справедливое для всего бруса. В этом случае приходится разбивать брус на участки, для каждого из которых находится свое выражение  $N(z)$ .

Рассмотрим на примерах построение эпюры нормальной силы.

**Пример 1.** Построить эпюру нормальной силы для бруса (рис.1.21).

Брус под действием внешних сил находится в равновесии, так как все силы лежат на одной прямой – оси бруса:

$$\sum Z = -F + 2F - 3F + 2F = 0.$$



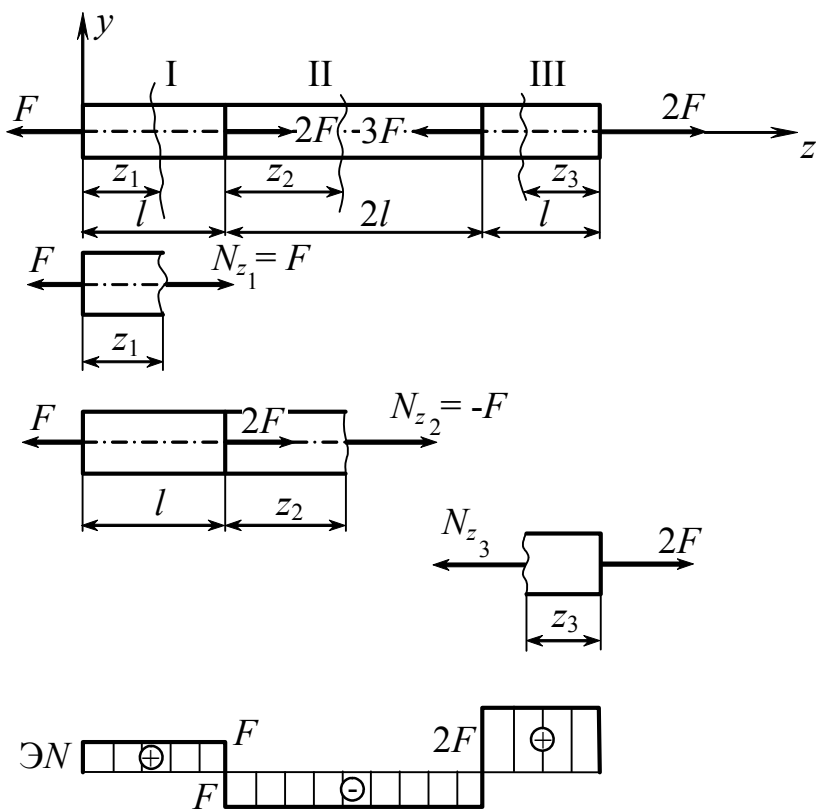


Рис. 1.21

Делим брус на три участка, границами считаем сечения, в которых приложены внешние силы. При построении эпюры нормальных сил удобно пользоваться подвижной системой осей координат, центр которой помещается в начале каждого участка. Тогда координата  $z_i$  на каждом участке бруса отсчитывается от начала этого участка.

Отбрасываем одну из частей бруса, например правую, заменим действие отброшенной части неизвестной нормальной силой  $N$ , которую удобно направлять в сторону от рассматриваемого сечения, т.е. считать положительной. Тогда условие равновесия отсеченной части бруса дает величину и соответствующий знак нормальной силы.

$$\text{I участок } 0 < z_1 < l: \quad \sum Z = -F + N = 0, \quad N = F.$$

$$\text{II участок } 0 < z_2 < 2l: \quad \sum Z = -F + 2F + N = 0, \quad N = -F.$$

$$\text{III участок } 0 < z_3 < l: \quad \sum Z = -F + 2F - 3F + N = 0, \quad N = 2F.$$

Знак  $\ominus$  в ответе, полученном на II участке, показывает, что сила  $N$  должна быть направлена не так, как мы предполагали, а наоборот. Следовательно, нормальная сила на II участке направлена к сечению и вызывает деформацию сжатия. По принятому правилу знаков ее следует считать отрицательной.

Следует учесть, что проще рассматривать ту часть бруса, на которую действует меньшее число внешних сил.

Легко видеть, что на каждом участке сила  $N$  постоянна на всем протяжении участка, так как координата  $z_i$  не входит ни в одно уравнение равновесия. Обычно ось эпюры обозначают тонкой линией, а очертания эпюры – линиями пожирнее. Эпюру принято штриховать перпендикулярно к ее оси. Величину нормальной силы на каждом участке бруса отложим по оси ординат в выбранном масштабе: положительное значение (растяжение) – вверх, а отрицательное (сжатие) – ниже оси.

Как видно из ЭН, в местах приложения сосредоточенных внешних сил получаются “скачкообразные” изменения ординат – “скачки”. Величина “скачка” равна приложенной в соответствующем сечении внешней сосредоточенной силе.

Построение эпюры нормальной силы упрощается, если использовать дифференциальную зависимость между нормальной силой и интенсивностью распределенной нагрузки  $q_z$ , направленной по оси бруса. Она позволяет определять (без записи аналитического выражения) характер изменения  $N(z)$ . Тогда создается возможность более простого построения ЭН по точкам – значениям силы  $N$  в начале и конце каждого участка бруса.

*Установим дифференциальную зависимость между нормальной силой и интенсивностью продольной распределенной нагрузки.*

Пусть брус находится в равновесии под действием системы внешних сил, расположенных вдоль его оси. Ниже показана эпюра интенсивности продольной распределенной нагрузки  $\mathcal{E}q_z$  (1.22, а).

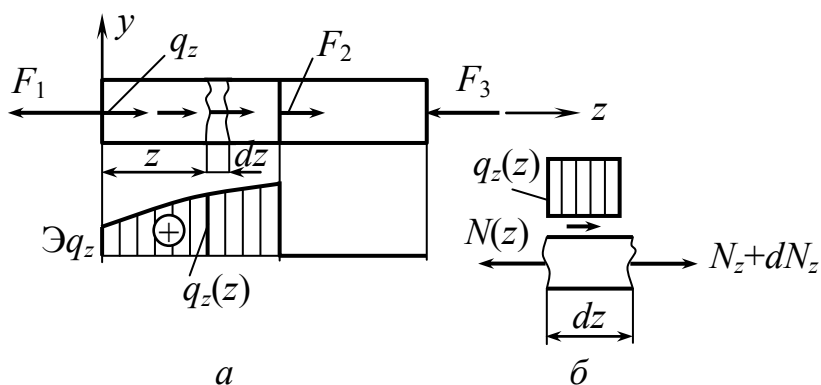


Рис. 1.22

Выделим двумя смежными сечениями на расстоянии  $z$  от начала участка бесконечно малый элемент бруса длиной  $dz$  (1.22, б).

Действие соседних отброшенных частей бруса заменим нормальными силами, возникающими в соответствующих сечениях. Значения нормальных сил в смежных сечениях, отстоящих на расстояние  $dz$  друг от друга, могут различаться лишь на бесконечную малую величину силы  $dN$ .

Условие равновесия элемента

$$\sum Z = -N_z + q_z dz + (N_z + dN_z) = 0,$$

отсюда

$$\boxed{\frac{dN_z}{dz} = -q_z}. \quad (1.27)$$

Итак, первая производная от нормальной силы по координате поперечного сечения  $z$  равна интенсивности продольной распределенной нагрузки (направленной по оси бруса), взятой с обратным знаком.

Напомним геометрический смысл первой производной: если функция  $N = N(z)$  изображена своим графиком (эпюрой), то

$$dN_z / dz = \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между осью координаты  $z$  и касательной к эпюре в данной ее точке, отсчитываемой от положительного направления оси  $z$  в направлении против часовой стрелки.

Из дифференциальной зависимости после интегрирования

$$N(z) = N(0) - \int_0^z q_z \cdot dz, \quad (1.28)$$

где  $N(0)$  – постоянная интегрирования – значение нормальной силы в начале участка (при  $z = 0$ ).

Интеграл  $\int_0^z q_z \cdot dz$  численно равен площади, ограниченной частью функции  $q_z = q_z(z)$  в интервале  $[0, z]$  и осью координаты  $z$ .

Таким образом, эпюра интенсивности продольной распределенной нагрузки  $\Delta q_z$  с точностью до знака определяет изменение тангенса угла наклона касательной к эпюре нормальных сил  $\Delta N$ ; с другой стороны, площадь  $\Delta q_z$  на каком-либо участке также с точностью до знака показывает изменение величины нормальной силы на длине этого участка.

**Пример 2.** Для стержня рис.1.23 построить эпюры нормальных сил, напряжений и деформаций. Найти значение предельной длины стержня.

Определяем  $N_z$  методом сечений  $N_z = F + \gamma A(l - z)$ , при этом  $z$  изменяется от 0 до  $l$ . Зная зависимость изменения продольной силы по длине стержня, можно определить нормальные напряжения в любом сечении стержня, т.е.  $\sigma = \frac{N_z}{A} = \frac{F + \gamma A(l - z)}{A} = \frac{F}{A} + \gamma(l - z)$ .

Эта зависимость, так же как и для нормальной силы, линейная, поэтому строим эпюру по двум точкам при  $z = 0$  и  $z = l$ . Эпюра  $\sigma$  представлена на рис. 1.23, *e*.

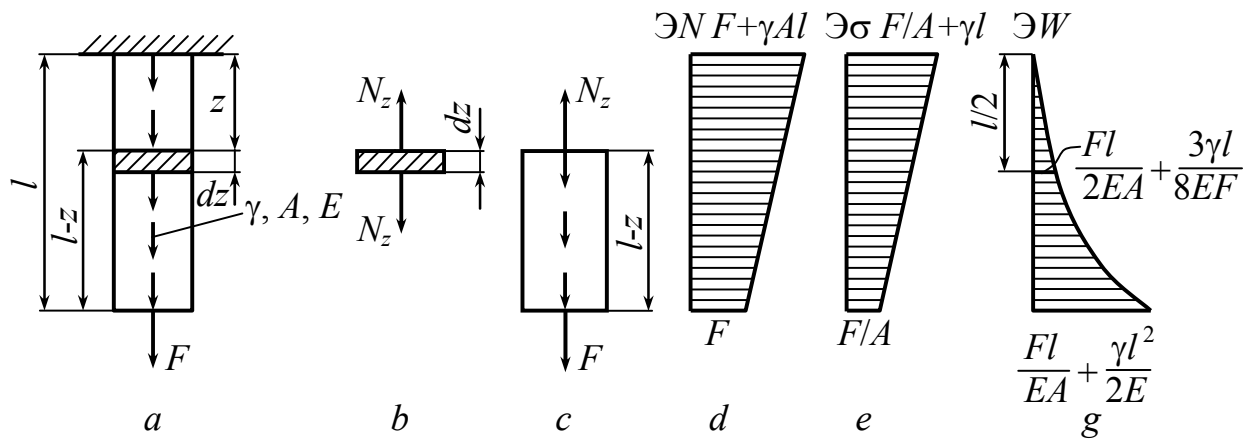


Рис. 1.23

Определим деформацию сечения  $z$  стержня с учетом собственного веса. Выделим часть стержня длиной  $dz$  (рис. 1.23, а, б). Используя закон Гука, можно определить

$$\Delta(dz) = \frac{N_z dz}{EA} = \frac{[F + \gamma A(l - z)] dz}{EA},$$

тогда перемещение сечения  $z$  стержня запишется в следующем виде:

$$W_z = \int_0^z \Delta(dz) = \int_0^z \frac{[F + \gamma A(l - z)] dz}{EA} = \frac{Fz}{EA} \Big|_0^z + \frac{\gamma A l z}{EA} \Big|_0^z - \frac{\gamma A z^2}{2EA} \Big|_0^z.$$

Это выражение показывает, что зависимость для определения перемещений сечений стержня будет квадратичной относительно координаты  $z$ , поэтому для построения эпюры перемещений вычислим

$W$  при  $z = 0$ ,  $z = \frac{l}{2}$  и  $z = l$ , т.е. не менее, чем в трех точках.

При  $z = 0$   $W_z = 0$ ; при  $z = \frac{l}{2}$   $W_z = \frac{Fl}{2EA} + \frac{\gamma l^2}{2E} - \frac{\gamma l^2}{8E} = \frac{Fl}{2EA} + \frac{3\gamma l^2}{8E}$ ;

при  $z = l$   $W_z = \frac{Fl}{EA} + \frac{\gamma l^2}{E} - \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{Fl}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E}$ .

Анализ эпюры напряжений (рис. 1.2, *e*) показывает, что максимальное напряжение в стержне возникает при  $z = 0$  и равно

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \gamma l.$$

Оно должно быть из условия прочности меньше допускаемого значения

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \gamma l \leq [\sigma],$$

или  $\frac{F}{A} \leq [\sigma] - \gamma l$ , тогда

$$A \geq \frac{F}{[\sigma] - \gamma l}.$$

Если  $[\sigma] = \gamma l$ , то  $A = \infty$ . При  $F = 0$   $l_{\text{разр}} = \frac{[\sigma_{\text{пч}}]}{\gamma}$ .

**Пример 3.** Для стержня (рис. 1.24, *a*) построить эпюры нормальных сил –  $N$ , напряжений –  $\sigma$  и перемещений вдоль продольной оси –  $W$ .

Используя метод сечений (рис. 1.24, *б*, *в*), определяем внутренние силы  $N_z$  для каждого участка стержня.

**I участок**  $0 \leq z_1 \leq l$ .

$$\sum Z = -N_{z_1} + F/l(l - z_1) + F/l \cdot l + F = 0, \text{ отсюда } N_{z_1} = 3F - F \frac{z_1}{l}.$$

Зависимость продольной силы от координаты  $z_1$  на этом участке линейная, поэтому для построения эпюры  $N$  вычисляем ее значения при  $z_1 = 0$  и  $z_1 = l$ , получаем соответственно  $N_{z_1=0} = 3F$  и  $N_{z_1=l} = 2F$ .

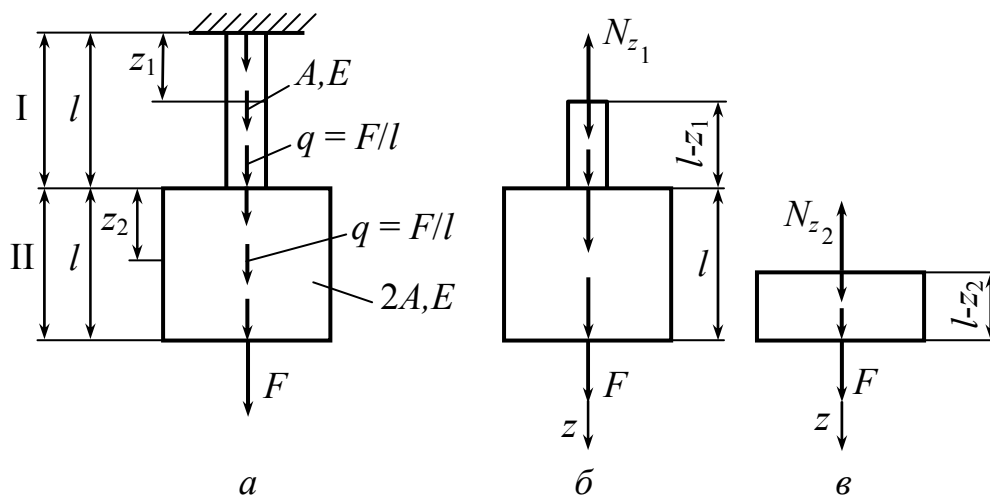


Рис. 1.24

**II участок**  $0 \leq z_2 \leq l$ .

$$\sum Z = -N_{z_2} + F + F/l(l - z_2) = 0.$$

$$N_{z_2} = 2F - F \frac{z_2}{l}; \quad N_{z_2=0} = 2F \text{ и } N_{z_2=l} = F.$$

Зная значения продольных сил, можно вычислить напряжения в любом сечении стержня. Вычислим напряжения в двух сечениях на каждом участке. Итак,

$$\sigma_{z_1=0} = \frac{N_{z_1=0}}{A} = \frac{3F}{A}; \quad \sigma_{z_1=l} = \frac{N_{z_1=l}}{A} = \frac{2F}{A};$$

$$\sigma_{z_2=0} = \frac{N_{z_2=0}}{2A} = \frac{2F}{2A} = \frac{F}{A}; \quad \sigma_{z_2=l} = \frac{N_{z_2=l}}{2A} = \frac{F}{2A}.$$

Строим эпюры нормальных сил  $N$  и нормальных напряжений  $\sigma$  (рис. 1.25, *в*, *с*).

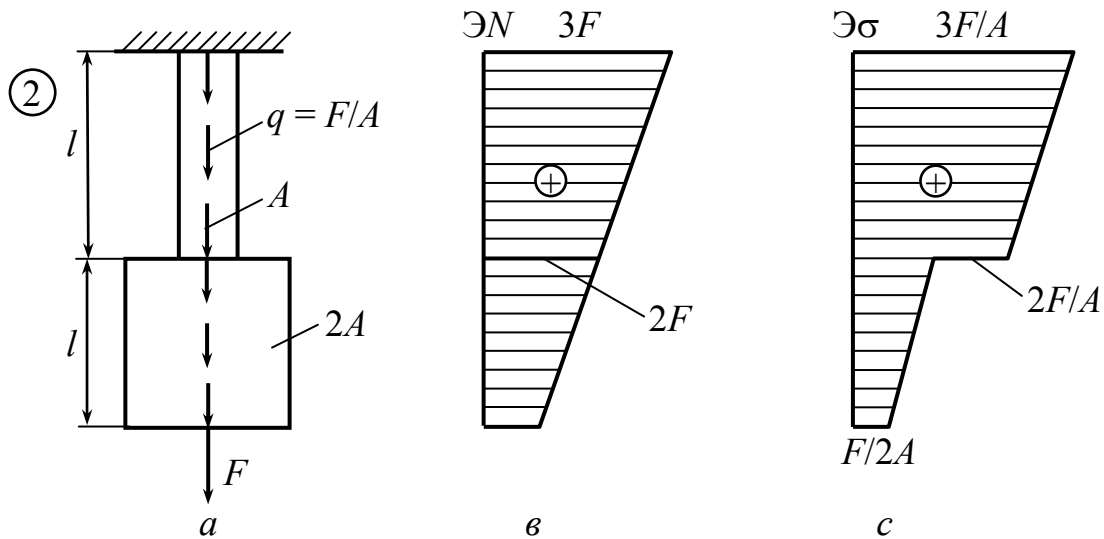


Рис. 1.25

На рис. 1.25, *с* видно, что в сечении стержня, в котором уменьшается площадь сечения в два раза, происходит увеличение напряжений в 2 раза и на эпюре напряжений образуется “скачок”.

Определим, на какую величину  $W$  переместится каждое сечение стержня (рис. 1.26, *а*).

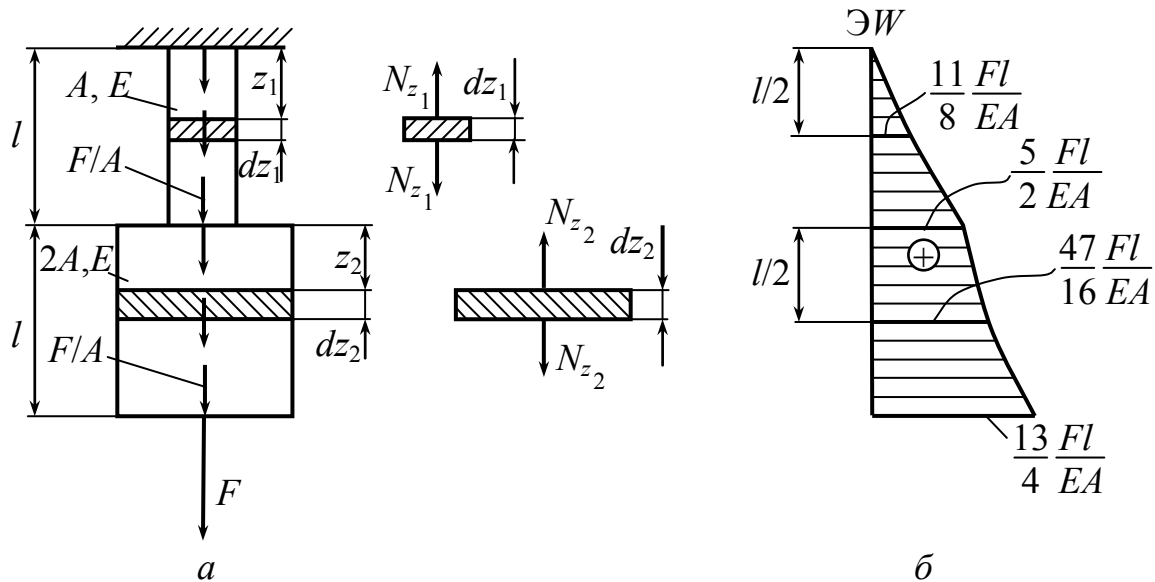


Рис. 1.26

На первом участке  $0 \leq z_1 \leq l$  нам известно выражение для определения  $N_{z_1} = 3F - F \cdot \frac{z_1}{l}$ , выделим элемент стержня (рис. 1.26, а), где удлинение  $\Delta(dz_1) = \frac{N_{z_1} dz_1}{EA}$ . Перемещение  $z_1$  сечения равно удлинению отрезка длиной  $z_1$ .

$$W_{z_1} = \int_0^{z_1} \frac{N_{z_1} dz_1}{EA} = \int_0^{z_1} \frac{\left(3F - \frac{F}{l} z_1\right)}{EA} dz_1 = \frac{3Fz_1}{EA} \Big|_0^{z_1} - \frac{Fz_1^2}{2lEA} \Big|_0^{z_1}.$$

Зависимость перемещений квадратичная, поэтому для построения эпюры перемещений необходимо иметь значение  $W_{z_1}$  в трех сечениях.

$$\text{Например, } W_{z_1=0} = 0; \quad W_{z_1=l/2} = \frac{3Fl}{2EA} - \frac{Fl^2}{8lEA} = \frac{11Fl}{8EA};$$

$$W_{z_1=l} = \frac{3Fl}{EA} - \frac{Fl^2}{2lEA} = \frac{5Fl}{2EA}.$$

На втором участке при  $0 \leq z_2 \leq l$

$$W_{z_2} = W_{z_1=l} + \int_0^{z_2} \frac{N_{z_2} dz_2}{E \cdot 2A} = \frac{5Fl}{2EA} + \int_0^{z_2} \frac{2F - \frac{F}{l} z_2}{E \cdot 2A} dz_2 = \frac{5Fl}{2EA} + \frac{2Fz_2}{2EA} \Big|_0^{z_2} - \frac{Fz_2^2}{4lEA} \Big|_0^{z_2}.$$



Функция перемещений на втором участке также является квадратичной относительно координаты  $z_2$ . Определяем перемещения

$$W_{z_2=0} = W_{z_1=l} = \frac{5Fl}{2EA};$$

$$W_{z_2=\frac{l}{2}} = \frac{5Fl}{2EA} + \frac{Fl}{2EA} - \frac{Fl^2}{16IEA} = \frac{47Fl}{16EA};$$

$$W_{z_2=l} = \frac{5Fl}{2EA} + \frac{Fl}{EA} - \frac{Fl^2}{4IEA} = \frac{13Fl}{4EA}.$$

На рис. 1.26, б представлена эпюра перемещений – ЭW.

### 1.15. Брус равного сопротивления растяжению и сжатию

*Ключевые слова*

*Закон изменения площадей по высоте стержня, постоянные нормальные напряжения.*

Брус равного сопротивления растяжению и сжатию означает, что желательно так запроектировать размеры стержня, чтобы во всех его поперечных сечениях (перпендикулярных к оси) нормальные напряжения были постоянны (рис. 1.27).

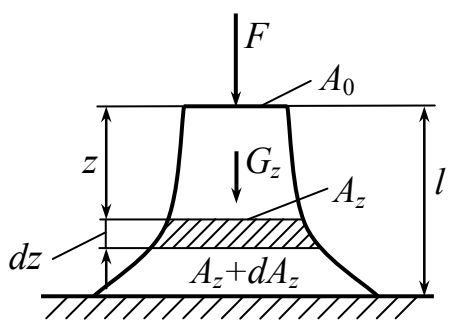


Рис. 1.27

Должно соблюдаться во всех сечениях условие:

$$\sigma = \frac{F}{A_0} = \frac{F_z}{A_z} = [\sigma];$$

$[\sigma]$  – допускаемое напряжение на сжатие.

$$A_0 = \frac{F}{[\sigma]}; \quad A_z = \frac{F_z}{[\sigma]} = \frac{F + G_z}{[\sigma]}.$$

Чтобы определить закономерность изменения площадей по высоте стержня, возьмем два смежных бесконечно близких сечения на расстоянии  $z$  от верха стержня; расстояние между сечениями  $dz$ ; площадь верхнего обозначим  $A_z$ , площадь же нижнего  $A_z + dA_z$ .

$$dA_z = \frac{dG_z}{[\sigma]} = \frac{\gamma \cdot A_z \cdot dz}{[\sigma]}. \quad (1.29)$$

$$\frac{dA_z}{A_z} = \frac{\gamma}{[\sigma]} dz; \quad \ln A_z + C = \frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot z.$$

Приращение площади  $dA_z$  при переходе от одного сечения к другому должно воспринять вес  $\gamma dA_z dz$  элемента стержня между сечениями. Так как на площади  $dA_z$  он должен вызвать напряжение, равное допускаемому  $[\sigma]$ , то

$$\text{при } z = 0 \quad A_z = A_0 = \frac{F}{[\sigma]}; \quad \ln A_0 + C = 0; \quad C = -\ln A_0;$$

$$\ln \frac{A_z}{A_0} = \frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot z; \quad \frac{A_z}{A_0} = e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot z}; \quad A_z = A_0 \cdot e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot z}. \quad (1.30)$$

### 1.16. Деформация бруса равного сопротивления

$$\sigma = [\sigma] = \text{const}; \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{[\sigma]}{E} = \text{const}; \quad \Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{[\sigma]}{E} \cdot l. \quad (1.31)$$

### 1.17. Статически неопределимые задачи на растяжение и сжатие

*Ключевые слова*

*Число связей, необходимых для равновесия деформируемой системы, шарниры и опоры, степень свободы системы уравнения деформаций или перемещения.*

Если связей больше, чем необходимо при равновесии деформируемой системы, то задача статически неопределима.

Число связей, необходимых для равновесия деформируемой системы в пространственной задаче, – 6 (6 уравнений равновесия).

Число связей в плоской задаче – 3 (3 уравнения равновесия).

Будем рассматривать только плоские стержневые системы. Каждый стержень (элемент конструкции) имеет на плоскости три степени свободы, так как он может перемещаться поступательно

в двух направлениях и поворачиваться вокруг любой точки. Стержни соединяют различными устройствами, ограничивающими степень свободы. Всякое устройство, отнимающее у тела одну степень свободы, называется кинематической связью. В качестве связей используют шарниры и опоры. Шарниры бывают простыми (рис. 1.28, *а*) и кратными (рис. 1.28, *б*).

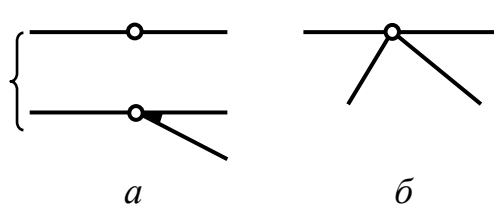


Рис. 1.28

Простой шарнир соединяет два стержня, кратный – более двух и эквивалентен  $(n - 1)$  простым шарнирам, где  $n$  – число соединяемых стержней.

Каждый простой шарнир эквивалентен двум связям, так как препятствует любым двум взаимным смещениям двух стержней, оставляя возможность взаимного их поворота. Различают следующие типы расчетных схем опор (рис. 1.29): *а* – цилиндрическая подвижная или шарнирно-подвижная, *б* – цилиндрическая неподвижная, или шарнирно-неподвижная, *в* – защемляющая неподвижная, жесткая заделка, *г* – защемляющая подвижная, или скользящая заделка; эквивалентные, соответственно, одному, двум, трем опорным стержням, в каждом из которых действует опорная реакция.

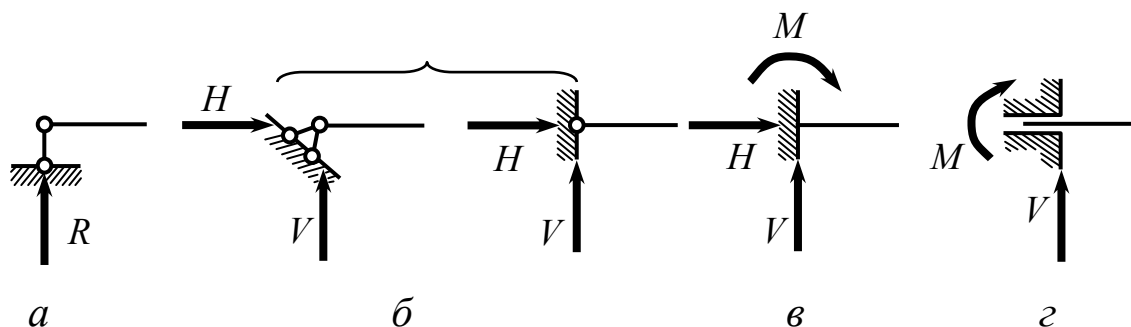


Рис. 1.29

На рис. 1.30 показаны шарнирно-стержневые эквиваленты жесткой и скользящей заделок.

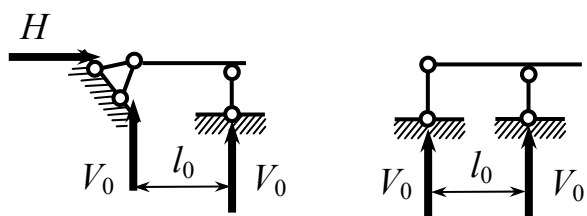


Рис. 1.30

Здесь расстояние  $l_0$  называется глубиной заделки, а произведение  $V_0 l_0 = M$  – опорным моментом или моментом в заделке.

Каждый опорный стержень эквивалентен одной связи, так как препятствует перемещению стержня в направлении реакции опор.

Степень свободы  $W$  конструкции, состоящей из  $D$  структурно (геометрически) неизменяемых элементов (стержней), соединенных  $Ш$  простыми шарнирами, и имеющей  $C_0$  опорных стержней, может быть определена по формуле П. Л. Чебышева:

$$W = 3D - 2Ш - C_0. \quad (1.32)$$

Для определения числа  $D$  необходимо предварительно отбросить все шарниры и опоры, а для определения числа  $Ш$  – все опоры.

Для шарнирно-стержневых систем (ферм), т.е. систем, состоящих из стержней, соединенных между собой по концам шарнирами (причем каждый стержень прикрепляется к соседним только двумя шарнирами), степень свободы может быть определена по более простой формуле:

$$W = 2У - С - C_0, \quad (1.33)$$

где  $У$  – число узлов фермы;  $С$  – число внутренних стержней фермы;  $C_0$  – число опорных стержней.

Эта формула получена исходя из того, что каждый узел, как точка, имеет на плоскости две степени свободы, а каждый стержень, соединяющий два узла, или опорный, эквивалентны одной связи, так как налагают на координаты этих точек единственное условие – постоянство расстояния.

При определении степени свободы или степени изменяемости системы возможны следующие три качественно различных результата:

1)  $W > 0$  – система структурно изменяемая, так как не имеет достаточного количества связей. Система, для которой  $W = 1$ , называется *механизмом*;

2)  $W = 0$  – система обладает необходимым минимумом связей, чтобы быть неподвижной и неизменяемой;

3)  $W < 0$  – система имеет лишние связи.

**Пример 4.** Исследовать систему, показанную на рис. 1.31.

Пользуясь формулой (1.32), определяем степень свободы системы. Число стержней  $D = 11$ , простых шарниров  $Ш = 14$  – по одному в точках  $A, B, G, K$ , по два в точках  $D, E, H$  и четыре в точках  $C$ , опорных стержней  $C_0 = 7$ .

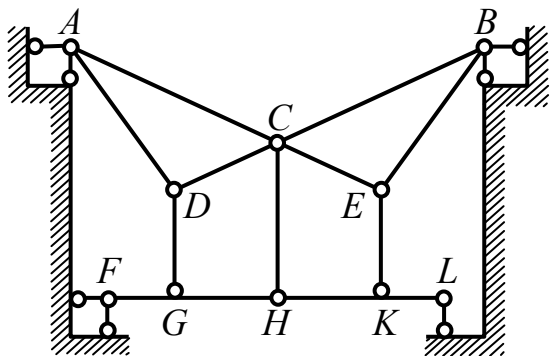


Рис. 1.31

$W = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 14 - 7 = -2$ ,  
следовательно, система имеет две лишние связи.

**Пример 5.** Произвести кинематический анализ системы, изображенной на рис. 1.32.

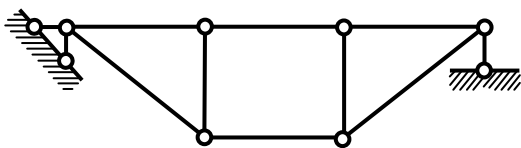


Рис. 1.32

Поскольку система является шарнирно-стержневой, для определения ее степени свободы используем формулу (1.32). Число узлов системы

$U = 6$ , число стержней  $C = 8$ ,  $C_0 = 3$ , следовательно,  $W = 2 \cdot 6 - 8 - 3 = 1$ . Система имеет одну степень свободы, т. е. является механизмом и не может быть использована в качестве строительной конструкции.

Произвести кинематический анализ систем, представленных на рисунках 1.33, 1.34, 1.35.

### Пример 6

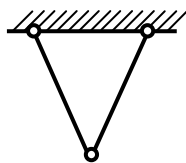


Рис. 1.33. Система статически определима

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$$

### Пример 7

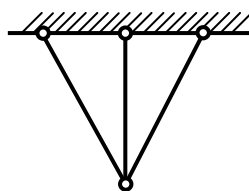


Рис. 1.34. Система один раз статически неопределима

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 6 = -1$$

### Пример 8

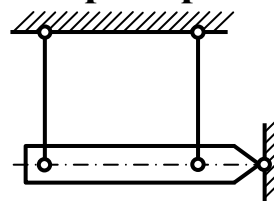


Рис. 1.35. Система один раз статически неопределима

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 6 = -1$$

Число лишних связей определяет степень статической неопределимости. Для определения реакций всех связей (определение статической неопределимости), включая и реакции лишних связей, помимо уравнений равновесия статики составляются уравнения совместности деформации или перемещения.

Уравнения совместности деформаций математически выражают те ограничения, которые накладывают на систему лишние связи.

### Примеры решения задач

**Пример 9.** Дано:  $E_1, A_1, l_1, E_2, l_2, A_2$  и  $F$ .

Найти напряжения в сечениях 1-1, 2-2 (рис. 1.36).

$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$  – уравнение деформации. Ограничения после того, как убрали лишнюю опору.

$$\Delta l = 0.$$

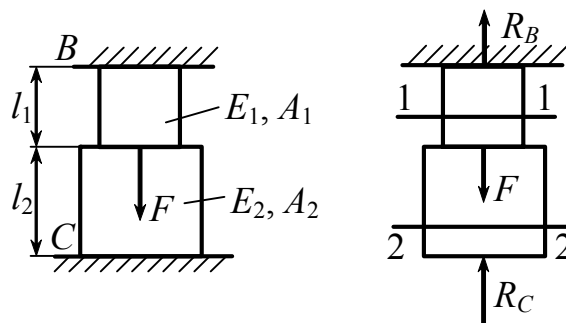


Рис. 1.36

$$\begin{cases} R_B + R_C = F; \\ -\frac{R_C \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{R_B \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = 0; \end{cases} \quad (1.34)$$

$$(1.35)$$

$$\begin{cases} R_B + R_C = F; \\ \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0; \end{cases} \quad \Delta l_2 = -\frac{R_C \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2}; \quad \Delta l_1 = +\frac{R_B \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1};$$

$R_C = \frac{R_B E_2 A_2 l_1}{E_1 A_1 l_2}$ . Подставим в уравнение (1.34)  $R_C$ , получим

$$R_B + \frac{R_B E_2 A_2 l_1}{E_1 A_1 l_2} = F, \text{ отсюда } R_B = \frac{E_1 A_1 l_2}{E_1 A_1 l_2 + E_2 A_2 l_1} \cdot F, \text{ а}$$

$$R_C = \frac{E_2 A_2 l_1}{E_1 A_1 l_2 + E_2 A_2 l_1} \cdot F.$$

Методом сечений определяем  $N_1$  и  $N_2$  соответственно в сечениях 1-1 и 2-2.

$$N_1 = R_C = \frac{E_1 A_1 l_2 \cdot F}{E_1 A_1 l_2 + E_2 A_2 l_1}; \quad N_2 = R_C = -\frac{E_2 A_2 l_1 \cdot F}{E_1 A_1 l_2 + E_2 A_2 l_1},$$

отсюда

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{E_1 A_1 l_2 \cdot F}{(E_1 A_1 l_2 + E_2 A_2 l_1) A_1} = -\frac{E_1 l_2 \cdot F}{E_1 A_1 l_2 + E_2 A_2 l_1};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{E_2 A_2 l_1 \cdot F}{(E_1 A_1 l_2 + E_2 A_2 l_1) A_2} = -\frac{E_2 l_1 \cdot F}{E_1 A_1 l_2 + E_2 A_2 l_1}.$$

**Пример 10.** Найти силы в стержнях 1 и 2 (рис. 1.37).

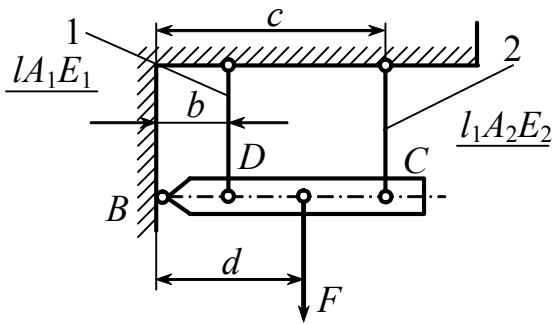


Рис. 1.37

$$\sum \text{мом}_B(F) = 0.$$

$$\sum \text{мом}_B(F) = N_1 \cdot b + N_2 \cdot c - F \cdot d = 0. \quad (1.36)$$

Нужно составить уравнение совместности деформации. После поворота абсолютно жесткого тела получится удлинение стержней  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$  (рис. 1.38).

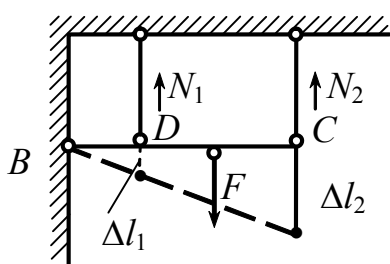


Рис. 1.38

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{c}{b}; \quad \Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E_1 A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E_2 A_2}.$$

$$\frac{N_2 \cdot E_1 \cdot A_1}{N_1 \cdot E_2 \cdot A_2} = \frac{c}{b}. \quad (1.37)$$

$$\left| \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix} \right|. \quad \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}. \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}.$$

Из второго уравнения выразим  $N_2$  через  $N_1$ , получим

$$N_2 = \frac{N_1 E_2 A_2 \cdot c}{b E_1 A_1} \text{ и подставим в уравнение (1.36):}$$

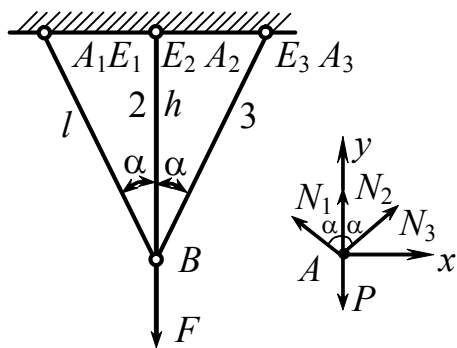
$$N_1 b + \frac{N_1 E_2 A_2 \cdot c}{b E_1 A_1} \cdot -F d = 0, \text{ тогда}$$

$$N_1 \left( \frac{b^2 E_1 A_1 + c^2 E_2 A_2}{E_1 A_1} \right) = F d \quad \text{и} \quad N_1 = \frac{E_1 A_1 \cdot F d}{b^2 E_1 A_1 + c^2 E_2 A_2},$$

$$\text{а} \quad N_2 = \frac{E_2 A_2 F \cdot c}{b(b^2 E_1 A_1 + c^2 E_2 A_2)}.$$

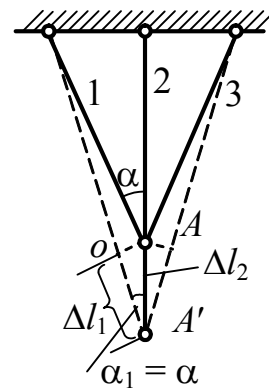
**Пример 11.** Определить напряжения в стержнях 1, 2 и 3 (рис. 1.39).

$$\begin{cases} \sum X = -N_1 \cdot \cos(90 - \alpha) + N_3 \cdot \cos(90 - \alpha) = 0; \\ \sum Y = 2N_1 \cdot \cos \alpha + N_2 - F = 0; \\ \Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$



$$E_1 = E_3 \quad A_1 = A_3.$$

а



б

Рис. 1.39

$$\frac{N_1 l}{E_1 A_1} = \frac{N_2 h}{E_2 A_2} \cdot \cos \alpha.$$

$$l = \frac{h}{\cos \alpha}.$$

$$N_1 = N_2 \cdot \frac{E_1 \cdot A}{E_2 \cdot A_2} \cdot \cos^2 \alpha.$$

(1.38)

$$2N_2 \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \cdot \cos^3 \alpha + N_2 - F = 0, \quad N_2 = \frac{E_2 A_2 F}{2 \cdot E_1 A_1 \cdot \cos^3 \alpha + E_2 A_2},$$



$$N_1 = \frac{E_1 A_1 F \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cdot E_1 A_1 \cdot \cos^3 \alpha + E_2 A_2},$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{N_1}{A_1} \quad \text{и} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}.$$

### 1.18. Учет влияния температуры

*Ключевые слова*

*Температурные напряжения, коэффициент температурного расширения.*

Температурные напряжения играют в задачах на прочность весьма заметную роль, и с ними необходимо считаться.

В статически определимых системах изменение температуры не вызывает обычно внутренних сил (рис. 1.40).

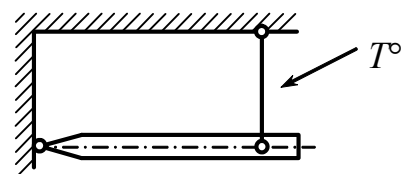


Рис. 1.40. Система статически определимая

**Рассмотрим статически неопределимые системы.** Как известно, удлинение стержня от действия температуры прямо пропорционально длине стержня и приросту температуры:

$$\Delta l_T = \alpha l \Delta T,$$

где  $\alpha$  – коэффициент температурного линейного расширения (табл. 1.2), равный изменению длины стержня при повышении температуры на 1 °С;  $l$  – начальная длина стержня до повышения температуры.

Таблица 1.2

Значения  $\alpha$  для различных материалов,  $10^{-7} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$

Алюминий	255	Сталь	100 ... 130
Бетон	100 ... 140	Каменная кладка	40 ... 70
Лед	507	Дерево	20 ... 50

**Пример 12.** Определить температурные напряжения в стержне на рис. 1.41.

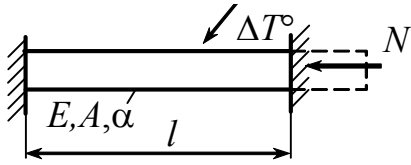


Рис. 1.41. Статически неопределимая система

Полное удлинение стержня  $\Delta l = 0$ .

Учитывая, что  $\Delta l = \Delta l_T - \Delta l_N = 0$ , получим

$$\Delta l = \alpha l \Delta T - \frac{Nl}{EA} = 0,$$

отсюда 
$$N = \frac{\alpha l EA \cdot \Delta T}{l}.$$

Напряжение в стержне равно  $\sigma_T = \frac{N}{A} = \alpha \cdot E \cdot \Delta T$ , оно не зависит

от площади поперечного сечения стержня.

**Пример 13.** Найти напряжения в стержнях на рис. 1.42.

Запишем уравнение равновесия:

$$\sum \text{mom}_B(F) = 0. \quad N_1 \cdot \varphi + N_2 \cdot 2\varphi = 3F\varphi, \quad N_1 + 2N_2 = 3F. \quad (1.39)$$

Условие совместности деформаций  $\Delta l_1 = CC_1$ ;

$$\Delta l_1 = \Delta l_1^N + \Delta l_1^{T^\circ} = \frac{N_1 \cdot l}{E_1 A_1} + \alpha \cdot l \cdot \Delta T;$$

$$\frac{N_2 l}{EA} = 2 \left( \frac{N_1 l}{EA} + \alpha \cdot l \cdot \Delta T \right).$$

Совмещая это уравнение с уравнением равновесия, определим  $N_1$  и  $N_2$

из  $\Delta DD_1 D_2$ , получим

$$DD_1 = \frac{D_1 D_2}{\cos(90 - \beta)} = \frac{\Delta l_2}{\sin \beta},$$

$$\frac{DD_1}{CC_1} = \frac{BD}{BC} = \frac{2a}{a} = 2,$$

тогда

$$\frac{\Delta l_2}{\sin \beta \Delta l_1} = 2, \quad (1.40)$$

$$\Delta l_2 = 2 \Delta l_1 \sin \beta. \quad (1.41)$$

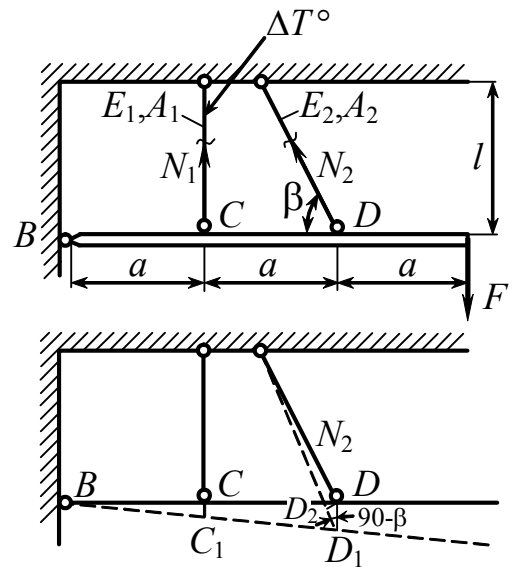


Рис. 1.42. Статически неопределимая система

Воспользуемся законом Гука

$$\frac{N_2 l}{\sin \beta} = 2 \left( \frac{N_1 l}{E_1 A_1} + \alpha l \Delta T \right) \sin \beta. \quad (1.42)$$

Из уравнения (1.42) определяем  $N_2$

$$N_2 = 2 \left( \frac{N_1}{E_1 A_1} + \alpha \Delta T \right) E_2 A_2 \cdot \sin^2 \beta, \quad (1.43)$$

и подставляя (1.43) в (1.39), получим

$$\begin{aligned} N_1 + 4 \left( \frac{N_1 + E_1 A_1 \alpha \Delta T}{E_1 A_1} \right) E_2 A_2 \cdot \sin^3 \beta &= 3F; \\ N_1 \left( 1 + \frac{4E_2 A_2 \cdot \sin^3 \beta}{E_1 A_1} \right) &= 3F - E_2 A_2 \alpha \Delta T \sin^3 \beta; \\ N_1 &= \frac{(3F - E_2 A_2 \alpha \Delta T \sin^3 \beta) E_1 A_1}{E_1 A_1 + 4E_2 A_2 \sin^3 \beta}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Подставив выражение (1.44) в выражение (1.43), получим

$$\begin{aligned} N_2 &= 2 \left( \frac{(3F - E_2 A_2 \alpha \Delta T \sin^3 \beta) E_1 A_1 + E_1 A_1 \alpha \Delta T}{E_1 A_1 (E_1 A_1 + 4E_2 A_2 \sin^3 \beta)} \right) E_2 A_2 \sin^2 \beta = \\ &= \frac{(6F - 2E_2 A_2 \alpha \Delta T \sin^3 \beta) E_2 A_2 \sin^2 \beta + 2E_2 A_2 \alpha \Delta T \sin^2 \beta}{E_1 A_1 + 4E_2 A_2 \sin^3 \beta}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Зная, что  $\begin{cases} N_1 = \sigma_1 \cdot A_1; \\ N_2 = \sigma_2 \cdot A_2, \end{cases}$  , тогда  $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}.$

Эти примеры позволяют отметить специфические особенности статически неопределимых систем: для раскрытия их неопределимости наряду с условиями равновесия приходится

рассматривать ограничения, налагаемые на систему лишними связями; распределение сил зависит от жесткости элементов системы (от соотношения жесткостей); силы (напряжения) могут быть вызваны также действием температуры.

### 1.19. Учет влияния монтажных зазоров

*Ключевые слова*

*Монтажные напряжения, выравнивание напряжений в элементах стержневой системы.*

Учет влияния монтажных зазоров в статически определимых системах (рис. 1.43). Зазор в статически определимых системах не влияет на распределение сил в стержнях.

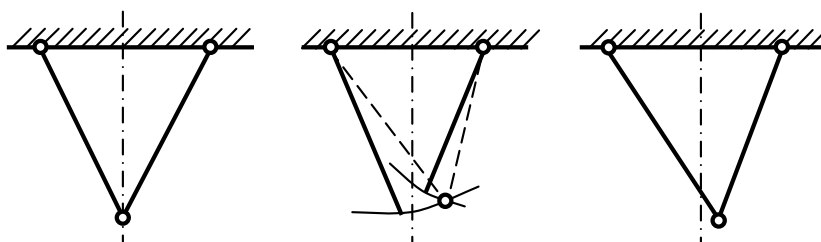


Рис. 1.43. Статически определимая система

**Пример 14.** Найти силы, возникающие в стержнях при наличии зазора  $\delta$  (рис. 1.44).

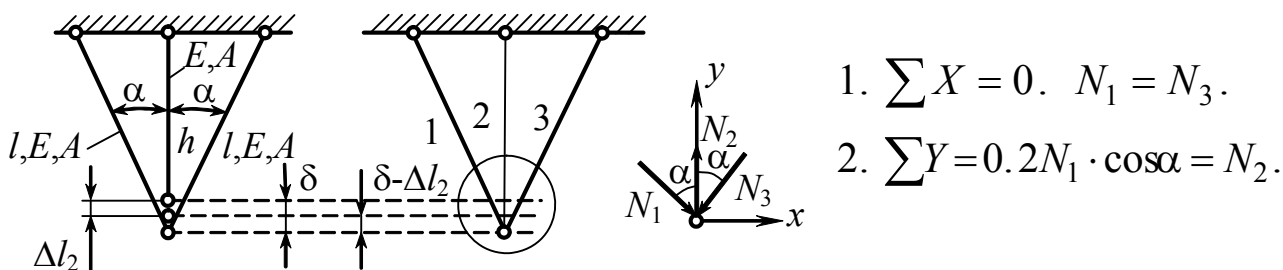


Рис. 1.44. Статически неопределимая система

1.  $\sum X = 0. N_1 = N_3.$
2.  $\sum Y = 0. 2N_1 \cdot \cos\alpha = N_2.$

Результат рассмотренной статической стороны задачи представлен на рис. 1.45.

$$\Delta l_1 = (\delta - \Delta l_2) \cdot \cos \alpha.$$

$$3. \frac{N_1 l_1}{EA} = \left( \delta - \frac{N_2 h}{EA} \right) \cdot \cos \alpha.$$

Получили уравнение с 2 неизвестными.

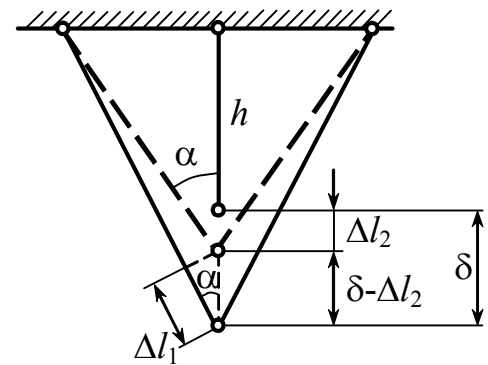


Рис. 1.45

Используя выражение 2 и подставив в выражение 3, получим

$$\frac{N_1 l}{EA} = \left( \delta - \frac{2N_1 h \cdot \cos \alpha}{EA} \right) \cdot \cos \alpha, \quad l = h \cdot \cos \alpha.$$

$$\frac{N_1 h \cdot \cos \alpha}{EA} (1 + 2 \cos \alpha) = \delta \cdot \cos \alpha.$$

$$N_1 = \frac{\delta \cdot EA}{h(1 + 2 \cos \alpha)}; \quad N_2 = \frac{2\delta \cdot EA \cdot \cos \alpha}{h(1 + 2 \cos \alpha)}.$$

На практике часто напряжения от неточности изготовления (монтажные) используются либо для выравнивания напряжений в элементах системы, либо для надежного сочленения.

### Контрольные вопросы

1. Что понимается под прочностью?
2. Что такое жесткость?
3. Что такое конструкция?
4. Что такое расчетная схема?
5. Что такое устойчивость?
6. Когда происходят колебания?
7. Что такое ползучесть материала и как она проявляется?
8. Чем жаростойкость отличается от жаропрочности материала?
9. Что такое коррозионная стойкость?

10. Почему при проектировании деталей и конструкций должны соблюдаться требования экономичности?
11. Из каких частей состоит сопротивление материалов (механика материалов и конструкций)?
12. Что изучает сопротивление материалов (механика материалов и конструкций)?
13. Как обеспечивается надежность детали или конструкции?
14. Когда прибегают к более совершенным методам теории упругости?
15. Какое свойство тел называется упругостью?
16. Какие основные задачи решаются в курсе сопротивления материалов (механики материалов и конструкций)?
17. Какие основные требования предъявляются к проектируемым машинам и сооружениям?
18. Какие материалы используются для машиностроительных конструкций?
19. Перечислите основные допущения относительно свойств конструкционных материалов, которые принимаются в сопротивлении материалов (механике материалов и конструкций).
20. Что означает однородность твердого тела?
21. Чем обусловлена прочность твердого тела?
22. Что позволяет в сопротивлении материалов (механике материалов и конструкций) использовать для анализа бесконечно малые величины и методы математического анализа?
23. Что означает шаровая изотропия?
24. К каким простейшим типам с точки зрения формы сводятся различные элементы конструкций?
25. На какие группы делятся внешние силовые воздействия на элементы конструкций?
26. В чем разница между статическим и динамическим нагружением?

27. Какая разница между малоцикловым и многоцикловым нагружением?
28. Чем характеризуется ударное нагружение?
29. Что представляют собой модели нагружения?
30. Что представляют собой модели разрушения?
31. Какой метод используется при определении внутренних силовых факторов?
32. Сколько внутренних силовых факторов возникает в поперечных сечениях стержня в общем случае нагружения? Назовите их.
33. Сформулируйте условие совместности деформаций.
34. Что называется напряжением в точке и какова его размерность?
35. Какое напряжение называется полным, нормальным и касательным?
36. Что называется напряженным состоянием в точке?
37. Сформулируйте принцип начальных размеров.
38. Что такое деформация и перемещение?
39. Какие вам известны простейшие деформации?
40. Назовите существующие методы расчета на прочность.
41. Какая гипотеза положена в основу теории растяжения (сжатия) прямолинейных стержней и какой закон распределения напряжений из нее вытекает?
42. Какой вид нагружения называется растяжением?
43. Чему равна продольная сила?
44. Что такое абсолютное и относительное удлинение стержня?
45. Как вычисляются напряжения в поперечном сечении растянутого стержня?
46. Что такое коэффициент Пуассона? В каких пределах он изменяется?
47. Характеристиками каких свойств материала являются модуль Юнга и коэффициент Пуассона?
48. Что называется диаграммой растяжения образца?

49. Какое отличие имеет условная диаграмма напряжений от диаграммы растяжения образца?
50. Перечислите характеристики прочности материала при растяжении и дайте их определения.
51. Как записывается закон Гука при растяжении (сжатии)?
52. Каков физический и геометрический смысл модуля Юнга?
53. При каких напряжениях должны работать детали машин?
54. В каких случаях используют схематизированные кривые деформирования?
55. Запишите законы Гука для растяжения (сжатия) и для сдвига.
56. В чем состоит принцип независимости действия сил?
57. Какова размерность модулей упругости?
58. Укажите основные упругие характеристики материалов.
59. Зависит ли распределение напряжений от способа приложения внешних сил?
60. Перечислите схемы расчетов на прочность при растяжении и сжатии.
61. В чем заключается расчет на жесткость?
62. В каких частях стержня распределение напряжений не является равномерным?
63. Как записывается условие прочности растянутого стержня? Какие задачи можно решать с помощью этого условия?
64. Чем характеризуется жесткость материала, жесткость поперечного сечения стержня и жесткость стержня при растяжении?
65. Какая конструкция называется прочной?
66. Какие напряжения называются предельными?
67. Что такое запас прочности конструкции?
68. Как определяется допускаемое напряжение?
69. Как записываются условия прочности конструкции и что будет в тех случаях, когда они не выполняются?
70. Как назначается коэффициент запаса?
71. Что такое пластичность материала?



72. Что такое условный предел текучести?
73. Как вычисляется потенциальная энергия упругой деформации при растяжении (сжатии)?
74. Какие напряжения возникают в наклонных сечениях стержня при растяжении, сжатии?
75. Чему равна продольная сила?
76. В каком случае принято продольную силу считать положительной?
77. Что называется эпюрой нормальной силы?
78. Запишите дифференциальную зависимость между нормальной силой и интенсивностью распределенной нагрузки?
79. Что такое стержень равного сопротивления растяжению (сжатию)?
80. Какие задачи называются статически неопределимыми и как они решаются?
81. Какие вы знаете устройства, ограничивающие степень свободы?
82. Чем отличается простой шарнир от кратного?
83. Какие вы знаете расчетные схемы опор?
84. Как определяется степень свободы конструкции?
85. Каковы особенности, присущие статически неопределимым системам?
86. Какие уравнения используются для определения реакций всех связей в статически неопределимых системах кроме уравнений равновесия статики?
87. В какой зависимости находятся температурные напряжения от площади поперечного сечения в статически неопределимых стержнях?
88. Влияет ли зазор в статически определимых системах на распределение сил в стержнях?
89. Влияет ли зазор в статически неопределимых системах на распределение сил в стержнях?

## Глава 2. Основы общей теории напряженного и деформируемого состояний

### 2.1. Исследование напряженного состояния в точке тела.

#### Тензор напряжений. Закон парности касательных напряжений

*Ключевые слова*

*Точечная модель напряженного состояния, компоненты тензора напряжений, касательные напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках.*

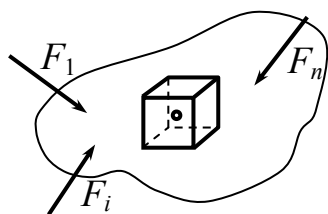


Рис. 2.1

Напряжение в точке тела в сущности определяется как мера интенсивности внутренних сил на поверхности элемента объема, выделенного в окрестности рассматриваемой точки (рис. 2.1).

На гранях параллелепипеда изображены компоненты полного напряжения, действующего по соответствующей грани (рис. 2.2).

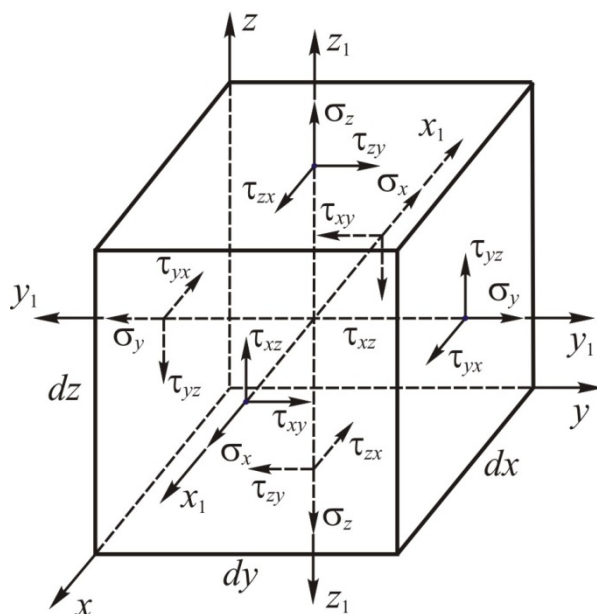


Рис. 2.2

Первый индекс означает плоскость, на которой действует напряжение (именем нормали к этой площадке) –  $\sigma_x$ . Второй индекс – направление действующей нагрузки  $\tau_{xz}$ .

Правило знаков таково, что напряжения на рисунке являются положительными.

Элемент объема с изображенными на его гранях напряжениями называется точечной моделью напряженного состояния.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \sigma_y & \tau_{yx} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array} \right\} = T_H \quad \begin{array}{l} \text{– тензор напряжений в точке тела,} \\ \text{он определяется девятью компонентами,} \\ \text{но можно доказать, что шесть} \\ \text{из 9 компонентов являются независимыми.} \end{array}$$

Докажем, что 6 компонентов являются независимыми.

1. Возьмем моменты относительно  $y_1y_1$ , проходящей через центр объема  $\sum \text{mom}_{y_1y_1} = 0$ .

2.  $2(\tau_{zx} \cdot dydx) \frac{dz}{2} - 2 \cdot \tau_{xz} \cdot dzdy \cdot \frac{dx}{2} = 0$ . Из этого уравнения находим,

что  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ , по аналогии запишем:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Закон парности касательных напряжений} \\ \text{Касательные напряжения, действующие на 2 взаимно} \\ \text{перпендикулярных площадках и нормальные к линии} \\ \text{пересечения этих площадок, равны между собой.} \end{array}$$

Этот закон мы получили из условия отсутствия вращения элемента относительно осей  $x_1, y_1, z_1$ . Закон соблюдается всегда, он универсален.

Можно доказать, что если известны напряжения на любых трех взаимно перпендикулярных площадках, то через них могут быть определены напряжения на других площадках, как угодно наклоненных к исходным.

## 2.2. Напряжения на наклонных площадках

*Ключевые слова*

*Полное напряжение на наклонной площадке, компоненты напряжений на наклонной площадке.*

Определение напряжений на наклонной (косой) площадке (рис. 2.3) через напряжения на 3 взаимно перпендикулярных площадках.

Часто возникает обратная задача, известны напряжения на косых площадках, нужно определить напряжения на взаимно перпендикулярных площадках (рис. 2.4).

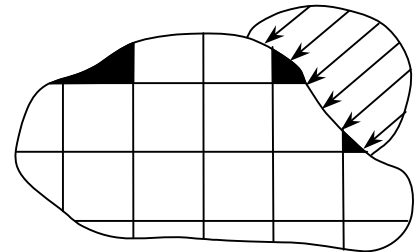


Рис. 2.3

Пусть даны напряжения на трех исходных площадках (рис. 2.5).

Требуется определить по напряжениям на 3 взаимно перпендикулярных площадках напряжения на наклонных площадках.

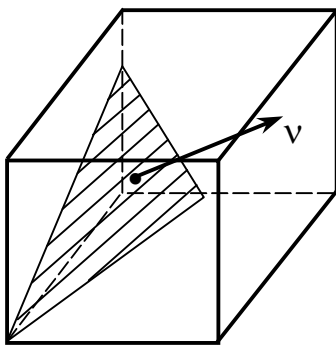


Рис. 2.4

$v$  – нормаль к площадке  $BCD$

$BCD \rightarrow dA \rightarrow v \quad \alpha, \beta, \gamma.$

$\text{Cos}\alpha \quad \text{Cos}\beta \quad \text{Cos}\gamma$

$\parallel$   
 $l$

$\parallel$   
 $m$

$\parallel$   
 $n$

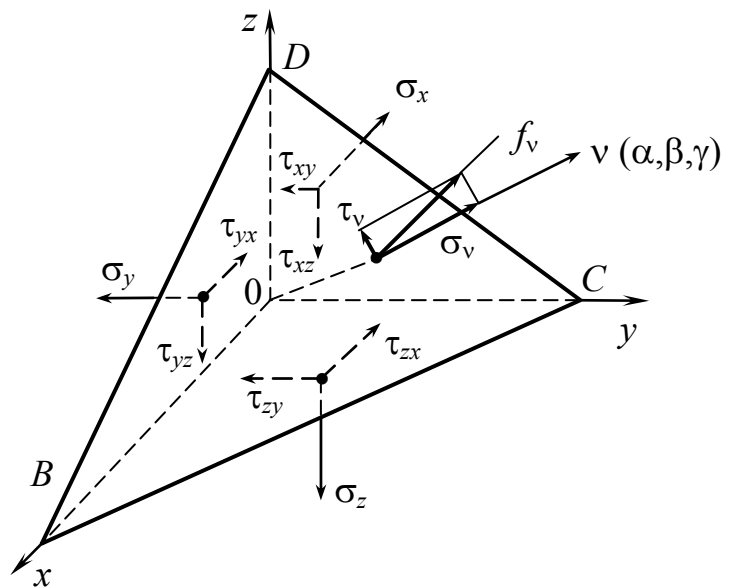


Рис. 2.5

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & y & z \\ COD & BOD & COB \\ dA_x & dA_y & dA_z \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ dA \cdot l & dA \cdot m & dA \cdot n \end{array} \right\}$$

$f_v$  – полное напряжение на площадке  $BCD$ , будем искать его через компоненты напряжений, направленных вдоль координатных осей  $f_{v_x}$ ,  $f_{v_y}$ ,  $f_{v_z}$  (рис. 2.6).

$$f_v \left\{ \begin{array}{c} f_{v_x} \\ f_{v_y} \\ f_{v_z} \end{array} \right\}$$

$\wedge$  – означает угол.

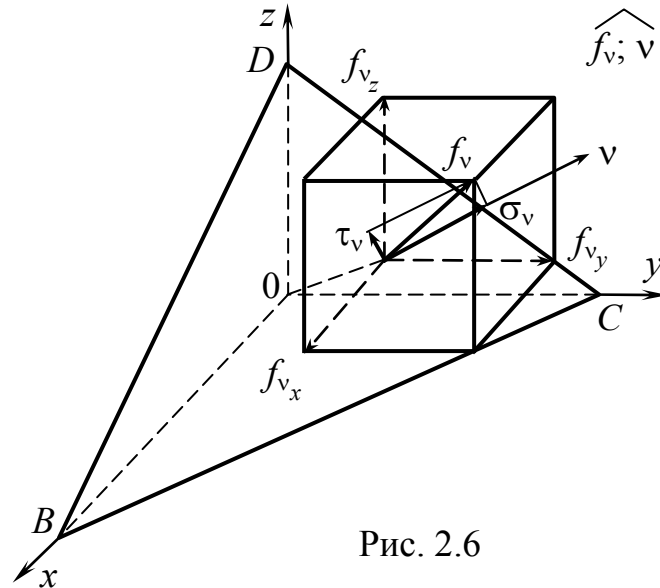


Рис. 2.6

$$\Sigma X = 0; \quad f_{v_x} \cdot dA - \sigma_x \cdot dA_x - \tau_{yx} \cdot dA_y - \tau_{zx} \cdot dA_z = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad f_{v_y} \cdot dA - \tau_{xy} \cdot dA_x - \sigma_y \cdot dA_y - \tau_{zy} \cdot dA_z = 0;$$

$$\Sigma Z = 0; \quad f_{v_z} \cdot dA - \tau_{xz} \cdot dA_x - \tau_{yz} \cdot dA_y - \sigma_z \cdot dA_z = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{v_x} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n \\ f_{v_y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n \\ f_{v_z} = \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n \end{array} \right\}. \quad (2.1)$$

Компоненты полного напряжения на наклонной площадке.

$$f_v = \sqrt{f_{v_x}^2 + f_{v_y}^2 + f_{v_z}^2}; \quad \sigma_v = ? \quad (2.2)$$

$$\sigma_v = f_v \cdot \cos(f_v, \sigma_v).$$

Вместо проекции  $f_v$  на направление  $v$  можно брать сумму проекций, составляющих полное напряжение на то же самое направление, тогда получим

$$\begin{aligned}\sigma_v &= f_{v_x} \cdot \cos(f_{v_x}, v) + f_{v_y} \cdot \cos(f_{v_y}, v) + f_{v_z} \cdot \cos(f_{v_z}, v) = \\ &= f_{v_x} \cdot l + f_{v_y} \cdot m + f_{v_z} \cdot n; \quad \cos(f_v, \sigma_v) = \cos(x, v) = \cos \alpha = l; \\ \sigma_v &= (\sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{yz} \cdot n) \cdot l + (\tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n) \cdot m + \\ &+ (\tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n) \cdot n; \\ \sigma_v &= \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + 2(\tau_{xy} \cdot l \cdot m + \tau_{yz} \cdot m \cdot n + \tau_{zx} \cdot n \cdot l); \quad (2.3)\end{aligned}$$

$$\tau_v = \sqrt{f_v^2 - \sigma_v^2}. \quad (2.4)$$

Таким образом, мы получили значения  $f_v, \sigma_v, \tau_v$  на произвольной косоугольной площадке через компоненты напряжений на трех взаимно перпендикулярных исходных площадках.

### 2.3. Главные напряжения и главные площадки

*Ключевые слова*

*Экстремальные значения нормальных напряжений, главные площадки, характеристическое уравнение напряженного состояния, инварианты напряженного состояния.*

*Представляет особую важность при суждении о прочности и деформации определение экстремальных значений напряжений.*

Можно показать, что для любой точки напряженного тела существует по крайней мере три взаимно перпендикулярные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, а нормальные напряжения имеют экстремальное значение. Такие площадки называются главными площадками, а действующие на них нормальные напряжения называются главными нормальными напряжениями.

Ниже будет показано (рис. 2.7), что если будут найдены главные напряжения и главные площадки, легко установить и положение таких площадок, где действуют экстремальные касательные напряжения, и величину последних.

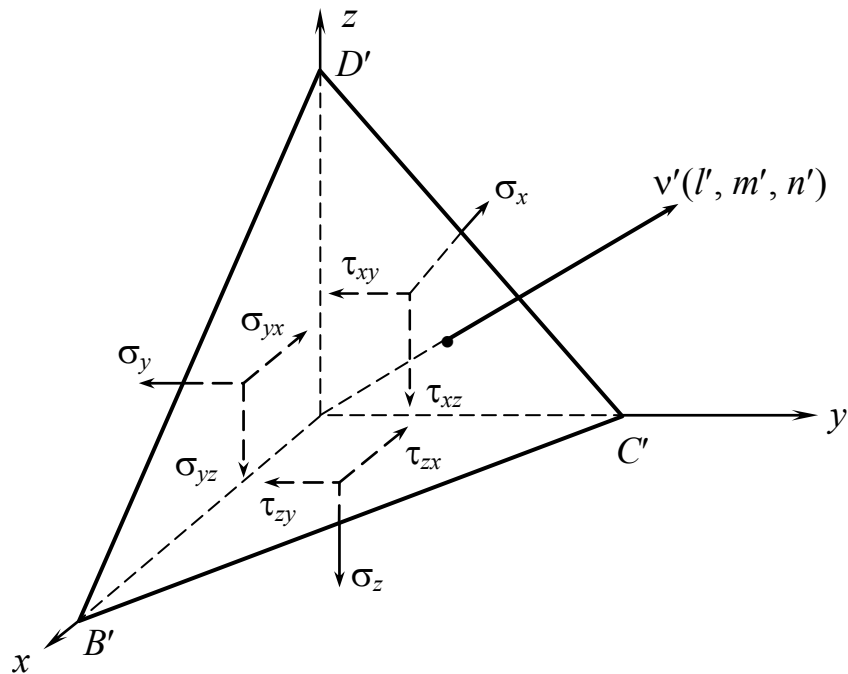


Рис. 2.7

$B'C'D'$  – главная площадка.

$v'(l', m', n')$  – нормаль к главной площадке.

$$\tau_{v'} = 0.$$

$$f_{v'} = \sigma_{v'}.$$

В дальнейшем вместо  $\sigma_{v'} \rightarrow \sigma$  (главная нормаль  $\rightarrow$  направление главной нормали).

$$\left. \begin{aligned} f_{v'_x} &= \sigma l' \\ f_{v'_y} &= \sigma m' \\ f_{v'_z} &= \sigma n' \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

С другой стороны,  $f_{v'_x}, f_{v'_y}, f_{v'_z}$  можно определить по формулам (2.6):

$$\left. \begin{aligned} f_{v'_x} &= \sigma_x \cdot l' + \tau_{xy} \cdot m' + \tau_{zx} \cdot n' \\ f_{v'_y} &= \tau_{xy} \cdot l' + \sigma_y \cdot m' + \tau_{yz} \cdot n' \\ f_{v'_z} &= \tau_{xz} \cdot l' + \tau_{yz} \cdot m' + \sigma_z \cdot n' \end{aligned} \right\}. \quad (2.6)$$

Объединяя (2.6) и (2.5) имеем

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cdot l' + \tau_{yx} \cdot m' + \tau_{zx} \cdot n' &= 0 \\ \tau_{xy} \cdot l' + (\sigma_y - \sigma) \cdot m' + \tau_{zy} \cdot n' &= 0 \\ \tau_{xz} \cdot l' + \tau_{xz} \cdot m' + (\sigma_z - \sigma) \cdot n' &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.7)$$

Выражение (2.7) может рассматриваться как система уравнений относительно направляющих косинусов  $l', m', n'$ , нормали к главной площадке,  $l', m', n'$  одновременно равняться нулю не могут, поскольку  $l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$ .

Таким образом, система однородных уравнений (2.7) имеет ненулевое решение, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю.

Составляем определитель:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Если развернуть определитель, получим характеристическое уравнение напряженного состояния в виде

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0, \quad (2.9)$$

где  $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ .

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2.$$



$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Между компонентами напряженного состояния существуют такие соотношения, что если соответствующие элементы двух строк или столбцов определителя, выражающего третий инвариант, пропорциональны, то последний обращается в нуль.

Можно доказать, что уравнение (2.9) дает три действительных корня  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , представляющих собой значения главных напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках. Положение площадок может быть определено из выражения (2.7) с учетом соотношения  $l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$ .

Поскольку  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  как физические величины должны иметь вполне определенные значения для каждой данной точки напряженного тела (в частности, их величина не может зависеть от исходных площадок), постольку  $I_1, I_2, I_3$  должны быть величинами инвариантными.

$I_1, I_2, I_3$  называются инвариантами напряженного состояния. Обычно  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  обозначают таким образом, что в алгебраическом смысле соблюдается следующее условие:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Схема решения кубического уравнения:

$$\eta^3 + p \cdot \eta + q = 0, \quad (2.11)$$

где  $p = I_2 - \frac{1}{3}I_1$ ,  $q = -\frac{2}{27}I_1^3 + \frac{1}{3}I_1 \cdot I_2 - I_3$ .

Уравнение (2.11) имеет три действительных корня, выраженных через вспомогательный угол  $\varphi$ .

$$\sigma = \eta + \frac{1}{3}I_1,$$

$$\cos 3\varphi = -\frac{3\sqrt{3}q}{2|p| \cdot \frac{3}{2}};$$

тогда  $\eta_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{|p|} \cdot \cos\varphi, \quad \eta_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{|p|} \cdot \cos(\varphi - 120^\circ),$

$$\eta_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{|p|} \cdot \cos(\varphi + 120^\circ).$$

$$\sigma_1 = \eta_1 + \frac{1}{3}I_1, \quad \sigma_2 = \eta_2 + \frac{1}{3}I_1, \quad \sigma_3 = \eta_3 + \frac{1}{3}I_1.$$

## 2.4. Определение положения главных площадок

*Ключевые слова*

*Направляющие косинусы нормалей к главным площадкам, ортогональность главных площадок.*

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cdot l' + \tau_{xy} \cdot m' + \tau_{xz} \cdot n' &= 0 \\ \tau_{yx} \cdot l' + (\sigma_y - \sigma) \cdot m' + \tau_{yz} \cdot n' &= 0 \\ \tau_{zx} \cdot l' + \tau_{zy} \cdot m' + (\sigma_z - \sigma) \cdot n' &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.12)$$

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1.$$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cdot \frac{l'}{n'} + \tau_{xy} \frac{m'}{n'} + \tau_{xz} &= 0 \\ \tau_{yx} \cdot \frac{l'}{n'} + (\sigma_y - \sigma) \cdot \frac{m'}{n'} + \tau_{yz} &= 0 \\ \tau_{zx} \cdot \frac{l'}{n'} + \tau_{zy} \frac{m'}{n'} + (\sigma_z - \sigma) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

из 2 уравнений выразим  $\frac{l'}{n'} = a$   
и  $\frac{m'}{n'} = b$  через определитель:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{aligned} \left| \begin{array}{l} x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{l'}{n'} = a &= \frac{\tau_{yz} \cdot \tau_{xy} - \tau_{xz} (\sigma_y - \sigma)}{(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2}; \\ \frac{m'}{n'} = b &= \frac{\tau_{xz} \cdot \tau_{yx} - \tau_{yz} (\sigma_x - \sigma)}{(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2}; \end{aligned} \right\} * \quad (2.13)$$

$$\frac{l'^2}{n'^2} + \frac{m'^2}{n'^2} + 1 = \frac{1}{n'^2} \left| a^2 + b^2 + 1 = \frac{1}{n'^2} \right|, \quad (2.14)$$

$$n' = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},$$

$$\left. \begin{aligned} l' &= a \cdot n' \\ m' &= b \cdot n' \end{aligned} \right\}. \quad (2.15)$$

Для получения значений направляющих косинусов нормали к первой главной площадке (по которой действует напряжение  $\sigma_1$ ) следует в формулах (2.14) и (2.15) вместо  $\sigma$  подставить  $\sigma_1$  и соответственно для двух других площадок II и III вместо  $\sigma$  подставить  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

I.  $\sigma \rightarrow \sigma_1$

II.  $\sigma \rightarrow \sigma_2$

III.  $\sigma \rightarrow \sigma_3$

Для проверки полученных значений направляющих косинусов может быть использовано свойство ортогональности главных площадок.

$$l_k \cdot l_j + m_k \cdot m_j + n_k \cdot n_j = 0, \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{pmatrix}.$$

## 2.5. Определение напряжений на произвольных наклонных площадках по заданным главным напряжениям

*Ключевые слова*

*Компоненты напряжений на наклонных площадках, главные напряжения на исходных площадках.*

Предположим, что положение главных площадок и величины главных напряжений известны (рис. 2.8). Совместим главные площадки с координатными плоскостями. Главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  известны.

$$f_v - ? \quad \sigma_v - ? \quad \tau_v - ?$$

из формулы (2.5)

$$\left. \begin{aligned} f_{v_x} &= \sigma_1 \cdot l \\ f_{v_y} &= \sigma_2 \cdot m \\ f_{v_z} &= \sigma_3 \cdot n \end{aligned} \right\}$$

$$f_v = \sqrt{(\sigma_1 \cdot l)^2 + (\sigma_2 \cdot m)^2 + (\sigma_3 \cdot n)^2};$$

$$\sigma_v = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2,$$

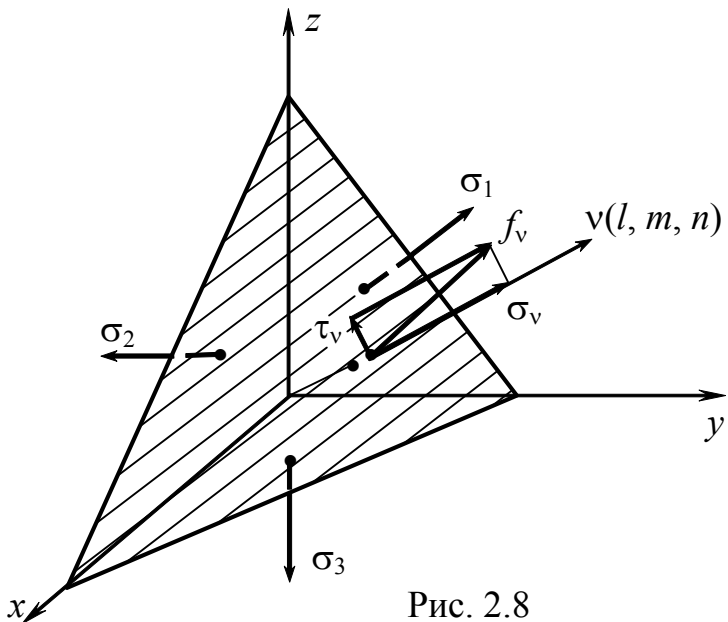


Рис. 2.8

из формулы (2.4)

$$\tau_v = \sqrt{f_v^2 - \sigma_v^2} =$$

$$= \sqrt{(\sigma_1 \cdot l)^2 + (\sigma_2 \cdot m)^2 + (\sigma_3 \cdot n)^2 - (\sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2)^2}.$$

Если за исходные приняты главные площадки, то расчетные формулы существенно упрощаются.

## 2.6. Эллипсоид напряжений (элемент Ляме)

Поверхность эллипсоида напряжений описывается концом вектора полных напряжений (рис. 2.9).

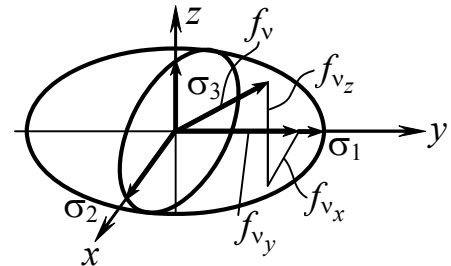


Рис. 2.9

$$\left. \begin{aligned} f_{v_x} &= \sigma_1 \cdot l \\ f_{v_y} &= \sigma_2 \cdot m \\ f_{v_z} &= \sigma_3 \cdot n \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} l &= \frac{f_{v_x}}{\sigma_1} \\ m &= \frac{f_{v_y}}{\sigma_2} \\ n &= \frac{f_{v_z}}{\sigma_3} \end{aligned} \right\},$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – полуоси эллипсоида.  $f_{v_x}, f_{v_y}, f_{v_z} \rightarrow$  компоненты вектора.

$$\left( \frac{f_{v_x}}{\sigma_1} \right)^2 + \left( \frac{f_{v_y}}{\sigma_2} \right)^2 + \left( \frac{f_{v_z}}{\sigma_3} \right)^2 = 1 - \text{уравнение эллипсоида.} \quad (2.16)$$

Эллипсоид напряжений наглядно показывает, что главные напряжения являются экстремальными, ни на одной площадке, проходящей через данную точку, полное напряжение не может быть больше  $\sigma_1$ .  $f_v \leq \sigma_1$ , также  $f_v \leq \sigma_3$ .

## 2.7. Определение наибольших касательных напряжений

*Ключевые слова*

*Экстремум функций, метод Лагранжа, площадки, наибольшие касательные напряжения.*

Определим величины наибольших касательных напряжений и положение площадок, по которым они действуют, в предположении, что величины главных напряжений и положение главных площадок для данной точки уже установлены. Для исследования воспользуемся выражением касательных напряжений на произвольной площадке.

$$\tau_v = \sqrt{(\sigma_1 \cdot l)^2 + (\sigma_2 \cdot m)^2 + (\sigma_3 \cdot n)^2 - (\sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2)^2};$$

$$\tau_v^2 = \sigma_1^2 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2 - (\sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2)^2; \quad (2.17)$$

$\tau_v^2 = f(l, m, n),$   $\left\| \begin{array}{l} \text{Мы имеем дело с отысканием условного} \\ l^2 + m^2 + n^2 - 1 = 0. \end{array} \right\|$  экстремума функций.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Метод Лагранжа: } f(x, y, z) = 0. \quad \Phi(x, y, z) = 0. \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \end{array} \right|$$

Экстремум ищется из этих выражений:

$$\frac{\partial \tau_v^2}{\partial l} = 2\sigma_1^2 \cdot l - 2 \left( \overbrace{\sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2}^{\sigma_v} \right) 2\sigma_1 \cdot l = 2\sigma_1 \cdot l(\sigma_1 - 2\sigma).$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}(l^2 + m^2 + n^2 - 1) = 2l. \quad \begin{array}{l} \text{Запишем 1-ю строку по методу} \\ \text{Лагранжа.} \end{array}$$

$$\frac{\partial \tau_v^2}{\partial l} + \lambda \frac{d}{dl}(l^2 + m^2 + n^2 - 1) = 0.$$

$$2\sigma_1 \cdot l(\sigma_1 - 2\sigma) + 2\lambda \cdot l = 0. \quad \sigma_1 \cdot l(\sigma_1 - 2\sigma) + \lambda \cdot l = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} l(\sigma_1^2 - 2\sigma_1 \cdot \sigma + \lambda) = 0, \\ m(\sigma_2^2 - 2\sigma_2 \cdot \sigma + \lambda) = 0, \\ n(\sigma_3^2 - 2\sigma_3 \cdot \sigma + \lambda) = 0. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Две последние строки записаны} \\ \text{по аналогии, исходя из круговой} \\ \text{перестановки.} \end{array}$$

1. Случай  $l = m = n = 0$  исключаем.

2. Очевидное решение  $l = 1; m = n = 0$  соответствует первой главной площадке, где  $\tau = 0$  – I площадка, аналогично в случае  $m = 1; l = n = 0$  – II площадка,  $n = 1; l = m = 0$  – III площадка.

3.  $l \neq 0, m \neq 0$  перепишем первые 2 строки и сократим  $l$  и  $m$ .

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 - 2\sigma_1 \cdot \sigma + \lambda &= 0, \\ \sigma_2^2 - 2\sigma_2 \cdot \sigma + \lambda &= 0.\end{aligned}$$

Вычтя вторую строку, получим  $\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - 2\sigma(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$ ,  $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ . С другой стороны, для  $\sigma$  на площадке имеем:  $\sigma = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2$ . Сравнивая коэффициенты при  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , имеем, что  $l^2 = \frac{1}{2}$ ,  $m^2 = \frac{1}{2}$ ,  $n = 0$ .

$$l = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n = 0. \quad (2.18)$$

Это и есть направляющие косинусы одной из искомых площадок, на которых действуют экстремальные касательные напряжения (рис. 2.10). В табл. 2.1. представлены значения экстремальных касательных напряжений и площадки, где они проходят.

По формуле 2.17 подставляя  $l, m, n$ , получим:

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{1,2}. \quad (2.19)$$

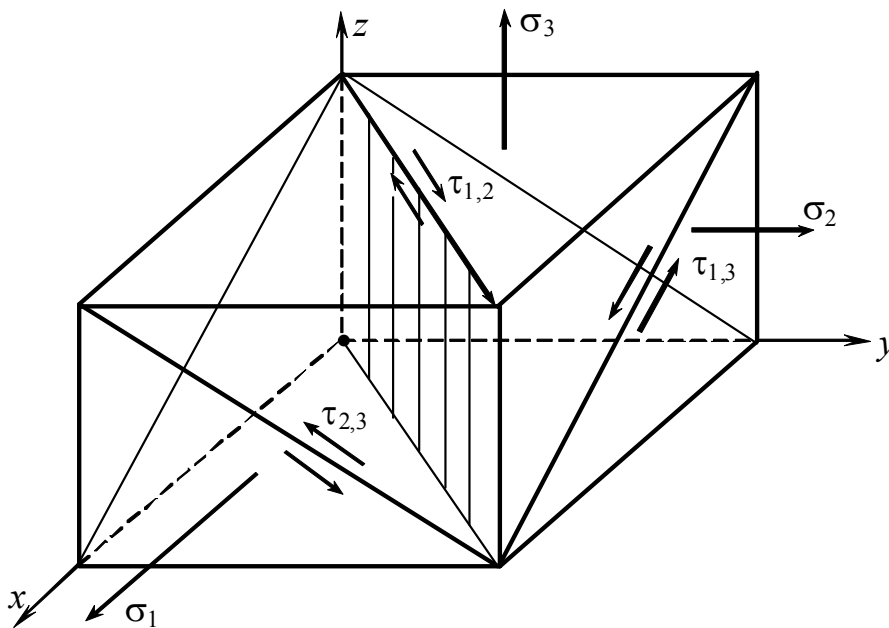


Рис. 2.10

Таблица 2.1

	$l$	$m$	$n$	$\sigma$	$\tau$	Площадка
I	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$	$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{1,2}$	проходит параллельно оси $z$ и равнонаклонена к осям $x$ и $y$
II	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$	$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{1,3}$	проходит параллельно оси $y$ и равнонаклонена к осям $x$ и $z$
III	0	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$	$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \tau_{2,3}$	проходит параллельно оси $x$ и равнонаклонена к осям $y$ и $z$

## 2.8. Напряжения на октаэдрических площадках

*Ключевые слова*

*Полные, нормальные и касательные напряжения на октаэдрических площадках.*

*Октаэдрическая площадка равно наклонена ко всем трем главным площадкам. Интерес представляет определение напряжений на октаэдрических площадках (рис. 2.11).*

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\left. \begin{aligned} f_{y_x} &= \sigma_1 \cdot l \\ f_{y_y} &= \sigma_2 \cdot m \\ f_{y_z} &= \sigma_3 \cdot n \end{aligned} \right\}$$

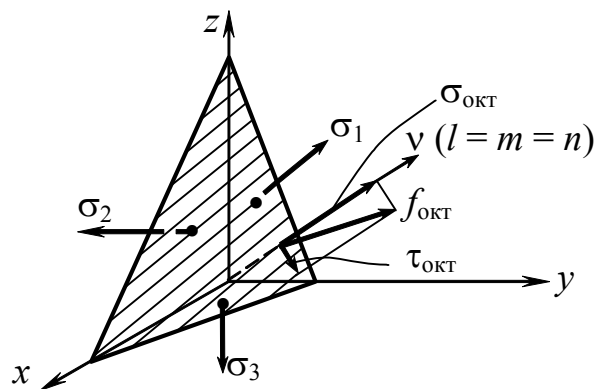


Рис. 2.11

$$f_{\text{окт}} = \sqrt{(\sigma_1 \cdot l)^2 + (\sigma_2 \cdot m)^2 + (\sigma_3 \cdot n)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)}, \quad (2.20)$$



$$\sigma_{\text{окт}} = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\text{окт}} &= \sqrt{f_{\text{окт}}^2 - \sigma_{\text{окт}}^2} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2 \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_1 \cdot \sigma_3} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{1,2}^2 + \tau_{2,3}^2 + \tau_{3,1}^2}. \quad (2.22) \end{aligned}$$

*Касательные напряжения на октаэдрических площадках выражаются через экстремальные напряжения. Значения напряжений на октаэдрических площадках будут использоваться в условиях сложного напряженного состояния.*

## **2.9. Общие выводы по теории напряженного состояния**

*Ключевые слова*

*Степень опасности напряженного состояния в точке тела, виды напряженного состояния.*

1. Напряженное состояние в любой точке тела в общем случае характеризуется 6-ю независимыми компонентами:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , представляющими собой значения напряжений на 3 взаимно перпендикулярных произвольных площадках, проведенных через данную точку (в окрестности точки).

2. В любой точке напряженного тела существуют, по крайней мере, 3 взаимно перпендикулярные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, а нормальные напряжения имеют экстремальные значения,  $\tau = 0, \sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$ .

Если за исходные площадки принять главные площадки, то напряжения на любых других площадках могут быть выражены через главные напряжения, при этом формулы перехода более

просты, нежели в случае, когда исходными являются произвольные площадки. Главные напряжения полностью характеризуют напряженное состояние в точке тела, по их значениям, как будет показано дальше, можно судить о степени опасности напряженного состояния в соответствующих точках твердого тела.

*Различают следующие виды напряженного состояния:*

1. Объемное или трехосное напряженное состояние (рис. 2.12).

$$\sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_2 \neq 0, \quad \sigma_3 \neq 0.$$

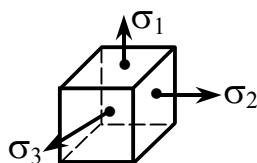


Рис. 2.12

Объемное напряженное состояние имеет место в зоне контакта соприкасающихся тел (шарики и кольцо подшипника качения, находящиеся в зацеплении зубья шестерни),

в толстостенной трубе с днищами под действием давления, при волочении проволоки, при ковке в закрытых штампах и т.п.

2. Плоское или двухосное напряженное состояние, одно из главных напряжений равно нулю (рис. 2.13).

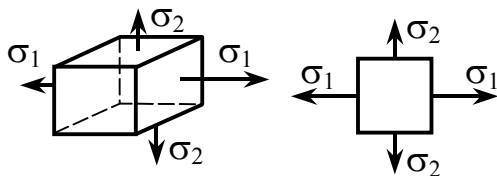


Рис. 2.13

Эти два типа – разновидности сложного напряженного состояния.

3. Линейное или одноосное напряженное состояние, два из 3

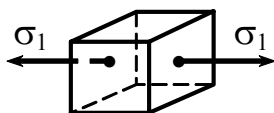


Рис. 2.14

главных напряжений равны нулю, это простое напряженное состояние (рис. 2.14).

## 2.10. Случай плоского напряженного состояния

*Ключевые слова*

*Компоненты плоского напряженного состояния, главные напряжения, главные площадки.*

На рис. 2.15 представлен брус, в поперечных сечениях которого плоское напряженное состояние (рис. 2.16).

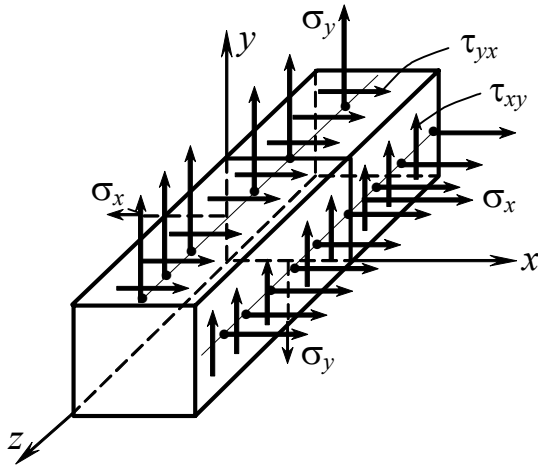


Рис. 2.15

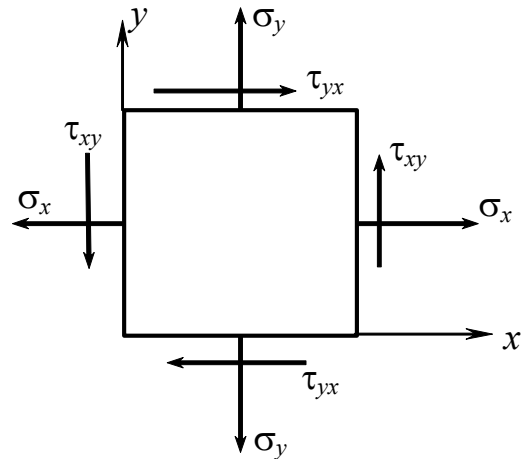


Рис. 2.16

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

$$\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0.$$

1. Определим величину главных напряжений и положение главных площадок.

Воспользуемся определителем (2.8):

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая по минорам, имеем  $-\sigma \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0.$

Опуская (-), получим  $\sigma[(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2] = 0.$

$\sigma \neq 0$ . Учитывая неравенство нулю  $\sigma$ , имеем:

$$\left[ (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 \right] = 0, \quad \sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \cdot \sigma + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0.$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right]. \quad (2.23)$$

Воспользуемся выражением (2.1) для определения положения главных площадок:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + 0 &= 0 \\ \tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + (0 - \sigma) \cdot n &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.24)$$

$n = 0$ . Главные площадки параллельны оси  $z$ .

$$m = -\frac{\sigma_x - \sigma}{\tau_{yx}} \cdot l, \text{ используя } l^2 + m^2 + n^2 = 1, \text{ имеем: } l^2 + \left( \frac{\sigma_x - \sigma}{\tau_{yx}} \right)^2 \cdot l^2 = 1.$$

$$l = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma_x - \sigma}{\tau_{yx}} \right)^2}} = \pm \frac{\tau_{yx}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma)^2 + \tau_{yx}^2}}; \quad (2.25)$$

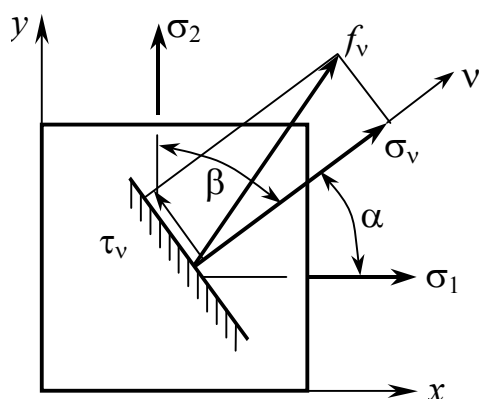
$$m = \pm \frac{\sigma_x - \sigma}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma)^2 + \tau_{yx}^2}}.$$

## 2.11. Определение напряжений на произвольных площадках по заданным данным главным напряжениям

*Ключевые слова*

*Нормальные, касательные и полные напряжения.*

Совместим главные площадки с координатными плоскостями (рис. 2.17).



$$\left. \begin{aligned} f_{v_x} &= \sigma_1 \cdot l = \sigma_1 \cdot \cos \alpha \\ f_{v_y} &= \sigma_2 \cdot m = \sigma_2 \cdot \cos \beta = \sigma_2 \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$f_v = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cdot \sin^2 \alpha} . \quad (2.26)$$

Рис. 2.17

$$\sigma_v = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \beta. \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \tau_v &= \sqrt{f_v^2 - \sigma_v^2} = \sqrt{(\sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cdot \sin^2 \alpha) - (\sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha)^2} = \\ &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha, \end{aligned}$$

$$\tau_v = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (2.28)$$

## 2.12. Графический способ исследования плоского напряженного состояния. Круговые диаграммы Мора

*Ключевые слова*

*Круги Мора, прямая и обратная задачи.*

I. 1.  $\sigma_1, \sigma_2$  – главные напряжения даны, определить напряжения на наклонных площадках (рис. 2.18):

$$\sigma_\alpha - ? \quad \sigma_\beta - ?$$

$$\tau_\alpha - ? \quad \tau_\beta - ?$$

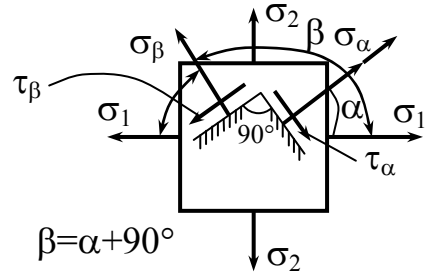


Рис. 2.18

Строим окружность по  $\sigma_2$  и  $\sigma_1$  (рис. 2.19).

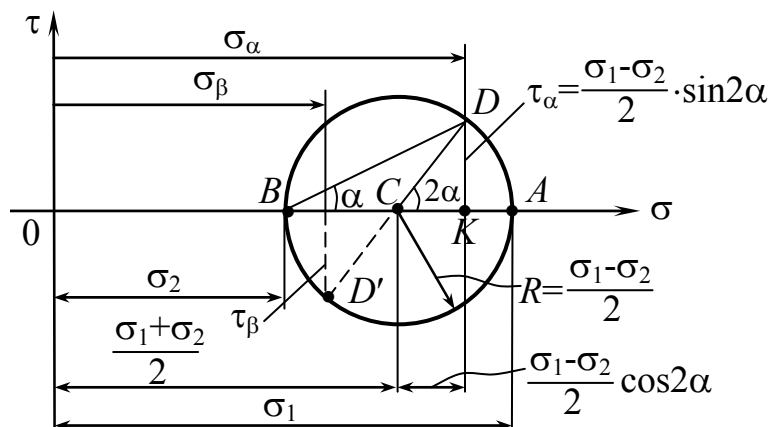


Рис. 2.19

2. Проводим радиус  $CD$  под углом  $2\alpha$ .

Можно доказать, что  $DK = \tau_\alpha$ , т.е. что координаты точки  $D$  и есть значение напряжений  $\tau_\alpha$  и  $\sigma_\alpha$  на площадке, наклонной под углом  $\alpha$  к линии действия первого главного напряжения.

Действительно:

$$\text{а) } CD = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad DK = CD \cdot \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha = \tau_\alpha.$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } OK &= OB + BC + CK = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha = \\
&= \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} (1 + \cos 2\alpha) = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} (1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \\
&= \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot 2 \cos^2 \alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha = \sigma_\alpha ! \\
2\beta &= 2\alpha + 180.
\end{aligned}$$

II. Решим обратную задачу, т.е. по значениям  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$  и  $\tau_\alpha, \tau_\beta$  определим  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (рис. 2.20, рис. 2.21).

Положим  $\sigma_\alpha > \sigma_\beta > 0$ ,  $\tau_\alpha > 0$ .

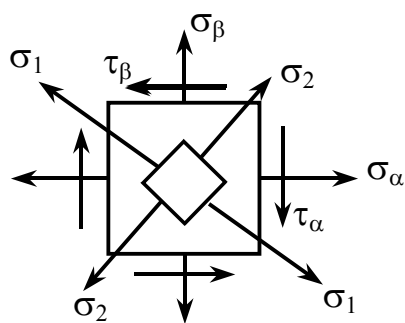


Рис. 2.20

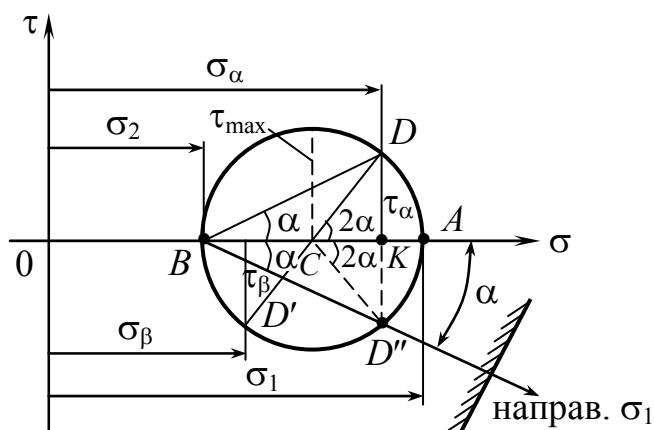


Рис. 2.21

Откладываем  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$  и  $\tau_\beta$ .

Соединяем две точки полного центрального круга напряжений

$$OC = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2},$$

$$CD = R = \sqrt{CK^2 + DK^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2},$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= OC + R \\ \sigma_2 &= OC - R \end{aligned} \right\}, \quad \sigma_{1,2} = OC \pm R.$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right],$$

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &\rightarrow \sigma_x \\ \sigma_\beta &\rightarrow \sigma_y \\ \tau_\alpha &\rightarrow \tau_{xy} \end{aligned}$$

Эта формула соответствует формуле (2.23).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KD''}{BK} = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_2} = -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta}, \quad (2.29)$$

$$\sin 2\alpha = \frac{KD''}{CK} = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}. \quad (2.30)$$

Из круга видно, что  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  являются экстремальными значениями напряжений.  $\tau_{\max} = R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha.$$

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}.$$

### 2.13. Применение графического способа к исследованию объемного напряженного состояния

*Ключевые слова*

*Круги Мора, напряженное состояние, площадки параллельные и не параллельные линии действия главных напряжений.*

Если взять систему площадок, параллельных  $\sigma_3$  (рис. 2.22), то

$$\sigma_v = \sigma_v(\sigma_1 \sigma_2),$$

$$\tau_v = \tau_v(\sigma_1 \sigma_2).$$

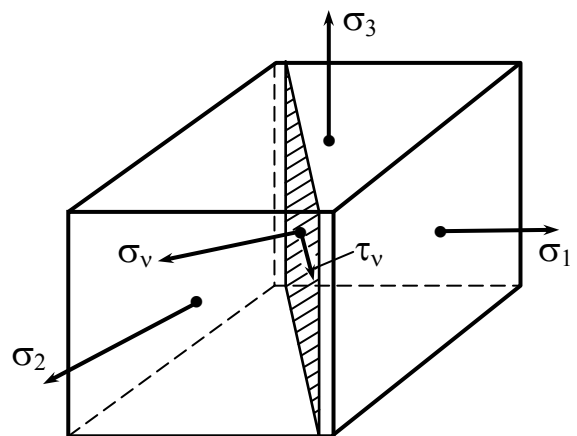


Рис. 2.22



Поэтому напряженное состояние на площадках, параллельных линии действия  $\sigma_3$ , может быть описано кругом напряжений, построенным на  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (рис. 2.23).

Аналогично обстоит дело на площадках, параллельных линии действия  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Что касается площадок, не параллельных линии действия главных напряжений (рис. 2.24), то напряженное состояние этих площадок определяется координатами точек, заключенными между тремя кругами напряжений.

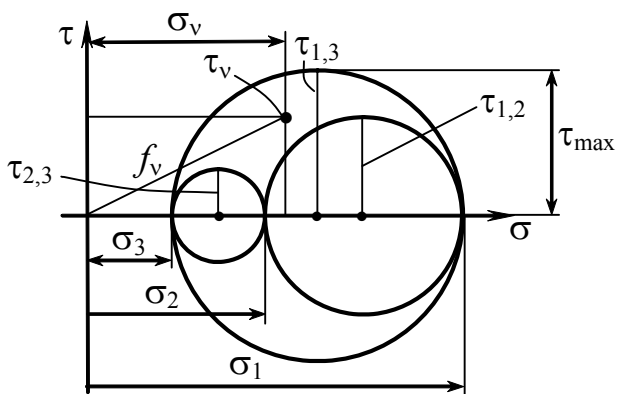


Рис. 2.23

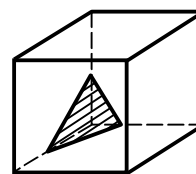


Рис. 2.24

$$\sigma_1 > f_v, \quad \sigma_3 < f_v,$$

$$\tau_{1,3} = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

## 2.14. Исследование деформируемого состояния в точке тела.

### Зависимости Коши. Тензор деформаций

*Ключевые слова*

*Относительные линейные и угловые деформации, деформируемое состояние в точке, главные деформации, инварианты деформируемого состояния, тензор деформаций.*

Тело закреплено, к нему приложены силы, точки тела в результате деформации перемещаются (рис. 2.25).

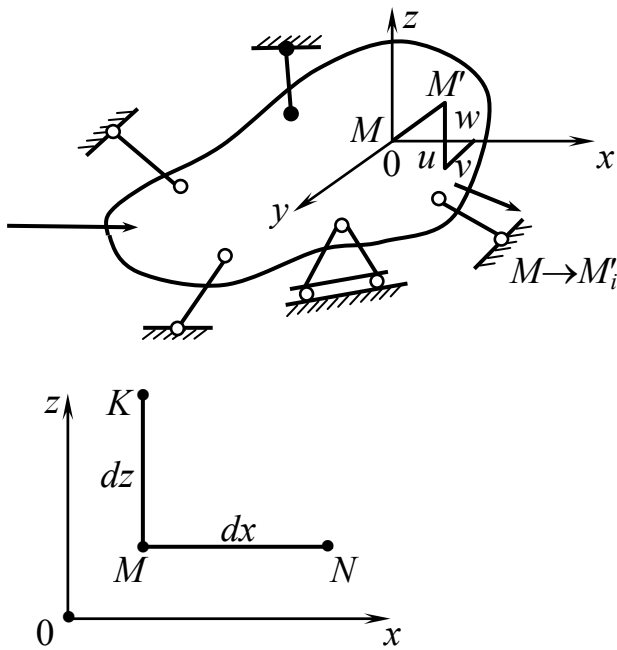


Рис. 2.25:  $MM'$  – полное перемещение;  
 $u, v, w$  – компоненты полного перемещения  
 точки  $M$

Рассмотрим изменение длины перемещения точек и искажение прямого угла между прямыми  $MN$  и  $MK$ , в плоскости  $xOz$ . Можно будет оценить перемещение точек и деформацию (линейную и угловую) параллелепипеда, построенного в окрестности любой точки.

Рассмотрим одну прямую (рис. 2.26).

$\frac{\partial u}{\partial x}$  – скорость изменения перемещения по горизонтали.

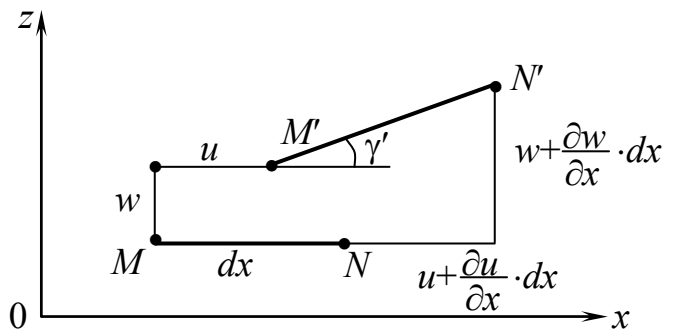


Рис. 2.26

$$\Delta(dx) = \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \text{ – абсолютное изменение длины}$$

по горизонтали.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ – относительная деформация.}$$

$$\gamma' = \frac{\left( w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) - w}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x} = \frac{\partial w}{\partial x} ! \quad \varepsilon_x \ll 1.$$

$$\gamma' = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

По аналогии рассмотрим перемещение по вертикали (рис. 2.27).

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{\frac{\partial w}{\partial z} \cdot dz}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

$$\gamma'' = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz\right) - u}{dz + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dz} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{1 + \frac{\partial w}{\partial z}} = \frac{\partial u}{\partial z},$$

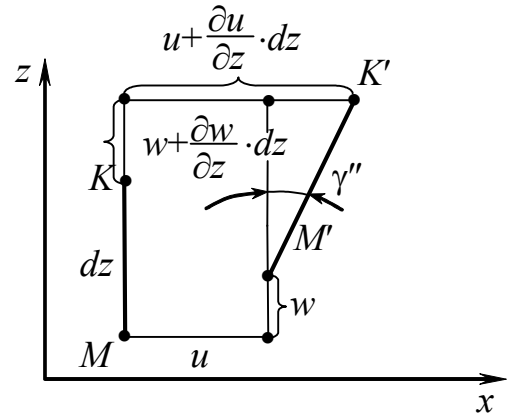
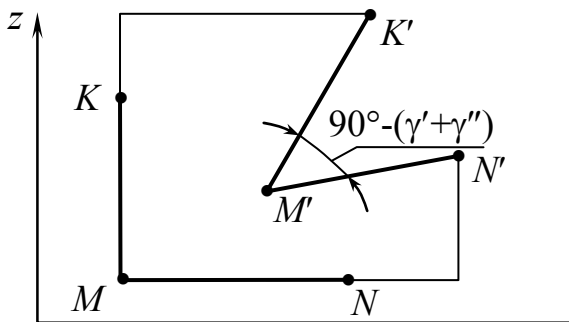


Рис. 2.27

(так как значение  $\varepsilon_z \ll 1$ ).

Перемещение в плоскости  $xOz$  представлено на рис. 2.28.

$$\gamma' + \gamma'' = \gamma_{xz}.$$



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Рис. 2.28

Без рассмотрения картины в других плоскостях по аналогии имеем зависимости Коши.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

1.  $\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x, \quad \varepsilon_y, \quad \varepsilon_z \\ \gamma_{xz}, \quad \gamma_{zy}, \quad \gamma_{yx} \end{array} \right\}$  – характеризуют деформируемое состояние в точке тела.

2. В любой точке деформируемого тела существуют три взаимно перпендикулярных направления, для которых отсутствуют искажения углов, а имеются лишь линейные деформации. Такие направления называются главными осями деформации,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – главные линейные деформации. В теле, обладающем шаровой изотропией, направления главных напряжений и деформаций совпадают.

3. Величина главных деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  определяется из уравнения:

$$\varepsilon^3 - I_1 \cdot \varepsilon^2 + I_2 \cdot \varepsilon - I_3 = 0,$$

где  $I_1 = \varepsilon_y + \varepsilon_x + \varepsilon_z$ ;  $I_2 = \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_z - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2$ ;

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix};$$

$I_1, I_2, I_3$  – инварианты деформируемого состояния.  
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  определяются из кубического уравнения.

Имеется аналогия с теорией напряженного состояния.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &\rightarrow \sigma_x, & \tau_{xy} &\rightarrow \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_y &\rightarrow \sigma_y, & \tau_{yz} &\rightarrow \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \\ \varepsilon_z &\rightarrow \sigma_z, & \tau_{zx} &\rightarrow \frac{1}{2} \gamma_{zx}. \end{aligned}$$

Соответственно, тензор деформации равен:

$$T_{\text{деф}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}.$$

По тензору деформации, т.е. по 6 компонентам деформированного состояния, по 3 взаимно перпендикулярным направлениям и плоскостям можно установить деформации линейные и угловые

по любым другим направлениям и плоскостям.

Удобнее иметь дело с главными деформациями.

## 2.15. Связь между напряжениями и деформациями.

### Обобщенный закон Гука

*Ключевые слова*

*Закон Гука для сдвига, закон Гука для линейных деформаций, температурные деформации, другая форма обобщенного закона Гука, средние деформации и напряжения, постоянная Ламе, матричная запись закона упругости.*

Между напряжениями и деформациями существует определенная физическая зависимость, которая в пределах малых упругих деформаций является линейной. Эта связь приведена выше в виде закона Гука.

1. Для растяжения (рис. 2.29):

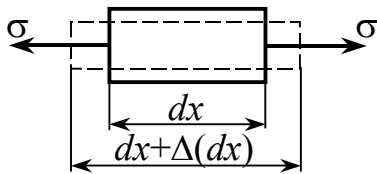


Рис. 2.29

$$\varepsilon_{\text{прод}} = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{\sigma}{E};$$

$$\varepsilon_{\text{поп}} = -\nu \varepsilon_{\text{прод}} = -\nu \frac{\sigma}{E};$$

$\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\nu < \frac{1}{2}$ .

2. Для сдвига (рис. 2.30):

$$\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

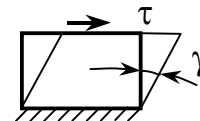


Рис. 2.30

1. Для изотропного тела (рис. 2.31) устанавливается, что нормальное напряжение не вызывает искажения углов, а касательные напряжения не приводят к изменению длин.

2. Касательные напряжения, действующие в одной плоскости, не вызывают искажения углов в других плоскостях.

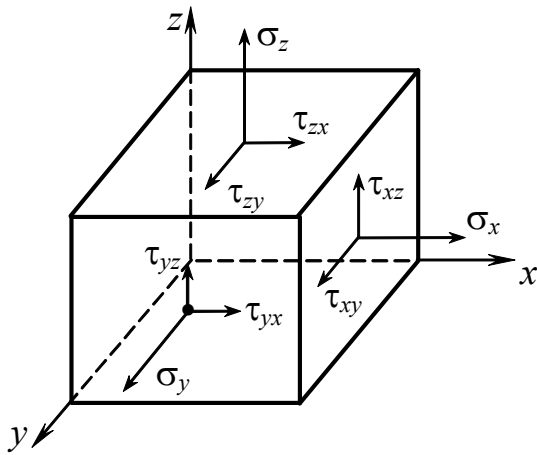


Рис. 2.31

3. Изменение длин ребер определяется по совокупному влиянию всех трех нормальных напряжений ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  или  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) или в пределах малых упругих деформаций по законам независимости действия сил: эффект действия группы сил равен сумме эффектов действия каждой силы в отдельности.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{array} \right\} \text{ — закон Гука для сдвига.} \quad (2.32)$$

$$\varepsilon_x - ? \quad \varepsilon_x = \varepsilon_x(\sigma_x) + \varepsilon'_x(\sigma_y) + \varepsilon''_x(\sigma_z);$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E};$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)].$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{array} \right\} \text{ — обобщенный закон Гука для линейных деформаций.} \quad (2.33)$$

С учетом температурных деформаций обобщенный закон Гука запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] + \alpha T; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \right] + \alpha T; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right] + \alpha T; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

**Примечание:**

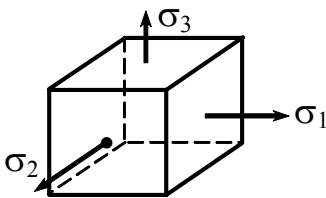


Рис. 2.32

1. Напряжения подставляются со своим знаком.
2. Из этих формул получаются формулы для плоского и линейного напряженного состояний, положив равными нулю соответствующие нормальные напряжения.
3. Для главных деформаций имеем (рис. 2.32):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (2.35)$$

Обратные зависимости между напряжениями и деформациями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu-\nu^2} \left[ (1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]; \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu-\nu^2} \left[ (1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right]; \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\nu-\nu^2} \left[ (1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right]; \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Для главных осей

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu-\nu^2} [(1-\nu)\varepsilon_1 + \nu(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)]; \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu-\nu^2} [(1-\nu)\varepsilon_2 + \nu(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)]; \\ \sigma_3 &= \frac{E}{1-\nu-\nu^2} [(1-\nu)\varepsilon_3 + \nu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)].\end{aligned}\quad (2.37)$$

Другая форма обобщенного закона Гука.

Вычитая из уравнения для  $\varepsilon_x$  среднюю деформацию  $\varepsilon$ , получаем

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_x - \sigma), \quad \dots \quad \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}, \quad \dots \quad (x, y, z). \quad (2.38)$$

Символ  $(x, y, z)$  означает, что недостающие уравнения выписываются по правилу круговой перестановки индексов.

В выражении (2.38) средние деформации и напряжения

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z); \\ \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).\end{aligned}\right\} \quad (2.39)$$

Для полной эквивалентности уравнений (2.34) и (2.38) к последним следует добавить условие, связывающее  $\varepsilon$  и  $\sigma$ :

$$\varepsilon = \frac{1-2\nu}{E}\sigma + \alpha T. \quad (2.40)$$

Эти соотношения получаются из (2.34), если сложить первые три равенства.

Во многих задачах оказывается необходимым выразить зависимость напряжений от деформаций, являющуюся следствием закона Гука.



Это проще получить из соотношений (2.38) и (2.40)

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_x + \sigma - \varepsilon \frac{E}{1+\nu} = 2G\varepsilon_x + \varepsilon \left( \frac{E}{1-2\nu} - \frac{E}{1+\nu} \right) - \frac{E}{1-2\nu}\alpha T.$$

Подобные соотношения можно найти для  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ .

В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + 3\lambda\varepsilon - \frac{E}{1-2\nu}\alpha T; \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + 3\lambda\varepsilon - \frac{E}{1-2\nu}\alpha T; \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + 3\lambda\varepsilon - \frac{E}{1-2\nu}\alpha T; \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – модуль сдвига;  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  – постоянная Ламе.

Величина  $\varepsilon$  представляет среднюю деформацию (2.39).

**Матричная запись закона упругости.** Линейные зависимости (2.38) удобно записывать в матричной форме:

$$\{\varepsilon\} = [a]\{\sigma\} + \{\alpha T\}, \quad (2.42)$$

где векторы деформаций, напряжений и температурных деформаций

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{\alpha T\} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.43)$$

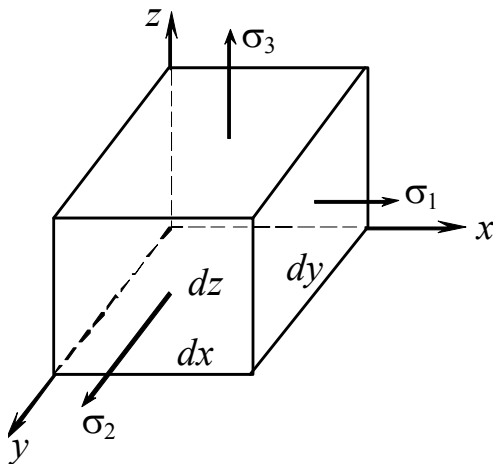
## Матрица податливости материала

$$[a] = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{array} \right\}. \quad (2.44)$$

### 2.16. Изменение объема при упругой деформации

*Ключевые слова*

*Относительное изменение объема, объемный модуль упругости, пределы изменения коэффициента Пуассона.*



$v_0 = dx \, dy \, dz$  – объем элемента до деформации (рис. 2.33).

$v$  – объем после деформации.

$$v = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz).$$

$\theta$  – относительное изменение объема.

Рис. 2.33

$$\theta = \frac{v - v_0}{v_0} = \frac{(dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) - dx \, dy \, dz}{dx \cdot dy \cdot dz} =$$

$$= \left(1 + \frac{\Delta dx}{dx}\right) \left(1 + \frac{\Delta dy}{dy}\right) \left(1 + \frac{\Delta dz}{dz}\right) - 1 = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 \approx$$

$$\approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (\text{исключаются величины высшего порядка малости}).$$

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (2.45)$$

Подставляя (2.35) в (2.45), получим после преобразования:

$$\theta = \frac{1}{E} [(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 2\nu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1-2\nu}{E} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3]. \quad (2.46)$$

$$\theta = \frac{3(1-2\nu)}{E} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3K}, \quad (2.47)$$

где  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ .

$K$  – объемный модуль упругости,  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_{\text{ср.}}$  и  $\theta = \frac{\sigma_{\text{ср.}}}{K}$ .

Если  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ , то  $\theta = \frac{p}{K}$ . (2.48)

Из формулы (2.46) следует:

1. Пусть  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$  все положительны, тогда  $\theta \geq 0$  – изменение объема  $(1-2\nu) \geq 0$ .  $\nu \leq 0,5$ .

2. Пусть  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$  (рис. 2.34).

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} (-p - p - p) = -\frac{3(1-2\nu)}{E} \cdot p.$$

$$\theta \leq 0. \quad 1-2\nu \geq 0. \quad \nu \leq 0,5.$$

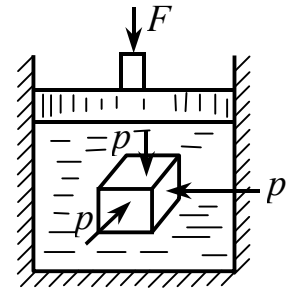


Рис. 2.34

Из непосредственных опытов известно, что  $0 \leq \nu \leq 0,5$ .

Сталь  $\nu \approx 0,3$ , резина – 0,5, пробка – 0.

## 2.17. Определение потенциальной энергии деформации

*Ключевые слова*

*Объемное, напряженное состояние, силы перемещения, работа, потенциальная энергия деформации, удельная потенциальная энергия.*

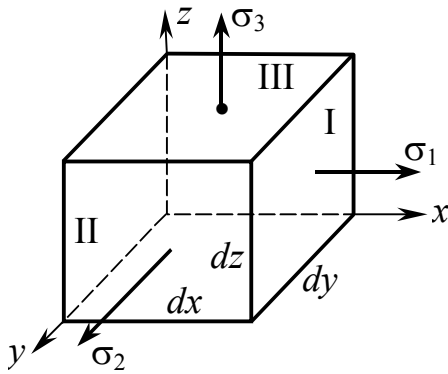


Рис. 2.35

Определим потенциальную энергию деформации применительно к случаю сложного напряженного состояния. Возьмем элемент, грани которого главные площадки (рис. 2.35).

грани	силы	перемещение	работа
I.	$\sigma_1 \cdot dy dz$	$\varepsilon_1 \cdot dx$	$\frac{1}{2}(\sigma_1 dy dz) \cdot \varepsilon_1 dx$
II.	$\sigma_2 \cdot dz dx$	$\varepsilon_2 \cdot dy$	$\frac{1}{2}(\sigma_2 dz dx) \cdot \varepsilon_2 dy$
III.	$\sigma_3 \cdot dx dy$	$\varepsilon_3 \cdot dz$	$\frac{1}{2}(\sigma_3 dx dy) \cdot \varepsilon_3 dz$

$\frac{1}{2}$  появляется, так как внешние силы и напряжения растут постепенно.

Обозначим потенциальную энергию деформации –  $U$ , а работу внешних и внутренних сил соответственно  $W_F$  и  $W_{вн}$ .

$U$  – потенциальная энергия деформации  
 $(W_F, W_{вн})$  – работа внешних и внутренних сил
 } обозначения.

Имея в виду, что работа сил без потерь (без рассеивания) полностью переходит в потенциальную энергию деформации, можно определить совокупную энергию, накапливаемую в элементе объема за счет сил, приложенных ко всем трем граням следующим образом:

$$dW_{\text{вн}} = dU = \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{1}{2} \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{1}{2} \sigma_3 \cdot \varepsilon_3 \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

$u$  – удельная потенциальная энергия деформации определяется

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \sigma_3 \cdot \varepsilon_3), \quad (2.49)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\}, \quad (2.50)$$

т.е. перемещения определяются с учетом влияния всех сил на каждое перемещение. Именно это обстоятельство и позволяет определить потенциальную энергию как простую сумму потенциальных энергий, накапливаемых за счет каждой силы в отдельности. Действительно, при этом обеспечивается учет работы каждой силы на перемещениях, вызванных этой и 2 другими силами. Подставив (2.34) в (2.41), получим

$$u = \frac{1}{2E} [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)] \quad (2.51)$$

– удельная потенциальная энергия деформации для объемного напряженного состояния.

## 2.18. Потенциальная энергия изменения объема и формы

*Ключевые слова*

*Общая потенциальная энергия, напряженное состояние изменения объема, напряженное состояние изменения формы.*

Представляет практический и теоретический интерес разложение общей потенциальной энергии на 2 части (рис. 2.36):

$u_v$  – часть потенциальной энергии, связанная с изменением объема;

$u_\phi$  – часть потенциальной энергии, связанная с изменением формы.

Условие ( $\theta_c = 0$ ) обеспечивается, если величина  $p$  определяется надлежащим образом:

$$\sigma_1 = \sigma'_1 + p;$$

$$\sigma_2 = \sigma'_2 + p;$$

$$\sigma_3 = \sigma'_3 + p;$$

$$p = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)}{3}.$$

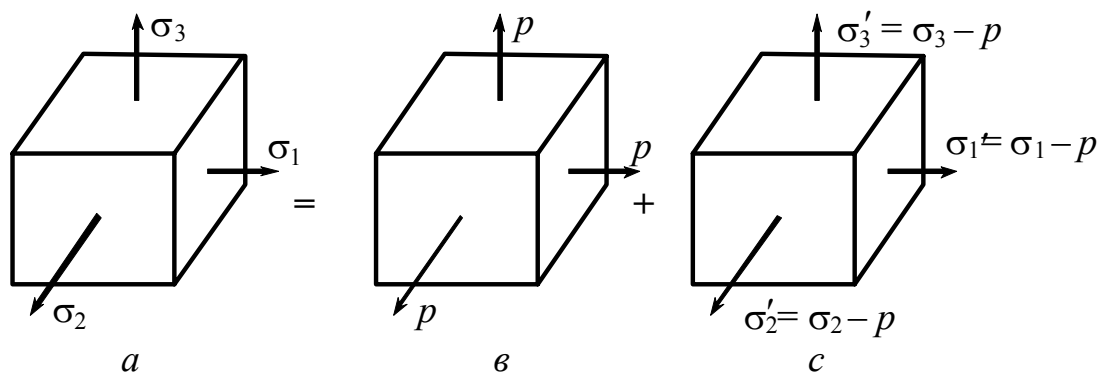


Рис. 2.36:  $a$  – заданное произвольное напряженное состояние;  
 $b$  – напряженное состояние, когда изменяется лишь объем;  
 $c$  – напряженное состояние, при котором будет изменяться лишь форма, а объем останется постоянным ( $\theta_c = 0$ )

$$\theta_c = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = 0.$$

$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0$ .  $\theta_c = 0$ , так как отсутствуют изменения объема,

тогда  $p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ .

Теперь можно определить потенциальную энергию изменения объема, соответствующую состоянию “в”. Поскольку в состоянии “с” объем не меняется, вычисленная потенциальная энергия и будет той частью общей потенциальной энергии, которая связана с изменением объема в случае произвольного напряженного состояния заданного напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

$$u_v = \frac{1}{2E} \left[ (p^2 + p^2 + p^2) - 2\nu(p^2 + p^2 + p^2) \right];$$

$$u_v = \frac{3(1-2\nu)}{2 \cdot E} \cdot p^2 = \frac{3(1-2\nu)}{2 \cdot E} \cdot \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 =$$

$$= \frac{1-2\nu}{6 \cdot E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2;$$
(2.52)

$$u_\phi = u - u_v;$$

$$u_\phi = \frac{1}{2E} \left[ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \right] -$$

$$- \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1),$$
(2.53)

или

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right],$$

$u$  и  $u_\phi$  используются в дальнейшем при обосновании теории прочности.

Приведенное выше разложение потенциальной энергии на две составляющие путем непосредственного вычисления потенциальной энергии для состояния “в” и “с” оказалось возможным потому, что силы, приложенные к граням элемента в состоянии “в”, не совершают работы на перемещениях, вызванных силами, относящимися к состоянию “с” и наоборот.

Докажем это: определим работу сил состояния “с” на перемещениях, вызванных силами состояния “в”.

$$\varepsilon_1^v = \varepsilon_2^v = \varepsilon_3^v = \varepsilon^v.$$

Работа сил состояния “с” на этих перемещениях будет:

$$W_{\text{вн}} = U = \frac{1}{2}(\sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \sigma_3 \cdot \varepsilon_3) = \frac{1}{2}(\sigma'_1 \varepsilon^e + \sigma'_2 \varepsilon^e + \sigma'_3 \varepsilon^e) =$$

$$= \frac{\varepsilon^e}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = 0, \text{ так как } \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0.$$

**Пример 1.** Дано:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu = 0,3$  (рис. 2.37).

Определить:  $\varepsilon_1 = ?$   $\varepsilon_2 = ?$   $\varepsilon_3 = ?$

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} =$$

$$= \frac{-100 + 0}{2} + \sqrt{\left(\frac{-100 - 0}{2}\right)^2 + 50^2} =$$

$$= -50 + \sqrt{50^2 + 50^2} = -50 + 50\sqrt{2} =$$

$$= 50(\sqrt{2} - 1) = 50 \cdot 1,41 = 72;$$

$$\sigma'' = \frac{-100}{2} - 50\sqrt{2} = -50(1 + \sqrt{2}) = -142;$$

$$\sigma_1 = 72; \quad \sigma_2 = 50; \quad \sigma_3 = -142;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}[72 - 0,3(50 - 142)] = \frac{93,16}{2 \cdot 10^5} = 4,66 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}[50 - 0,3(72 - 142)] = 3,55 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}[-142 - 0,3(72 + 142)] = -8,15 \cdot 10^{-3}.$$

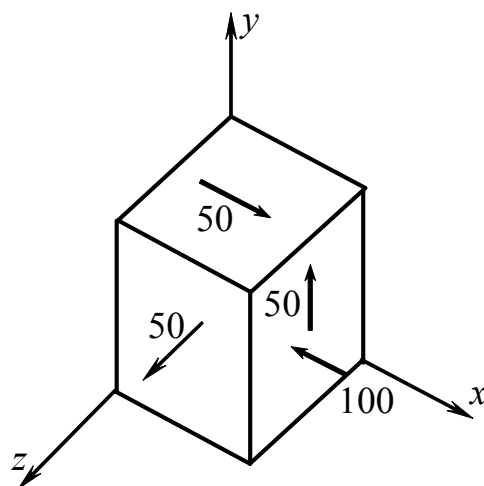


Рис. 2.37



**Пример 2.** Дано:  $G, E, \nu$  (рис.2.38).

Определить:  $\sigma_1 = ? \quad \sigma_2 = ? \quad \sigma_3 = ?$

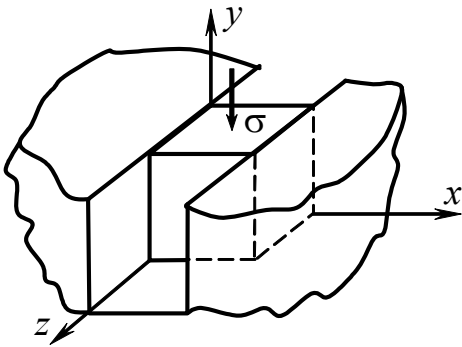


Рис. 2.38

$$\sigma_x = -p; \quad \sigma_z = 0; \quad \sigma_y = -\sigma.$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \\ &= \frac{1}{E} [-p - \nu(-\sigma + 0)] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда  $p = \nu\sigma$ ,

тогда  $\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = -\nu\sigma; \quad \sigma_3 = -\sigma.$

**Пример 3.** Дано:  $\sigma_1 = 60; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -60$  (рис. 2.39).

Определить:  $\sigma_{\text{окт}} = ? \quad \tau_{\text{окт}} = ?$

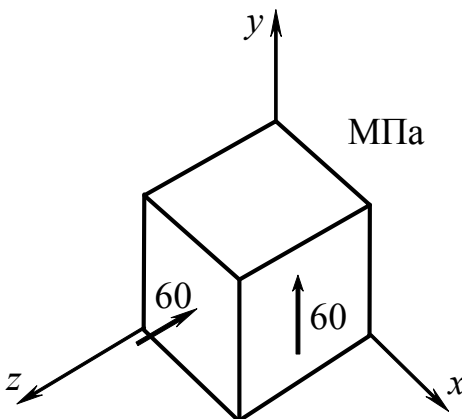


Рис. 2.39

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{окт}} &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(60 + 0 + (-60)) = 0, \\ \tau_{\text{окт}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(60 - 0)^2 + (60 - (-60))^2 + (0 - (-60))^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{60^2 + (120)^2 + 60^2} = \frac{60}{3} \sqrt{6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} 60 = \\ &= \frac{1,41}{1,72} 60 = 49,2. \end{aligned}$$

**Пример 4.** Определить главные напряжения в случае напряженного состояния, показанного на рис. 2.40.

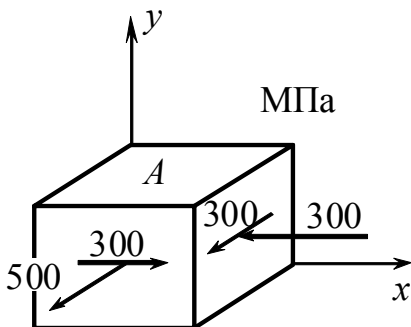


Рис. 2.40

Напряжения даны в МПа. Напряженное состояние – плоское. Площадка  $A$  является главной. Две другие находятся в семействе площадок, перпендикулярных к первой, тогда  $\sigma_x = -300$  МПа,  $\sigma_z = 500$  МПа,  $\tau = 300$  МПа.

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{-300 + 500}{2} - \sqrt{\left(\frac{500 - (-300)}{2}\right)^2 + 300^2} =$$

$$= 100 - \sqrt{400^2 + 300^2} = -400 \text{ МПа};$$

$$\sigma'' = 100 + \sqrt{400^2 + 300^2} = 600 \text{ МПа}.$$

Переименовывая напряжения в порядке убывания, получим

$$\sigma_1 = 600 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -400 \text{ МПа}.$$

**Пример 5.** На сколько уменьшится объем сплошного стального шара диаметром  $d = 25$  см при гидростатическом давлении  $p = 15$  МПа? (Принять  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа и  $\nu = 0,3$ .)

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{-3(1-2\nu)p}{E};$$

$$\Delta V = \frac{-3(1-2\nu)p}{E} \cdot V = \frac{-3(1-2\nu)p}{E} \frac{\pi d^3}{6} = \frac{-3 \cdot (1-2 \cdot 0,3)15}{2,1 \cdot 10^5} \cdot \frac{3,14 \cdot 0,25^3}{6} =$$

$$= -0,0702 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

**Пример 6.** Числовой пример, все напряжения указаны в МПа. На гранях элемента, находящегося в плоском напряженном состоянии, напряжения равны  $\sigma_x = 160$ ,  $\sigma_y = 60$  и  $\tau_{xy} = 40$  (рис. 2.41,а).

Определим а) главные напряжения и главные плоскости, б) напряжения в элементе, повернутом на  $45^\circ$ , в) максимальные касательные напряжения.

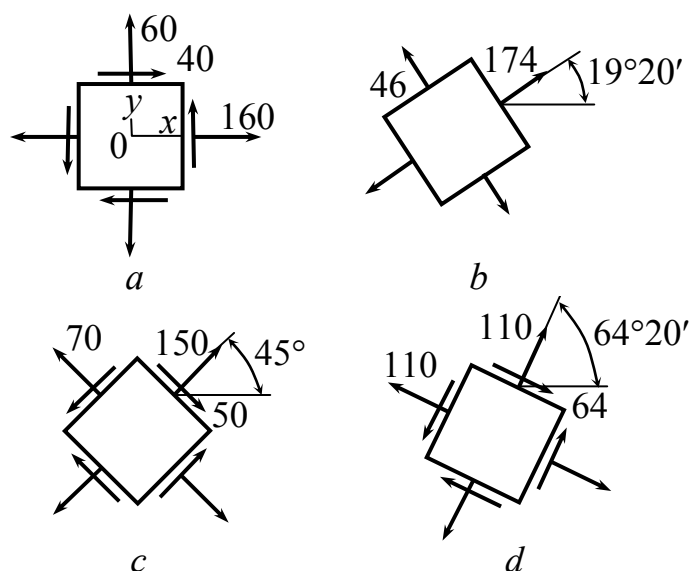


Рис. 2.41

Нанесем каждый результат на чертеж, изображающий повернутый элемент.

а) Для того, чтобы определить положение главных плоскостей, воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg} 2\theta_{\text{гл}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 40}{160 - 60} = 0,8.$$

Таким образом,  $2\theta_{\text{гл}} = 38^\circ 40'$  и  $218^\circ 40'$ , в соотношении

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta,$$

получим  $\sigma_\theta = 174$  МПа, подстановка в то же соотношение  $2\theta = 218^\circ 40'$  дает  $\sigma_\theta = 46$  МПа. Таким образом, максимальное главное напряжение равно  $\sigma_1 = 174$  МПа, а минимальное главное напряжение  $\sigma_2 = 46$  МПа. Эти напряжения показаны на рис. 2.41, *b*. Для проверки главные напряжения можно определить по формуле

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = 160 + 60 = 174 + 46.$$

б) Напряжения на гранях повернутого на  $45^\circ$  элемента можно найти из соотношений  $\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta,$

$$\tau_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta.$$

Подстановка в эти соотношения величины  $\theta = 45^\circ$  дает  $\sigma_{\theta} = 150$  МПа и  $\tau_{\theta} = 50$  МПа; эти напряжения показаны на рис. 2.41, с. На плоскости, расположенной под углом  $\theta = 135^\circ$ , нормальные и касательные напряжения соответственно равны  $\sigma'_{\theta} = 70$  МПа,  $\tau'_{\theta} = -50$  МПа.

в) Угол, определяющий положение плоскости с максимальным касательным напряжением, находится по формуле

$$\text{Ctg}2\theta_k = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 40}{160 - 60} = -0,8;$$

$$2\theta_k = 128^\circ 40' \text{ и } 308^\circ 40'; \quad \theta = 64^\circ 20' \text{ и } 154^\circ 20'.$$

Подставляя в соотношения для  $\sigma_{\theta}$  и  $\tau_{\theta}$  значение  $2\theta = 128^\circ 40'$ , получим  $\sigma_{\theta} = 110$  МПа и  $\tau_{\theta} = 64$  МПа. Для значения  $2\theta = 308^\circ 40'$  соответственно получим  $\sigma'_{\theta} = 110$  МПа и  $\tau'_{\theta} = 64$  МПа. Все эти напряжения показаны на схеме, изображающей элемент (рис. 2.41, d).

**Пример 7.** На гранях элемента, находящегося в плоском напряженном состоянии, напряжения равны  $\sigma_x = 60$ ,  $\sigma_y = 60$  и  $\tau_{xy} = 40$  МПа,  $\nu = 0,3$  (рис. 2.42).

При каком значении  $\sigma_x$ ,  $\varepsilon_x = 0$ ?

Решение

$\sigma_z = 0$ , тогда, зная что

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0,$$

$$\sigma_x = \nu\sigma_y = 0,3 \cdot 60 = 18 \text{ МПа}.$$

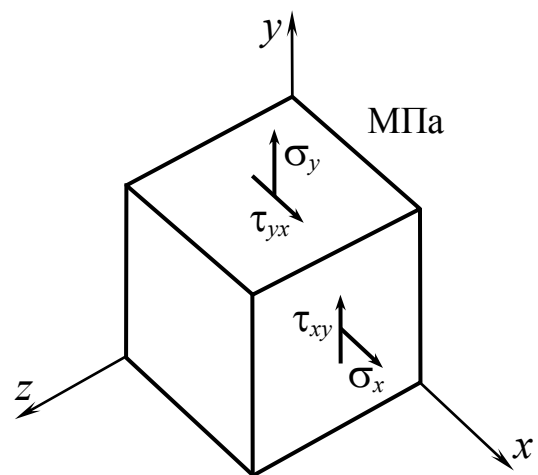


Рис. 2.42

## 2.19. Гипотезы прочности. Гипотезы пластичности и разрушения

*Ключевые слова*

*Полосы скольжения, пластические деформации, разрушение, сложное напряженное состояние, теории прочности, подобные напряженные состояния, предельное напряженное состояние, равноопасные и равнобезопасные напряженные состояния, эквивалентное напряженное состояние, критерий Бельтрами, коэффициенты запаса прочности, огибающие предельных кругов Мора, коэффициент сопротивляемости материала растяжению и сжатию, модель разрушения Мора.*

1. Под действием внешних сил атомы в решетке (рис. 2.43, а) получают взаимные смещения и силы взаимодействия между ними меняются.

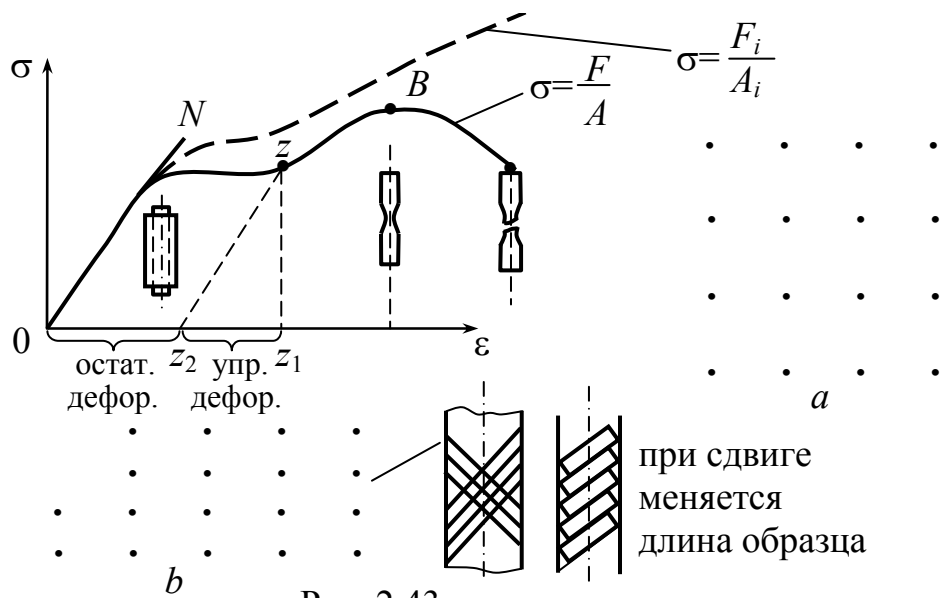


Рис. 2.43

Зависимость между смещениями точек тела и внешними силами находит свое выражение в законе Гука.

Упругие деформации  $\sigma = \epsilon \cdot E$ .

2. В зоне общей текучести и упрочнения, т.е. при возникновении заметных пластических деформаций, поверхность покрывается системой тонких линий или, как их называют, полос скольжения. Эти линии имеют преимущественное направление, составляющее

угол, близкий к  $45^\circ$ , с осью стержня, и практически совпадают с плоскостями максимальных касательных напряжений.

Пластические деформации смещения путем сдвига (рис. 2.43, b).  $z_1 z_2 \parallel 0N$ ;  $z_1 z_2$  – упругая деформация;  $0z_2$  – пластическая остаточная деформация.

### 3. Разрушение.

Опасное состояние: собственно разрушение; текучесть. Это состояние характеризуется напряженным состоянием.

В случае простого одноосного напряженного состояния предельное значение напряжения  $\sigma_{\text{пред.}}$  определяется из опытов и расчет на прочность записывается в виде:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F}{A} \leq [\sigma] \leq \frac{\sigma_{\text{пред.}}}{[n]}, \quad [n] - \text{коэффициент запаса прочности.}$$

$$[n] = \frac{\sigma_{\text{пред.}}}{\sigma_{\text{max}}}; \quad \sigma_{\text{пред.}} = \sigma_{\text{пч}}; \quad \sigma_{\text{пред.}} = \sigma_{\text{т}}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пч}}}{[n_{\text{пч}}]}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{[n_{\text{т}}]};$$

$$[n_{\text{пч}}] > [n_{\text{т}}].$$

В случае объемного напряженного состояния (рис. 2.44), где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – значения главных напряжений, невозможно решить проблему опасности напряженного состояния как в предыдущем случае, опираясь на эксперименты. Степень опасности зависит от соотношения напряжений  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$ , экспериментом все соотношения охватить нельзя.

*Исходя из общезначимых представлений, приходится устанавливать критерий прочности, т.е. в какой зависимости от главных напряжений находится опасное напряженное состояние. Эту задачу решают гипотезы прочности, гипотезы пластичности и разрушения.*

Пусть имеются два подобных напряженных состояния (рис. 2.44).

$\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$  – одно напряженное состояние.

$\sigma''_1, \sigma''_2, \sigma''_3$  – второе напряженное состояние.

Эти напряженные состояния подобны, если

$$\frac{\sigma'_1}{\sigma''_1} = \frac{\sigma'_2}{\sigma''_2} = \frac{\sigma'_3}{\sigma''_3} = K.$$

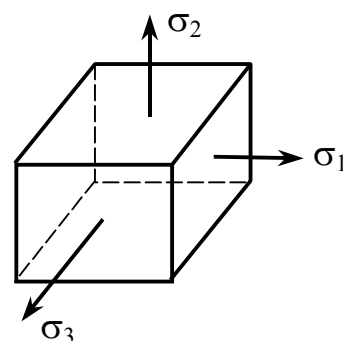


Рис. 2.44

Любое напряженное состояние можно, переходя к подобным состояниям, довести до предельного напряженного состояния.

$\sigma_\alpha$  – предельное напряженное состояние.

$\sigma_{1\alpha}, \sigma_{2\alpha}, \sigma_{3\alpha}$  – главные напряжения соответствуют предельному опасному состоянию.

$$n = \frac{\sigma_{1\alpha}}{\sigma_{1\text{фак.}}} = \frac{\sigma_{2\alpha}}{\sigma_{2\text{фак.}}} = \frac{\sigma_{3\alpha}}{\sigma_{3\text{фак.}}};$$

I напряженное состояние }  $n_I = n_{II}$  – равноопасное или  
 II напряженное состояние } равнобезопасное напряженное состояние.

*Эквивалентное напряженное состояние – напряженное состояние простого растяжения, равноопасное данному сложному напряженному состоянию.*

Сложное напряженное состояние  $n = \frac{\sigma_{1\alpha}}{\sigma_{\text{фак.}}} = \frac{\sigma_{2\alpha}}{\sigma_{\text{фак.}}} = \frac{\sigma_{3\alpha}}{\sigma_{\text{фак.}}}.$

Эквивалентное напряженное состояние  $n = \frac{\sigma_{\text{пред.}}}{\sigma_{\text{эkv.}}}$ .

$\sigma_{1\text{ф}}, \sigma_{2\text{ф}}, \sigma_{3\text{ф}}$  – напряженное состояние  $\rightarrow \sigma_{\text{эkv.}}$

Если бы для любого напряженного состояния могли определить эквивалентное напряжение, как при простом растяжении, то расчет упростился бы.

## ***I. Гипотеза прочности наибольших нормальных напряжений (17 век, Галилей)***

Эта гипотеза исходит из того, что степень опасности зависит от наибольшего главного напряжения: 1)  $\sigma_{\text{ЭКВ.}}^I = \sigma_1$  – для всестороннего растяжения (рис. 2.45);  $\sigma_{\text{ЭКВ.}}^I = \sigma_3$  – для всестороннего сжатия; для смешанного напряженного состояния.

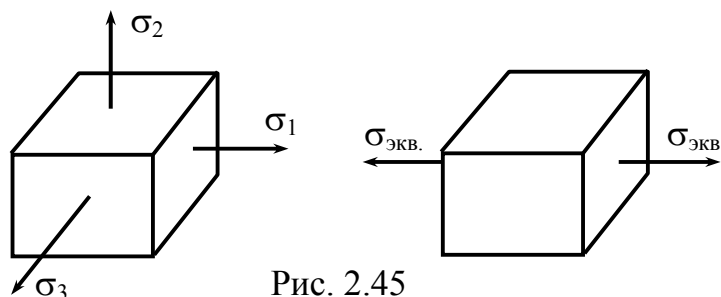


Рис. 2.45

Условие прочности:  $\sigma_{\text{ЭКВ.}}^I = \sigma_1 \leq [\sigma].$  (2.54)

*Эта гипотеза экспериментом не подтверждается.*

*Ввиду простоты при растяжении для хрупких материалов (бетона, кирпича, камня) возможен расчет по этой гипотезе прочности, исключая случай всестороннего сжатия. В настоящее время практически не применяется.*

## ***II. Гипотеза прочности наибольших линейных деформаций***

Степень опасности напряженного состояния определяется наибольшей линейной деформацией.

Пусть  $\sigma_1 = |\sigma|_{\text{max}}$ , тогда  $|\varepsilon|_{\text{max}} = \varepsilon_1$ .

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\} \text{ – линейная деформация.}$$



Для эквивалентного состояния  $\varepsilon_{\text{ЭКВ.}} = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ.}}}{E}$ .

Условие эквивалентности будет:

$$\frac{\sigma_{\text{ЭКВ.}}}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad \sigma_{\text{ЭКВ.}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3);$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ.}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] - \text{условие прочности.} \quad (2.55)$$

Эта гипотеза находится в противоречии с экспериментальными данными для пластичных материалов. В настоящее время почти не применяется.

### ***III. Гипотеза пластичности – наибольших касательных напряжений Треска – Сен-Венана***

Степень опасности любого напряженного состояния определяется величиной наибольших касательных напряжений, возникающих на площадках, равнонаклоненных к площадкам наибольшего и наименьшего главных напряжений. Разрушению предшествуют остаточные деформации, связанные со сдвигом, а последние – с касательным напряжением.

Если величина  $\tau_{\text{max}}$  достигла некоторого предельного значения свойств данного материала, то независимо от вида напряженного состояния происходит переход к пластическому состоянию материала.

Экспериментальная проверка этой гипотезы показала, что для пластичных материалов она приводит, в общем, к удовлетворительным результатам.

Переход от упругого к пластическому состоянию слабо зависит от  $\sigma_2$ . Наложение всестороннего давления на любое напряженное состояние не меняет величины  $\tau_{\text{max}}$  и, следовательно, не оказывает влияния на возникновение пластических деформаций.

В частности, при всестороннем гидростатическом давлении  $\tau_{\max}$  обращается в нуль. Наложение всестороннего давления влияет на условия разрушения.

$$\tau_{\max} = \tau_{1,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \text{ для эквивалентного состояния } \tau_{\max} = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ.}}}{2}.$$

$$\text{Условие прочности: } \sigma_{\text{ЭКВ.}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (2.56)$$

Эта теория согласуется с опытом для материалов, когда

$$\sigma_{\text{пчр.}} = \sigma_{\text{пчс.}}$$

#### ***IV. Гипотеза пластичности – потенциальной энергии формоизменения***

Среди многих гипотез, предлагавшихся ранее, заняла место наравне с гипотезой Треска–Сен-Венана гипотеза Губера – Мизеса–Генки. Она была сформулирована Губером в виде исправленного варианта критерия Бельтрами, согласно которому переход к пластическому состоянию связан с уровнем полной удельной потенциальной энергии деформации, накопленной в единице объема. Полную потенциальную энергию деформаций нельзя использовать при определении опасности напряженного состояния, так как это противоречит экспериментальным исследованиям.

Гипотеза пластичности Губера – Мизеса – Генки полагает, что степень опасности напряженного состояния определяется потенциальной энергией формоизменения. Разрушению предшествует изменение формы и сдвиг.

$u_{\phi}$  – потенциальная энергия изменения формы.

$$u_{\phi} = \frac{1+\nu}{3 \cdot E} \left[ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3) \right]; \quad (2.57)$$

$$u_{\phi} = \frac{1+\nu}{3 \cdot E} \sigma_{\text{ЭКВ.}}^2. \quad (2.58)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ.}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)} \leq [\sigma]. \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ.}}^{\text{IV}} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \\ &= \sqrt{2(\tau_{1,2}^2 + \tau_{2,3}^2 + \tau_{3,1}^2)} \leq [\sigma]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

По мнению многих авторов, она для основных конструкционных металлов более точно отражает условия перехода в пластическое состояние. Разница между результатами, полученными для этих двух гипотез, достигает максимума при чистом сдвиге, когда  $\sigma_3 = -\sigma_1$ , а  $\sigma_2 = 0$ , и составляет 13 %.

**V. Гипотеза прочности предельных напряженных состояний – теория О. Мора** (Критерий разрушения пластических и хрупких материалов)

Допустим, что мы располагаем испытательной машиной, на которой образцу (рис. 2.46) можно задавать любые напряженные состояния с пропорциональным изменением всех компонентов.

Напряжение  $\sigma_2$  несущественно влияет на прочность (по сравнению с  $\sigma_1, \sigma_3$ ), степень опасности напряженного состояния определяется напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Предполагается, что могут быть проведены испытания до образования трещины более 3 мм (или разделение образца на части) при любом напряженном состоянии.

Допущения: предельное состояние не зависит от  $\sigma_2$  и определяется лишь наибольшим из кругов Мора, графическая интерпретация которых приведена на рис. 2.47.

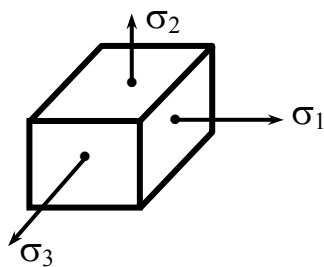


Рис. 2.46

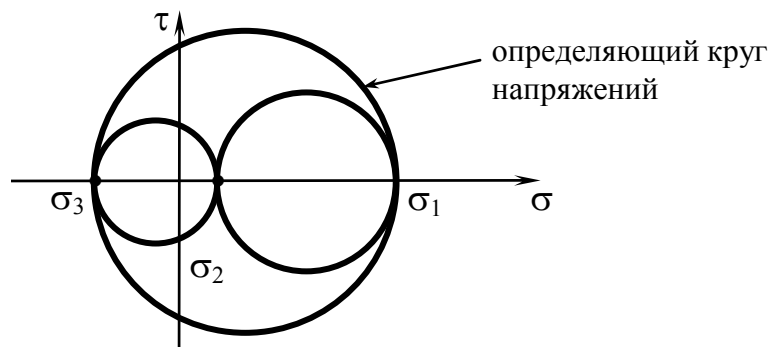


Рис. 2.47

Эти положения составляют основу теории прочности предельных напряженных состояний.

На рис. 2.48 представлены три варианта напряженных состояний, определяющие круги напряжений; все три одинаковы, степень опасности каждого напряженного состояния одинакова.

Пусть  $\sigma_{1\alpha}, \sigma_{2\alpha}, \sigma_{3\alpha}$  – напряжения, соответствующие наступлению предельного (опасного) состояния,  $\sigma_{1\alpha}, \sigma_{3\alpha}$  – определяют предельный круг напряжений (рис. 2.49).

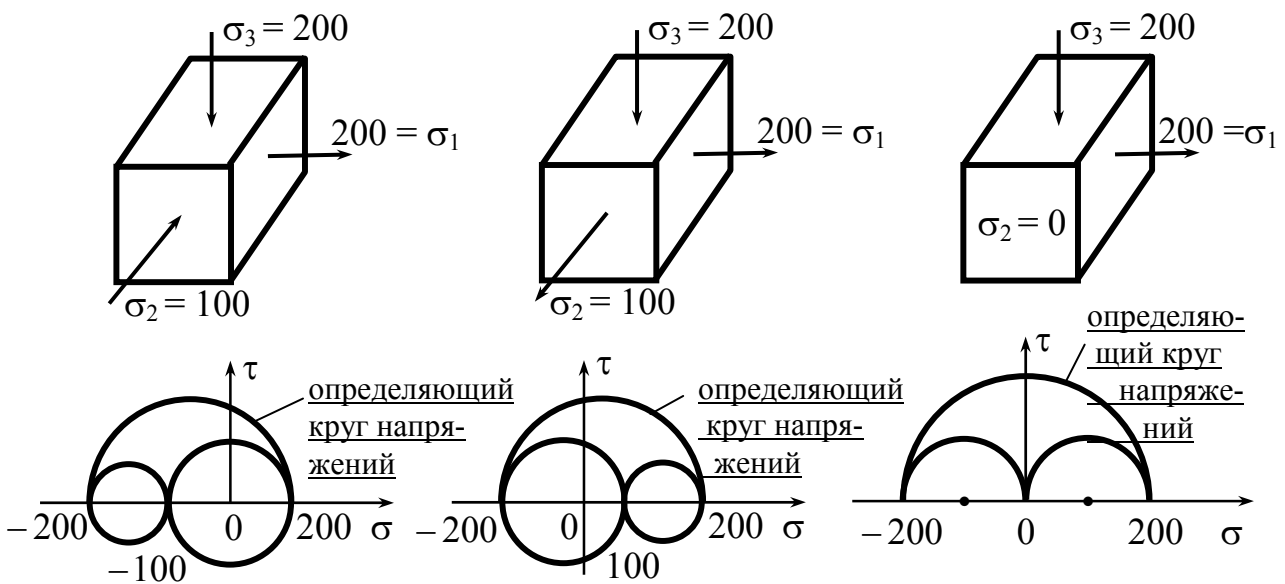


Рис. 2.48

Пусть для материала при разных  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}; \frac{\sigma_2}{\sigma_3}; \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$  определены предельные значения напряжений  $\sigma_{1\alpha}, \sigma_{2\alpha}, \sigma_{3\alpha}$ , соответствующие наступлению опасного предельного состояния.

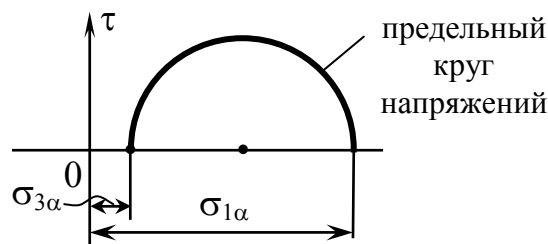


Рис. 2.49

$\left. \begin{array}{l} \sigma'_{1\alpha}, \sigma'_{2\alpha}, \sigma'_{3\alpha} \\ \sigma''_{1\alpha}, \sigma''_{2\alpha}, \sigma''_{3\alpha} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} - \text{по этим значениям могут быть построены предельные круги (рис. 2.50).}$

Предельная огибающая (если она построена) является индивидуальной характеристикой механических свойств каждого данного материала.

Можно построить огибающие, соответствующие различным коэффициентам запаса прочности (рис. 2.51). Для этого достаточно построить совокупности определяющих кругов напряжений, в соответствующее число раз меньших предельных окружностей.

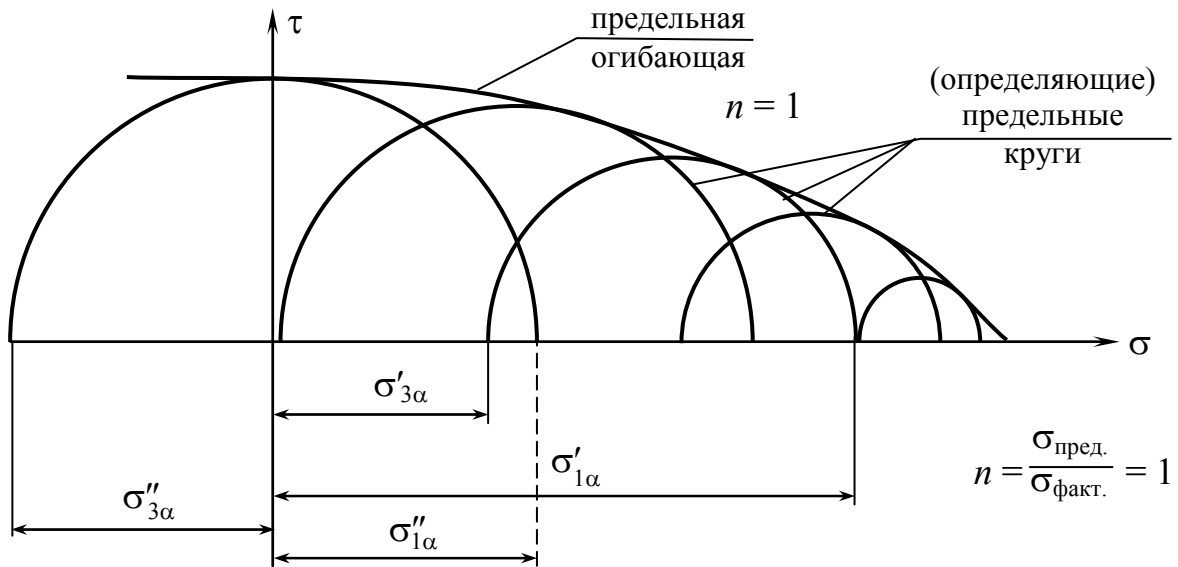


Рис. 2.50

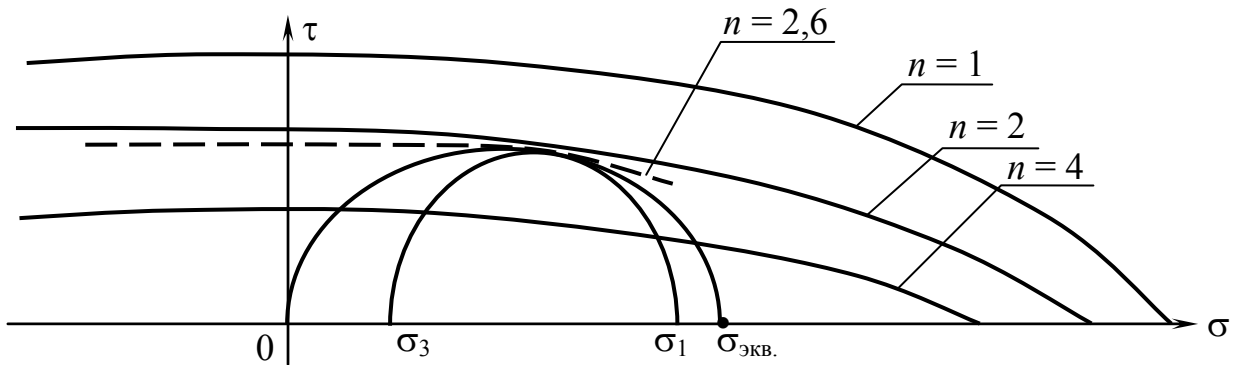


Рис. 2.51

Построение предельных огибающих трудно осуществить практически, поэтому используются различные способы схематизации. Возможность схематизации обуславливается близостью огибающей к прямой (рис. 2.52).

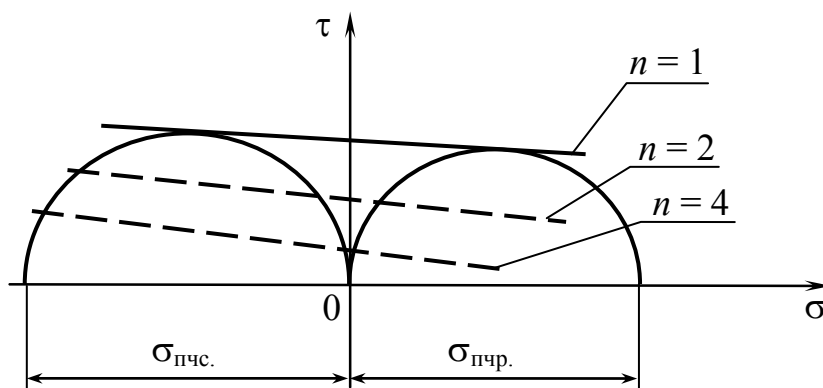


Рис. 2.52

Круг  $\sigma_{\text{экв.}}$  проходит через точку 0, так как у нас равноопасное напряжение простого растяжения.

Пусть требуется определить степень опасности заданного напряженного состояния с напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (рис. 2.53).

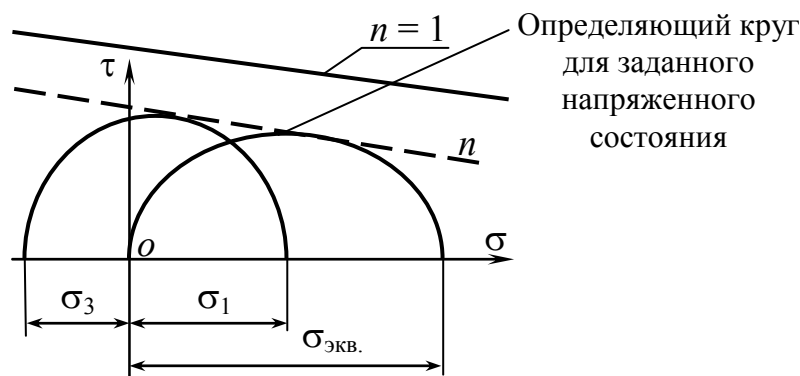


Рис. 2.53

Определение  $\sigma_{\text{экв.}}$  ясно из чертежа.

Теперь нужно решить вопрос о том, как построить огибающую предельных кругов при ограниченном числе испытаний. Наиболее простым являются испытания на растяжение и сжатие.

Огибающая предельных кругов Мора, соответствующих появлению пластических деформаций, представлена на рис. 2.54.

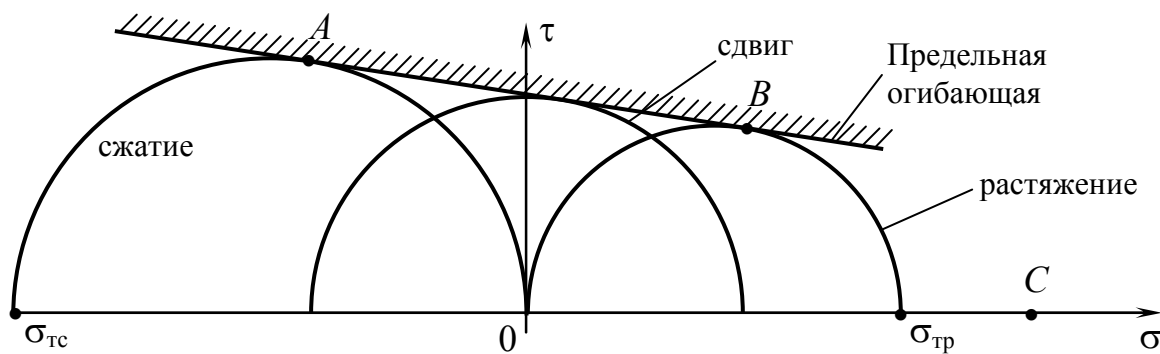


Рис. 2.54

Точка С – нормальное напряжение в этой точке представляет собой напряжение отрыва при всестороннем растяжении. До сих пор, однако, не существует метода для проведения соответствующих испытаний.

Для одного и того же материала можно построить две огибающих предельных кругов Мора: соответствующую появлению пластической деформации (рис. 2.54) и соответствующую разрушению образца (рис. 2.55).

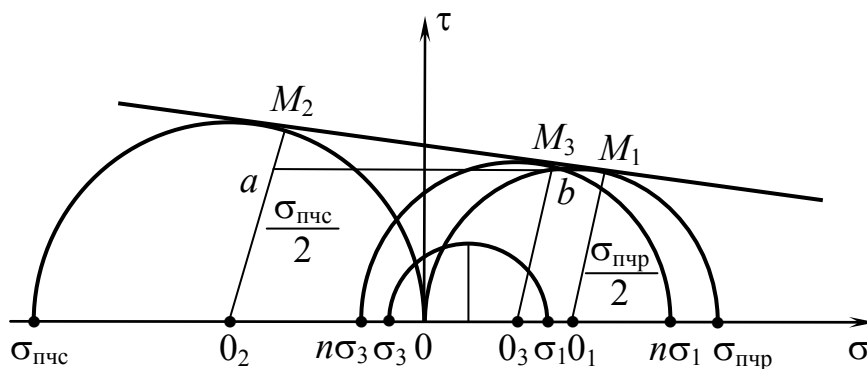


Рис. 2.55

Легко получить условие прочности для промежуточного напряженного состояния  $(\sigma_1, \sigma_3)$ , центр которого располагается между точками  $0_1$  и  $0_2$ . Проведем прямые  $0_1M_1$ ,  $0_2M_2$ ,  $0_3M_3$ , соединяющие центры и точки касания окружностей с огибающей линией, а также линию  $M_1a$ , параллельную  $0_10_2$ .

$$0_10_2 = 0,5(\sigma_{пчр} + \sigma_{пчс});$$

$$0_10_3 = 0,5(\sigma_{пчр} - n(\sigma_1 + \sigma_3));$$

$$0_3M_3 = 0,5(n\sigma_1 - n\sigma_3).$$

Из подобия треугольников получим следующие зависимости:

$$\frac{M_3 b}{M_2 a} = \frac{0_1 0_3}{0_1 0_2} \quad \text{или} \quad \frac{0_3 M_3 - 0_1 M_1}{0_2 M_2 - 0_1 M_1} = \frac{0_1 0_3}{0_1 0_2}.$$

Заменяя отрезки линий значениями соответствующих напряжений, будем иметь

$$0_3 M_3 = 0,5 \left( \sigma_{\text{пчр}} + \left( \sigma_{\text{пчс}} - \sigma_{\text{пчр}} \right) \frac{0_1 0_3}{0_1 0_2} \right)$$

или

$$n(\sigma_1 - \sigma_3) = \left( \sigma_{\text{пчр}} + \frac{\sigma_{\text{пчс}} - \sigma_{\text{пчр}}}{\sigma_{\text{пчр}} + \sigma_{\text{пчс}}} \left( \sigma_{\text{пчр}} - n(\sigma_1 + \sigma_3) \right) \right). \quad (2.61)$$

Введя обозначения  $k = \frac{\sigma_{\text{пчр}}}{\sigma_{\text{пчс}}}$ ;  $n = \frac{\sigma_{\text{пчр}}}{\sigma_{\text{экв}}}$ , после преобразования

получим условие прочности Мора

$$\sigma_{\text{экв}}^V = \sigma_1 - k\sigma_3, \quad (2.62)$$

где  $k$  характеризует различную сопротивляемость материалов растяжению и сжатию.

Условие образования трещины

$$\sigma_{\text{экв}}^V = \sigma_1 - k\sigma_3 = \sigma_{\text{пчр}}. \quad (2.63)$$

Модель разрушения Мора позволяет установить сопротивление разрушению материалов, обладающих разными сопротивлениями растяжению и сжатию.

Условие появления пластической деформации по методу Мора

$$\sigma_{\text{экв}}^V = \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{тр}}}{\sigma_{\text{тсж}}} \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (2.64)$$

$$\sigma_{\text{экв}}^V = \sigma_1 - k_T \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (2.65)$$

где  $k_T = \frac{\sigma_{\text{тр}}}{\sigma_{\text{тсж}}}$ . (2.66)



В частном случае, если материал имеет при растяжении и сжатии одинаковые пределы текучести,  $k = 1$ , тогда формула (2.65) переходит в полученную ранее формулу (2.56).

В настоящее время расчеты по допускаемым напряжениям в сложном напряженном состоянии ведутся, как правило, на основе формулы (2.65). Вместе с тем, если материал обладает одинаковыми механическими характеристиками при растяжении и сжатии, то расчеты можно вести по формулам гипотезы энергии формоизменения.

Существуют и другие модели разрушения. Большинство из них основано на выборе такой формы предельной поверхности, при которой можно наиболее полно учесть особенности сопротивления данного класса материалов в условиях сложного напряженного состояния.

### **Контрольные вопросы**

1. Что называется точечной моделью напряженного состояния?
2. Что такое напряженное состояние в точке и как оно количественно оценивается?
3. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.
4. Через какие компоненты напряжений можно получить напряжения на произвольной кривой площадке?
5. Какие площадки называются главными?
6. О чем позволяют судить главные напряжения?
7. Какое существует соотношение между главными напряжениями?
8. Запишите характеристическое уравнение напряженного состояния.

9. Какие вы знаете инварианты напряженного состояния?
10. Что такое эллипсоид напряжений?
11. Чему равно наибольшее касательное напряжение в точке тела и на каких площадках оно действует?
12. Как выражаются напряжения на октаэдрических площадках через главные напряжения?
13. Какими независимыми компонентами характеризуется напряженное состояние в любой точке тела?
14. Классификация напряженных состояний.
15. Запишите тензор напряжений для плоского напряженного состояния.
16. Чему равно наибольшее касательное напряжение при плоском напряженном состоянии и на каких площадках оно действует?
17. Что такое круговая диаграмма Мора?
18. Можно ли графический способ применить к исследованию объемного напряженного состояния?
19. Какой вид имеет круговая диаграмма Мора для растяжения и сжатия?
20. Что означают зависимости Коши?
21. Какие вы знаете инварианты деформируемого состояния?
22. Какие величины характеризуют деформируемое состояние в точке тела?
23. Запишите тензор деформации для объемного напряженного состояния.
24. Что представляет собой обобщенный закон Гука?
25. Запишите закон Гука для сдвига.
26. Запишите обобщенный закон Гука для линейных деформаций.

27. Запишите обобщенный закон Гука с учетом температурных деформаций.
28. Какова матричная запись закона упругости?
29. Как вычисляется объемная деформация для изотропного тела?
30. На какие составляющие может быть разбита потенциальная энергия упругой деформации?
31. Чему равна энергия изменения объема при чистом сдвиге?
32. Чему равна энергия формоизменения при всестороннем (гидростатическом) сжатии?
33. Какие существуют типы предельных состояний материала в локальной области?
34. Что такое гипотезы прочности?
35. Какие вам известны классические гипотезы прочности?
36. Какие напряженные состояния называются равноопасными?
37. Что такое эквивалентное напряжение?
38. Какие вам известны классические гипотезы пластичности?
39. Каковы преимущества и недостатки гипотезы Мора?
40. К чему сводится расчет напряженного состояния?

## Глава 3. Геометрические характеристики плоских сечений

### 3.1. Статические моменты площадей сечений

*Ключевые слова*

*Координаты центра тяжести площади, центральные оси, размерность статического момента, центр тяжести сечения.*

Статическим моментом площади сечения относительно осей  $x$  и  $y$  называется интеграл произведений элементарных площадей на расстояние от рассматриваемой оси (рис. 3.1).

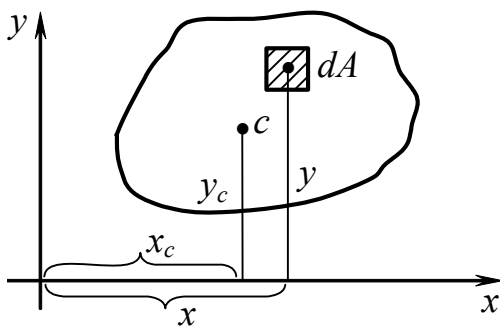


Рис. 3.1

$$S_x = \sum_1^n y_i \cdot \Delta A_i; \quad S_x = \int_A y \cdot dA; \quad (3.1)$$

$$S_y = \sum_1^n x_i \cdot \Delta A_i; \quad S_y = \int_A x \cdot dA,$$

$\Delta A_i$  – площадь  $i$  части;

$x_i, y_i$  – координаты центра тяжести площади  $\Delta A_i$ .

$S_x, S_y$  – статические моменты площади сечения относительно осей  $x$  и  $y$  соответственно. Размерность статического момента [ $\text{м}^3, \text{см}^3$ ].

Статические моменты площади относительно центральных осей (проходящих через центр тяжести) равны нулю. Любая ось, проходящая через центр тяжести сечения, является центральной.

**Пример 1.** Определить  $S_x$  (рис. 3.2).

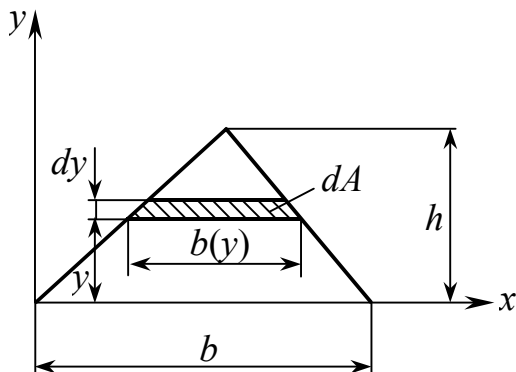


Рис. 3.2

$$dA = b(y)dy;$$

$$b(y) = \frac{b}{h}(h - y);$$

$$S_x = \int_A y dA = \frac{b}{h} \int_0^h y(h - y) dy = \frac{bh^2}{6}.$$

**Пример 2.** Вычислить  $S_x, S_y$  (рис. 3.3).

Для вычисления статических моментов сложную фигуру разбивают на простые части, для каждой из которых известна площадь ( $A_i$ ) и положение центра тяжести ( $x_i, y_i$ ).

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 = \sum_1^n A_i y_i .$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = \sum_1^n A_i x_i .$$

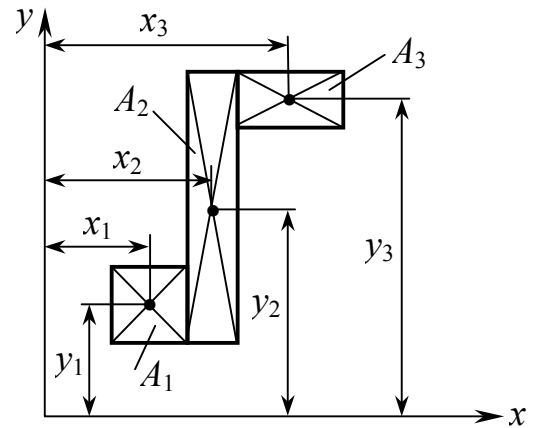


Рис. 3.3

**Изменение статических моментов сечения при параллельном переносе осей координат**

Дано:  $S_{x_1}, S_{y_1}, a$  и  $b$  – расстояния между осями (рис. 3.4).

Определить:  $S_{x_2} = ?$ ,  $S_{y_2} = ?$

$$x_2 = x_1 - b, \quad y_2 = y_1 - a .$$

Запишем статические моменты сечения относительно осей  $x_2$  и  $y_2$ .

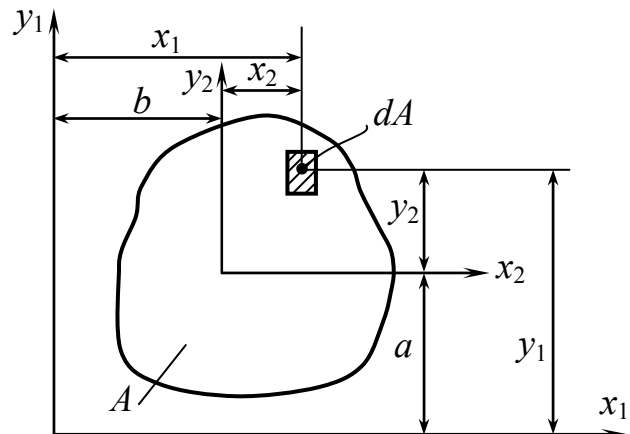


Рис. 3.4

$$S_{x_2} = \int_A y_2 dA = \int_A (y_1 - a) dA = \int_A y_1 dA - a \int_A dA ;$$

$$S_{y_2} = \int_A x_2 dA = \int_A (x_1 - b) dA = \int_A x_1 dA - b \int_A dA .$$

После преобразования:

$$S_{x_2} = S_{x_1} - a \cdot A ; \quad S_{y_2} = S_{y_1} - b \cdot A .$$

## Определение положения центра тяжести сечения

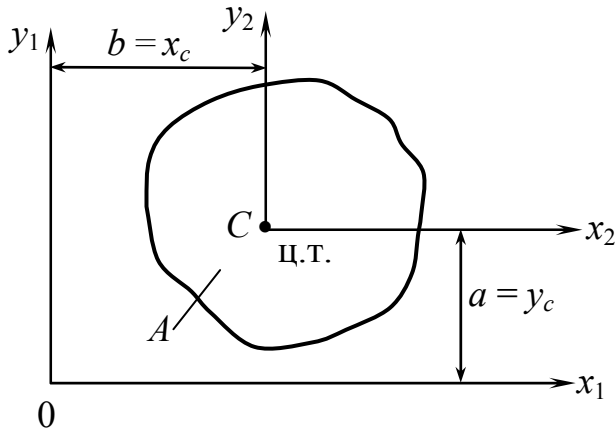


Рис. 3.5

Если оси  $x_2$  и  $y_2$  центральные ( $S_{x_2} = S_{y_2} = 0$ ), то  $y_c = a$  и  $x_c = b$ ,  $a$  и  $b$  – координаты центра тяжести сечения (рис. 3.5).

$$x_c = \frac{S_{y_1}}{A}, \quad y_c = \frac{S_{x_1}}{A}.$$

## Сложная фигура

1. Разбиваем сложную фигуру на простейшие (рис. 3.6).

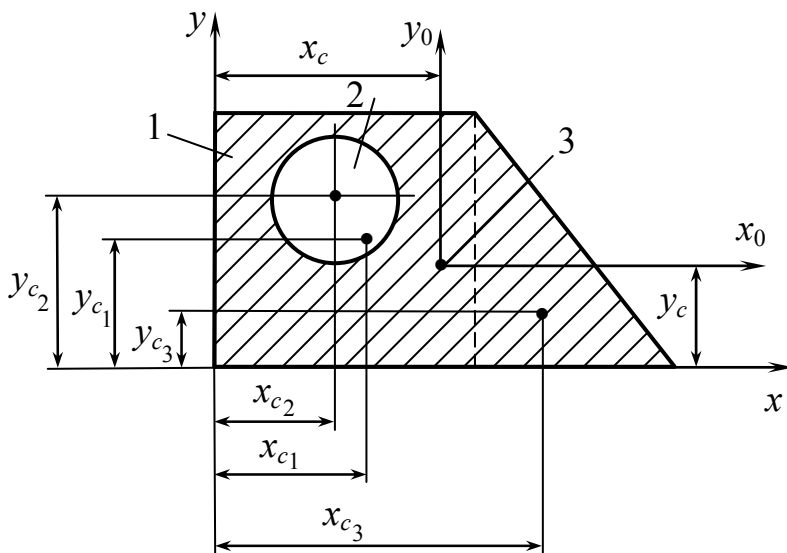


Рис. 3.6

2. Выбираем произвольные оси  $x$  и  $y$ .

3. Указываем центр тяжести каждой простейшей фигуры.

4. Вычисляем центр тяжести сложной фигуры.

5. Проводим центральные оси  $x_0$  и  $y_0$ .

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n S_x^{(i)}}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n S_y^{(i)}}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (3.2)$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_x^{(i)} = y_{c1} \cdot A_1 - y_{c2} \cdot A_2 + y_{c3} \cdot A_3.$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_y^{(i)} = x_{c1} \cdot A_1 - x_{c2} \cdot A_2 + x_{c3} \cdot A_3.$$

**Пример 3.** Определить центр тяжести полукруга (рис. 3.7).

Дано:  $R$ . Определить:  $y_c = ?$

Выбираем начальные оси  $x$  и  $y$ .  
 Центр тяжести расположен на оси  $y$  – оси симметрии сечения (рис. 3.8). Площадь элементарной площадки

$$dA = \rho d\varphi \cdot d\rho, \quad y = \rho \cdot \sin \varphi.$$

Статический момент сечения:

$$\begin{aligned} S_x &= \int_A y \cdot dA = \int_0^R \int_0^\pi \rho \cdot \sin \varphi \rho d\varphi \cdot d\rho = \\ &= \int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \int_0^\pi \sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{2}{3} R^3; \\ y_c &= \frac{S_x}{A} = \frac{2R^3 \cdot 2}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}. \end{aligned}$$

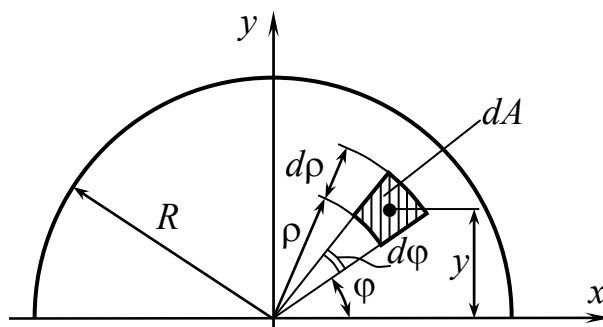


Рис. 3.7

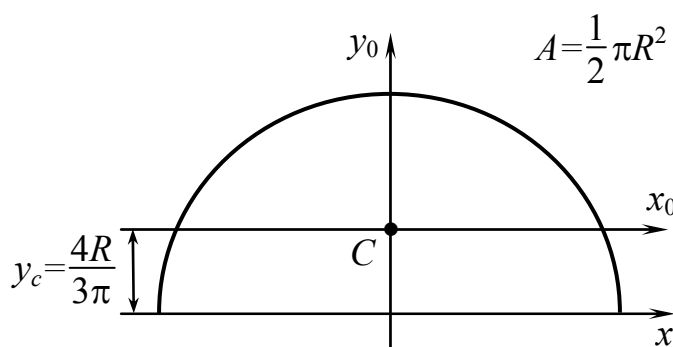


Рис. 3.8

### 3.2. Моменты инерции плоских фигур

*Ключевые слова*

*Осевые, полярный, центробежный моменты инерции сечений, главные оси инерции, размерность моментов инерции.*

Осевым или экваториальным моментом инерции площади фигуры называется интеграл произведений элементарных площадей на квадраты расстояний от рассматриваемой оси.

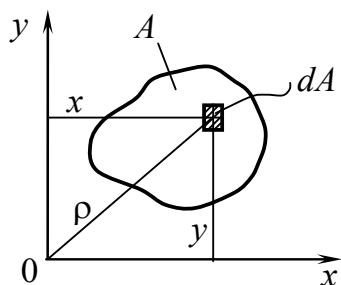


Рис. 3.9

1) Осевой момент инерции (рис. 3.9):

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA \\ I_y &= \int_A x^2 dA \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

2) Полярный момент инерции равен сумме осевых

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y. \quad (3.4)$$

3) Центробежный момент инерции

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA. \quad (3.5)$$

Центробежным моментом инерции называется интеграл произведений площадей элементарных площадок на их расстояния от координатных осей  $x$  и  $y$ .

В зависимости от положения осей центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным (рис. 3.10), а также равным нулю. При повороте осей вокруг начала координат на  $90^\circ$  знак центробежного момента инерции фигуры меняется на обратный.

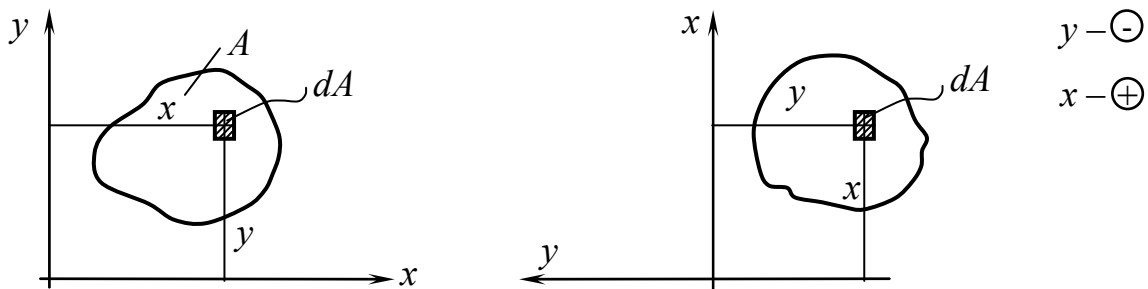


Рис. 3.10

Очевидно, постепенно поворачивая оси, можно найти такое их положение, при котором центробежный момент инерции равен нулю. Такие оси называются главными осями инерции. Две взаимно перпендикулярные оси, из которых одна является осью симметрии фигуры, всегда будут главными осями инерции. Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями инерции.

Размерность моментов инерции [длина<sup>4</sup>].



**Пример 4.** Для прямоугольника высотой  $h$  и шириной  $b$  определить  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$  (рис. 3.11).

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot (b \cdot dy) = \frac{bh^3}{3};$$

$$I_y = \frac{hb^3}{3};$$

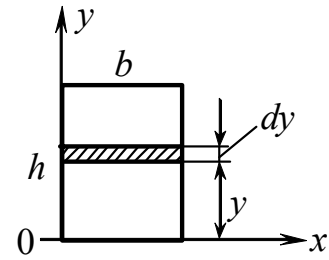


Рис. 3.11

$$I_{xy} = \int xy dA = \int_0^h (b \cdot dy) \cdot \frac{b}{2} \cdot y = \frac{b^2}{2} \int_0^h y dy = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

**Пример 5.** Для треугольника высотой  $h$  и основанием  $b$  определить  $I_x$  (рис. 3.12).

$$dA = b(y)dy;$$

$$b(y) = \frac{b}{h}(h - y);$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h - y) dy = \frac{bh^3}{12}.$$

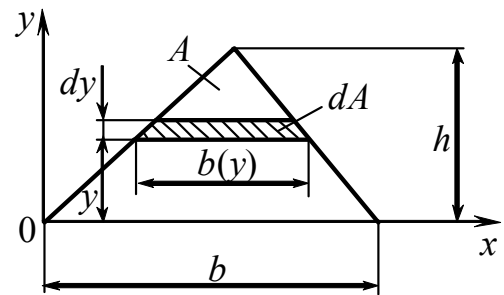


Рис. 3.12

**Пример 6.** Для круга радиуса  $r$  (рис. 3.13) определить  $I_p$ ,  $I_x$ ,  $I_y$ .

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA |dA = 2\pi\rho \cdot d\rho| = \int_0^r 2\pi\rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi r^4}{2};$$

$$I_p^{\odot} = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Известно, что  $I_x + I_y = I_p$ .

Для круга  $I_x = I_y = \frac{I_p}{2}$ .

$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}.$$

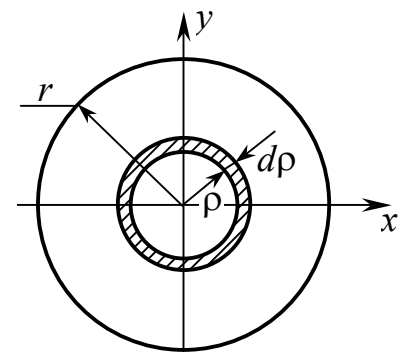


Рис. 3.13

**Пример 7.** Для сечения (рис. 3.14) определить  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_\rho$ .

$$I_\rho = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi R^4}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right);$$

$$I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = \frac{\pi R^4}{4} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right).$$

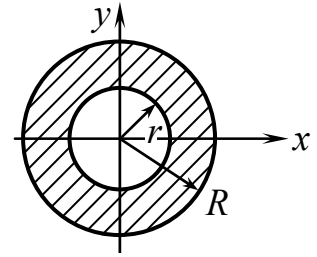


Рис. 3.14

### 3.3. Моменты инерции сложных сечений и стандартных профилей

*Ключевые слова*

*Моменты инерции составных частей, моменты инерции фигур с отрицательной площадью, центральные оси сечений стандартных профилей.*

При вычислении моментов инерции сложных сечений последние можно разбить на отдельные простые части, моменты инерции которых известны. Из основного свойства интеграла известно, что момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции составных ее частей.

Если в сечении есть отверстие, его обычно удобнее считать частью фигуры с отрицательной площадью (рис. 3.15).

$$I_x = I_x^I - I_x^{II} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}.$$

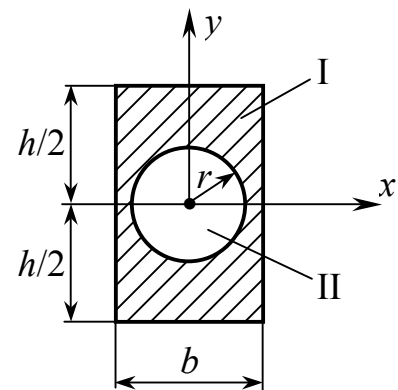


Рис. 3.15

Для стандартных профилей (рис. 3.16) – поперечных сечений стержней (угловых (равнобоких и неравнобоких), двутавровых, швеллерных и др.) – моменты инерции относительно различных осей даны в таблицах ГОСТ наряду с размерами площади сечений, положения центра тяжести и другими характеристиками. В сортаменте центральные оси сечений обозначаются буквами  $x$ ,  $y$ .

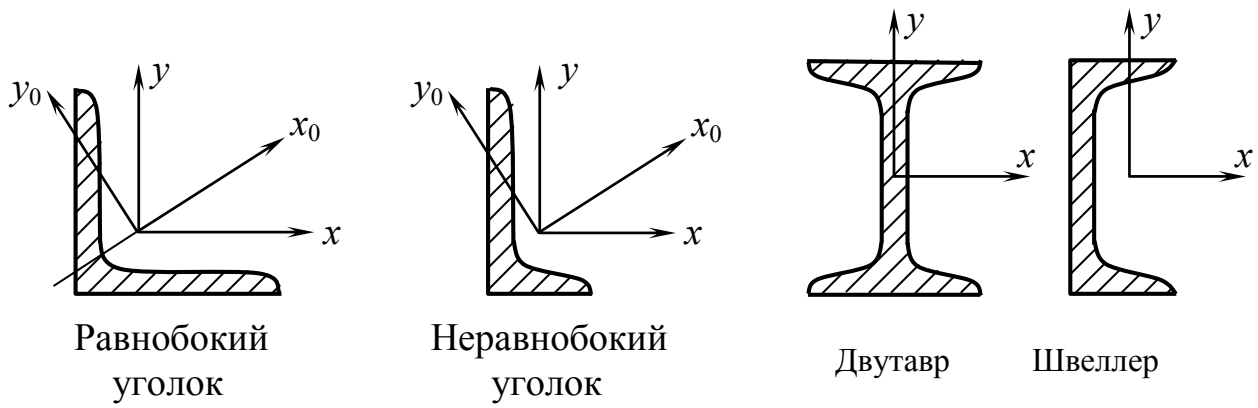


Рис. 3.16

### 3.4. Формулы перехода. Зависимость между моментом инерции плоской фигуры при повороте и плоском параллельном переносе осей

*Ключевые слова*

*Изменение моментов инерции, поворот осей.*

Зная  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$  относительно осей  $xу$ , требуется определить  $I_{x_1}$ ,  $I_{y_1}$ ,  $I_{x_1y_1}$  относительно осей  $x_1y_1$  (рис. 3.17).

Дано:  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$ .

Определить:  $I_{x_1}$ ,  $I_{y_1}$ ,  $I_{x_1y_1}$ .

$xу$  совместимы с  $x_1y_1$ , если:

а) повернем  $xу$  до  $x'y'$

$0x' \parallel 0_1x_1$  и  $0y' \parallel 0_1y_1$ ;

б) перенесем оси  $0x'$  и  $0y'$  параллельно до положения  $0_1x_1$  и  $0_1y_1$  на расстояние  $a$  и  $b$ .

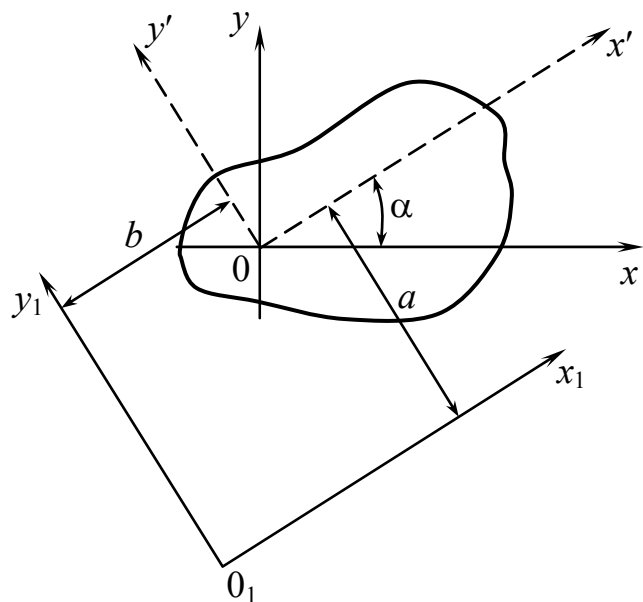


Рис. 3.17

### 3.5. Формулы перехода при повороте осей

Дано:  $I_x, I_y, I_{xy}$  (рис. 3.18).

Определить:  $I_{x'}, I_{y'}, I_{x'y'}$ .

Оси повернуть на  $\angle \alpha$ .

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA; \quad I_y = \int_A x^2 \cdot dA;$$

$$I_{xy} = \int_A xy \cdot dA;$$

$$I_{x'} = \int_A y'^2 \cdot dA; \quad I_{y'} = \int_A x'^2 \cdot dA; \quad I_{x'y'} = \int_A x'y' \cdot dA;$$

$$x' = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha; \quad y' = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha; \quad (3.6)$$

$$I_{x'} = \int_A (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dA; \quad I_{y'} = \int_A (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dA;$$

$$I_{x'y'} = \int_A (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)(y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha) \cdot dA.$$

$$\begin{cases} I_{x'} = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha; \\ I_{y'} = I_x \cdot \sin^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha. \end{cases} \quad (3.7)$$

Подставляя  $\sin^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ ;  $\cos^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ , получим

$$\begin{cases} I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cdot \cos 2\alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha; \\ I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cdot \cos 2\alpha + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha; \\ I_{x'y'} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cdot \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha. \end{cases} \quad (3.8)$$

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = I_\rho = \text{const.}$$

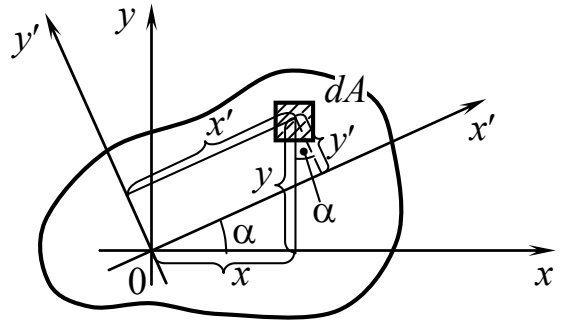


Рис. 3.18

### 3.6. Главные оси и главные моменты инерции плоской фигуры

*Ключевые слова*

*Экстремум функции.*

Для любой плоской фигуры существует одна пара взаимно перпендикулярных осей, для которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые  $I_x$  и  $I_y$  принимают максимальное значение.

Такие оси называются главными осями инерции фигуры, а осевые моменты инерции относительно этих осей называются главными моментами инерции (рис. 3.19).

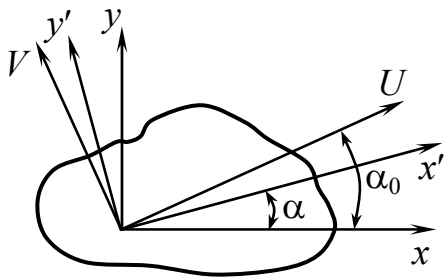


Рис. 3.19

$$I_{UV} = 0.$$

$I_U$  и  $I_V$  – главные моменты инерции.

$\alpha_0$  – угол, соответствующий экстремуму функции.

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cdot \cos 2\alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha;$$

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = -(I_x - I_y) \cdot \sin 2\alpha_0 - 2I_{xy} \cdot \cos 2\alpha_0.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}; \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_0 \\ \alpha'_0 = \alpha_0 + 90 \end{array} \right| \begin{array}{l} U \\ V \end{array}.$$

Подставляя  $\alpha_0$  в выражение (3.8), после преобразования получим

$$I_{U,V} = \frac{1}{2} \left[ (I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right]. \quad (3.10)$$

$$\begin{array}{l} I_U = I_{\max} \cdot \\ I_V = I_{\min} \cdot \end{array} \quad \begin{array}{l} I_x \rightarrow \sigma_x \\ I_y \rightarrow \sigma_y \end{array}; \quad I_{xy} \rightarrow \tau_{xy}.$$

### 3.7. Формулы перехода при параллельном переносе осей

*Ключевые слова*

*Моменты инерции, параллельный перенос осей.*

Дано:  $I_{x'}$ ,  $I_{y'}$ ,  $I_{x'y'}$  (рис. 3.20).

Определить:  $I_{x_1}$ ,  $I_{y_1}$ ,  $I_{x_1y_1}$ .

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A dA \cdot y_1^2 = \int_A dA (y' + a)^2 = \\ &= \int_A dA y'^2 + a^2 \int_A dA + 2a \int_A dA y' = \\ &= I_{x'} + a^2 \cdot A + 2a \cdot S_{x'}, \end{aligned}$$

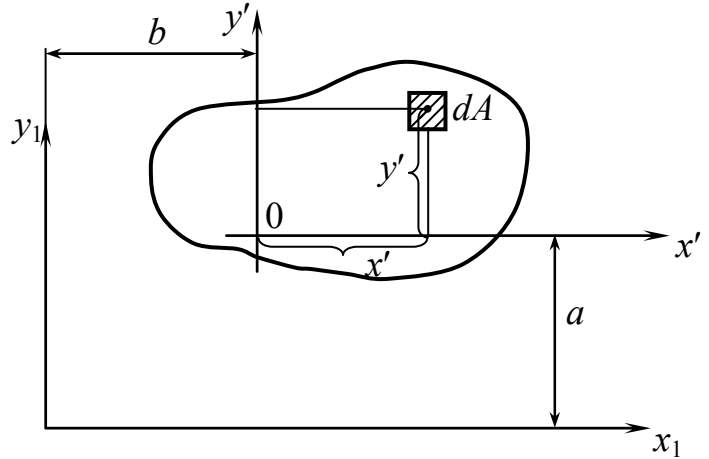


Рис. 3.20

$S_{x'}$  – статический момент фигуры.

Если принять, что 0 совмещено с центром тяжести, то  $S_{x'} = 0$ .

$$I_{x_1} = I_{x'} + A \cdot a^2; \quad I_{y_1} = I_{y'} + A \cdot b^2 \quad \text{– по аналогии.} \quad (3.11)$$

$$I_{x_1y_1} = I_{x'y'} + A \cdot ab. \quad (3.12)$$

### 3.8. Определение положения главных осей и величины главных моментов инерции сложной фигуры

*Ключевые слова*

*Сложное сечение, центр тяжести, моменты инерции сечений, угол наклона главных центральных осей.*

В расчете работающих конструкций определяем главные моменты и положение главных осей. Сложное сечение относят к координатной системе и определяют положение центра тяжести (рис. 3.21).

1. Проводим произвольную систему прямоугольных координат  $(x, y)$ . Разбиваем фигуру на простые части и определяем положение ее центра тяжести.

2. Проводим начальную систему центральных осей  $(x_c, y_c)$  так, чтобы вычислить моменты инерции частей фигуры относительно этих осей было наиболее просто. Для этого определяем моменты инерции частей фигуры относительно их центральных осей  $(x_0, y_0)$ ,

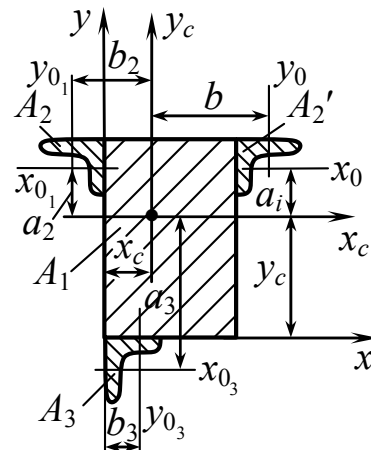


Рис. 3.21

проведенных параллельно осям  $x_c, y_c$ , используя формулы перехода к параллельным осям.

$$I_{x_c} = \sum_1^n (I_{x_{0i}} + a_i^2 A_i).$$

$$I_{y_c} = \sum_1^n (I_{y_{0i}} + b_i^2 A_i).$$

$$I_{x_c y_c} = \sum_1^n (I_{x_0 y_0} + a_i b_i A_i).$$

3. Определяем угол наклона главных центральных осей инерции.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}}.$$

4. Определяем значения главных центральных моментов инерции  $I_u, I_v$ .

$$I_{u,v} = \frac{1}{2} \left[ (I_{x_c} + I_{y_c}) \pm \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} \right].$$

### 3.9. Понятие о радиусе и эллипсе инерции

*Ключевые слова*

*Моменты инерции фигуры, площадь фигуры, центральные оси, радиусы инерции.*

Момент инерции фигуры относительно какой-либо оси можно представить в виде произведения площади фигуры на квадрат некоторой величины, называемой радиусом инерции (рис. 3.22).

$$I_x = \int_A y^2 dA = A \cdot i_x^2,$$

где  $i_x$  – радиус инерции относительно оси  $x$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$

Главным осям соответствуют

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}, \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}.$$

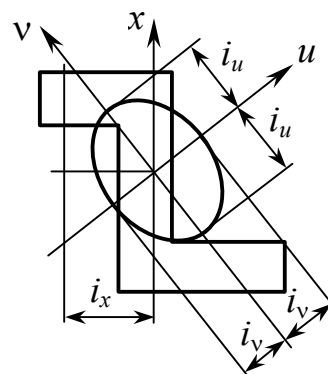


Рис. 3.22

Радиус инерции относительно любой центральной оси  $x$  определяется как перпендикуляр  $OA$ , проведенный из центра эллипса на касательную параллельную данной оси.

#### Контрольные вопросы

1. Что такое статический момент сечения относительно некоторой оси и в каких единицах он измеряется?
2. Какая ось называется центральной?
3. Как изменяются статические моменты сечения при параллельном переносе осей координат?
4. Что такое центр тяжести сечения?
5. Как определяется центр тяжести для сложной фигуры?
6. Где расположен центр тяжести полукруга?



7. Что представляют собой следующие интегралы:

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA, \quad J_{xy} = \int_A xy dA, \quad \text{где через } x \text{ и } y$$

обозначены текущие координаты элементарной площадки  $dA$  в произвольно взятой системе координат?

8. Как изменяется центробежный момент инерции в зависимости от положения осей?

9. Какова размерность моментов инерции?

10. Как вычисляется момент инерции прямоугольника с основанием  $b$  и высотой  $h$  относительно центральной оси  $\xi$ , параллельной основанию?

11. Какие оси называются главными центральными осями инерции?

12. Какие оси называются главными осями инерции?

13. Как вычисляется момент инерции треугольника с основанием  $b$  и высотой  $h$  относительно основания?

14. Чему равен момент инерции круга радиуса  $r$  относительно центральной оси  $\xi$ ?

15. Как вычисляются моменты инерции сложных сечений и стандартных профилей?

16. Как вычисляются моменты инерции относительно осей  $x'$ ,  $y'$ , повернутых относительно заданных осей  $x$ ,  $y$  на угол  $\alpha$ ?

17. Каким свойством обладает сумма осевых моментов инерции относительно двух любых взаимно перпендикулярных осей, проходящих через данную точку?

18. Какие моменты инерции сечения называются главными осями и как они определяются?

19. Как определяется угол наклона главных центральных осей инерции?

20. Как изменяются моменты инерции при параллельном переносе осей?
21. Относительно какой из множества параллельных осей осевой момент инерции сечения принимает наименьшее значение?
22. Каков порядок определения положения главных осей и величины главных моментов инерции сложной фигуры?
23. Как определяется радиус инерции относительно какой-либо оси?
24. В каком случае можно без вычислений определить положение главных осей инерции сечения?
25. Докажите следующее положение: если главные моменты инерции некоторого сечения равны между собой, то любая ось, проходящая через начало координат, является главной.

## Глава 4. Сдвиг и кручение

### 4.1. Деформация сдвига (срез)

*Ключевые слова*

*Сдвиг, срез, касательные напряжения, условие прочности, допускаемые касательные напряжения, условный предел текучести для касательных напряжений.*

В предположении, что касательные напряжения распределяются равномерно (рис. 4.1), определим:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot n_1},$$

$n_1$  – число заклепок.

Условие прочности  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ .

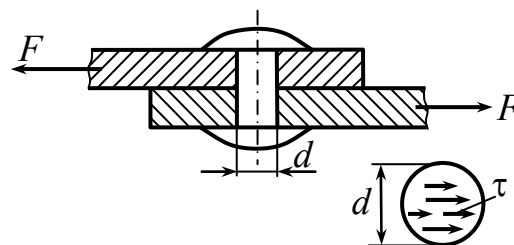


Рис. 4.1

Таким образом, на срез рассчитываются заклепочные, болтовые, сварные (рис. 4.2) и шпоночные соединения и др. Расчет на прочность заключается в том, что максимальное касательное напряжение должно быть меньше допускаемого. Допускаемое

напряжение  $[\tau] = \frac{\tau_{\text{пред.}}}{[n]}$ ,  $\tau_{\text{пред.}}$  для пластичных материалов,

принимается равным  $\tau_T$  для имеющих площадку текучести на кривой деформирования и равным  $\tau_{0,3}$  для материалов, не имеющих площадки текучести на кривой деформирования. Для хрупких материалов  $\tau_{\text{пред.}} = \tau_{\text{пч}} = \tau_{\text{в}}$ .

$$t_1 = t_2;$$

$$h = t_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{F}{4(l_1 + l_2)h} = \\ &= \frac{F}{4(l_1 + l_2) \cdot t_1 \frac{\sqrt{2}}{2}} \leq [\tau]. \end{aligned}$$

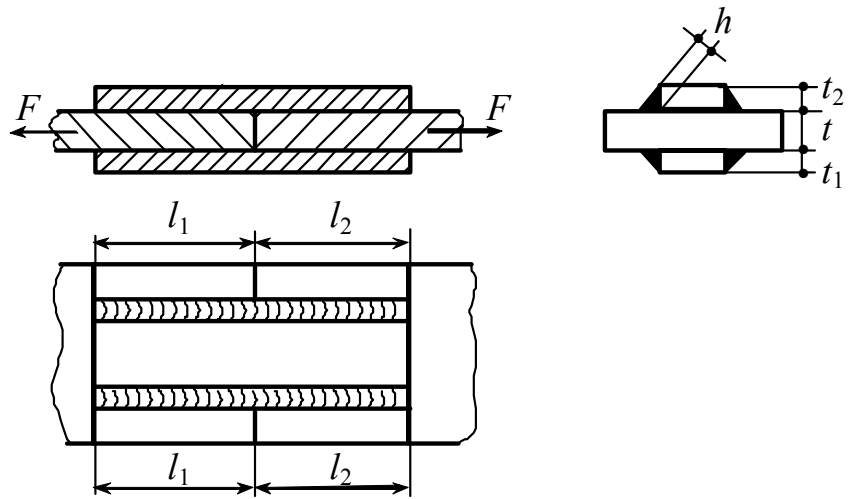


Рис. 4.2

## 4.2. Чистый сдвиг

*Ключевые слова*

*Главные напряжения при чистом сдвиге, площадки главных напряжений, прочность при чистом сдвиге.*

При рассмотрении растяжения и сжатия было установлено, что в зависимости от ориентации секущих площадок на гранях выделенного прямоугольного элемента возникают как нормальные, так и касательные напряжения (рис. 4.3). Теперь положим, что на гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения. Такое напряженное состояние называется чистым сдвигом.

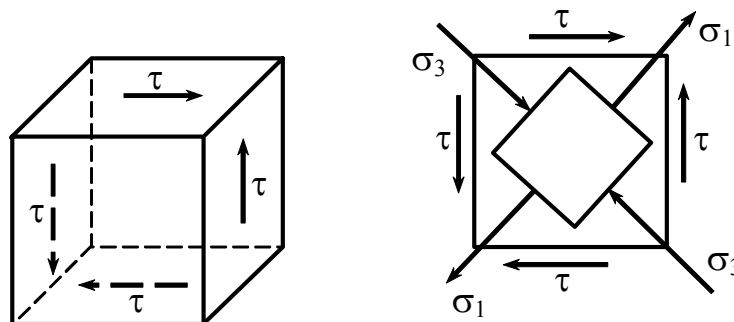


Рис. 4.3

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \tau.$$

$$\sigma_{1,3} = \pm\tau; \quad \sigma_1 = \tau; \quad \sigma_3 = -\tau.$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}; \quad \operatorname{tg}2\alpha = \infty; \quad \alpha = \pm 45^\circ.$$

К тем же результатам придем и графическим способом.

$$\sigma_\alpha = 0; \quad \sigma_\beta = 0; \quad \tau_\alpha = \tau_{xy} = \tau.$$

Чистый сдвиг эквивалентен действию двух главных напряжений  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_3 = -\tau$ ,  $\sigma_2 = 0$  на двух взаимно перпендикулярных площадках, наклоненных к исходным площадкам под углом  $45^\circ$  (рис. 4.4).

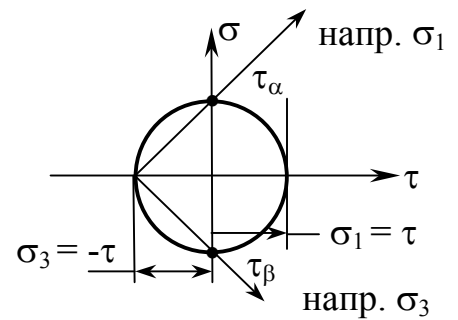


Рис. 4.4

### 4.3. Проверка прочности при чистом сдвиге

$$\sigma_{\text{ЭКВ.}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \tau - (-\tau) \leq [\sigma]; \quad \tau \leq 0,5[\sigma];$$

$$[\tau]^{\text{III}} \leq 0,5[\sigma].$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ.}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[\tau^2 + \tau^2 + (2\tau)^2]} =$$

$$= \tau\sqrt{3} = 1,71\tau \leq [\sigma]; \quad \tau \leq 0,6[\sigma];$$

$$[\tau]^{\text{IV}} \cong 0,6[\sigma].$$

#### 4.4. Связь между напряжениями и деформациями при чистом сдвиге

*Ключевые слова*

*Относительный сдвиг, абсолютный сдвиг, относительная деформация, модули упругости, связь между модулями упругости и коэффициентом Пуассона.*

$\gamma$  – относительный сдвиг;  $\Delta S = \gamma \cdot a$  – абсолютный сдвиг (рис. 4.5).

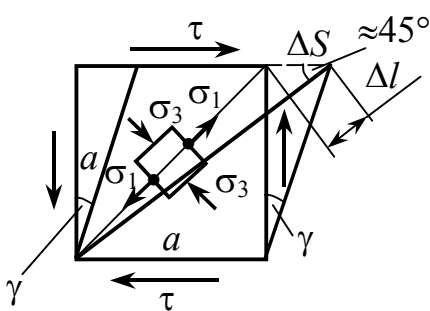


Рис. 4.5

$$\Delta l = \Delta S \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \gamma \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\gamma \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{a \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \gamma, \quad (4.1)$$

$\varepsilon$  – относительная деформация в направлении диагонали.

$$\varepsilon = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{E} [\tau - \nu(0 - \tau)] = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau, \quad (4.2)$$

приравнивая выражения (4.1) и (4.2), получим

$$\frac{1}{2} \gamma = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau, \quad \tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma, \quad (4.3)$$

$$\tau = \gamma \cdot G, \quad (4.4)$$

$G$  – модуль упругости 2-го рода. Сопоставив (4.3) и (4.4), имеем

$$\frac{E}{2(1+\nu)} = G. \quad (4.5)$$

Формула (4.5) устанавливает зависимость между тремя характеристиками механических свойств в упругом состоянии (между  $G$ ,  $E$  и  $\nu$ ).

$$\Delta S = \gamma \cdot a = \frac{\tau \cdot a}{G} = \left| \tau = \frac{Q}{A} \right| = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A}, \quad (4.6)$$

Работа деформации при сдвиге (рис. 4.6).

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta S = \frac{Q^2 \cdot a}{2G \cdot A};$$

$$u = \frac{W}{V} = \frac{Q^2 \cdot a}{2G \cdot A(A \cdot a)} = \frac{Q^2}{2A^2 \cdot G} = \frac{\tau^2}{2 \cdot G},$$

где  $u$  – удельная работа.

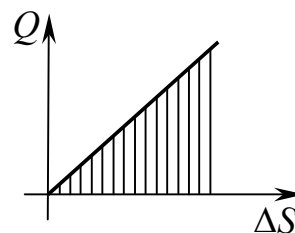


Рис. 4.6

$$\boxed{u = \frac{\tau^2}{2G}}. \quad (4.7)$$

Растяжение – сжатие	Сдвиг
$\sigma = \frac{F}{A};$ $\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A};$ $\varepsilon = \frac{\sigma}{E};$ $u = \frac{\sigma^2}{2E}.$	$\tau = \frac{Q}{A};$ $\Delta S = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A};$ $\gamma = \frac{\tau}{G};$ $u = \frac{\tau^2}{2G}.$

## 4.5. Кручение

*Ключевые слова*

*Деформация кручения, крутящий момент, прочность, жесткость при кручении.*

Кручение является основным видом деформации валов, частей машин, передающих вращение.

Деформация кручения происходит, когда в сечении действует крутящий момент или пара сил, создающая момент.

В теории кручения решаются следующие задачи: определение напряжений и проверка прочности, определение деформации и оценка жесткости.

Эти задачи для брусков круглого сечения решает сопротивление материалов, для некруглого сечения требуется метод упругих деформаций (теория упругости).

## 4.6. Кручение стержней круглого поперечного сечения. Внутренние силовые факторы при кручении

*Ключевые слова*

*Знак крутящего момента, эпюра крутящих моментов, дифференциальная зависимость между крутящим моментом и интенсивностью распределенного крутящего момента, касательные напряжения, чистое кручение, статическая сторона задачи, геометрическая сторона задачи, физическая сторона задачи, полярный момент сопротивления.*

**Пример 1.** Для бруса (рис. 4.7) построить эпюру крутящих моментов.

Убедимся, что стержень находится в равновесии.

$$\sum \text{mom}_z = T - 3T + 2T = 0.$$

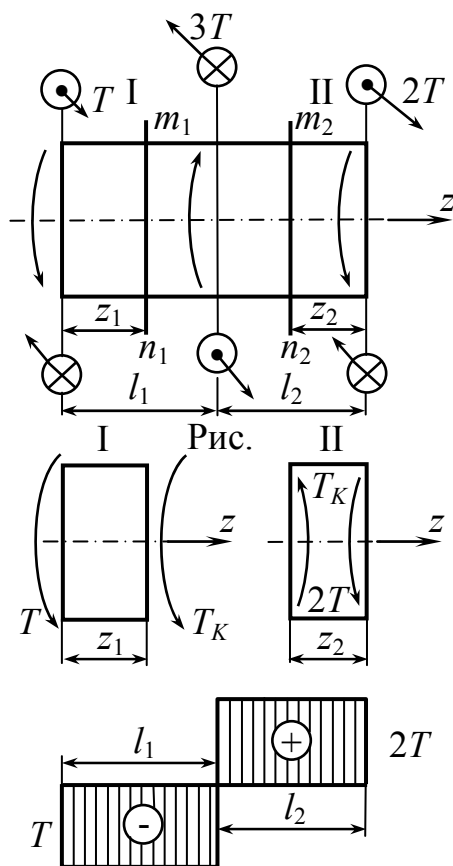


Рис. 4.7

Остальные пять уравнений удовлетворяются тождественно.

Применяем метод сечений для определения внутренних сил при кручении.

**I участок**  $0 \leq z_1 \leq l_1$ .

$$\sum \text{mom}_z = T + T_K = 0, \quad T_K = -T.$$

**II участок**  $0 \leq z_2 \leq l_2$ .

$$\sum \text{mom}_z = T_K - 2T = 0, \quad T_K = 2T.$$

Для крутящего момента независимо от формы поперечного сечения принято следующее правило знаков.

Если наблюдатель смотрит на поперечное сечение со стороны внешней нормали и видит момент  $T_K$  направленным против часовой стрелки, то момент считается положительным. При противоположном направлении моменту приписывается знак минус.

- ⊙ - нос стрелки – сила на нас
- ⊗ - хвост стрелки – сила от нас



**Пример 2.** Для бруса (рис. 4.8) построить эпюру крутящих моментов.

**I участок**  $0 \leq z_1 \leq l$ .

$$\sum \text{mom}_z = T_K + \frac{m}{l} \cdot z = 0,$$

$$T_K = -\frac{m}{l} \cdot z.$$

При  $z = 0$   $T_K = 0$ ;

$z = l$   $T_K = m$ .

Установим дифференциальную зависимость между крутящим моментом и интенсивностью распределенного крутящего момента.

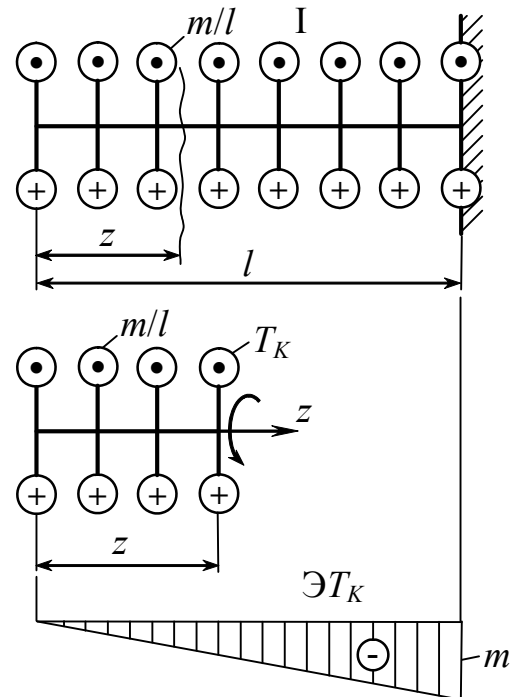


Рис. 4.8

Пусть стержень находится в равновесии под действием крутящих моментов относительно оси  $z$  (рис. 4.9). Ниже показана эпюра интенсивности распределенного крутящего момента  $\mathcal{E}t_z$ .

Выделим двумя смежными сечениями на расстоянии  $z$  от начала участка бесконечно малый элемент стержня

длиной  $dz$ . Действие отброшенных частей стержня заменим крутящими моментами, возникающими в соответствующих сечениях. Значения крутящих моментов в смежных сечениях, отстоящих на расстоянии  $dz$  друг от друга, могут различаться лишь на бесконечно малую величину крутящего момента  $dT_K$ .

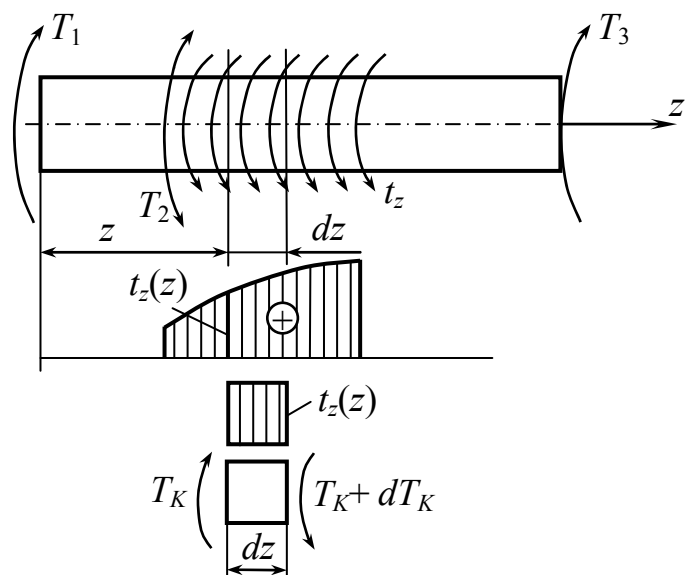


Рис. 4.9

Условие равновесия элемента

$$\sum \text{мом}_z = -T_K + t_z \cdot dz + T_K + dT_K = 0,$$

отсюда  $\boxed{\frac{dT_K}{dz} = -t_z}$ .

Итак, первая производная от крутящего момента по координате поперечного сечения  $z$  равна интенсивности распределенного крутящего момента, взятого с обратным знаком.

### Определение напряжений при кручении

В поперечных сечениях стержня (рис. 4.10) возникает постоянный крутящий момент  $T_K = T$ . О нагруженном таким образом стержне говорят, что он находится в состоянии чистого кручения.

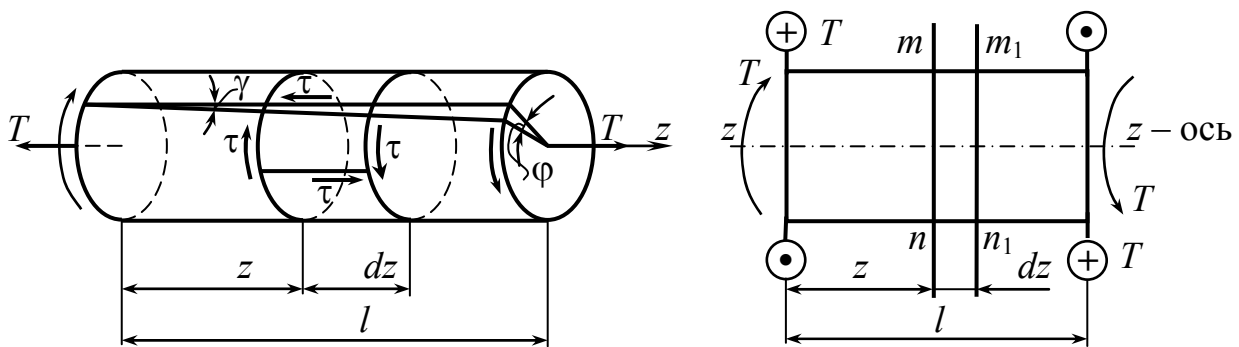


Рис. 4.10

**Рассмотрим статическую сторону задачи:** внутренние силы по сечению  $mn$  действуют в плоскости сечения и приводятся к моменту, уравновешивающему внешний момент  $T$  (рис. 4.11).

Применительно к площадкам, прилегающим к контуру сечения, можно доказать, что касательные напряжения направлены по перпендикуляру к соответствующему радиусу.

Предположим,  $\tau$  действует произвольно, тогда  $\tau'$  действует перпендикулярно к радиусу  $r$ , а  $\tau''$  действует по радиусу  $r$  на площадке  $dA$ . По закону парности касательных напряжений  $\tau'$  также действует на площадке  $dA'$  и  $\tau''$  действует на площадке  $dA''$ , расположенной на поверхности стержня.

В действительности  $\tau''$  на площадке  $dA''$  равны нулю и  $\tau'$  действуют на площадке  $dA'$ , следовательно, касательные напряжения  $\tau = \tau'$  действуют не произвольно, а по перпендикуляру к радиусу  $r$ , это справедливо для площадок, лежащих у контура, но это утверждение справедливо и для внутренних точек тела.

$$\int_A \rho \cdot \tau_\rho dA = T_K. \quad \tau_\rho = \tau_\rho(\rho) - ?$$

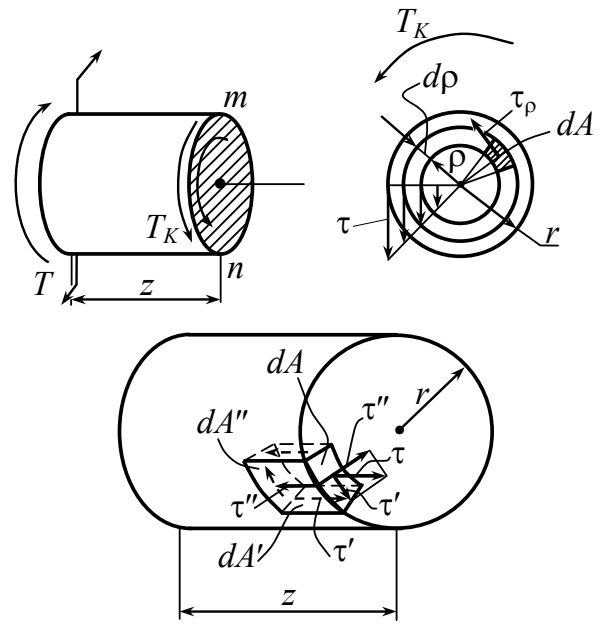


Рис. 4.11

Задача при кручении – определение касательных напряжений – является внутренне статически неопределимой.

### Геометрическая сторона задачи

Картина деформации представлена на рис. 4.12 (на основании экспериментов и исследований методом теории упругости):

1. Сечения поворачиваются друг относительно друга по отношению к оси бруса как жесткие кольца (контуры не искажаются, радиусы не искривляются).

2. Образующие поворачиваются на угол сдвига  $\gamma_\rho$  (зависит от радиуса).

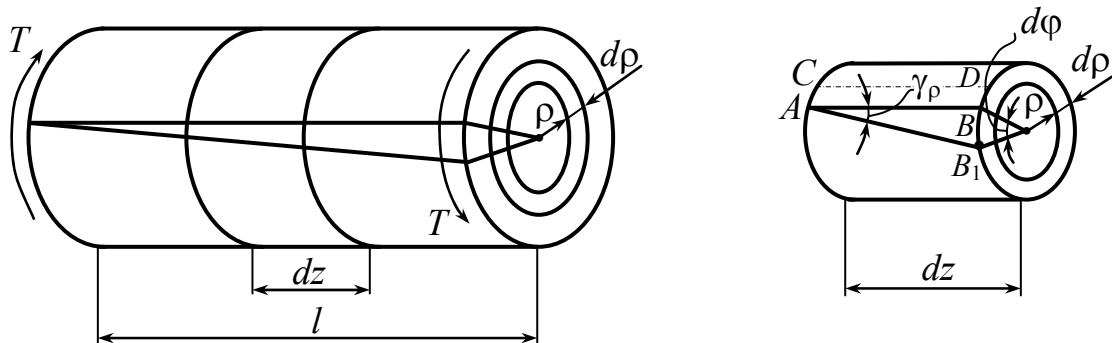


Рис. 4.12

3. Радиусы поворачиваются относительно их первоначального положения на угол  $\varphi$ . Взаимный поворот радиусов в смежных сечениях –  $d\varphi$ ,  $\varphi$  – абсолютный угол закручивания.

4. Элементы объема испытывают сдвиг, интенсивность которого изменяется в зависимости от расстояния до оси, т.е. в зависимости от радиуса.

$$BB_1 = \gamma_\rho \cdot dz = \rho \cdot d\varphi; \quad \gamma_\rho = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz}; \quad \frac{d\varphi}{dz} = \theta; \quad \gamma_\rho = \rho\theta,$$

$\theta$  – относительный угол закручивания.

### Физическая сторона задачи

$$\tau_\rho = \gamma_\rho \cdot G = \rho \cdot G \cdot \frac{d\varphi}{dz} = \rho \cdot G \cdot \theta \quad (\text{по закону Гука}); \quad (4.8)$$

$$T_K = \int_A \tau_\rho \cdot \rho \cdot dA = \int_A G \cdot \rho^2 \frac{d\varphi}{dz} dA; \quad G \cdot \frac{d\varphi}{dz} = \text{const};$$

$$T_K = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA; \quad \int_A \rho^2 dA = I_\rho;$$

$$T_K = G \cdot I_\rho \cdot \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA; \quad (4.9)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{T_K}{GI_\rho}; \quad (4.10)$$

$$\tau_\rho = \rho \cdot G \frac{d\varphi}{dz} = \frac{T_K}{I_\rho} \rho; \quad \boxed{\tau_\rho = \frac{T_K}{I_\rho} \rho}. \quad (4.11)$$

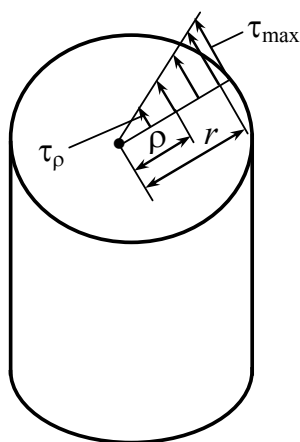


Рис. 4.13

$$\tau_{\max} = \frac{T_K}{I_\rho} \cdot \rho_{\max} = \frac{T_K}{I_\rho} = \frac{T_K}{I_\rho} \cdot \frac{I_\rho}{r} = W_\rho \quad (\text{рис. 4.13});$$

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}} \text{ – полярный момент сопротивления.}$$

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{r} = \frac{\frac{\pi r^4}{2}}{r} = \frac{\pi r^3}{2};$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{T_K}{W_\rho}}. \quad (4.12)$$

## 4.7. Характер разрушения и расчет на прочность стержней при кручении

*Ключевые слова*

*Прочность при кручении, связь между допускаемыми касательными и нормальными напряжениями, характер разрушения.*

При расчете на прочность стержней круглого сечения (рис. 4.14) необходимо знать предельные напряжения

$$[\tau] = (0,5 \div 0,6 \div 0,8)[\sigma].$$

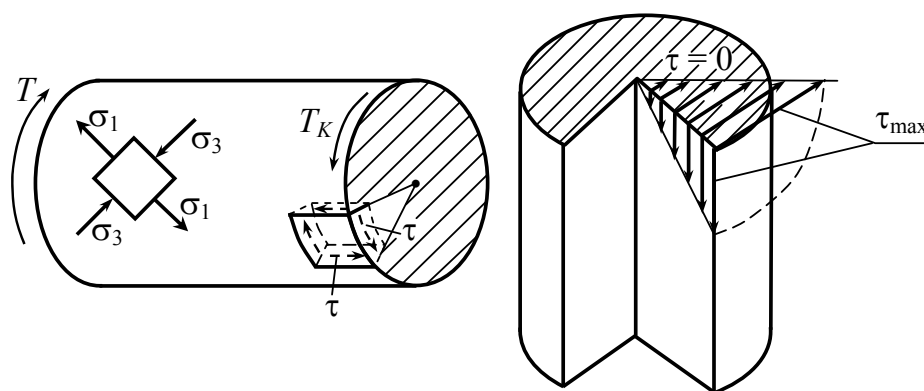


Рис. 4.14

$$W_{\rho}^{\odot} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\max}} = \frac{\pi \cdot r^4}{2r} = \frac{\pi \cdot r^3}{2}.$$

Расчет на прочность стержней кольцевого сечения (рис. 4.15)

$$W_{\rho}^{\odot} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2R} = \frac{\pi \cdot R^3}{2} \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right).$$

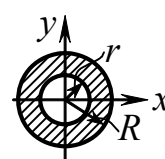


Рис. 4.15

Проверка прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{T_K}{W_{\rho}} \leq [\tau]; \quad \frac{T_K}{W_{\rho}} \leq [\tau] \text{ – при кручении.}$$

**Сталь** – разрушение происходит по поперечному сечению – срез, за счет касательных напряжений.

**Чугун** – разрушение происходит по винтовой поверхности  $\angle 45^\circ$ , за счет нормальных напряжений (рис. 4.16).

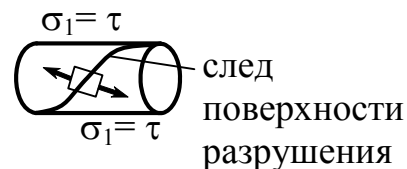


Рис. 4.16

**Дерево** – разрушение происходит вдоль волокон в результате действия касательных напряжений.

#### 4.8. Определение перемещений (деформаций) при кручении и расчет на жесткость

*Ключевые слова*

*Жесткость сечения при кручении, абсолютный угол закручивания, относительный угол закручивания, расчет на жесткость при кручении.*

$GI_p$  – жесткость сечения при кручении (рис. 4.17).

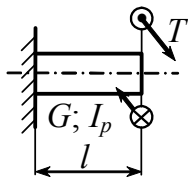


Рис. 4.17

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{T_K}{GI_p}; \quad \varphi = \int_z \frac{T_K dz}{G \cdot I_p};$$

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p}. \quad (4.13)$$

Для деталей с переменным сечением из различных материалов:

$$\varphi = \sum_1^n \frac{T_i \cdot l_i}{G_i \cdot I_{pi}}, \quad (4.14)$$

где  $n$  – количество участков.

$\varphi_{\max}$  должен быть меньше или равен  $[\varphi]$ , тогда условие жесткости при кручении запишется в виде

$$\varphi_{\max} = \frac{T \cdot l}{GI_p} \leq [\varphi].$$

Так как  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ , диаметр вала при кручении через абсолютный угол закручивания определяется по формуле

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32T \cdot l}{\pi G [\varphi]}}.$$

Через относительный угол закручивания условие жесткости круглого вала имеет вид

$$\theta_{\max} = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \leq [\theta],$$

отсюда

$$d \geq 4 \sqrt[4]{\frac{32T_{\max}}{G\pi[\theta]}}.$$

Таким образом, диаметр круглого вала должен одновременно удовлетворять условию прочности и жесткости. Из двух значений диаметра вала, определенных из расчета на прочность и жесткость, в качестве окончательного принимается большее значение.

### Пример 3.

На стержень  $AB$  круглого поперечного сечения, защемленный на левом конце (рис. 4.18), действует равномерно распределенный крутящий момент интенсивностью  $q$ . Вывести формулу для угла закручивания  $\varphi$  конца  $B$  стержня.

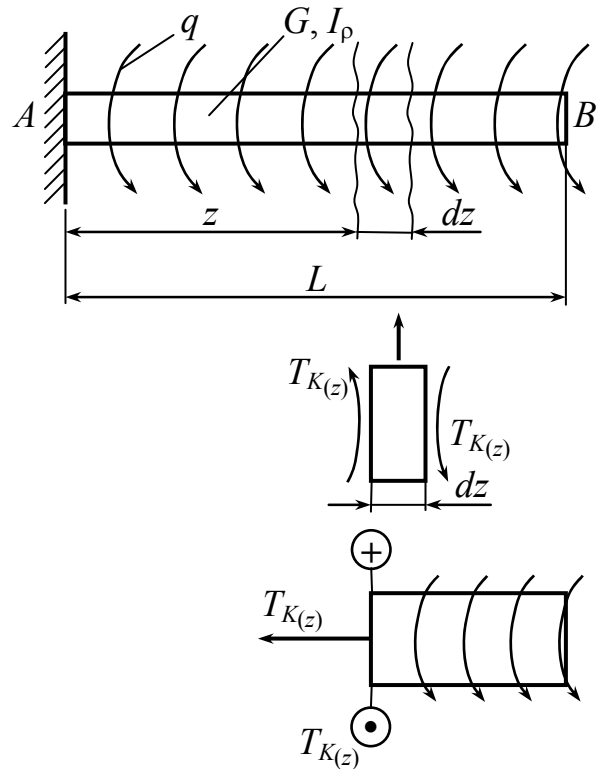


Рис. 4.18

$$0 \leq z \leq L;$$

$$T_{K(z)} - q(L - z) = 0;$$

$$T_{K(z)} = q(L - z);$$

$$d\varphi_{(z)} = \frac{T_{K(z)} \cdot dz}{G \cdot I_p};$$

$$\varphi_{B(z)} = \int_0^z \frac{T_{K_z} dz}{G \cdot I_p} = \int_0^z \frac{q(L - z) dz}{G \cdot I_p} = \frac{q}{G \cdot I_p} \left( L \cdot z \Big|_0^z - \frac{z^2}{2} \Big|_0^z \right);$$

$$\varphi_{B_{z=0}} = 0, \quad \varphi_{B_{z=L}} = \frac{qL^2}{G \cdot I_p} - \frac{qL^2}{2G \cdot I_p} = \frac{qL^2}{2G \cdot I_p}.$$

## 4.9. Определение потенциальной энергии деформации при кручении

*Ключевые слова*

*Удельная потенциальная энергия при кручении.*

График потенциальной энергии деформации при кручении представлен на рис. 4.19.

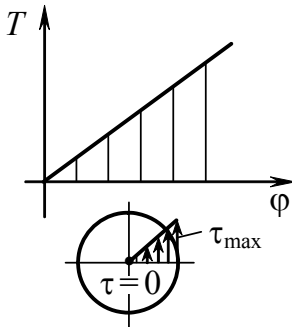


Рис. 4.19

$$W = U = \frac{1}{2} T \cdot \varphi = \frac{T^2 \cdot l}{2G \cdot I_p} \quad (4.15)$$

$$W = U = \frac{T^2 \cdot l}{2G \cdot I_p} = \frac{\left( \frac{T^2}{W_p^2} \right) \cdot W_p^2}{2G \cdot I_p}$$

Удельная потенциальная энергия деформации при кручении

$$u = \frac{W}{V} = \frac{U}{V}; \quad V = \pi r^2 \cdot l;$$

$$u_{кр} = \frac{\tau_{max}^2 \cdot \left( \frac{\pi r^3}{2} \right)^2 l}{2G \cdot \frac{\pi r^4}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l} = \frac{\tau_{max}^2}{4G}$$

$$u_{кр} = \frac{\tau^2}{4G}, \quad (4.16)$$

в отличие от чистого сдвига, где  $u = \frac{\tau^2}{2G}$ .

**Пример 4.** Установить, на сколько вес сплошного вала больше веса трубчатого вала при равной прочности, при передаче ими одного и того же крутящего момента  $m$ .

На рис. 4.20 представлено распределение касательных напряжений по сечениям при кручении.

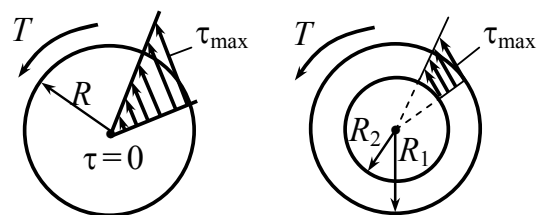


Рис. 4.20

$$W_{p\ominus} = \frac{\pi \cdot R^3}{2};$$



$$W_{p\text{кольцо}} = \frac{\pi \cdot R_1^3}{2} \left( 1 - \frac{R_2^4}{R_1^4} \right).$$

$$\frac{P_{\text{кольцо}}}{P_{\text{вал}}} = \frac{\pi R^2}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}. \quad (4.17)$$

Условие равнопрочности:  $\tau = \frac{m}{W_{p\text{кольцо}}} = \frac{m}{W_{p\text{вал}}} \leq [\tau_m].$

$$W_{p\text{кольцо}} = W_{p\text{вал}}. \quad R^3 = R_1^3 \left( 1 - \frac{R_2^4}{R_1^4} \right).$$

$$R = R_1 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{R_2^4}{R_1^4}}. \quad (4.18)$$

Подставляем (4.18) в (4.17), и, задаваясь соотношением  $\frac{R_2}{R_1}$ ,

можно установить, на сколько вес сплошного вала больше веса трубчатого, если они должны передавать один и тот же крутящий момент. Например, при  $\frac{R_2}{R_1} = 0,8$  полый вал вдвое меньше сплошного.

Когда возможно, нужно брать, исходя из конструктивных соображений, вал кольцевого сечения, так как у сплошного вала металл у оси мало используется. Практически отношение  $\frac{R_2}{R_1} = \alpha$  должно быть равно  $0,6 \div 0,8$ .

**Пример 5.** Как должен изменяться диаметр вала, если передаваемая им мощность  $P$  остается без изменения, а угловая скорость  $\omega$  увеличивается?

Известно, что  $P = T \cdot \omega$ , тогда из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau],$$

где  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ ,  $d$  – диаметр вала.

Диаметр вала можно определить из выражения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16P}{\omega\pi[\tau]}}. \quad (4.19)$$

Как следует из этой формулы, с увеличением скорости вращения при неизменной прочности и передаваемой мощности диаметр вала уменьшается. Поэтому конструкторы стремятся увеличить быстродействие машин в особенности тогда, когда важную роль играет уменьшение веса, например, в авиации.

#### 4.10. Статически неопределимые задачи

*Ключевые слова*

*Количество неизвестных, число уравнений равновесия, статически неопределимые задачи, основная система, уравнение деформаций или перемещений.*

При кручении, так же как и при растяжении, встречаются задачи, которые не могут быть решены с помощью одних только уравнений равновесия. В таких задачах количество неизвестных превышает число уравнений равновесия. Порядок решения таких задач тот же самый, что и при решении статически неопределимых задач при растяжении (сжатии).

**Пример 6.** Рассмотрим стержень с двумя заделанными концами (рис. 4.21).

Такой стержень статически неопределим, так как для нахождения двух реактивных моментов, возникающих в заделках, статика дает лишь одно уравнение равновесия.

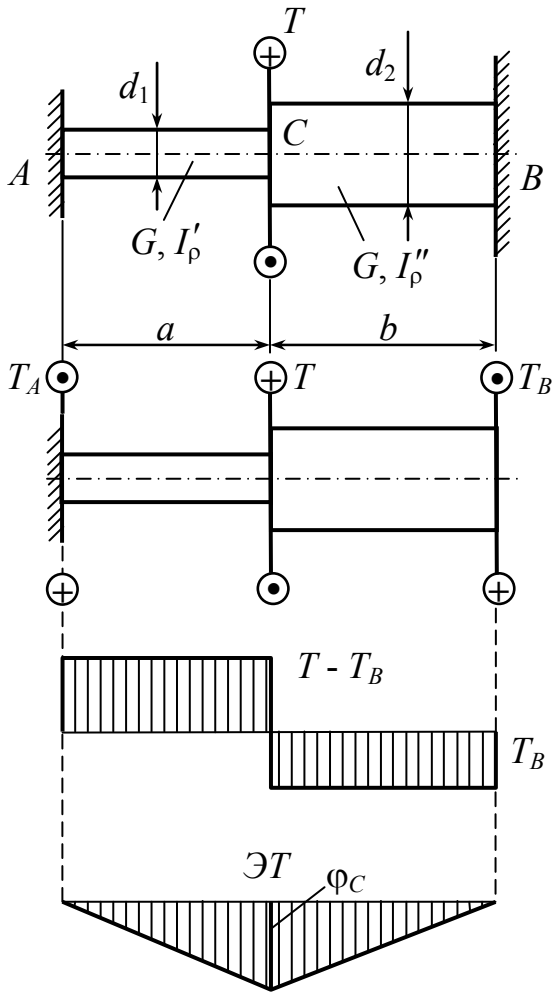


Рис. 4.21

Отбросим одну заделку, заменив ее действие неизвестным моментом  $T_B$ . Дополнительное уравнение (называемое, как известно, уравнением деформаций или уравнением перемещений) получим из условия, что угол поворота сечения у отброшенной заделки  $B$ , равный углу закручивания стержня под действием моментов  $T$  и  $T_B$ , равен нулю  $\varphi_B = 0$ . В получившейся системе, называемой основной системой, поворот сечения  $B$  происходит под действием внешнего момента и момента  $T_B$ . Угол поворота сечения  $B$  под действием момента  $T_B$  равен

$$\varphi'_B = + \left( \frac{T_B \cdot a}{G \cdot I'_p} + \frac{T_B \cdot b}{G \cdot I''_p} \right),$$

где  $I'_p = 0,1d_1^4$ ;  $I''_p = 0,1d_2^4$ .

Угол поворота сечения  $B$  под действием момента  $T$  равен

$$\varphi''_B = \frac{-Ta}{GI'_p}.$$

$$\varphi_B = -\frac{T \cdot a}{GI'_p} + \frac{T_B \cdot a}{GI'_p} + \frac{T_B \cdot b}{GI''_p} = 0.$$

Отсюда определяем  $T_B$

$$T_B = \frac{T \cdot a \cdot GI'_p \cdot GI''_p}{GI'_p (a \cdot GI''_p + b \cdot GI'_p)}.$$

После этого можно определить крутящий момент в любом сечении и построить эпюру  $M_K$  и эпюру угла закручивания. Для построения эпюры  $\varphi$  достаточно вычислить угол поворота сечения  $C$ .

$$\varphi_C = \frac{+T_B \cdot b}{GI_p''}.$$

**Пример 7.** Составной стержень кругового поперечного сечения представляет собой трубу  $B$ , внутри которой помещен жестко соединенный с ней сплошной цилиндр  $A$  (рис. 4.22). Материал внутреннего цилиндра имеет модуль сдвига  $G_a$ , материал трубы – модуль сдвига  $G_e$ .

Выведем формулы для максимальных касательных напряжений  $\tau_a$  и  $\tau_e$  соответственно в трубе и внутреннем цилиндре при нагружении составного стержня крутящим моментом.

Отнесенный к единице длины угол закручивания  $\theta$  должен быть одинаков как для трубы, так и для

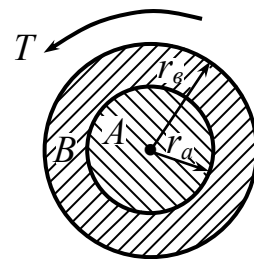


Рис. 4.22

внутреннего цилиндра. Тогда согласно выражению (4.8) имеем

$$\theta = \frac{\tau_a}{G_a \cdot r_a} = \frac{\tau_e}{G_e \cdot r_e}, \quad (4.20)$$

где  $\tau_a$  и  $\tau_e$  – касательные напряжения соответственно во внутреннем цилиндре на расстоянии от оси, равном радиусу  $r_a$ , и в материале трубы на расстоянии  $r_e$  от оси. Кроме того, полный крутящий момент  $T$  состоит из крутящих моментов  $T_a$  и  $T_e$ , действующих на внутренний цилиндр и на трубу, поэтому, с учетом выражения ( $T = G\theta I$ ), запишем

$$T = T_a + T_e = G_a \theta I_a + G_e \theta I_e. \quad (4.21)$$

Полярные моменты инерции  $I_a$  и  $I_e$  равны

$$I_a = \frac{\pi r_a^4}{2}, \quad I_e = \frac{\pi}{2} (r_e^4 - r_a^4).$$

Решая уравнение (4.21) относительно  $\theta$ , находим

$$\theta = \frac{T}{G_a I_a + G_b I_b},$$

что с учетом соотношений (4.20) дает

$$\tau_a = T \cdot \frac{G_a r_a}{G_a I_a + G_b I_b}, \quad \tau_b = T \cdot \frac{G_b r_b}{G_a I_a + G_b I_b}. \quad (4.22)$$

Крутящие моменты, передаваемые каждой из частей составного стержня, соответственно равны

$$T_a = T \cdot \frac{G_a I_a}{G_a I_a + G_b I_b}, \quad T_b = T \cdot \frac{G_b I_b}{G_a I_a + G_b I_b}. \quad (4.23)$$

Отметим, что в данном примере исследовалась статически неопределимая система.

#### 4.11. Кручение валов некруглого сечения

*Ключевые слова*

*Прямоугольное сечение, картина распределения касательных напряжений, геометрические характеристики некруглых сечений.*

Поперечные сечения у валов некруглого сечения со сторонами  $a$  и  $b$  при кручении не остаются плоскими, они деформируются (рис. 4.23).



Рис. 4.23

Картина распределения напряжений и деформаций усложняется и методами сопротивления материалов не разрешается. Приходится обращаться к теоретическому методу упругости и к экспериментальным методам аналогий, они обоснованы методами теории упругости. Теория упругости дает следующее распределение напряжений по сечению:

1. Во внешних углах касательное напряжение  $\tau = 0$  (рис. 4.24).

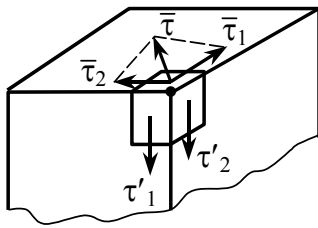


Рис. 4.24

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2.$$

По свойству парности:  $\tau_1 = \tau'_1$ ,  $\tau_2 = \tau'_2$ , но  $\tau'_1 = 0$ ,  $\tau'_2 = 0$ , так как боковая поверхность свободна от напряжений. Следовательно,  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = 0$ ,  $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 0$ .

2. На площадках, примыкающих к контуру,  $\tau$  направлены по касательной (рис. 4.25). Предполагаем, что  $\tau$  действует произвольно, разбиваем его на  $\tau_1$  и  $\tau_2$ .  $\tau_2 = \tau'_2$ , но  $\tau'_2 = 0$ , следовательно,  $\tau_2 = 0$ .

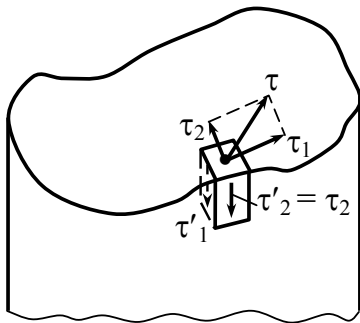


Рис. 4.25

$$\tau_{\max} = \frac{T_K}{\alpha ab^2}. \quad (4.24)$$

$\alpha = \alpha\left(\frac{a}{b}\right)$ ,  $\beta = \beta\left(\frac{a}{b}\right)$ ,  $\eta = \eta\left(\frac{a}{b}\right)$  – приводятся в таблицах.

$$\tau_2 = \eta \cdot \tau_{\max} = \eta \frac{T_K}{\alpha ab^2}; \quad (4.25)$$

$$\varphi = \frac{T_K \cdot l}{G \cdot \beta \cdot a \cdot b^3}. \quad (4.26)$$

$\tau_{\max}$  действует на середине наибольшей стороны  $a$  и при  $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$ ,

$\alpha \cong \frac{1}{3}$ ,  $\beta = \frac{1}{3}$ ,  $\eta = 0,742$ , а при  $\frac{a}{b} = 1$ ,  $\alpha = 0,208$ ,  $\beta = 0,141$ ,  $\eta = 1,0$ .

Значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\eta$  приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

$\frac{a}{b}$	1	1,5	2	2,5	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,246	0,256	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\eta$	1,000	0,859	0,795	0,765	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742
$\beta$	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

$$\tau_{\max} = \frac{T_K}{W_K}; \quad \varphi = \frac{T_K \cdot l}{G \cdot I_K}.$$

$$\left. \begin{aligned} W_K &= \alpha \cdot ab^2 \\ I_K &= \beta \cdot ab^3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{геометрические характеристики} \\ \text{некруглых сечений стержней.} \end{array}$$

#### 4.12. Использование методов аналогии.

##### Метод пленочной (мембранной) аналогии

###### *Ключевые слова*

*Методы аналогии, мембранная аналогия, дифференциальные уравнения, пленка, мембрана, холмик или бугор, равномерное давление, угол наклона касательной к поверхности бугра, объем жидкости под пленкой.*

В науке используются методы аналогии.

*A* и *B* – два явления.

*A* – изучено хорошо, легко поддаются опыты изучению. Явления *A* и *B* описываются общими дифференциальными уравнениями.

Тогда по явлению *A* аналогично рассуждаем и о явлении *B*.

В задачах механики также часто встречаются случаи, когда решения совершенно различных по физической сущности задач сводятся к одним и тем же дифференциальным уравнениям. Тогда между задачами может быть установлена аналогия. Так, в частности, обстоит дело с задачей о кручении. Оказывается, что, независимо от формы исследуемого сечения, задача о кручении стержня сводится к тому же дифференциальному уравнению, что и задача о равновесии пленки, натянутой по контуру того же очертания и нагруженной равномерно распределенным давлением. Аналогом напряжения является угол, который составляет касательная к поверхности пленки с плоскостью контура, а аналогом крутящего момента – объем, заключенный между плоскостью контура и поверхностью пленки.

Характер деформации пленки под действием давления можно всегда представить себе, если не точно, то, во всяком случае, ориентировочно. Следовательно, всегда имеется возможность представить и закон распределения напряжений при кручении стержня с заданной формой сечения.

При помощи пленочной аналогии можно получить не только качественные, но и количественные соотношения.

Непосредственная аналогия:

$\tau \rightarrow \alpha$  – угол наклона касательной к поверхности бугра.

$I_k \rightarrow V$  – объем жидкости под пленкой.

Чтобы исключить влияние жесткости пленки, одновременно с исследуемым сечением на том же приборе производят обмер пленки с круговым очертанием. Для стержня кругового сечения жесткость и напряжения могут быть определены расчетным путем по формулам сопротивления материалов. Поэтому оказывается возможным, сопоставляя результаты замеров, найти требуемые характеристики заданного сечения по характеристикам кругового сечения из соображений пропорциональности.

$$\tau_{\max}^{\square} = \tau_{\max}^{\circ} \cdot \frac{\alpha_{\max}^{\circ}}{\alpha_{\max}^{\square}},$$

где  $\alpha_{\max}^{\square}$  – найденный угол наклона касательной к бугру исследуемого сечения;

$\alpha_{\max}^{\circ}$  – для круглого сечения, угол наклона касательной.

$$I_k^{\square} = I_p^{\circ} \cdot \frac{V^{\square}}{V^{\circ}},$$

где  $V^{\square}, V^{\circ}$  – объемы жидкости под бугром при одинаковом давлении  $p$ , для некруглого и круглого сечений соответственно.



### 4.13. Кручение тонкостенных стержней

*Ключевые слова*

*Открытые, замкнутые профили, угол закручивания всего стержня и отдельных частей, максимальные касательные напряжения, площадь, ограниченная осевой линией, удельная потенциальная энергия при сдвиге, геометрическая характеристика сечения.*

В практике машиностроения, и особенно самолетостроения, часто возникает необходимость расчета на кручение так называемых тонкостенных стержней. Типичные формы прокатанных, гнутых, тянутых и прессованных профилей показаны на рис. 4.26. Характерной геометрической особенностью тонкостенных стержней является то, что их толщина существенно меньше прочих линейных размеров.

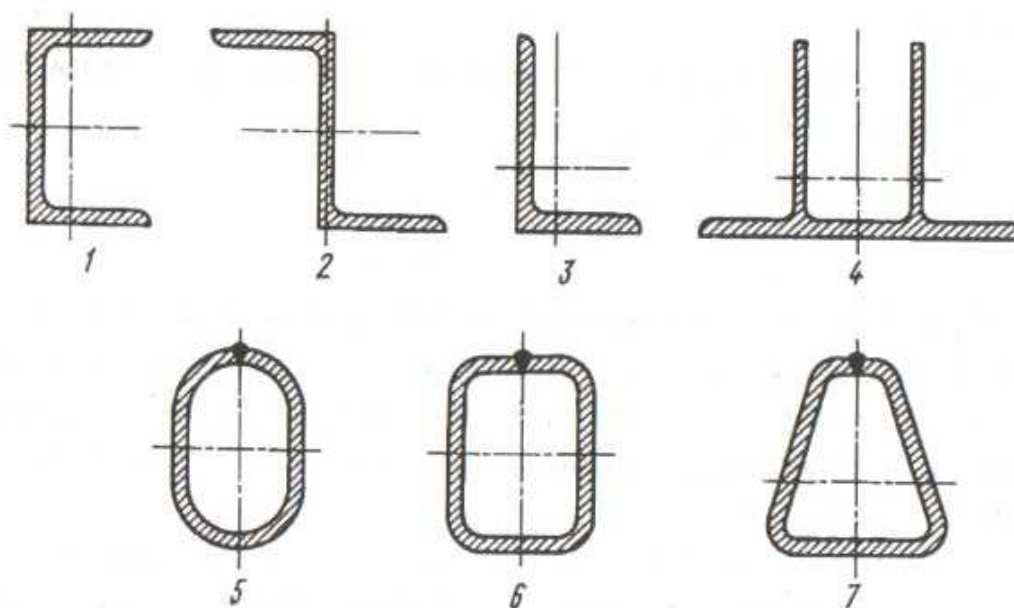


Рис. 4.26

Тонкие профили разделяются на замкнутые и открытые. Так, первые четыре профиля, показанные на рис. 4.26, являются открытыми, а последние три – замкнутыми.

#### 4.13.1. Тонкостенные открытые стержни некруглого сечения

а) Случай, когда профиль разворачивается в вытянутый прямоугольник (рис. 4.27). В этом случае применимы формулы для узкого высокого прямоугольника, отношение  $S/t \geq 10$ .

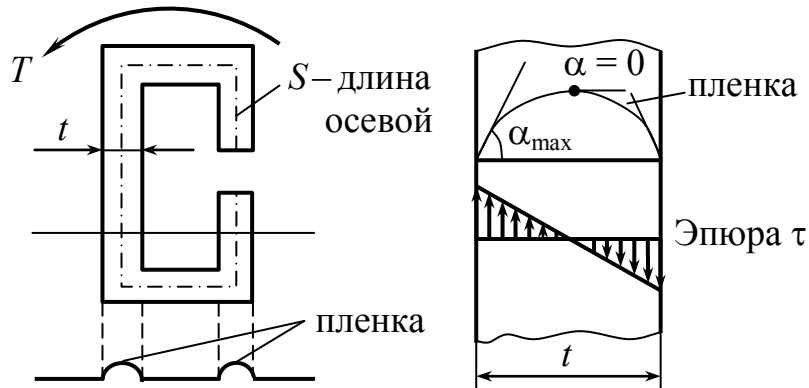


Рис. 4.27

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_k} = \frac{T}{\alpha S t^2}; \quad \tau_{\max} = \frac{3T}{ab^2} = \frac{3T}{S \cdot t^2};$$

$$\phi = \frac{Tl}{\beta G S t^3}, \quad \phi = \frac{3 \cdot Tl}{G a b^3} = \frac{3 \cdot Tl}{G \cdot S \cdot t^3};$$

где  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\beta = \frac{1}{3}$ , при  $S/t \geq 10$ ,  $l$  – длина стержня.

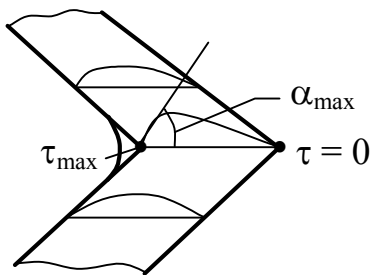


Рис. 4.28

Исключение составляют внутренние углы. Это подтверждается мембранной аналогией (рис. 4.28). Чтобы избежать  $\tau_{\max}$  в углах, делают закругление.

б) Случай, когда профиль не разворачивается в прямоугольник (рис. 4.29).

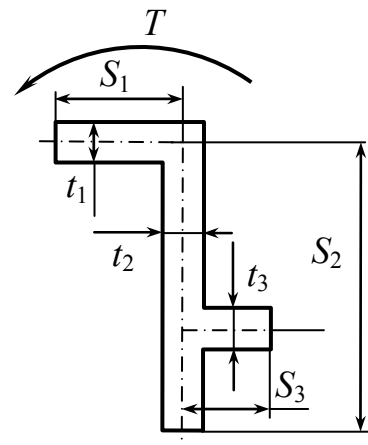


Рис. 4.29

Для случая “а” имеем

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{S \cdot t^2}; \quad (4.27)$$

$$\varphi = \frac{3 \cdot Tl}{G \cdot St^3}; \quad (4.28)$$

$$T = \frac{\varphi \cdot G}{3l} \cdot St^3; \quad T = \sum T_i; \quad T = T_1 + T_2 + T_3.$$

$$T = \frac{\varphi \cdot G}{3 \cdot l} \cdot \sum_1^n S_i t_i^3; \quad \varphi = \frac{T \cdot 3 \cdot l}{G \cdot \sum_1^n S_i t_i^3};$$

где  $\varphi$  – угол закручивания всего стержня, общий для всего сечения и для отдельных частей:  $\varphi_i = \varphi$ ;  $l$  – длина тонкостенного стержня.

Наибольшие касательные напряжения на основе мембранной аналогии, исходя из эксперимента, приходятся на участки, имеющие наибольшую ширину:  $\alpha_{\max} \rightarrow t_{\max} \rightarrow \tau_{\max}$ .

Пусть это будет  $k$  – участок.

$$\text{Для } k \text{ – участка: } \tau_k = \tau_{\max} = \frac{3T_k}{S_k \cdot t_k^2}.$$

$T_k$  – доля крутящего момента, приходящаяся на  $k$ -й участок.

$$\varphi_i = \varphi_k = \varphi; \quad \left. \begin{array}{l} \varphi_k = \varphi = \frac{3T_k \cdot l}{G \cdot S_k \cdot t_k^3}; \\ \tau_k = \tau_{\max} = \frac{3T_k}{S_k \cdot t_k^2}. \end{array} \right\} \text{исключим } T_k.$$

$T_k = \frac{\varphi \cdot G}{3l} \cdot S_k \cdot t_k^3$ , подставляем выражение для  $\tau_k$ , получим

$$\tau_k = \frac{\varphi G}{l} \cdot t_k; \quad (4.29)$$

но  $\varphi = \frac{T \cdot 3 \cdot l}{G \cdot \sum_1^n S_i t_i^3}$ , подставляем  $\varphi$  в выражение (4.29), получим

$$\tau_{\max} = \tau_k = \frac{3 \cdot T \cdot t_k}{\sum_1^n S_i t_i^3} = \frac{3 \cdot T \cdot t_{\max}}{\sum_1^n S_i t_i^3}. \quad (4.30)$$

4.13.2. *Определение максимальных касательных напряжений и абсолютных углов закручивания в тонкостенных стержнях замкнутого профиля при кручении*

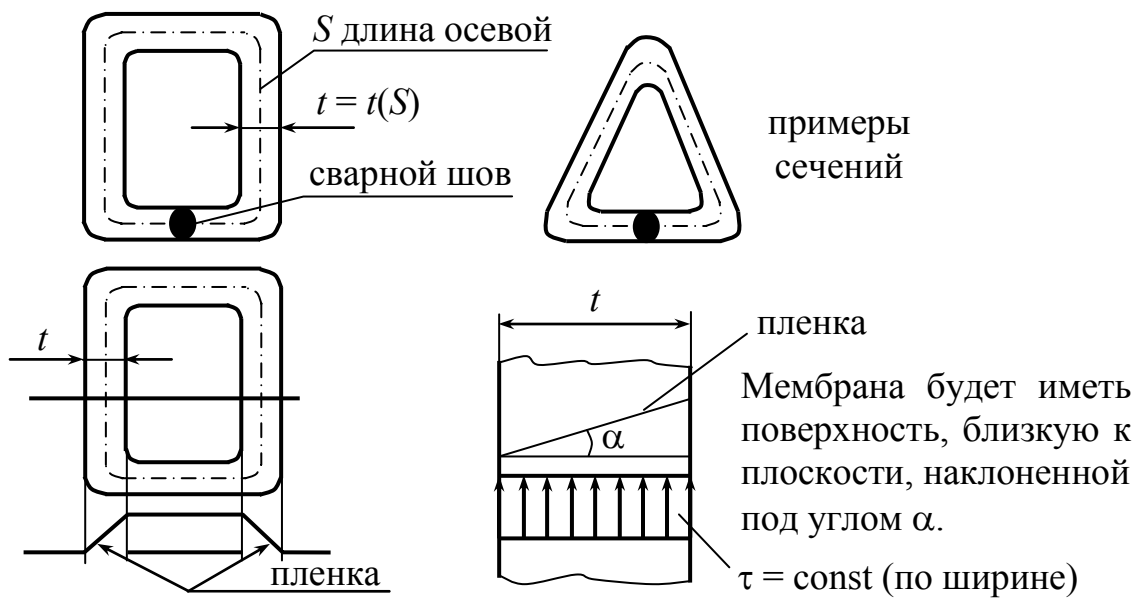


Рис. 4.30

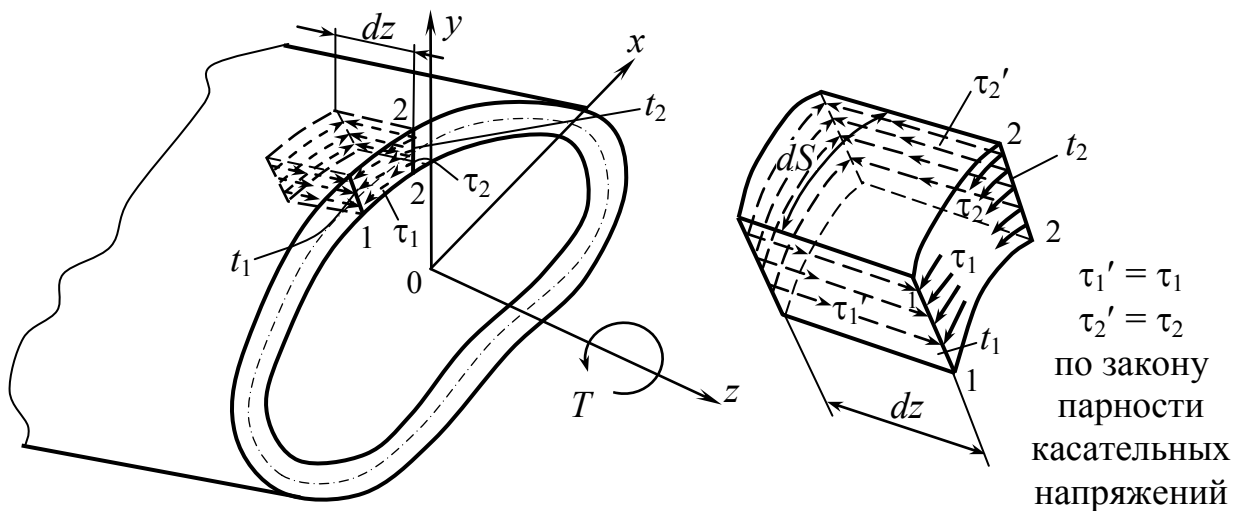


Рис. 4.31

$\tau - ?$        $\varphi - ?$

Составим уравнение равновесия в виде  $\sum Z = 0$ .

$$\tau_1 \cdot t_1 \cdot dz = \tau_2 \cdot t_2 \cdot dz; \quad \tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 = \text{const.} \quad (4.31)$$

$$t_{\min} \xrightarrow{\text{соотв.}} \tau_{\max}; \quad t_{\max} \xrightarrow{\text{соотв.}} \tau_{\min}.$$

Составим выражение для крутящего момента через напряжения, действующие в сечении (рис. 4.32).

$$dT = (\tau \cdot t \cdot dS) \cdot OC;$$

$$T = \int_S \tau \cdot t \cdot dS \cdot OC = \tau \cdot t \int_S dS \cdot OC;$$

$$\tau \cdot t = \text{const};$$

$$dS \cdot OC = 2A_{\Delta OBD};$$

$$T = \tau \cdot t \int_S 2A_{\Delta OBD} = \tau \cdot t \cdot 2A^*,$$

где  $A^*$  – площадь, ограниченная осевой линией (заштрихованная площадь).

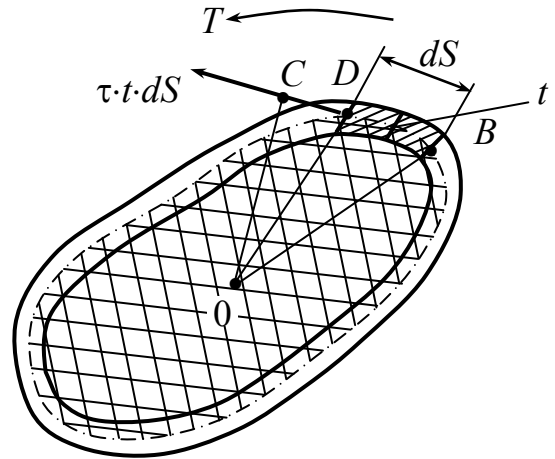


Рис. 4.32

$$\tau = \frac{T}{2A^*t}; \quad \tau_{\max} = \frac{T}{2A^*t_{\min}}. \quad (4.32)$$

Для определения угла закручивания составим выражение для потенциальной энергии деформации, сначала через напряжения, а затем через внешний момент и угол закручивания и сопоставим эти выражения.

Поскольку материал испытывает сдвиг, для элемента объема  $dV$  имеем

$$dV = t \cdot dS \cdot dz; \quad dU = \frac{\tau^2}{2G} \cdot t \cdot dS \cdot dz,$$

здесь  $u = \frac{\tau^2}{2G}$  – удельная потенциальная энергия при сдвиге.

$$\begin{aligned}
 U &= \int_l dz \int_S \frac{\tau^2}{2G} t \cdot dS = l \cdot \int_S \frac{\tau^2 \cdot t^2}{2G} \cdot \frac{1}{t} \cdot dS = \frac{l(\tau \cdot t)^2}{2G} \int_S \frac{dS}{t} = \\
 &= \left| \tau \cdot t = \frac{T}{2A^*} \right| = \frac{T^2 \cdot l}{8 \cdot G \cdot A^{*2}} \int_S \frac{dS}{t}; \\
 U &= \frac{lT^2}{8 \cdot G \cdot A^{*2}} \int_S \frac{dS}{t}. \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

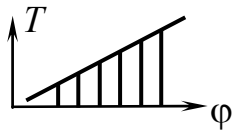


Рис. 4.33

С другой стороны (рис. 4.33),

$$U = \frac{1}{2} T \cdot \varphi, \tag{4.34}$$

тогда

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{4 \cdot G \cdot A^{*2}} \int_S \frac{dS}{t}. \tag{4.35}$$

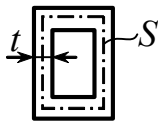


Рис. 4.34

$\int_S \frac{dS}{t}$  – геометрическая характеристика сечения, зависит от закона изменения толщины по дуге контура (рис. 4.34).

$$\int_S \frac{dS}{t} = \sum_1^n \frac{\Delta S_i}{t_i}.$$

**Пример 8.** Дано:  $T, t, D = 2R, l$  и  $G$  (рис. 4.35). Эти параметры одинаковы для замкнутого и незамкнутого контуров. Определить  $\tau_{\max}, \varphi$ .

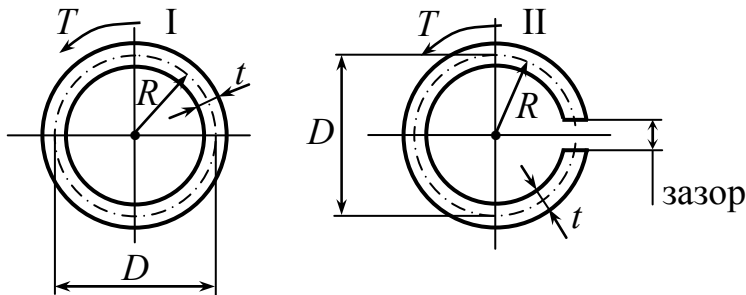


Рис. 4.35

$$\frac{\tau_{2\max}}{\tau_{1\max}}; \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Первый контур лучше сопротивляется скручиванию, второй контур хуже.

Докажем это обстоятельство.

$$\tau_1 = \frac{T}{2A^* \cdot t} = \frac{T}{\frac{2\pi D^2}{4} t}; \quad \tau_2 = \frac{3T}{\pi D \cdot t^2}; \quad \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{D}{t};$$

$$\varphi_1 = \frac{T \cdot l \cdot \pi D}{4A^{*2} \cdot G \cdot t} = \frac{T \cdot l \cdot \pi D}{4 \left( \frac{\pi D^2}{4} \right)^2 \cdot G \cdot t}; \quad \varphi_2 = \frac{3T \cdot l}{G \pi D \cdot t^3};$$

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{3T \cdot l \pi^2 D^4 G t}{G \cdot \pi D t^3 T \cdot l \pi D \cdot 4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{D^2}{t^2}.$$

**Пример 9.** Кручение тонкостенного круглого вала.

Тонкостенный круглый вал (труба) передает крутящий момент (например, от авиационного двигателя на воздушный винт). Требуется определить напряжения в поперечном сечении вала (рис. 4.36, а). Проведем плоскость сечения  $\Pi$  перпендикулярно оси вала и рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 4.36, б).

Из условия осевой симметрии, учитывая малую толщину стенки, можно принять, что напряжения во всех точках поперечного сечения одинаковы. Строго говоря, такое предположение справедливо только при очень малой толщине стенки, но в практических расчетах его используют, если толщина стенки

$$t \leq 0,2R_{\text{ср}},$$

где  $R_{\text{ср}}$  – средний радиус сечения.

Внешние силы, приложенные к отсеченной части вала, сводятся только к крутящему моменту, и потому нормальные напряжения в поперечном сечении должны отсутствовать. Крутящий момент уравнивается касательными напряжениями, момент которых равен

$$\tau \cdot 2\pi R_{\text{ср}}^2 t = T_K.$$

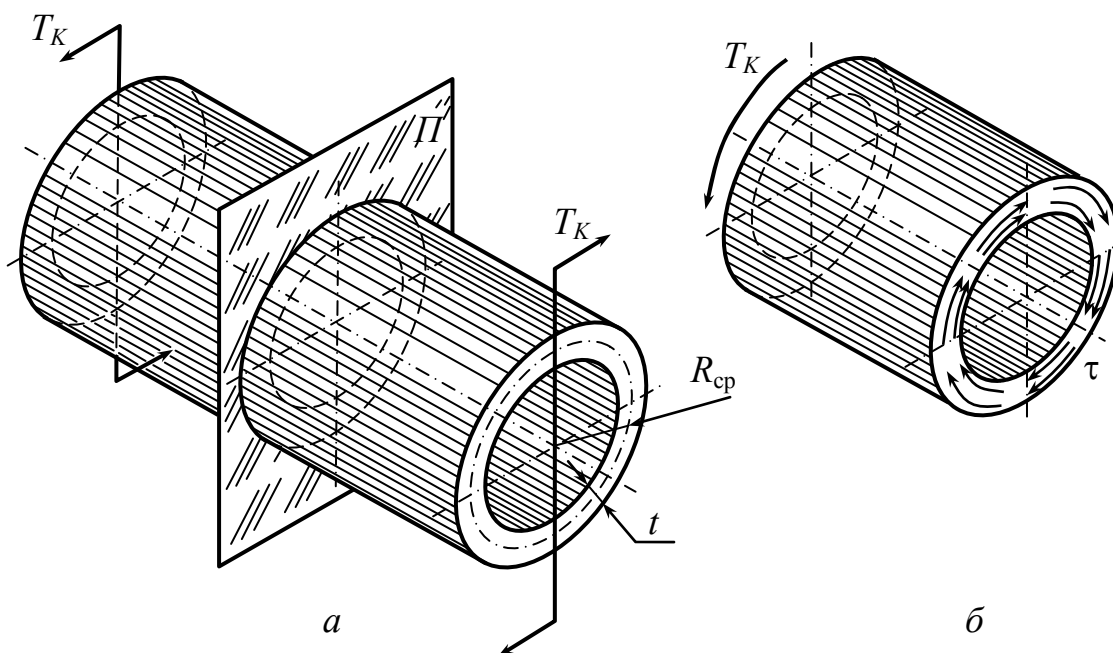


Рис. 4.36

Из последнего соотношения находим касательное напряжение в сечении вала:

$$\tau = \frac{T_K}{2\pi R_{cp}^2 t}.$$

**Пример 10.** Определить напряжения в тонкостенном цилиндрическом сосуде (трубе). В тонкостенном цилиндрическом сосуде действует давление  $p$  (рис. 4.37, а).

Проведем сечение плоскостью  $\Pi$ , перпендикулярной оси цилиндрической оболочки, и рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 4.37, б). Давление  $p$ , действующее на крышку сосуда, создает силу

$$F = \pi \left( R_{cp} - \frac{1}{2}t \right)^2 p \approx \pi R_{cp}^2 p.$$



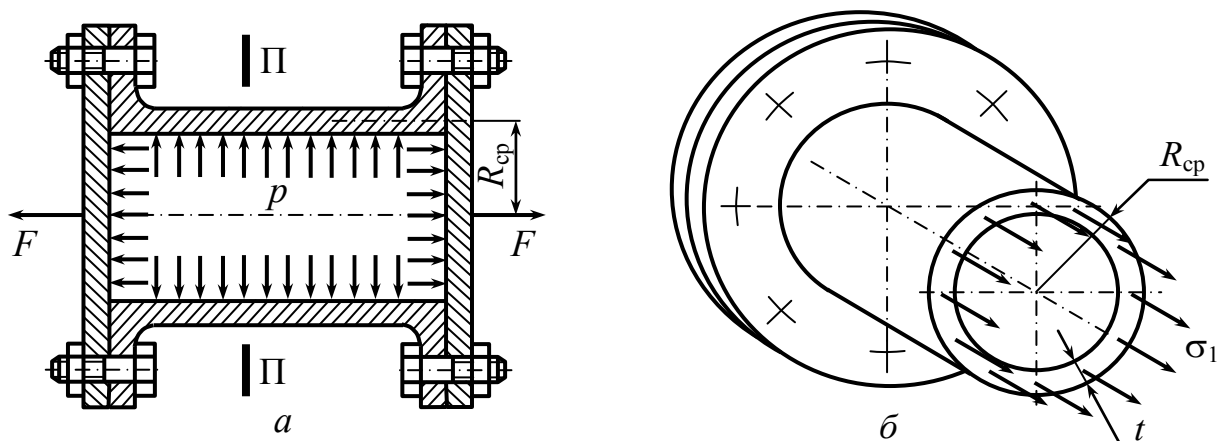


Рис. 4.37

Эта сила уравнивается силами, возникающими в поперечном сечении оболочки, и интенсивность указанных сил (напряжение  $\sigma_1$  в продольном направлении в стенке цилиндрической трубы) будет равна

$$\sigma_1 = \frac{F}{2\pi R_{cp}t} = \frac{\pi R_{cp}^2 p}{2\pi R_{cp}t} = p \frac{R_{cp}}{2t}. \quad (4.36)$$

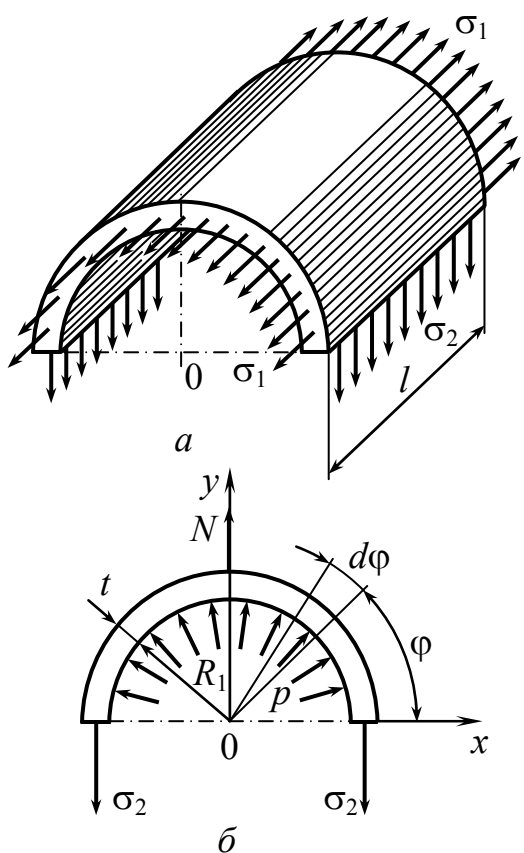


Рис. 4.38

Толщина оболочки  $t$  предполагается малой по сравнению со средним радиусом  $R_{cp}$ , напряжения  $\sigma_1$  считаются равномерно распределенными во всех точках поперечного сечения (рис. 4.38).

Однако на материал трубы действуют не только напряжения в продольном направлении, но и окружные (или кольцевые) напряжения в перпендикулярном направлении (рис. 4.38, б). Для их выявления выделим двумя сечениями кольцо длиной  $l$  (рис. 4.38, а), а затем проведем диаметрально сечение, отделяющее половину кольца.

На 4.38, *a* показаны напряжения на поверхностях сечения. На внутреннюю поверхность трубы радиусом  $R_1$  действует давление  $p$ .

Рассмотрим теперь равновесие половины кольца (4.38, *б*). Найдем сначала равнодействующую силу давления, спроектировав силы на вертикальную ось. К элементу поверхности  $lR_1d\varphi$  приложена сила

$$p l R_1 d\varphi \sin\varphi.$$

Интегрируя по всей поверхности, найдем вертикальную силу

$$N = \int_0^{\pi} p l R_1 \sin\varphi d\varphi = 2 p l R_1.$$

Из условия равновесия половины кольца получаем

$$2 l t \sigma_2 = N,$$

что дает следующее равенство:

$$\sigma_2 = p \frac{R_1}{t}.$$

В приближенных расчетах полагают  $R_1 \approx R_{\text{ср}}$ , и тогда

$$\sigma_2 = p \frac{R_{\text{ср}}}{t}. \quad (4.37)$$

Сопоставляя равенства (4.36) и (4.36), заключаем, что в тонкостенной цилиндрической оболочке окружные напряжения  $\sigma_2$  в два раза больше продольных.

На рис. 4.39 показан общий вид разрушения цилиндрической оболочки (трубы) от значительного внутреннего давления. Трещина возникает под действием растягивающих напряжений  $\sigma_2$ .

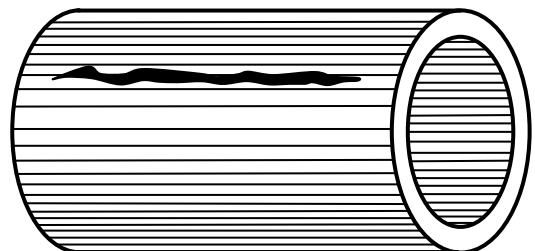


Рис. 4.39

## Контрольные вопросы

1. Какие напряжения возникают при сдвиге и как они распределены по сечению?
2. Как записывается условие прочности конструкции при сдвиге?
3. Как определяется допускаемое касательное напряжение?
4. Какое напряженное состояние называется чистым сдвигом?
5. Какие главные напряжения возникают при чистом сдвиге?
6. Как производится проверка прочности при чистом сдвиге?
7. Как выражается закон Гука при сдвиге?
8. Характеристикой каких свойств материала является модуль сдвига? Какая существует связь между упругими константами  $G$ ,  $E$  и  $\nu$ ?
9. Как вычисляется потенциальная энергия упругой деформации при сдвиге?
10. Какой вид нагружения называется кручением?
11. Какие задачи решаются в теории кручения?
12. Что называется крутящим моментом и как определяется его знак?
13. Запишите дифференциальную зависимость между крутящим моментом и интенсивностью распределенного крутящего момента.
14. Какие предположения лежат в основе теории кручения круглых валов?
15. По какому закону распределяются касательные напряжения в поперечных сечениях круглого вала в области упругих деформаций?
16. В каких точках поперечного сечения круглого вала возникают наибольшие касательные напряжения и как они определяются?
17. Что такое полярный момент инерции и полярный момент сопротивления? Как они вычисляются и какова размерность этих величин?

18. Как записывается условие прочности для круглого вала и какие задачи оно позволяет решать?
19. Какая выгода достигается при использовании полых валов?
20. По какой формуле определяется угол закручивания круглого вала при постоянном по длине крутящем моменте и неизменной жесткости поперечного сечения?
21. Как определяется жесткость круглого вала? Сравните жесткости стального и медного валов, имеющих одинаковые геометрические размеры, учитывая, что  $G_{ст} = G_{м}$ .
22. Какую величину называют жесткостью поперечного сечения круглого вала и какова ее размерность?
23. Как формулируется условие жесткости круглого вала?
24. Как определяется диаметр круглого вала?
25. Как должен изменяться диаметр вала, если передаваемая им мощность  $P$  остается постоянной без изменения, а угловая скорость  $\omega$  увеличивается?
26. Чему равна потенциальная энергия упругой деформации при кручении круглого вала?
27. Какое напряженное состояние возникает при кручении круглого вала? По каким площадкам действуют максимальные касательные напряжения и по каким – максимальные нормальные?
28. Объясните, почему разрушение круглого деревянного стержня при кручении происходит по продольным площадкам, а стального – по площадкам, совпадающим с поперечным сечением? Какие напряжения ответственны за разрушение в том и в другом случае?
29. Объясните, почему поверхность излома чугунного вала наклонена к оси под углом  $45^\circ$ ?
30. Каков порядок решения статически неопределимых задач при кручении?
31. Что происходит с сечениями валов некруглого сечения?

32. Разрешается ли задача распределения напряжений и деформаций по некруглому сечению методами сопротивления материалов?
33. Нарисуйте картину распределения касательных напряжений в поперечном прямоугольном сечении вала при кручении.
34. Запишите геометрические характеристики  $W_K$  и  $J_K$  для прямоугольного сечения стержня со сторонами  $a$  и  $b$ .
35. На чем основан метод мембранной пленочной аналогии?
36. Запишите формулы для определения максимальных касательных напряжений и полярного момента инерции для некруглых сечений, используя метод мембранной пленочной аналогии.
37. Какие вы знаете типы тонкостенных стержней некруглого сечения?
38. Запишите формулы определения максимальных касательных напряжений и углов закручивания для тонкостенных открытых стержней некруглого сечения.
39. Как определяются угол закручивания и наибольшие касательные напряжения для тонкостенного стержня некруглого сечения, профиль которого не разворачивается в прямоугольник?
40. Как распределяются касательные напряжения по ширине тонкостенного некруглого замкнутого профиля?
41. Запишите выражение для определения максимальных касательных напряжений при кручении тонкостенных некруглых замкнутых профилей.
42. Как определяется угол закручивания при кручении некруглых тонкостенных замкнутых профилей?
43. Как определяется геометрическая характеристика сечения?
44. Как определяются касательные напряжения при кручении тонкостенного круглого вала?
45. Как определяются напряжения в тонкостенном цилиндрическом сосуде (трубе)?

## Глава 5. Плоский прямой изгиб

*Ключевые слова*

*Изгиб, балка, внутренние силы, виды изгиба, напряжения, прочность, перемещения, жесткость.*

Под изгибом понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях возникают изгибающие моменты. Изгиб – вид деформации, характеризующийся искривлением оси стержня.

Внешние нагрузки пересекают ось стержня (балки) под прямым (или нет) углом. В сечениях возникают  $M$  – изгибающий момент,  $Q$  – изгибающий момент,  $N$  – нормальная сила.

$$\left. \begin{array}{l} M_{\text{изг}} \\ Q = 0 \\ N = 0 \end{array} \right\} - \text{чистый изгиб.} \quad \left. \begin{array}{l} M \neq 0 \\ Q \neq 0 \end{array} \right\} - \text{поперечный изгиб.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \neq M \\ 0 \neq N \end{array} \right\} - \text{изгиб совместно с растяжением или сжатием, чистый.}$$

$$\left. \begin{array}{l} N \neq 0 \\ M \neq 0 \\ Q \neq 0 \end{array} \right\} - \text{поперечный изгиб с растяжением или сжатием.}$$

Основная задача теории изгиба: определение напряжений и расчет на прочность; определение перемещения и расчет на жесткость.

### 5.1. Типы опор балок и определение опорных реакций

*Ключевые слова*

*Виды опор, статически определимые, неопределимые балки.*

Балка – стержень, работающий в основном на изгиб. Рассмотрим типы опор, которые применяются в технике для закрепления балок.

1. Шарнирно-подвижная опора (рис. 5.1).  
Ограничены перемещения, перпендикулярные оси.

Не воспрепятствованы перемещения вдоль оси и повороты опорного сечения.

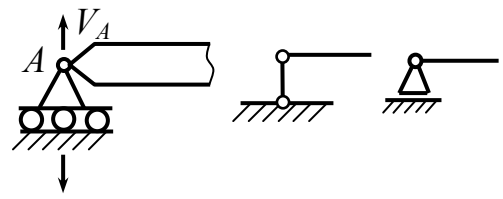


Рис. 5.1

2. Шарнирно-неподвижная опора (рис. 5.2).

Воспрепятствованы перемещения опорного сечения.

Не воспрепятствован поворот поперечного сечения.

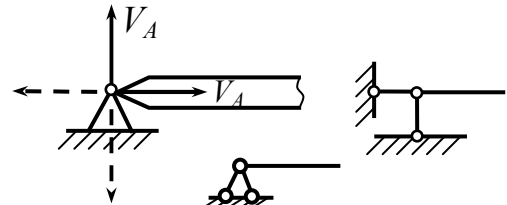


Рис. 5.2

3. Защемляющая опора, неподвижная, жесткая заделка (рис. 5.3).

Опорное сечение неподвижно.

глубина заделки, величина сколь угодно малая.

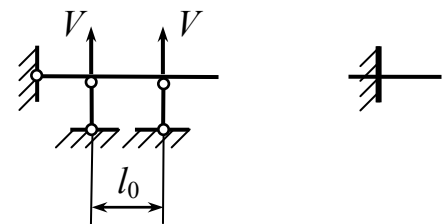
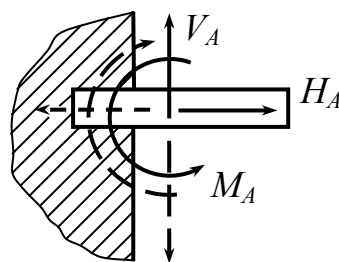


Рис. 5.3

4. Защемленная подвижная опора (скользящая заделка), допускает только поступательное перемещение (рис. 5.4).

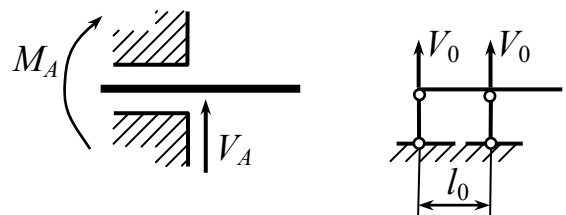


Рис. 5.4

Статически определимые балки (рис. 5.5).

Перемещения возможны за счет деформаций, балки геометрически неизменны.

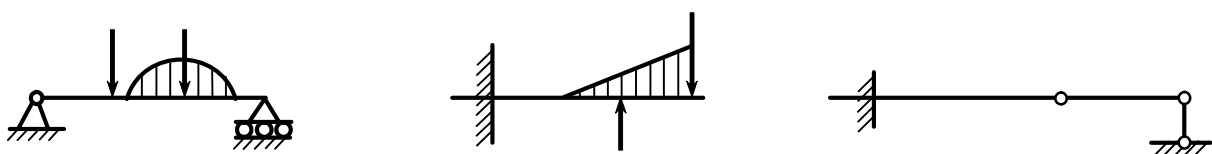


Рис. 5.5

Статически неопределимые балки (рис. 5.6).

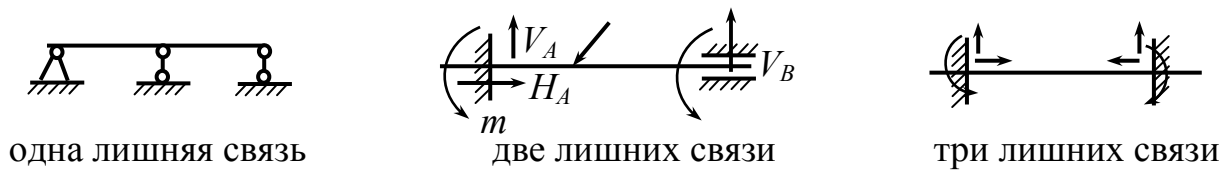


Рис. 5.6

В начале рассматриваются статически определимые балки. В этом случае для определения реакции опор достаточно уравнений равновесия статики.

**Пример:** Определить реакции в опорах (рис. 5.7).

В точке  $C$  расположен шарнир, по которому разобьем балку на две балки (рис. 5.8).

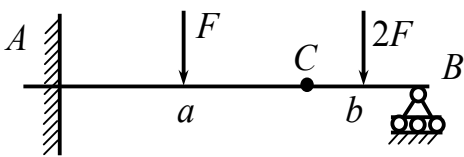


Рис. 5.7

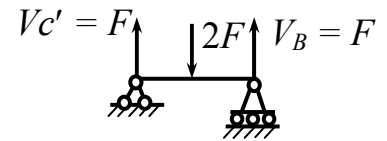
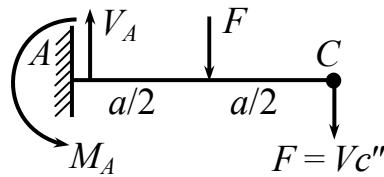


Рис. 5.8

$$\sum Y = 0; \quad V_A - F - F = 0; \quad V_A = 2F.$$

$$\sum \text{mom}_A = -F \cdot a - F \cdot \frac{a}{2} + M_A = 0; \quad M_A = 1,5F \cdot a.$$



## 5.2. Виды нагрузок

*Ключевые слова*

*Распределенные нагрузки, интенсивность, размерность, равнодействующая нагрузка, сосредоточенные силы, сосредоточенные распределенные пары сил.*

1. Распределенные по длине нагрузки (рис. 5.9).

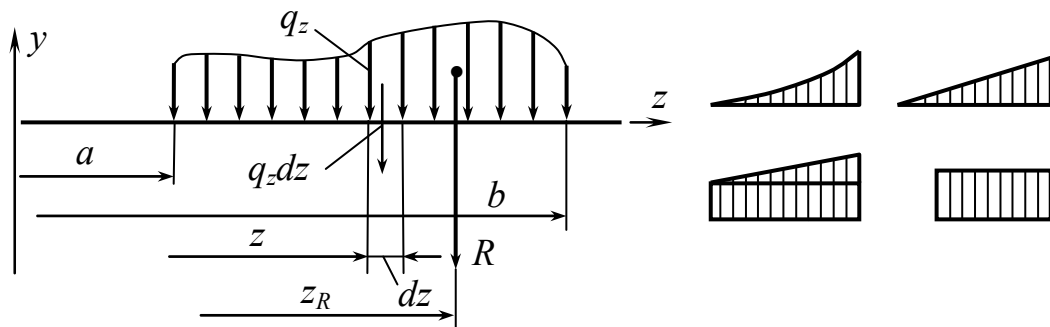


Рис. 5.9

Интенсивность:  $q_z = q(z)$ . Размерность  $\left[ \frac{\text{сила}}{\text{длина}} \right] \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ .

Равнодействующая:  $R = \int_a^b q_z \cdot dz$ ; ее координата:

$$z_R = \frac{\int_a^b z(q_z \cdot dz)}{\int_a^b q_z \cdot dz}.$$

$$\frac{q_z}{q} = \frac{z-a}{b-a}; \quad q_z = \frac{z-a}{b-a} \cdot q;$$

$$R_z = \frac{1}{2} q_z \cdot (z-a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(z-a)^2}{(z-b)} \cdot q;$$

$$R = \frac{1}{2} q(b-a) \quad (\text{рис.5.10}).$$

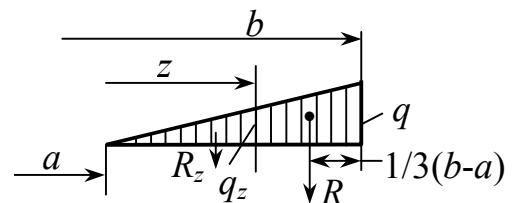


Рис. 5.10

$$R = q \cdot (b - a) \quad (\text{рис.5.11}).$$

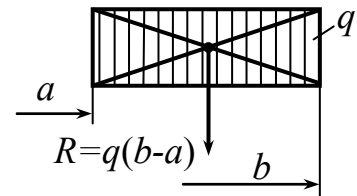


Рис. 5.11

$$R_1 = q_a \cdot (b - a);$$

$$R_2 = \frac{1}{2}(q_b - q_a)(b - a) \quad (\text{рис.5.12}).$$

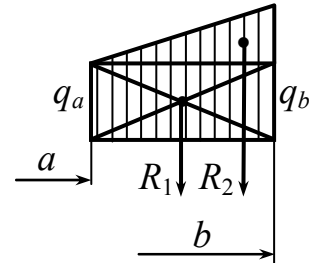


Рис. 5.12

## 2. Сосредоточенные нагрузки (силы).

В действительности за сосредоточенную силу принимается равнодействующая нагрузка, действующая на малой площадке и обладающая большой интенсивностью (рис.5.13). Условно считают сосредоточенную силу, приложенную в точке.

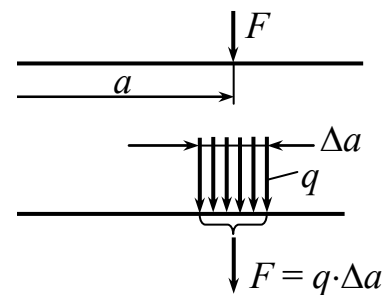


Рис. 5.13

## 3. Сосредоточенные пары (рис. 5.14).

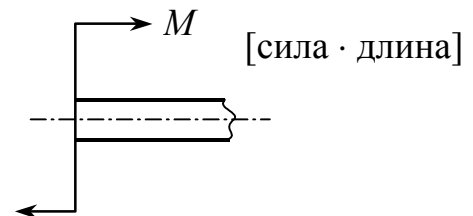


Рис. 5.14

## 4. Распределенные пары (рис. 5.15).

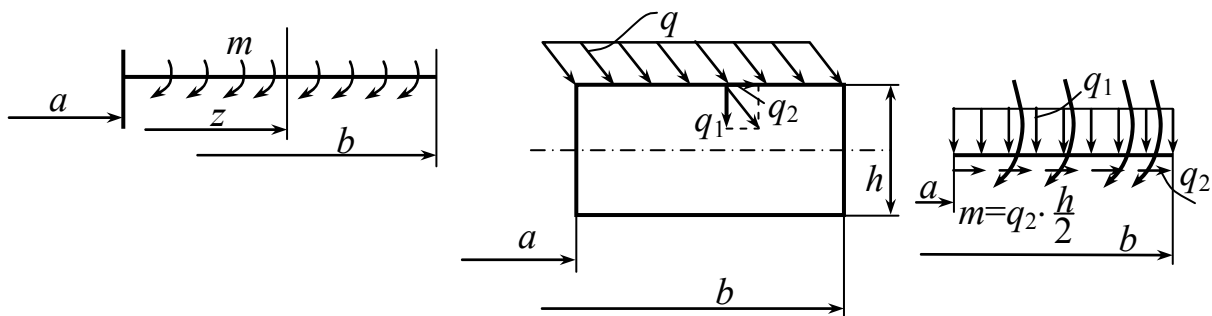


Рис. 5.15

### 5.3. Внутренние силовые факторы в сечении бруса при изгибе. Изгибающий момент, поперечная сила, нормальная сила. Правило знаков. Эпюры $M, Q, N$

*Ключевые слова*

*Сечение балки, силовые факторы, перерезывающая сила, изгибающий момент, нормальная сила, сжатые волокна, эпюры изгибающих моментов, перерезывающих и нормальных сил.*

Для определения напряжений в сечениях бруса и для определения деформаций необходимо знать, какие силовые факторы возникают в сечениях балки.

Возьмем произвольную балку (рис. 5.16).

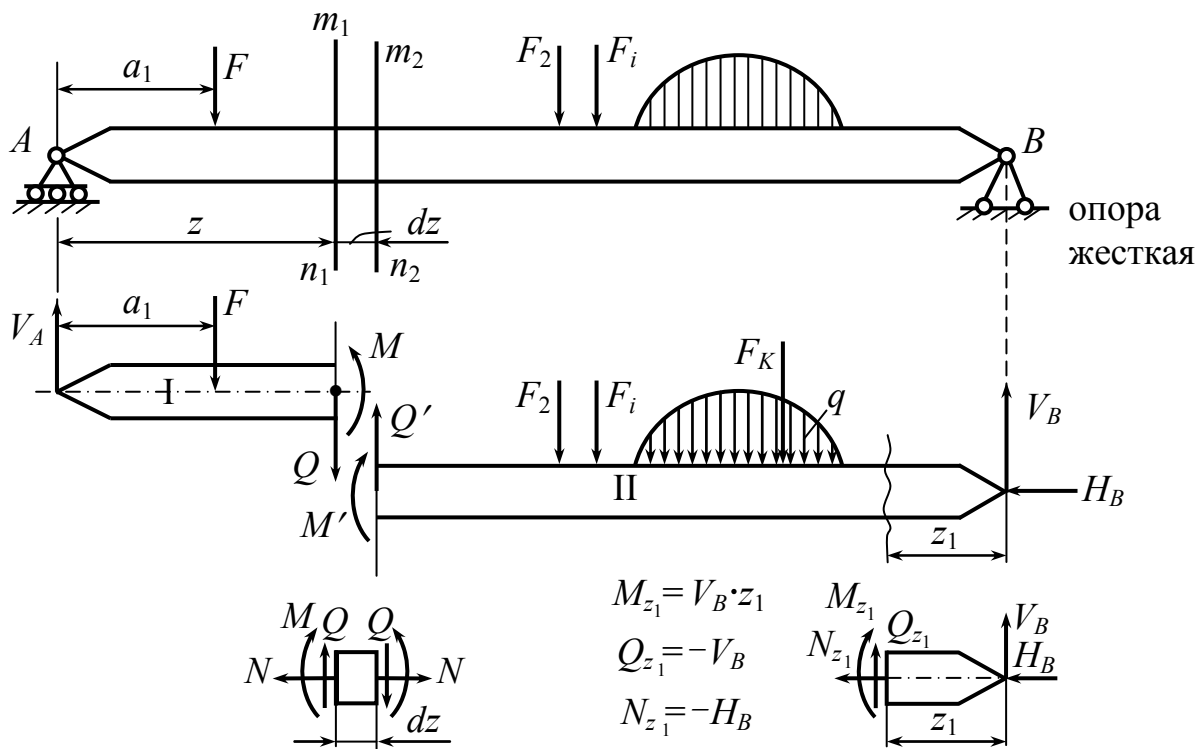


Рис. 5.16

Из условия равновесия I части

$$Q = V_A - F; \quad M = V_A \cdot z - F(z - a_1); \quad N = 0.$$

Запишем силы, приложенные к I (левой) части:  $Q$  – поперечная или перерезывающая сила;  $M$  – изгибающий момент.

Для правой части:  $\underbrace{Q' = -Q \quad M' = -M,}$

$\left. \begin{matrix} Q \\ M \end{matrix} \right\}$  эквивалентны силам, приложенным к левой (от сечения) части балки;

$\left. \begin{matrix} Q' \\ M' \end{matrix} \right\}$  эквивалентны силам, приложенным к правой (от сечения) части балки.

Перерезывающую силу, изгибающий момент (и нормальную силу, действующую в сечении) можно определить из рассмотрения любой части балки.

В теории изгиба оказывается удобным правило знаков в соответствии с направлением деформации.

#### 5.4. Правило знаков для поперечной или перерезывающей силы $Q$

*Ключевые слова*

*Положительная, отрицательная перерезывающая сила.*

Перерезывающая сила положительна, если алгебраическая сумма проекций от перпендикулярных к оси бруса сил, приложенных слева от сечения, направлена вверх или если алгебраическая сумма проекций от перпендикулярных к оси сил, приложенных справа от сечения, направлена вниз (рис. 5.17).

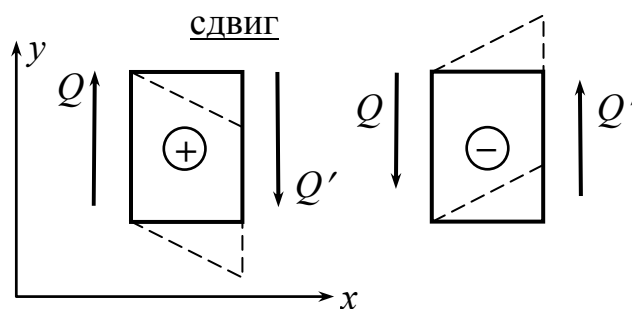


Рис. 5.17

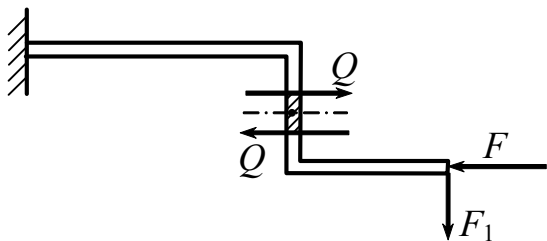


Рис. 5.18

Могут быть балки с ломаной осью. В этих случаях удобно считать следующее. Если перерезывающая сила стремится вращать элемент по часовой стрелке относительно его центра тяжести, она считается положительной (рис. 5.18).

### 5.5. Правило знаков изгибающего момента

*Ключевые слова*

*Изгибающий момент, ось бруса, поворот сечений, положительный, отрицательный изгибающий момент.*

Момент приводит к искривлению оси бруса и повороту сечений друг относительно друга (рис. 5.19).

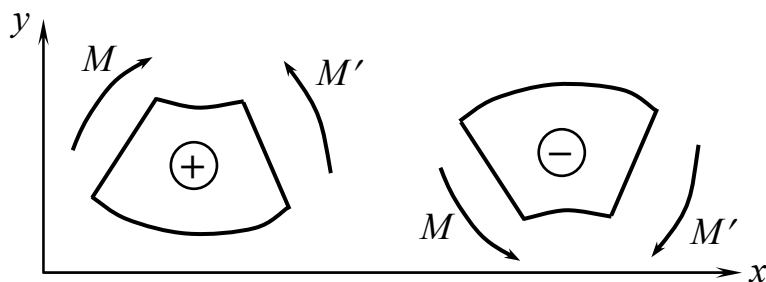


Рис. 5.19

Изгибающий момент положителен, если сумма моментов сил, действующих слева от сечения (относительно центра тяжести сечения), направлена по часовой стрелке, или если сумма моментов сил, приложенных справа от сечения балки, направлена против часовой стрелки.

### 5.6. Правило знаков для нормальной силы

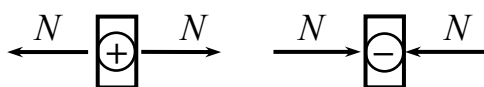


Рис. 5.20

Правило знаков показано на рис. 5.20.

## Примеры построения эюр $M$ , $Q$ , $N$

Ординаты эюры моментов построить в соответствии с правилом знаков, отложенных на стороне сжатых волокон (рис. 5.22), это обстоятельство соблюдается всегда, им можно пользоваться при построении эюр изгибающих моментов как правилом знаков.

1) Построить эюры  $M$  и  $Q$  для консольной балки (рис. 5.21).

$$Q_z = +F;$$

$$M_z = -F \cdot z; \quad M_l = -F \cdot l.$$

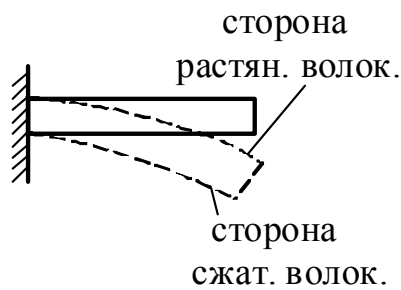


Рис. 5.22

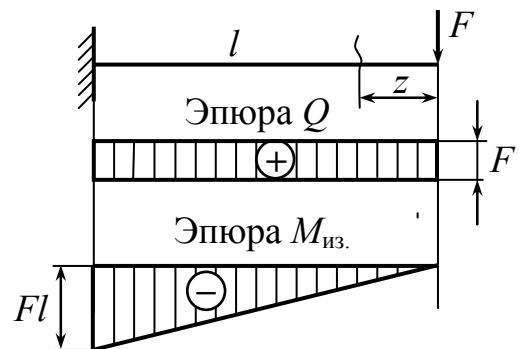


Рис. 5.21

2) Построить эюры  $M$  и  $Q$  для балки на рис. 5.23.

**I участок**  $0 \leq z_1 \leq a$

$$Q_{z_1} = V_A = F \frac{b}{a+b};$$

$$M_{z_1} = F \cdot \frac{b}{a+b} \cdot z_1;$$

$$M_{z_1=a} = F \cdot \frac{ab}{a+b}.$$

Граница между I и II участками (рис. 5.24).

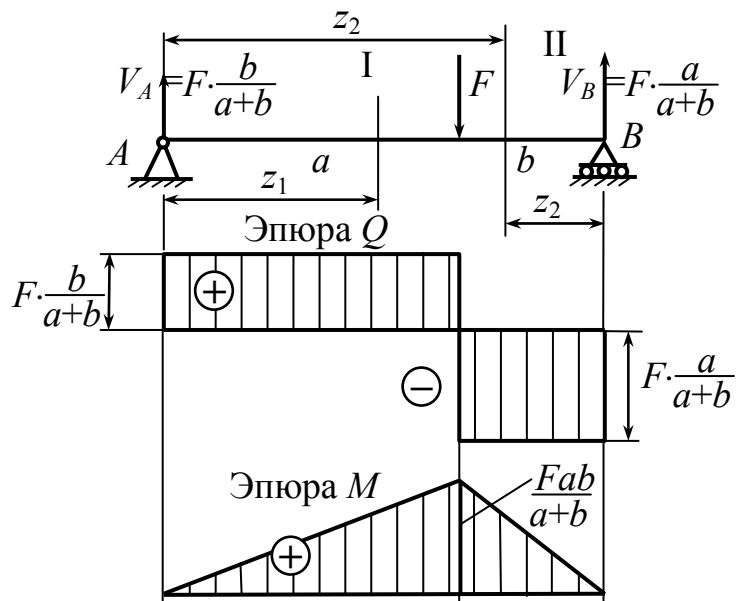


Рис. 5.23

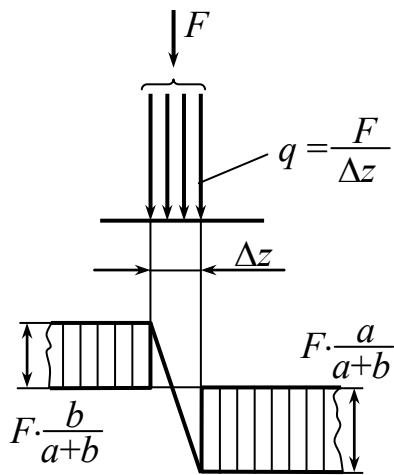


Рис. 5.24

II участок  $a \leq z_2 \leq b$

$$Q_{z_2} = F \frac{b}{a+b} - F = -F \frac{a}{a+b};$$

$$M_{z_2} = F \cdot \frac{a}{a+b} \cdot z_2; \quad M_{z_2=b} = F \cdot \frac{ab}{a+b}.$$

3) Построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для изогнутой балки (рис. 5.25).

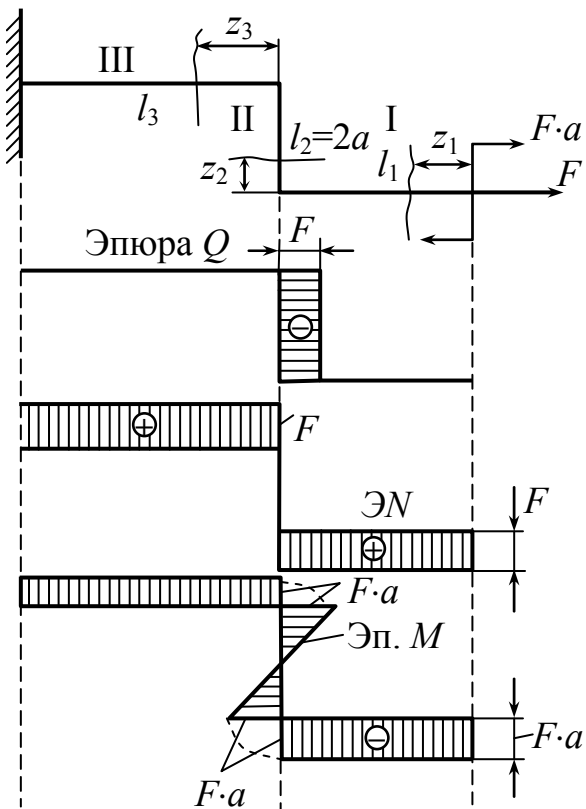


Рис. 5.25

I.  $0 \leq z_1 \leq l_1$

$$Q_{z_1} = 0; \quad N_{z_1} = F; \quad M_{z_1} = -F \cdot a.$$

II.  $0 \leq z_2 \leq l_2$

$$Q_{z_2} = -F; \quad N_{z_2} = 0;$$

$$M_{z_2} = Fa - F \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0 \quad M_{z_2} = Fa;$$

$$z = l_2 \quad M_{z_2} = Fa - Fl_2.$$

Пусть  $a = \frac{l_2}{2}$ , тогда

$$M_{z_2} = -\frac{Fl_2}{2} = -F \cdot a.$$

III.  $0 \leq z_3 \leq l_3$

$$Q_{z_3} = 0; \quad N_{z_3} = F;$$

$$M_{z_3} = Fl_2 - Fa = Fa \left( a = \frac{1}{2} \right).$$

4) Построить эпюры  $M$  и  $Q$  для балки на рис. 5.26.

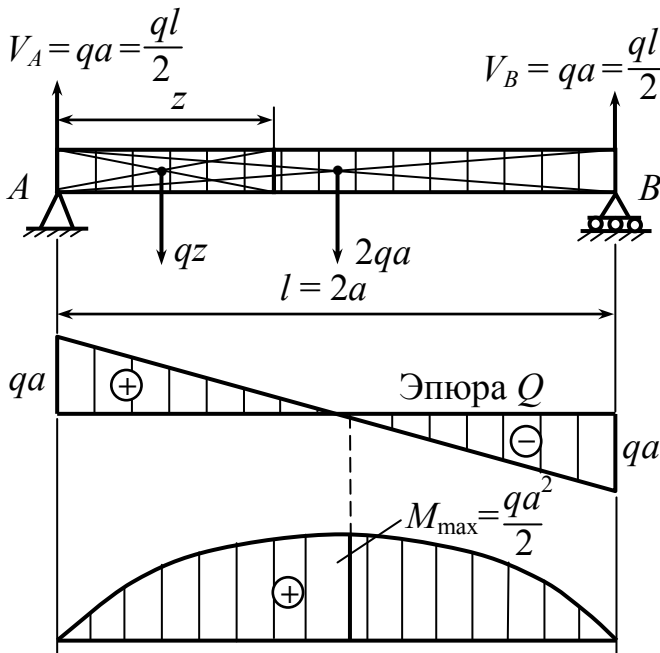


Рис. 5.26

$$Q_z = V_A - qz = qa - qz = q(a - z);$$

$$Q_{z=0} = qa; \quad q_{z=l=2a} = -qa.$$

$$M_z = V_A \cdot z - qz \cdot \frac{z}{2} =$$

$$= qaz - \frac{qz^2}{2} = \frac{qz^2}{2} \left( 2\frac{a}{z} - 1 \right).$$

$$M_{z=0} = 0; \quad (l = 2a).$$

$$M_{\max} = M_{z=\frac{l}{2}=a} = \frac{ql^2}{8} = \frac{qa^2}{2}.$$

5) Построить эпюры  $M$  и  $Q$  для балки на рис. 5.27.

$$Q_{z_2} = 0; \quad Q_{z_3} = F;$$

$$M_{z_1} = -Fz_1; \quad M_{z_3} = -Fz_3;$$

$$M_{z_2} = -F \cdot z_2 + V_A \cdot (z_2 - a) =$$

$$= -F \cdot z_2 + Fz_2 - Fa = -Fa;$$

$$M_{z_2} = Fa = \text{const};$$

$$\underbrace{Q = 0; \quad M = \text{const.}}_{\text{Чистый изгиб}}$$

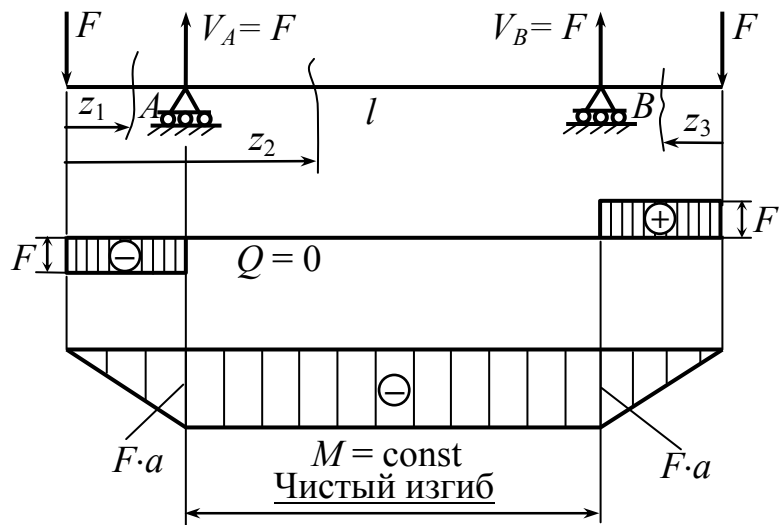


Рис. 5.27



## 5.7. Дифференциальные зависимости между $q$ , $Q$ , $M$

Ключевые слова

Дифференциальные зависимости, теория изгиба, эпюра внутренних сил.

Между сечениями 1-1 и 2-2 нет сосредоточенных нагрузок (рис. 5.28).

$$\sum Y = 0;$$

$$Q_z + q_z \cdot dz - (Q_z + dQ_z) = 0;$$

$$q_z = \frac{dQ_z}{dz}$$

(5.1)

$$\sum \text{Mom}_{0_2(F)} = 0;$$

$$-M_z - Q_z \cdot dz - \underbrace{q_z dz \cdot \frac{dz}{2}}_{\text{очень малая величина}} - M_z - dM_z = 0;$$

$$Q_z = \frac{dM_z}{dz} \quad (5.2)$$

$$q_z = \frac{dQ_z}{dz} = \frac{d^2 M_z}{dz^2} \quad (5.3)$$

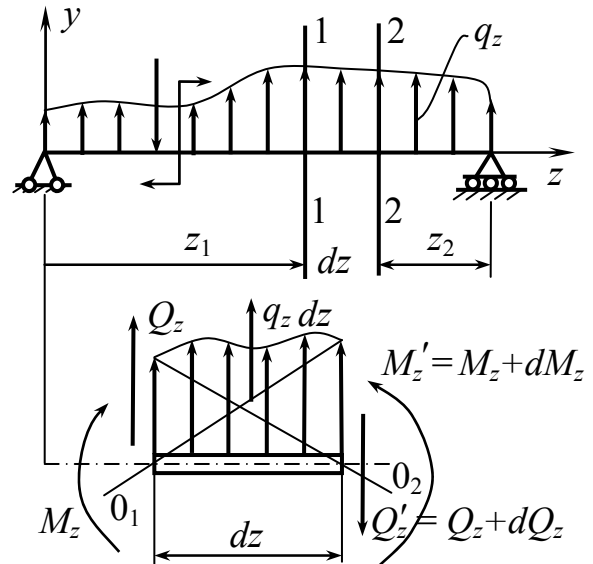


Рис. 5.28

(5.1, 5.2, 5.3) – дифференциальные зависимости  $q$ ,  $Q$ ,  $M$  при изгибе. Эти соотношения используются в теории изгиба и при построении эпюр  $M$  и  $Q$  – перерезывающих сил.

## 5.8. Определение нормальных напряжений при изгибе

*Ключевые слова*

*Чистый изгиб, ось симметрии, плоскость симметрии, изогнутая ось, уравнения равновесия, гипотеза Бернулли, нейтральный слой, плоские и перпендикулярные сечения к оси бруса, закон Гука, нейтральная линия, нормальные напряжения, закон распределения нормальных напряжений, радиус кривизны.*

Рассмотрим эту задачу применительно к чистому изгибу  $Q = 0$ ;  $N = 0$ ;  $M = \text{const}$  (рис. 5.29).

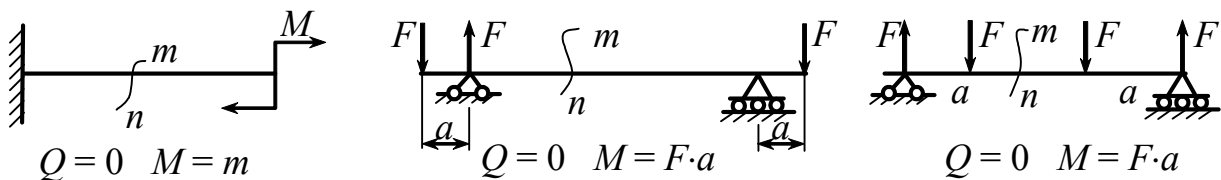


Рис. 5.29

Балка (рис. 5.30) имеет плоскость симметрии, сечения (рис. 5.31) имеют ось симметрии. Внешние силы действуют в этой плоскости симметрии ( $zOy$ ). Изогнутая ось балки будет лежать в той же плоскости симметрии. Оси  $x$  и  $y$  проходят через центр тяжести сечения.

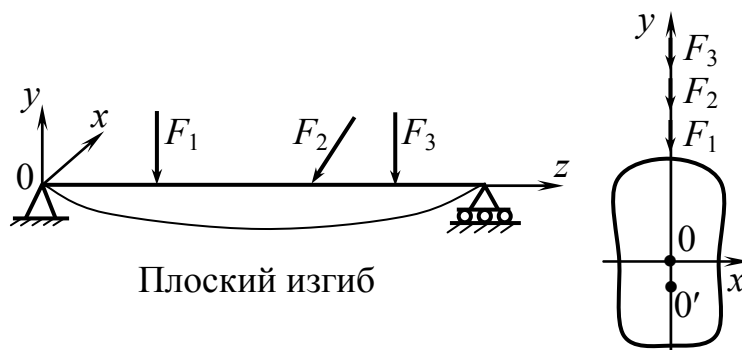


Рис. 5.30

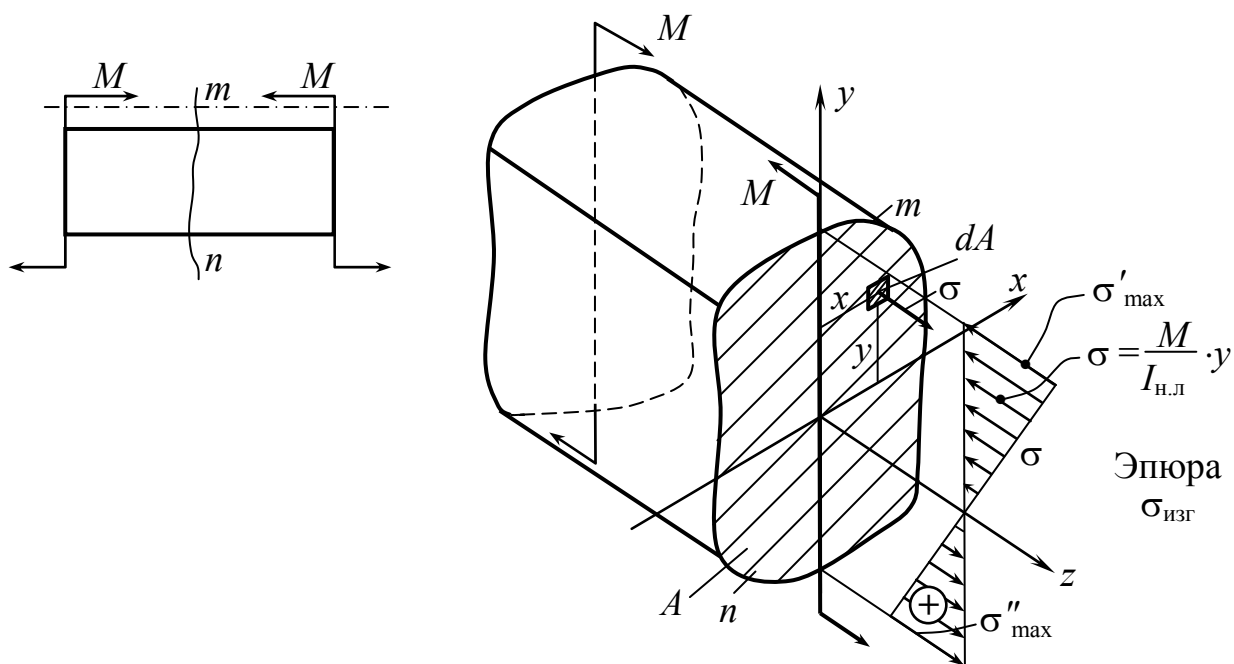


Рис. 5.31

### Статическая сторона задачи

По сечению должны действовать внутренние силы, уравнивающие внешний момент, для чистого изгиба это будут нормальные силы,  $\tau = 0$ , касательные напряжения, равные нулю, подтверждаются теоретически и экспериментально (см. ниже).

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad N = \int_A \sigma \cdot dA = 0; \quad (5.4)$$

$$\sum \text{Mom}_y(F) = 0 \quad \int_A \sigma \cdot x \cdot dA = 0; \quad (5.5)$$

$$\sum \text{Mom}_x(F) = M \quad \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = M; \quad (5.6)$$

Остальные 3 условия удовлетворяются тождественно.

### Геометрическая сторона задачи

Рассмотрим геометрическую сторону задачи, т.е. деформацию (для резинового бруса рис. 5.32).

## Гипотеза Я. Бернулли

В результате приложения изгибающего момента  $M$  сетка квадратов превращается в сетку прямоугольников, перекосов нет. В верхней части – укорочение, в нижней – удлинение. В средней части имеется линия, которая не укорачивается и не удлиняется. Поперечные линии,

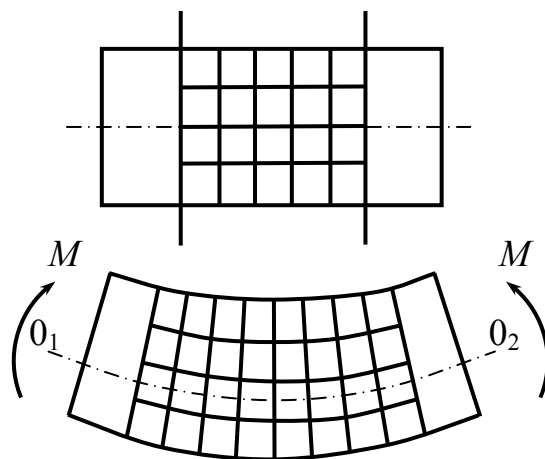


Рис. 5.32

не искривляясь, поворачиваются друг относительно друга на определенные углы. На этой основе, а также в согласии с результатами теоретических исследований методами теории упругости, картину деформации изгиба можно представить следующим образом:

1. Ось бруса искривляется, одна часть волокон удлиняется, другая – укорачивается, отсутствует взаимное надавливание продольных волокон балки.

2. Имеется нейтральный слой (до деформации плоский, после деформации – цилиндрический), в котором волокна не испытывают линейные деформации, нет удлинения и укорочения.

3. Поперечные сечения, не искривляясь, поворачиваются друг относительно друга на определенные углы или, как принято говорить, соблюдается “гипотеза плоских сечений” – сечения плоские и перпендикулярные оси бруса до деформации остаются плоскими и перпендикулярными к оси бруса в процессе и после деформации.

4. Пересечение нейтрального слоя с поперечным сечением образует нейтральную линию. Поворот сечений происходит вокруг нейтральной оси. Так как статический момент  $S_x = 0$ , то нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения.

При изгибе часть волокон испытывает растяжение, а часть – сжатие (рис. 5.33). Волокна нейтрального слоя не испытывают ни растяжения, ни сжатия. Сдвига нет при чистом изгибе, касательные напряжения равны нулю.

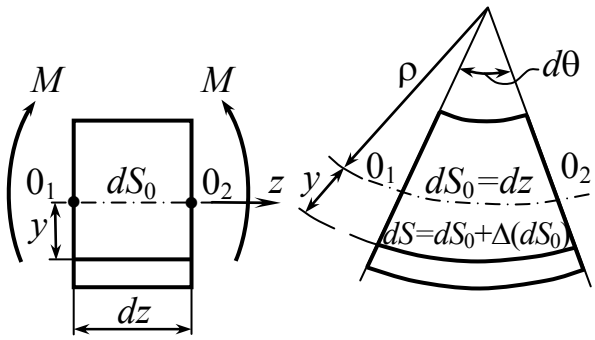


Рис. 5.33

$dS_0 = dz$  (нет удлинения).

$$\Delta(dS_0) = dS - dS_0 = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta.$$

$$\Delta(dS_0) = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta = y \cdot d\theta.$$

$\Delta(dS_0) = y \cdot d\theta$  – абсолютная линейная деформация волокна на расстоянии “ $y$ ” от нейтральной линии.

Относительная деформация этого же волокна равна:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta(dS_0)}{dS_0} = \frac{y \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta} = \frac{1}{\rho} \cdot y; \quad (5.7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{\rho} \cdot y.$$

### Физическая сторона задачи

Пренебрегая взаимным нажатием волокон друг на друга и считая, что существует простое растяжение и сжатие, по закону Гука имеем:

$$\sigma = \varepsilon_y \cdot E = E \cdot \frac{1}{\rho} \cdot y. \quad (5.8)$$

Подставляя (5.8) в (5.4–5.6), имеем:

$$E \cdot \frac{1}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0; \quad \int_A y \cdot dA = S_x = 0, \quad (5.9)$$

где  $S_x$  – статический момент,  $x$  – центральная ось.

Нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения (нейтральная линия – это есть и центральная ось).

$$E \cdot \frac{1}{\rho} \int_A y \cdot x \cdot dA = 0. \quad (5.10)$$

$$\int_A y \cdot x \cdot dA = I_{xy} = 0.$$

Центробежный момент инерции равен нулю, так как ось  $y$  – ось симметрии по условию.

$$E \cdot \frac{1}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = M, \quad (5.11)$$

где  $\int_A y^2 \cdot dA = I_x$  – осевой момент относительно оси  $x$ .

$$I_x \cdot E \cdot \frac{1}{\rho} = M; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_x}. \quad (5.12)$$

Подставляем (5.12) в (5.8) и получаем закон распределения нормальных напряжений по высоте сечения при чистом изгибе

$$\sigma = \frac{M}{I_x} \cdot y. \quad (5.13)$$

## 5.9. Проверка прочности при изгибе по нормальным напряжениям

*Ключевые слова*

*Симметричные, несимметричные сечения, осевой момент сопротивления, прочность при изгибе.*

Рассмотрим сечения симметричные и несимметричные (рис. 5.35) относительно оси  $x$ .

I. Сечения симметричные относительно оси  $x$  (рис. 5.34).

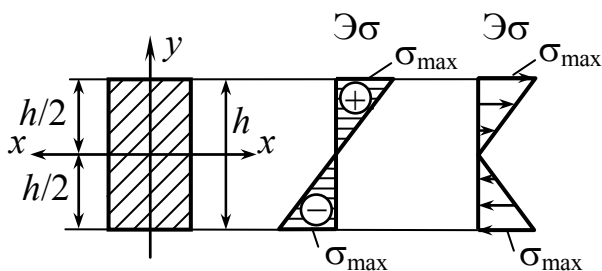


Рис. 5.34

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_{\text{н.л.}}} \cdot y_{\max} = \frac{M}{I_{\text{н.л.}}} \cdot \frac{h}{2};$$

$\frac{I_{\text{н.л.}}}{y_{\max}} = W_{\text{ос}}$  – осевой момент сопротивления изгибу;

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_{\text{ос}}}; \quad \sigma_{\max} = \frac{M}{W_{\text{ос}}} \leq [\sigma].$$

В случае материалов, сопротивляющихся растяжению и сжатию неодинаково, под  $[\sigma]$  понимают меньшее.

## II. Сечения несимметричные относительно оси $x$ (рис. 5.35).

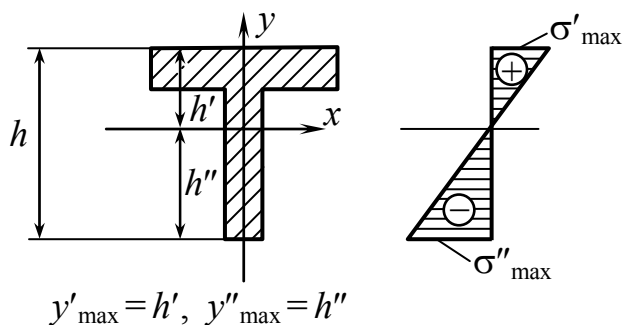


Рис. 5.35

$$\sigma'_{\max} = \frac{M}{I_{\text{н.л.}}} y'_{\max} = \frac{M}{\frac{I_{\text{н.л.}}}{y'_{\max}}} = \frac{M}{W'_{\text{ос}}};$$

$$\sigma''_{\max} = \frac{M}{I_{\text{н.л.}}} y''_{\max} = \frac{M}{\frac{I_{\text{н.л.}}}{y''_{\max}}} = \frac{M}{W''_{\text{ос}}}.$$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию при  $y'' > y'$ , то  $\sigma''_{\max} > \sigma'_{\max}$ .

Итак,  $\sigma''_{\max} = \frac{M}{W''_{\text{ос}}} \leq [\sigma]$ , при  $[\sigma_c] = [\sigma_p]$ . Если  $[\sigma_c] \neq [\sigma_p]$ ,

то приходится в этом случае проверять оба крайних волокна, причем, если это допустимо по конструктивным соображениям, сечение нужно ориентировать так, чтобы наибольшими были те напряжения, при которых материал лучше работает.

См. рис. 5.35 для тавра, если  $[\sigma_c] > [\sigma_p]$ , нужно, чтобы нижние волокна работали на растяжение при меньших напряжениях, поэтому данное сечение необходимо перевернуть вокруг оси  $x$  на  $180^\circ$ .

### 5.10. Рациональные сечения балок из пластичных материалов при изгибе

*Ключевые слова*

*Рациональность сечения, коэффициент, характеризующий степень рациональности сечения балки.*

$$\sigma = \frac{M}{W_{\text{ос}}} \leq [\sigma]; \quad M \leq [\sigma] \cdot W_{\text{ос}}.$$

Прочность определяется величиной момента сопротивления  $W_{\text{ос}}$ .

$W_{\text{ос}} = \eta \cdot [\text{длина}]^3$ , длина – линейный размер.

Вес;  $A = \eta \cdot [\text{мин.разм}]^2$ . Вес пропорционален  $A$ .

$K = \frac{W}{A}$  – характеризует эффективность, рациональность сечения, чем больше это отношение, тем лучше (рис. 5.36).

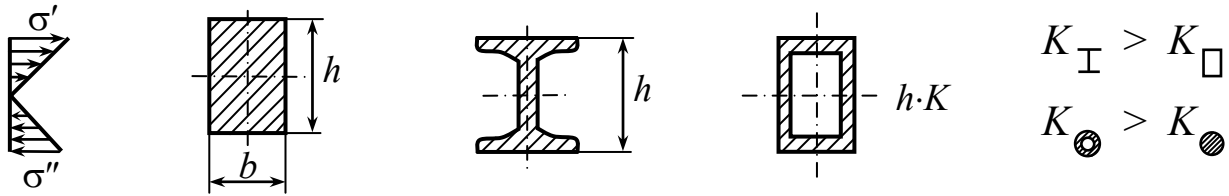


Рис. 5.36

Для прямоугольника  $\left[ \frac{W}{A} \right]_{\square} = \frac{bh^2}{bh} = \frac{1}{6} h \approx 0,17h; \quad K = 0,17,$

где  $K$  – коэффициент, характеризующий степень рациональности балки при изгибе.

### 5.11. Потенциальная энергия деформации при чистом изгибе

*Ключевые слова*

*Чистый изгиб, потенциальная энергия.*

Величина потенциальной энергии для элемента  $dz$  при изгибе (рис. 5.37) определяется по формуле

$$dW = dU = \frac{1}{2}(M + dM) \cdot d\theta = \frac{1}{2}M \cdot d\theta, \quad (5.14)$$

где  $d\theta = \frac{dS_0}{\rho} = dz \cdot \frac{1}{\rho}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}; \quad d\theta = \frac{M}{E \cdot I} \cdot dz.$

$$dW = dU = \frac{M^2 \cdot dz}{2E \cdot I};$$

$$U = \int_l \frac{M^2 \cdot dz}{2E \cdot I}, \quad (5.15)$$

где  $U$  – потенциальная энергия деформации при изгибе.



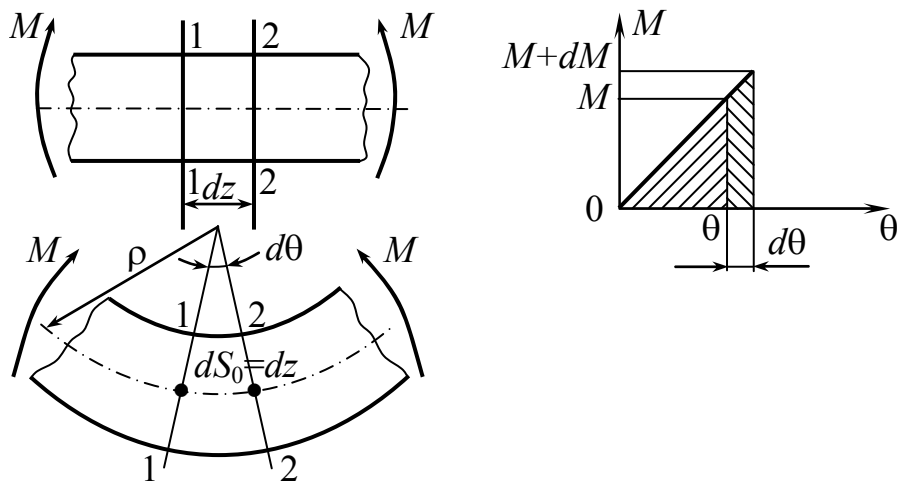


Рис. 5.37

В общем случае поперечного изгиба

$$M = M(z), \text{ тогда } U = \int_l \frac{M^2(z) \cdot dz}{2E \cdot I}, \quad I - \text{осевой момент инерции.}$$

### 5.12. Напряжения при поперечном изгибе

*Ключевые слова*

*Поперечный изгиб, нормальные касательные напряжения, угловые смещения, искажение плоскости поперечных сечений, надавливание между слоями.*

При поперечном изгибе возникают  $\sigma$  и  $\tau$  напряжения (рис. 5.38).

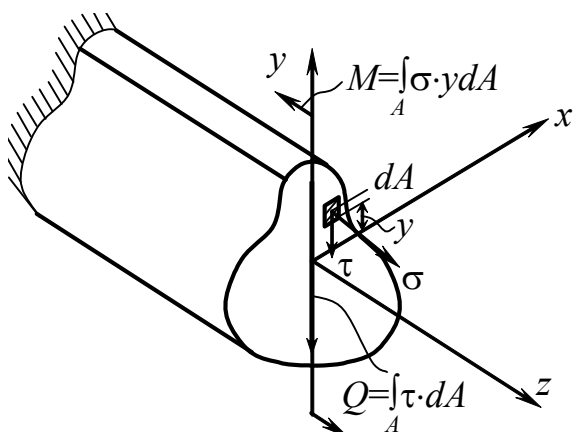


Рис. 5.38

$\tau$  сопровождается появлением угловых деформаций  $\gamma$ .  $dA$  — получает дополнительные угловые смещения, обусловленные сдвигом. Касательные напряжения распределены по высоте сечения неравномерно, поэтому неравномерно будут распределены и угловые смещения.

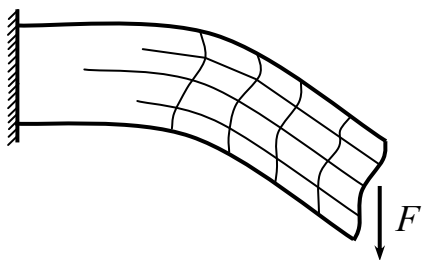


Рис. 5.39

В отличие от чистого изгиба поперечные сечения бруса не остаются плоскими (рис. 5.39). Однако на величине  $\sigma$  искажение плоскости поперечных сечений заметным образом не сказывается.

При  $Q = \text{const}$ ,  $\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x}$ ,  $\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{W_x}$ , искривление всех сечений

одинаково. При  $Q = \text{var}$  вдоль оси балки формулы для определения  $\sigma$  дают некоторую погрешность. Если величина отношения высоты сечения  $h$  к длине бруса  $l$  не оказывает влияния на величину этой погрешности, то величина  $h/l$  – мала по сравнению с 1, малой оказывается и указанная погрешность.

Все сказанное дает основание принять гипотезу плоских сечений и при поперечном изгибе.

Второй особенностью поперечного изгиба является наличие нормальных напряжений, возникающих в поперечных сечениях бруса, т.е. напряжений надавливания между слоями. Эти напряжения возникают только при  $Q = \text{var}$  и имеют весьма малую величину.

Таким образом, в пределах указанных пренебрежений формулы

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x}; \quad \sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x},$$

и формула, дающая зависимость кривизны от изгибающего момента справедлива, и при поперечном изгибе  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}$ .

### 5.13. Определение касательных напряжений при изгибе.

#### Формула Д. И. Журавского

*Ключевые слова*

*Парные касательные напряжения, равновесие верхней отсеченной части, текущая координата, статический момент части площади, перерезывающая сила, момент инерции, ширина сечения, касательные напряжения при поперечном изгибе.*

Определим величину  $\tau$  при поперечном изгибе. Вычислить эти напряжения проще всего через парные им касательные напряжения, возникающие в продольных сечениях бруса (рис. 5.40).

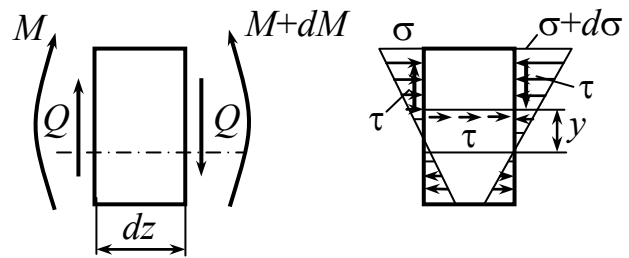


Рис. 5.40

$$M = \int_A \sigma \cdot y dA, \quad Q = \int_A \tau dA.$$

Выделим из бруса элемент длиной  $dz$  (рис. 5.41). Продольным горизонтальным сечением, проведенным на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя, разделим элемент на две части и рассмотрим условия равновесия верхней части.

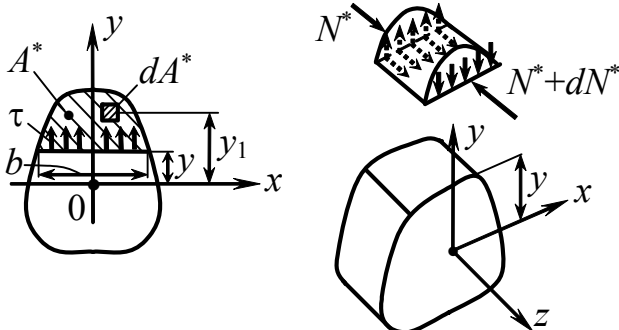


Рис. 5.41

$y_1$  – текущая координата площадки  $dA^*$ .

Слева 
$$N^* = \int_{A^*} \sigma dA^* = \frac{M}{I_x} \int_{A^*} y_1 dA^*,$$

где  $\int_{A^*} y_1 dA^*$  – статический момент

относительно оси  $x$  части площади, расположенной выше продольного сечения (выше уровня  $y$ ).

Обозначим его через  $S_x^*$ . Тогда нормальная сила  $N^*$  слева

$$N^* = \frac{M \cdot S_x^*}{I_x}.$$

В правом сечении нормальная сила будет другой:

$$N^* + dN^* = \frac{(M + dM) \cdot S_x^*}{I_x}.$$

Разность этих сил

$$dN^* = \frac{dM \cdot S_x^*}{I_x}$$

должна уравниваться касательными силами, возникающими в продольном сечении элемента.

При первом приближении касательные напряжения распределены равномерно по ширине  $b$

$$\frac{dM \cdot S_x^*}{I_x} = \tau \cdot b \cdot dz,$$

откуда

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^*}{I_x \cdot b} \text{ — формула Журавского,} \quad (5.16)$$

где  $Q$  – перерезывающая сила;  $I_x$  – момент (осевой) инерции сечения относительно нейтральной оси,  $b$  – ширина сечения на расстоянии “ $y$ ” от нейтральной оси (ширина сечения на том уровне, где определяются касательные напряжения).

Зависимость  $\tau$  от  $y$  в сечении определяется через статический момент  $S_x^*$  той части сечения, которая отстоит дальше от линии, на уровне которой определяются касательные напряжения.

**Пример:** Определить  $\tau$  в поперечном сечении балки (рис. 5.42).

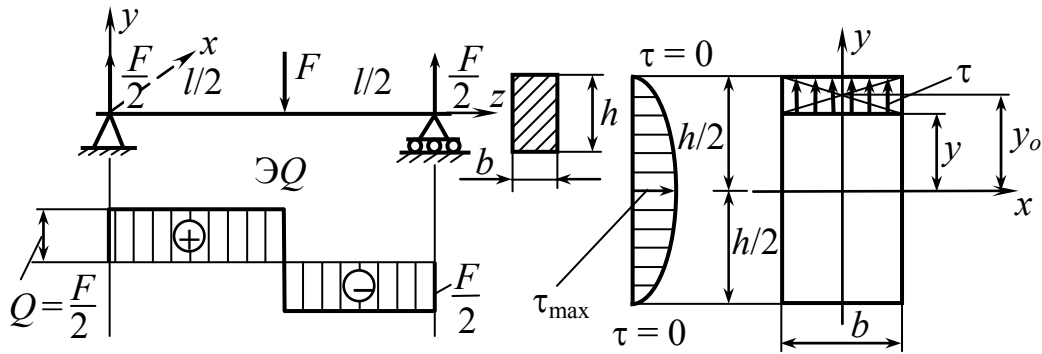


Рис. 5.42

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^*}{I_x \cdot b}; \quad S_x^* = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot y_0; \quad y_0 = y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} = \frac{h}{4} + \frac{y}{2};$$

$$S_x^* = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \left( \frac{h}{4} + \frac{y}{2} \right) = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \left( \frac{h}{2} + y \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{b \left( \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right)}{2};$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad \tau = \frac{12Q \cdot b \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{2b \cdot bh^3} = \frac{6Q}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right);$$

$$\tau_{\max} = \tau_{y=0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h}.$$

$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} \approx \frac{h}{l}$ , т.е.  $\tau$  существенно меньше  $\sigma$  для нетонкостенных балок.

В связи с малостью величины  $\tau_{\max}$  расчет на прочность при поперечном изгибе производится только по нормальным напряжениям, как при чистом изгибе.

## 5.14. Проверка прочности по касательным напряжениям при изгибе балок

*Ключевые слова*

*Допускаемое касательное напряжение, формула Журавского, соединительные элементы, нейтральная линия, изгибающие моменты, проверка прочности.*

Согласно формуле Журавского (5.16),

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}^*}{I_{\text{н.л.}} \cdot b_{\text{н.л.}}} \leq [\tau],$$

где  $[\tau] = (0,5 \div 0,6 \div 0,8) [\sigma]$ ;  $S_{\max}^*$  – статический момент полусечения; н.л. – нейтральная линия.

Для расчета соединительных элементов (рис. 5.43), болтов, заклепок необходимо рассчитать силу  $T$ .

$$dT = dN^* = \frac{dM}{I_x} \cdot S^* \quad T = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dM}{I_x} \cdot S^* = \frac{S^*}{I_x} \int_{z_1}^{z_2} dM.$$

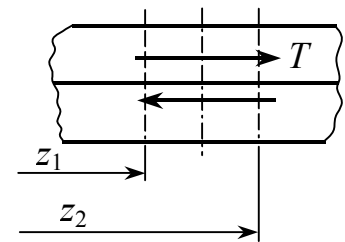


Рис. 5.43

$$T = \frac{S^*}{I_x} (M_2 - M_1), \quad (5.17)$$

где  $M_1, M_2$  – изгибающие моменты в сечениях  $z_1$  и  $z_2$ .

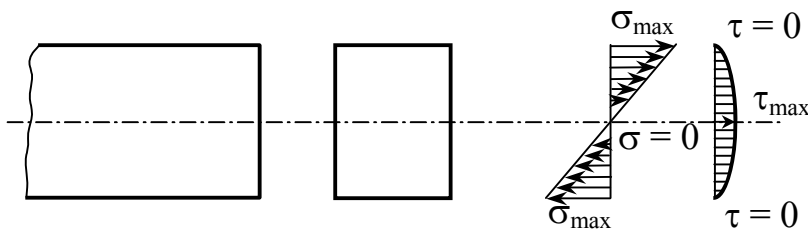


Рис. 5.44

Для балок сплошного, не тонкостенного сечения, обычного соотношения размеров и обычной схемы нагружения (рис. 5.44)

$$\tau_{\max} \ll \sigma_{\max}.$$

Проверка прочности по  $\tau$  не обязательна.

## 5.15. Распределение касательных напряжений при изгибе балок тонкостенного сечения (случай сечений с двумя осями симметрии)

*Ключевые слова*

*Касательные напряжения, тонкостенные сечения, толщина полки, стенки, перерезывающие силы, элемент полки, изгибающий момент, статический момент.*

Рассмотрим балку двутаврового сечения (рис. 5.45). Определим касательные напряжения в пределах вертикальной стенки.

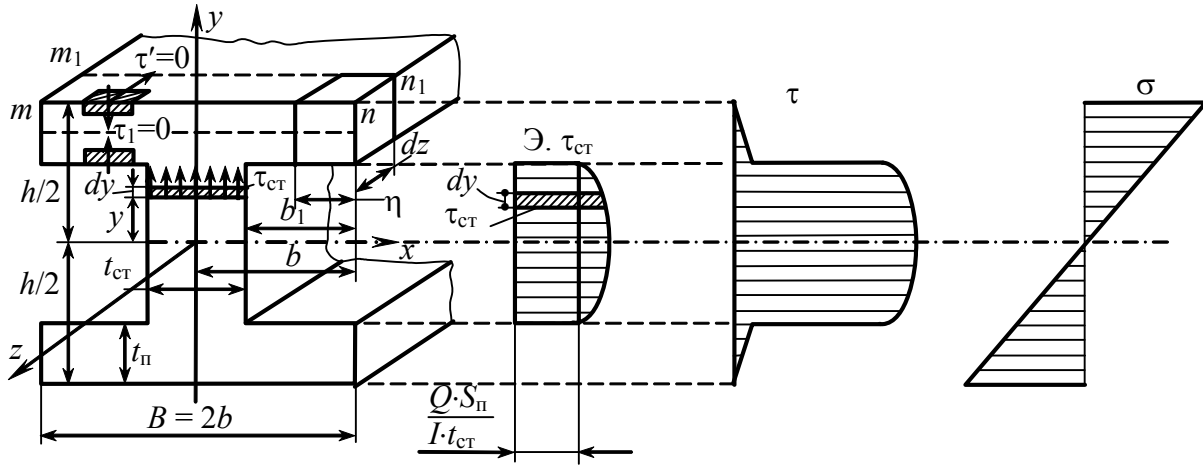


Рис. 5.45

$$\tau = \frac{Q \cdot S^*}{I_x \cdot b} = \frac{Q(S_{ст}^* + S_{п})}{I_x \cdot t_{ст}} = \frac{Q \cdot S_{п}}{I_x \cdot t_{ст}} + \frac{Q \cdot S_{ст}^*}{I_x \cdot t_{ст}},$$

где  $t_{п}$  – толщина полки,  $t_{ст}$  – толщина стенки.

Вертикальные силы, действующие на стенку:

$$Q_{ст} = \int_{A_{ст}} \tau_{ст} \cdot t_{ст} \cdot dy = t_{ст} \cdot 2 \int_0^{h/2} \tau_{ст} \cdot dy = t_{ст} \cdot A_{эпюры_{\tau_{ст}}}.$$

Оказывается, что  $Q_{ст} \approx Q$ , вертикальные силы – перерезывающие, почти полностью воспринимаются стенкой.

Определим касательные напряжения в полках. Для точек, лежащих у контурных линий полок, касательные напряжения не могут иметь составляющей, перпендикулярной к осевой линии полок, т.е. нет вертикальных  $\tau$ .

Во внутренних точках полок не возникает значительных касательных напряжений, направленных по нормали к осевой линии. Можно показать, что в пределах полок возникают касательные напряжения, действующие вдоль оси полок. Определим их значение в предположении, что по нормали к осевой линии полок  $\tau$  не изменяется по величине. Выделим элемент полки (рис. 5.46), как показано на чертеже. Эюра  $\tau_{\Pi}$  показана на рис. 5.47.

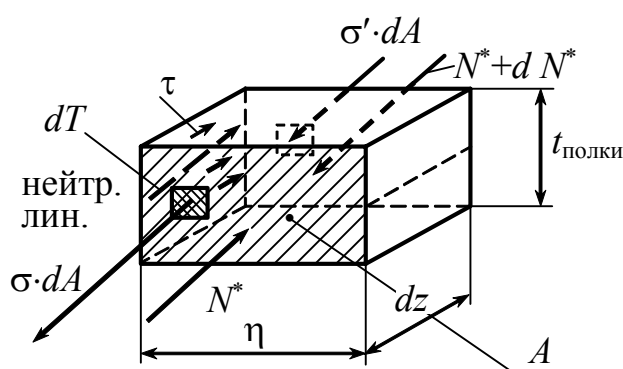


Рис. 5.46

Пусть в сечении  $m - n$  действуют  $M$  и  $Q$ ,

в  $m_1 - n_1$  —  $M + dM$  и  $Q$ ,

в  $m - n$  —  $\sigma$ ,

в  $m_1 - n_1$  —  $\sigma + d\sigma$ .

$$dN^* = dT.$$

$$dN^* = N'^* - N^* = \frac{M + dM}{I} \cdot S^* - \frac{M}{I} \cdot S^*.$$

$$dT = \tau \cdot t_{\Pi} \cdot dz. \quad \tau \cdot t_{\Pi} \cdot dz = \frac{dM}{I} \cdot S^*. \quad \tau = \frac{dM}{dz} \cdot \frac{S^*}{I \cdot t_{\Pi}}.$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S^*}{I \cdot t_{\Pi}}, \tag{5.18}$$



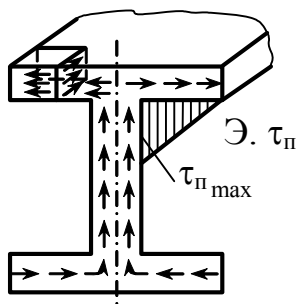


Рис. 5.47

где  $S^*$  – статический момент выделенной площади относительно нейтральной оси.

$$S^* = \eta \cdot t_{II} \cdot \frac{h - t_{II}}{2}. \quad \tau = \tau' = \frac{Q(h - t_{II})}{I \cdot 2} \cdot \eta. \quad (5.19)$$

$$\tau_{II\max} = \frac{Q(h - t_{II})}{2I} \cdot b_1.$$

## 5.16. Полная проверка прочности балки при изгибе по главным напряжениям

*Ключевые слова*

*Касательные, нормальные напряжения, внутренние силы, максимальные касательные и нормальные напряжения, проверка прочности по максимальным напряжениям, главные напряжения, теории прочности, проверка по теориям прочности.*

Сравним  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$  с допускаемыми напряжениями  $[\sigma]$  и  $[\tau]$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{oc}} \leq [\sigma], \quad (5.20)$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}^*}{I_{oc} \cdot b} \leq [\tau]. \quad (5.21)$$

Отдельная проверка по  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$  в некоторых случаях может оказаться недостаточной. Для сечений (рис. 5.48), в которых действуют  $M$  и  $Q$  (оба достаточно велики или наибольшие), определим, будет ли наиболее опасным напряженное состояние элемента, удаленного от нейтральной линии по сравнению с действием  $Q_{\max}$  и  $\tau_{\max}$  в отдельности, рассмотренных для элемента на нейтральной линии (рис. 5.49).

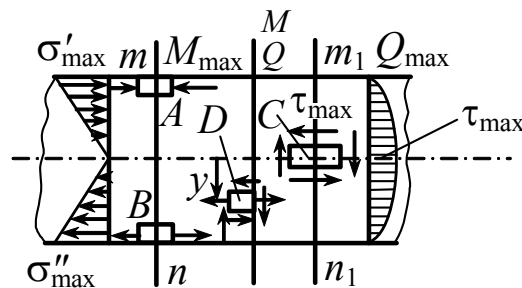


Рис. 5.48

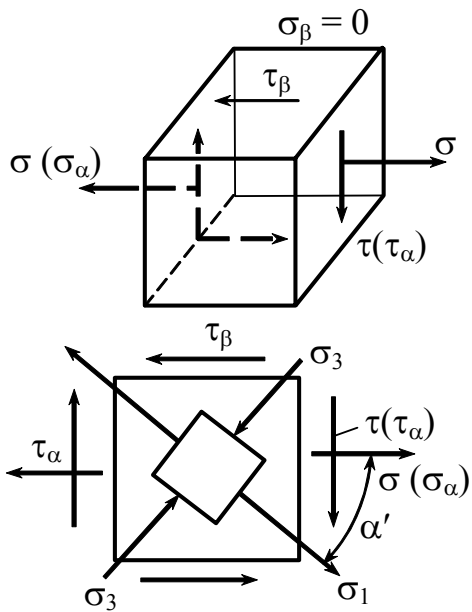


Рис. 5.49

$$\sigma_\alpha = \sigma = \frac{M \cdot y}{I_{oc}}$$

$$\tau_\alpha = \tau = \frac{Q \cdot S^*}{I \cdot b_y}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right]. \quad (5.22)$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} \left( \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right). \quad (5.23)$$

$$\sigma_2 = 0. \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Для проверки прочности используем 3-ю или 4-ю теории прочности.

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

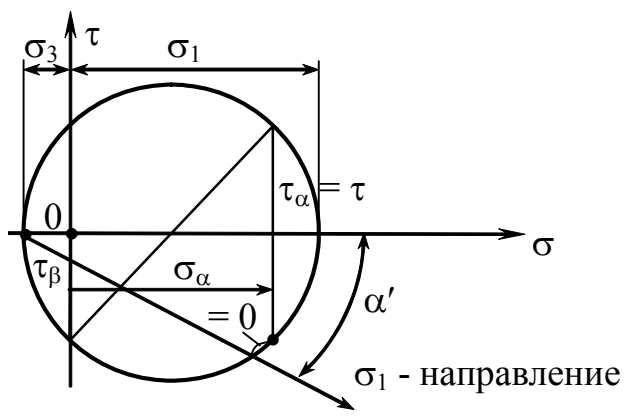


Рис. 5.50

Полная проверка прочности по главным напряжениям производится в сечениях, где  $M$  и  $Q$  одновременно достигают достаточно больших значений (или max). В таких сечениях следует производить полную проверку для точек, в которых  $\sigma$  и  $\tau$  одновременно достаточно большие. Анализ показывает, что для балок сплошного сечения ( $\boxtimes \textcircled{\text{O}}$ ) напряженное состояние промежуточных точек не является более опасным, чем у крайних волокон, в связи с этим нет необходимости в проверке прочности промежуточных точек.

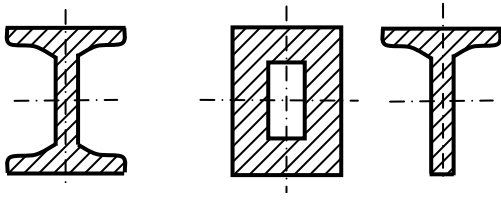


Рис. 5.51

Полная проверка прочности оказывается необходимой в случае балок с поперечными сечениями, имеющими резкие изменения ширины (рис. 5.51).

Для рассмотрения сечения, где  $Q$  и  $M$  – достаточно большие точки,  $r$  и  $S$  нуждаются в полной проверке прочности по главным напряжениям, здесь  $\tau$  и  $\sigma$  достаточно велики (рис. 5.52).

$$\tau_y = \frac{Q \cdot S_{\text{полки}}}{I \cdot b_{\text{ст}}}$$

$$\tau'_y = \frac{Q \cdot S_{\text{полки}}}{I \cdot b_{\text{п}}}$$

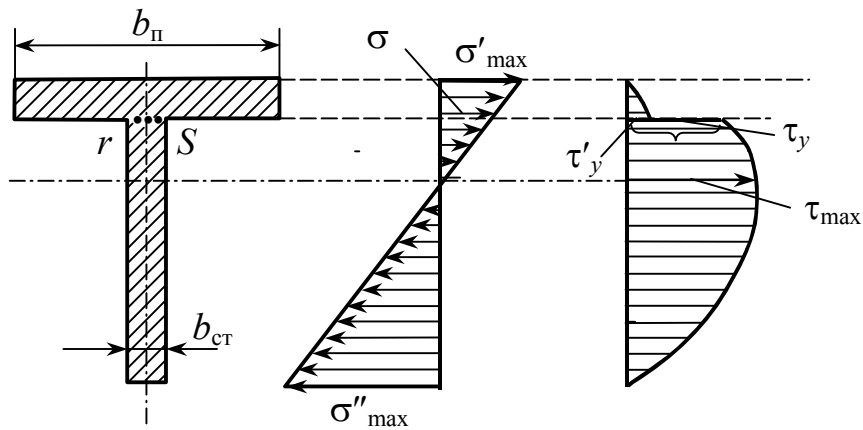


Рис. 5.52

## 5.17. Траектории главных напряжений

*Ключевые слова*

*Аналитические формулы, круги Мора, главные напряжения.*

По аналитическим формулам или с помощью круга Мора можно определить величину и направление главных напряжений (рис. 5.53).

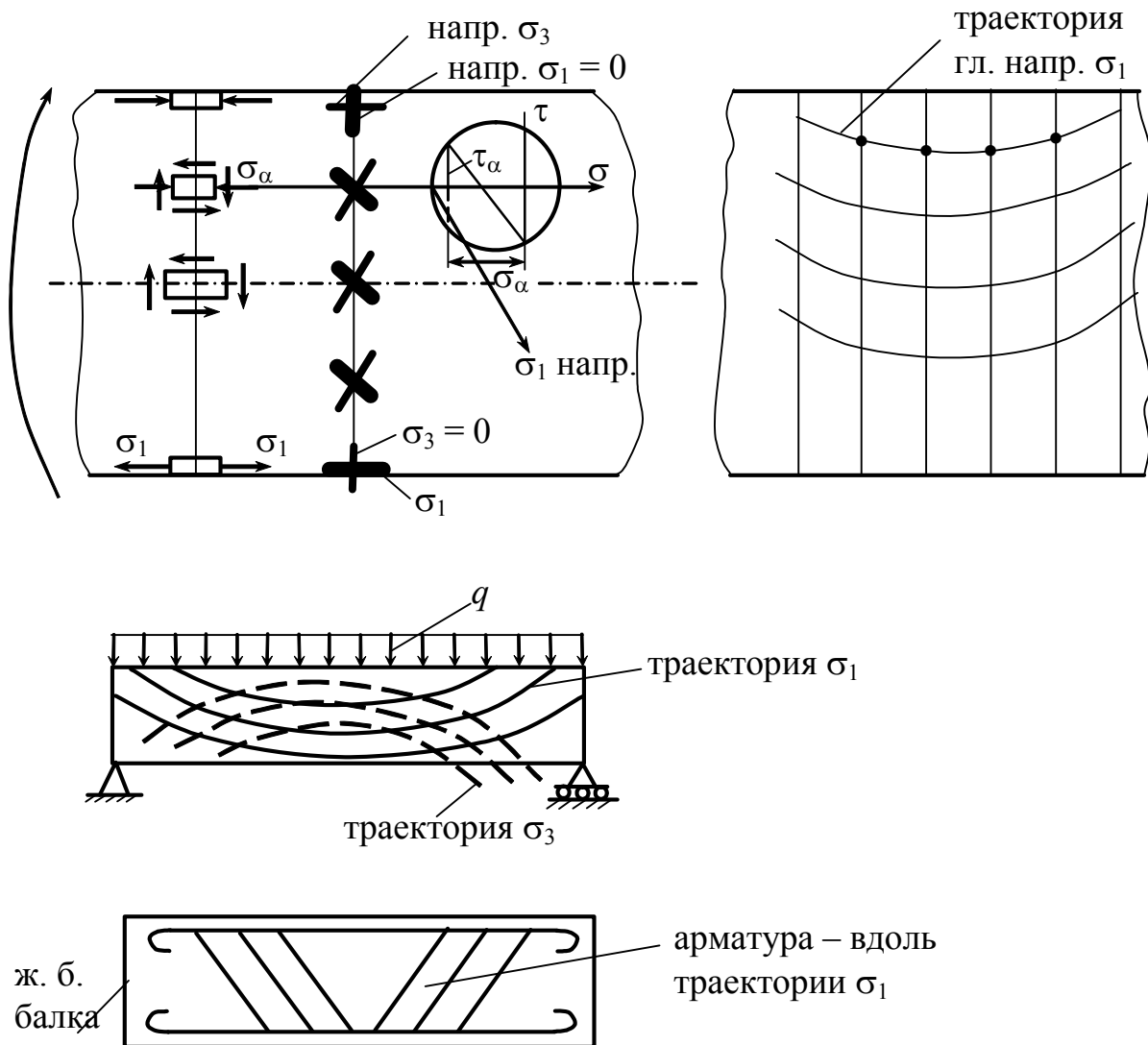


Рис. 5.53

## 5.18. Случай изгиба балок нагрузками, приложенными в главной плоскости, не являющейся плоскостью симметрии балки

*Ключевые слова*

*Изгиб балок, главная плоскость, ось симметрии, чистый изгиб, поперечный изгиб.*

Рассмотрим изгиб балки с главной плоскостью  $zOy$  (рис. 5.54), в которой действуют внешние нагрузки, причем  $zOy$  не является плоскостью симметрии балки;  $Oy$  и  $Ox$  – главные оси сечения;  $Oy$  не является осью симметрии сечения.

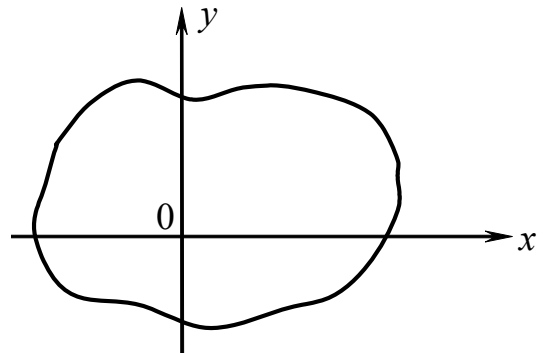


Рис. 5.54

1. Оказывается, в случае чистого изгиба (когда  $Q = 0$ )  $M$  действует в плоскости  $zOy$ . Изогнутая ось лежит в плоскости  $zOy$ , ось  $Ox$  является нейтральной осью, т.е. как и в случае симметричного относительно  $Oy$  сечения.

2. В случае поперечного изгиба ( $Q \neq 0, M \neq 0$ ) картина изгиба усложняется.

$$Q_\tau = \int_A \tau \cdot dA. \quad \underline{Q}_\tau = Q. \quad \underline{Q}_\tau \parallel Q, \text{ но } Q_\tau \text{ не проходит через линию}$$
 действия  $Q$ .

Рассмотрим этот вопрос, весьма сложный для общего случая произвольного сечения применительно к балкам тонкостенного сечения, где возможен анализ элементарными методами.

**5.19. Поперечный изгиб балок тонкостенного сечения  
нагрузками, приложенными в главной плоскости,  
не являющейся плоскостью симметрии балки.  
Центр изгиба балок тонкостенного сечения**

*Ключевые слова*

*Поперечный изгиб, тонкостенное сечение, главная плоскость, ось симметрии балки, центр изгиба балок тонкостенного сечения, стандартный профиль (швеллер), деформации изгиба и кручения, эксцентриситет.*

Рассмотрим этот вопрос применительно к балкам швеллерного сечения (рис. 5.55).

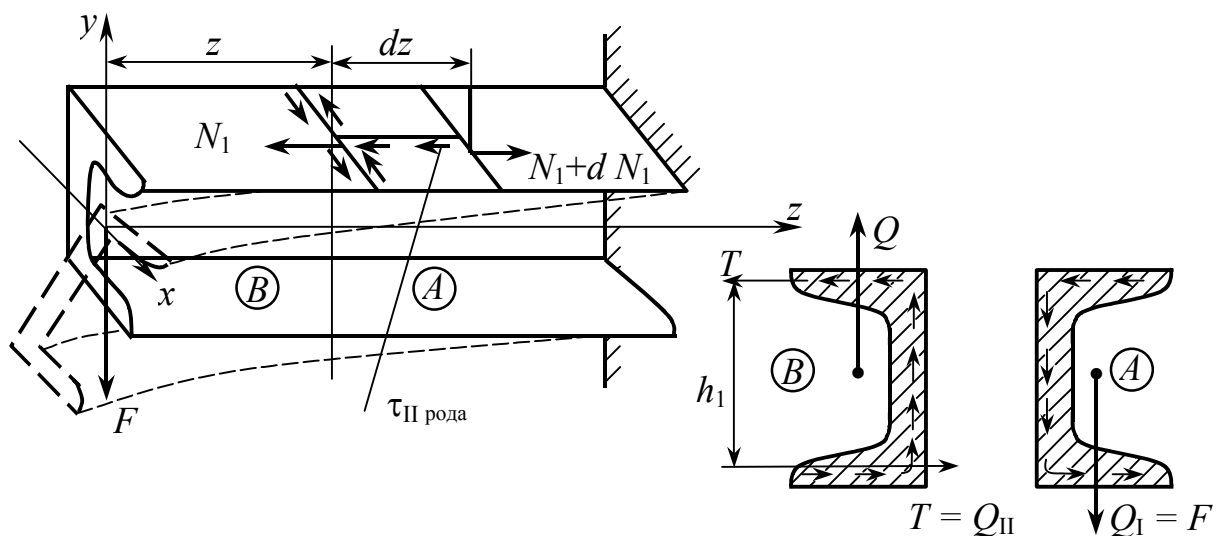


Рис. 5.55

Действие поперечной силы, приложенной в центре тяжести сечения балки (рис. 5.56), вызывает деформацию изгиба и кручения. Деформацию кручения вызывает момент внутренних сил, действующих в полках:

$$M = T \cdot h_1 - \text{это нежелательное явление.}$$

Силы нужно приложить так, чтобы этот момент отсутствовал.

Условие отсутствия деформации кручения запишется в виде

$$\overbrace{T \cdot h_1}^{\text{мом. внеш. сил}} = \overbrace{F \cdot e}^{\text{мом. внеш. сил}}$$

$$T = \frac{\tau_{\max}^{\text{II}} (B - t_{\text{CT}})}{2} = \frac{Q \cdot h_1 (B - t_{\text{CT}})^2}{4I_x}$$

$$h_1 = (h - t_{\text{ПОЛ}}). \quad F = Q.$$

$$e = \frac{T \cdot h_1}{F} = \frac{h (B - t_{\text{CT}})^2 (h - t_{\text{II}})}{4I_x}$$

$$e \cong \frac{h^2 \cdot B^2}{4 \cdot I_x}$$

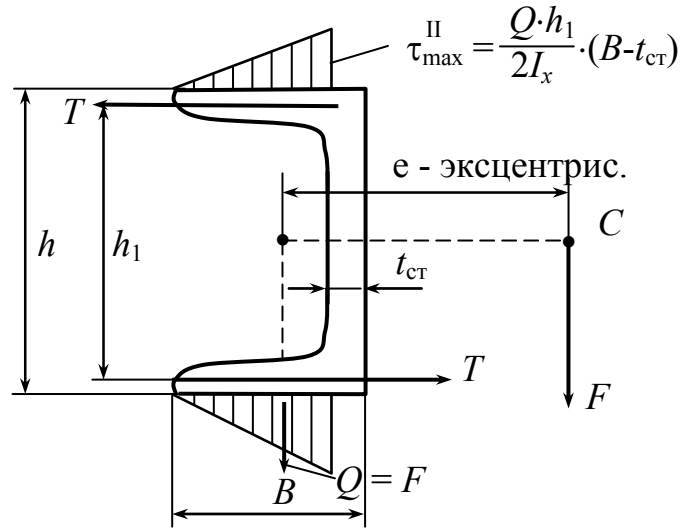


Рис. 5.56

Если поперечная сила будет приложена в плоскости, проходящей через центр изгиба, то изгиб будет плоский, деформация кручения возникать не будет.

## 5.20. Определение деформации при изгибе

*Ключевые слова*

*Изгиб, жесткость, деформации и перемещения, допускаемые деформации и перемещения, поворот поперечного сечения, прогиб, углы девиации, условие жесткости при изгибе, способы определения деформаций.*

Расчет на жесткость – определение деформаций и перемещений (рис. 5.57) и ограничение их величины допускаемыми деформациями и перемещениями. Упругая линия – это изогнутая ось балки.

$\theta$  – поворот поперечного сечения;

$V = V(z)$  – прогиб;

поперечное перемещение – прогиб;

$V = V(z)$  – эластика;

$\theta = \theta(z)$  – углы девиации;

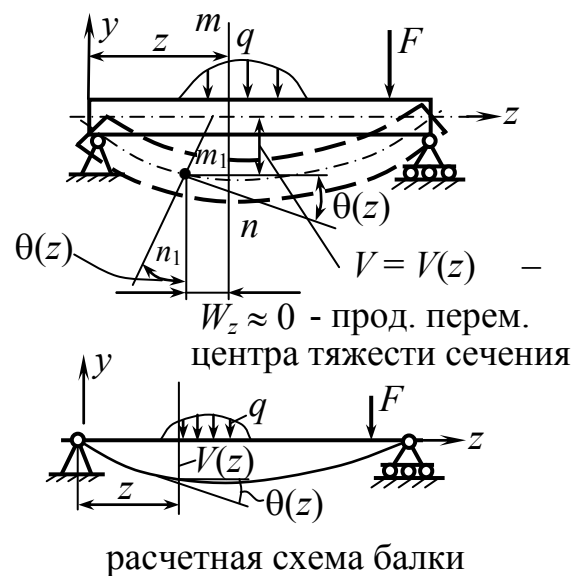


Рис. 5.57

$$\operatorname{tg}\theta \cong \theta = \frac{dV}{dz} = \frac{dy}{dz}.$$

$V_{\max} = f$  – стрела прогиба.

$\left\{ \begin{array}{l} V_{\max} = f \leq [f] \\ \theta_{\max} \leq [\theta] \end{array} \right\}$  – условие жесткости при изгибе.

$$[f] = \left( \frac{1}{500} \div \frac{1}{700} \right) \cdot l \quad \text{в машиностроении.}$$

$$[\theta] = \left( \frac{1}{25} \div \frac{1}{60} \right) \text{ радиан.}$$

1. Аналитический способ определения деформаций. Способ Эйлера.
2. Графоаналитический способ Графа, построение силового и веревочного многоугольника.
3. Методы потенциальной энергии.
4. Приближенный способ (разложение в ряд).

### 5.21. Аналитический способ определения упругой линии балки. Дифференциальное уравнение изогнутой линии оси балки Эйлера – Бернулли

*Ключевые слова*

*Чистый изгиб, кривизна кривой, жесткость при изгибе, радиус кривизны, поперечный изгиб, дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, уравнение Эйлера – Бернулли, знак изгибающего момента, постоянные интегрирования, граничные условия.*

1. Чистый изгиб (рис. 5.58).

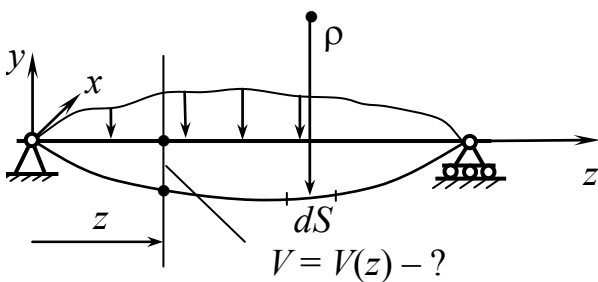


Рис. 5.58

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_x} \text{ – основная зависимость}$$

чистого изгиба.

$$\frac{1}{\rho} = k \text{ – кривизна кривой.}$$

$E \cdot I_x$  – жесткость при изгибе.



$$\left. \begin{aligned} M = M(z) = \text{Const} \\ E \cdot I_x = \text{Const} \end{aligned} \right\} \frac{1}{\rho} = \text{Const}, \quad \rho = \frac{E \cdot I_x}{M} = \text{Const}.$$

При чистом изгибе балка гнется по окружности (рис. 5.59).

$$f = \rho(1 - \cos\theta_{\max}).$$

$$\theta_{\max} = \frac{l}{\rho} \text{ радиан.}$$

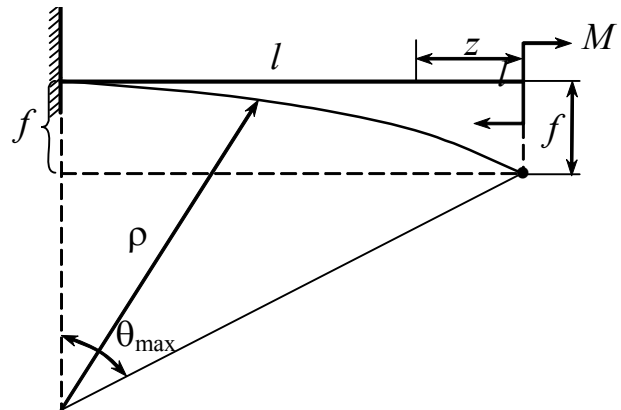


Рис. 5.59

## 2. Поперечный изгиб (рис. 5.60).

$$M = M(z) \neq 0.$$

$$Q \neq 0.$$

$$\underbrace{\frac{1}{\rho} = \frac{M(z)}{E \cdot I_x}}_{\text{физич. ур-е}} \quad \underbrace{\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2V}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}}_{\text{геом. ур-е в математике}}.$$

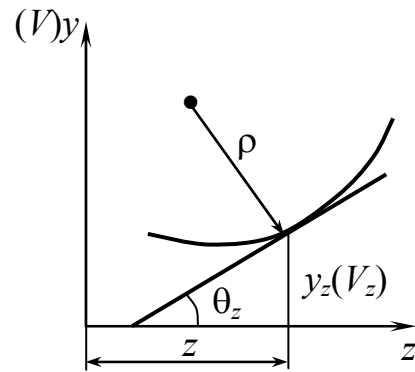


Рис. 5.60

$$\frac{\frac{d^2V}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} = \pm \frac{M(z)}{E \cdot I_x} \quad \text{— дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.}$$

$$\frac{dV}{dz} \cong \theta. \quad \theta_{\max} = \frac{1}{25}. \quad \theta^2 = \frac{1}{625} \ll 1.$$

Дифференциальное уравнение упрощается.

$$\boxed{\frac{d^2V}{dz^2} = \pm \frac{M(z)}{E \cdot I_x}} \quad \text{— уравнение Эйлера – Бернулли.}$$

Выбор знака  $\pm$  (рис. 5.61).

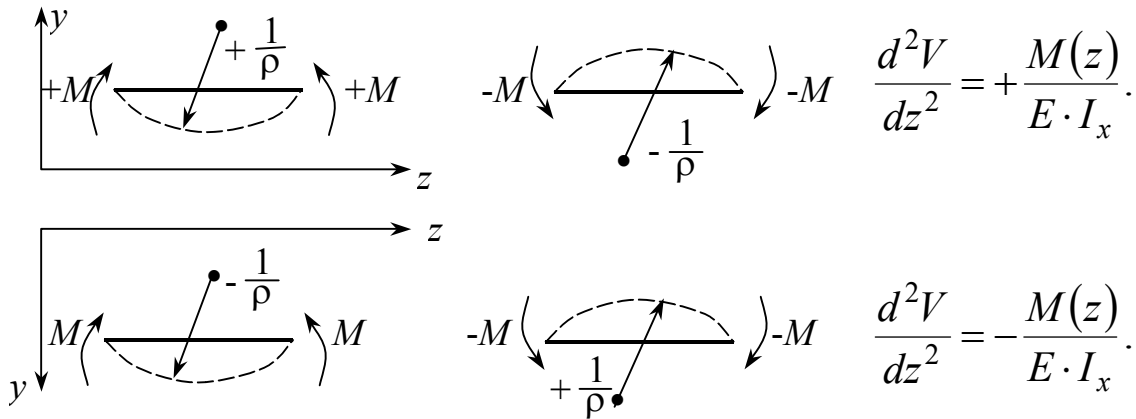


Рис. 5.61

Ось  $y$  будем брать, направленную вверх.

$$M(z) = F(z). \quad \boxed{E \cdot I_x \cdot V'' = F(z)}$$

$$E \cdot I_x \cdot V' = \int F(z) \cdot dz + C.$$

$$E \cdot I_x \cdot V = \int dz \int F(z) \cdot dz + C \cdot z + D.$$

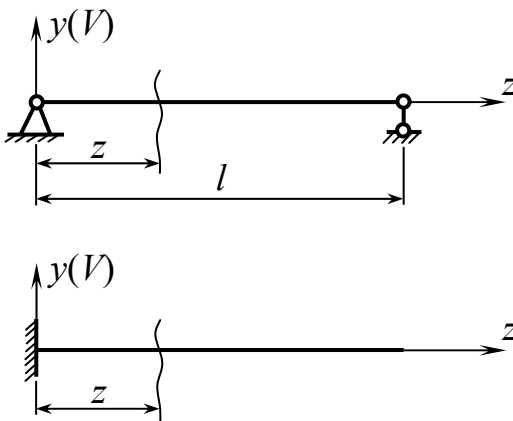


Рис. 5.62

$C$  и  $D$  определяются из условия закрепления (граничных условий, рис. 5.62).

Граничные условия:

$$1. z = 0. \text{ шар. опора } V_{z=0} = 0.$$

$$z = l. \quad V_{z=l} = 0.$$

2. Опора имеет жесткое защемление.

$$V_{z=0} = 0. \quad \theta_{z=0} = 0.$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} = M(z). \quad E \cdot I \cdot \ddot{y} = M(z).$$

$$E \cdot I \cdot \dot{y} = E \cdot I \cdot \theta(z) = \int M(z) \cdot dz + C.$$

$$\theta(z) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ \int M(z) \cdot dz + C \right] \quad - \text{ уравнение углового поворота}$$

сечения.

$$E \cdot I \cdot y = \int dz \int M(z) \cdot dz + Cz + D.$$

$$y = \frac{1}{E \cdot I} \left[ \int dz \int M(z) \cdot dz + Cz + D \right] - \text{уравнение прогибов.}$$

$C$  и  $D$  определяются из условия закрепления (рис. 5.63):

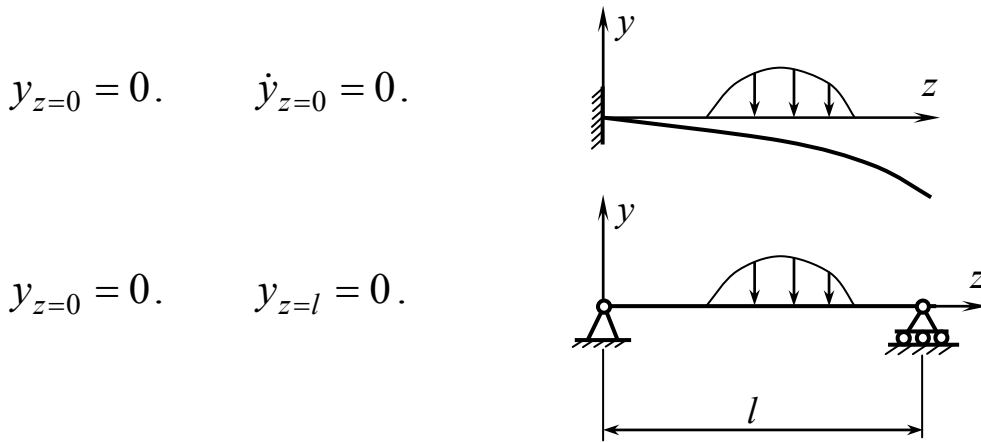


Рис. 5.63

**Примеры:** 1) Определить максимальный прогиб консольной балки (рис.5.64).

$$E \cdot I \cdot \ddot{y} = -Fz.$$

$$E \cdot I \cdot \dot{y} = -F \cdot \frac{z^2}{2} + C.$$

$$E \cdot I \cdot y = -\frac{Fz^3}{6} + Cz + D.$$

$$\dot{y}_{z=l} = 0. \quad 0 = -\frac{Fl^2}{2} + C.$$

$$C = \frac{Fl^2}{2}.$$

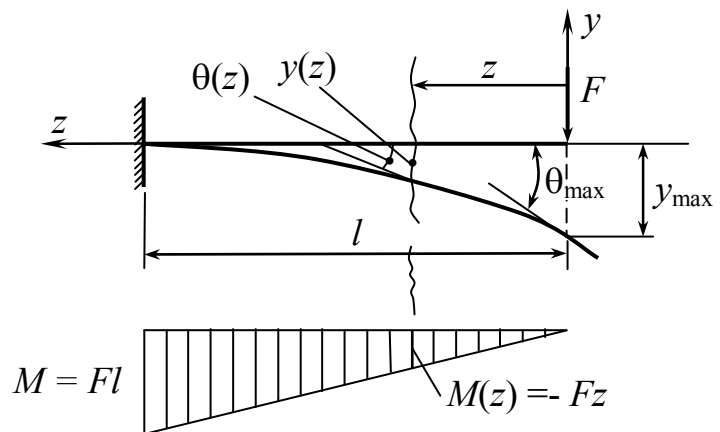


Рис. 5.64

$$y_{z=l} = 0. \quad 0 = -\frac{Fl^3}{6} + C \cdot l + D. \quad -\frac{Fl^3}{6} + \frac{Fl^2}{2} \cdot l + D = 0. \quad D = -\frac{Fl^3}{3}.$$

$$\dot{y} = \frac{1}{E \cdot I} \left( -\frac{Fz^2}{2} + \frac{Fl^2}{2} \right) = -\frac{Fl^2}{2EI} \left( \frac{z^2}{l^2} - 1 \right). \quad \dot{y}_{z=0} = (\theta_{\max}) = \frac{Fl^2}{2E \cdot I}.$$

$$y = \frac{1}{E \cdot I} \left( -\frac{Fz^3}{6} + \frac{Fl^2}{2} z - \frac{Fl^3}{3} \right) = -\frac{Fl^3}{3EI} \left( \frac{z^3}{2l^3} - \frac{3 \cdot z \cdot l}{2} + 1 \right).$$

$$y_{\max} = f_{\text{стрела прогиба}} = -\frac{Fl^3}{3EI}.$$

2) Определить максимальный прогиб балки на двух опорах (рис.5.65).

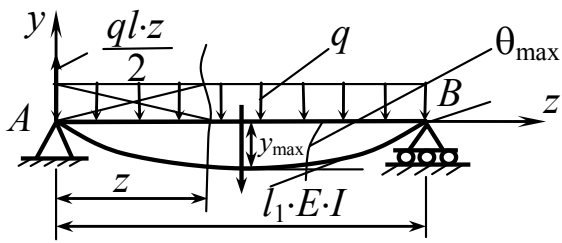


Рис. 5.65

$$E \cdot I \cdot \ddot{y} = M(z) = \frac{ql}{2}z - \frac{q \cdot z^2}{2}.$$

$$E \cdot I \cdot \dot{y} = \frac{ql \cdot z^2}{4} - \frac{qz^3}{6} + C.$$

$$E \cdot I \cdot y = \frac{ql \cdot z^3}{12} - \frac{qz^4}{24} + Cz + D.$$

$$y = 0. \quad 0 = 0 + 0 + 0 + D. \quad D = 0.$$

$$z = 0.$$

$$y_{z=l} = 0. \quad 0 = \frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} + Cl + D. \quad C = \frac{ql^3}{24}.$$

## 5.22. Определение деформации в случае балок с несколькими участками

*Ключевые слова*

Балка с несколькими участками, условия на опорах, границы участков, n участков, 2n неизвестных, система уравнений.

На отдельном участке балки на двух опорах приложена распределенная нагрузка (рис.5.66), определить прогибы.

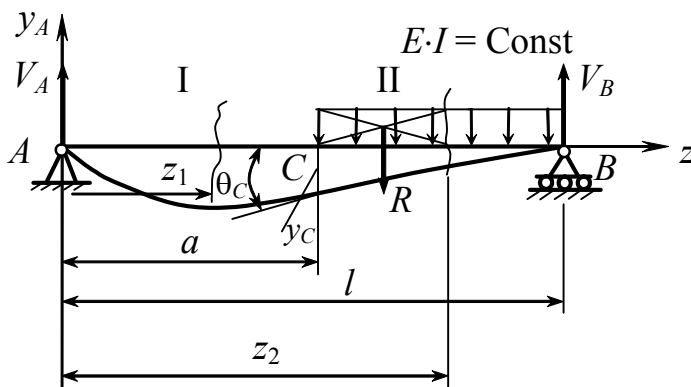


Рис. 5.66

$$q(z_2 - a) = R.$$

Момент относительно сечения  $z_2$  от  $R$  равен

$$M_{z_2} = \frac{R(z_2 - a)}{2} = \frac{q(z_2 - a)^2}{2}.$$

$$I. \quad E \cdot I \cdot \ddot{y}_1 = V_A \cdot z_1.$$

$$E \cdot I \cdot \dot{y}_1 = V_A \cdot \frac{z_1^2}{2} + C_1.$$

$$E \cdot I \cdot y_1 = \frac{V_A \cdot z_1^3}{6} + C_1 \cdot z + D_1.$$

$$M(z_1) = V_A \cdot z_1.$$

$$M(z_2) = V_A \cdot z_2 - \frac{q(z_2 - a)^2}{2}.$$

При интегрировании выражения типа  $q(z_2 - a)^2$  (множитель) – без раскрытия скобок.

$$\text{II. } E \cdot I \cdot \ddot{y}_2 = V_A \cdot z_2 - \frac{q(z_2 - a)^2}{2}.$$

$$E \cdot I \cdot \dot{y}_2 = V_A \cdot \frac{z_2^2}{2} - \frac{q(z_2 - a)^3}{6} + C_2.$$

$$E \cdot I \cdot y_2 = V_A \cdot \frac{z_2^3}{6} - \frac{q(z_2 - a)^4}{24} + C_2 \cdot z_2 + D_2.$$

Условия закрепления: 2 начальных условия, неизвестных 4 ( $C_1, C_2, D_1, D_2$ ).

Еще 2 условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) граница 2 участков:} \\ \dot{y}_{z_1=a} = \dot{y}_{z_2=a} = \theta_C. \quad y_{z_1=a} = y_{z_2=a} = y_C. \\ \text{Упругая линия непрерывная гладкая кривая.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{б) условия на опорах :} \\ y_1 = 0. \quad y_2 = 0. \\ z_1 = 0. \quad z_2 = l. \end{array} \right.$$

Используя 4 условия, определяем  $C_1, D_1, C_2, D_2$ .

Обобщим сказанное на случай балки с "n" участками:

$n$  дифференциальных уравнений;

$2n$  – произвольных постоянных интегрирования.

Для определения  $2n$  постоянных имеем:

1) 2 условия на опорах;

2) На  $(n - 1)$  границе будет  $2(n - 1) = 2n - 2$  условия.

$$2 + 2n - 2 = 2n!$$

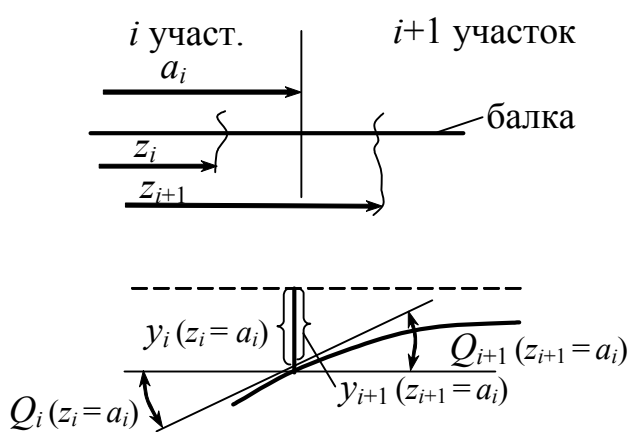


Рис. 5.67

Действительно, на  $i$ -й границе имеем (рис.5.67):

$$\begin{cases} \dot{y}_i(z_i=a_i) = \dot{y}_{i+1}(z_{i+1}=a_i) = Q_{a_i}, \\ y_i(z_i=a_i) = y_{i+1}(z_{i+1}=a_i) = y_{a_i}. \end{cases} \quad (5.24)$$

2 уравнения для граничных участков

участок –  $i$ :

$$E \cdot I \cdot y_i = M(z_i). \quad F_i = \int M(z_i).$$

$$E \cdot I \cdot \dot{y}_i = F_i + C_i. \quad \int F_i = \Phi_i. \quad E \cdot I \cdot y_i = \Phi_i + C_i \cdot z_i + D_i.$$

участок –  $i+1$ :

$$E \cdot I \cdot \ddot{y}_{i+1} = M(z_{i+1}). \quad E \cdot I \cdot \dot{y}_{i+1} = F_{i+1} + C_{i+1}.$$

$$E \cdot I \cdot y_{i+1} = \Phi_{i+1} + C_{i+1} \cdot z_{i+1} + D_{i+1}.$$

Пользуясь условиями (5.24), имеем

$$F_i(a_i) + C_i = F_{i+1}(a_i) + C_{i+1}.$$

$$C_{i+1} = C_i + [F_i(a_i) - F_{i+1}(a_i)].$$

$$\Phi_i(a_i) + C_i a_i + D_i = \Phi_{i+1}(a_i) + C_{i+1} \cdot a_i + D_{i+1}.$$

$$D_{i+1} = D_i + [\Phi_i(a_i) - \Phi_{i+1}(a_i)] + (C_i - C_{i+1}) \cdot a_i.$$

При определении произвольных постоянных для балки с несколькими участками возникает необходимость в решении систем уравнений, что является трудоемким, нежелательным. Оказывается, можно добиться уравнивания произвольных постоянных интегрирования и свести дело к определению только 2 произвольных постоянных по условиям закрепления балки при любом числе участков.

### **5.23. Вывод обобщенного уравнения упругой линии балки.**

**Метод уравнивания произвольных постоянных интегрирования для балки с несколькими участками (метод начальных параметров).**

**Универсальные уравнения углов поворота и прогибов**

*Ключевые слова*

*Уравнивание произвольных постоянных интегрирования, соблюдение условий уравнивания, универсальные уравнения.*

Произвольные постоянные интегрирования для балок с любым числом участков уравниваются при соблюдении следующих условий:

1. Начало координат совмещается с одним из концов балки. Изгибающий момент  $M(z)$  определяется из рассмотрения той части балки, которая содержит начало координат.

2. Сосредоточенный момент  $M$  вводится в выражение  $M(z)$  в виде  $M(z - a_M)^\circ$ , где  $a_M$  – абсцисса сечения, где приложен сосредоточенный момент.

3. Сосредоточенная сила вводится в выражение  $M(z)$  в виде  $F(z - a_F)$ , где  $a_F$  – абсцисса сечения, где приложена сосредоточенная сила.

4. Если к балке приложена распределенная по определенному закону нагрузка, причем эта нагрузка прерывается, не доходя до конца балки, то ее следует продолжить до конца балки (по тому же закону); дабы при этом не изменялись условия нагружения балки, вводится соответствующая компенсирующая нагрузка обратного знака (рис.5.68).

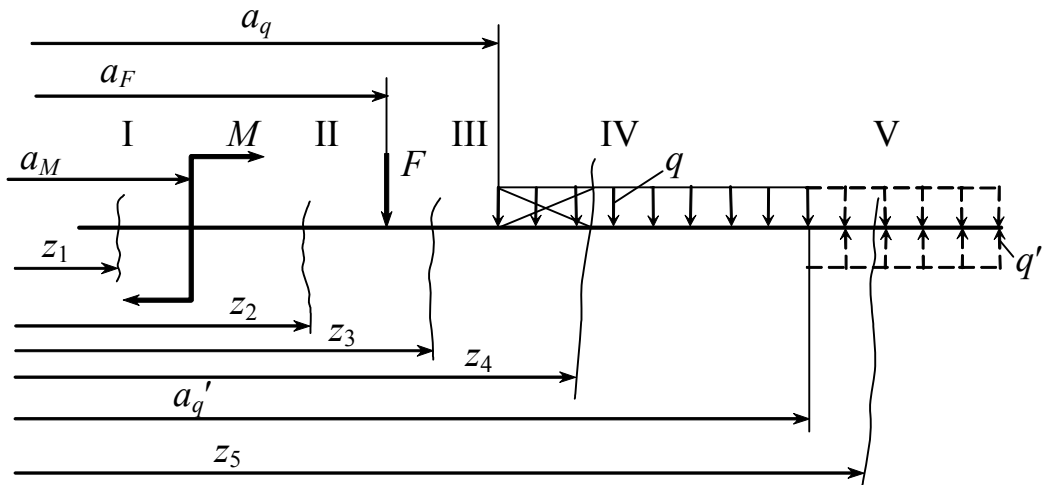


Рис. 5.68

5. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки производится без раскрытия скобок.

$$\begin{aligned}
 1. \quad E \cdot I \cdot \ddot{y}_1 &= 0. & 2. \quad E \cdot I \cdot \ddot{y}_2 &= M(z_2 - a_M)^0. \\
 E \cdot I \cdot \dot{y}_1 &= C_1. & E \cdot I \cdot \dot{y}_2 &= M(z_2 - a_M) + C_2. \\
 E \cdot I \cdot y_1 &= C_1 z_1 + D_1. & E \cdot I \cdot y_2 &= M \frac{(z_2 - a_M)^2}{2} + C_2 z_2 + D_2.
 \end{aligned}$$

Условие на границе I и II участков.

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1(z_1=a_M) &= \dot{y}_2(z_2=a_M). \quad C_1 = C_2. \\
 y_1(z_1=a_M) &= y_2(z_2=a_M). \quad D_1 = D_2.
 \end{aligned}$$

$$3. \quad E \cdot I \cdot \ddot{y}_3 = M(z_3 - a_M)^0 - F(z_3 - a_F).$$

$$E \cdot I \cdot \dot{y}_3 = M(z_3 - a_M) - \frac{F(z_3 - a_F)^2}{2} + C_3.$$

$$E \cdot I \cdot y_3 = \frac{M(z_3 - a_M)^2}{2} - \frac{F(z_3 - a_F)^3}{6} + C_3 z_3 + D_3.$$

На границе II и III участков имеем:

$$\dot{y}_2(z_2=a_F) = \dot{y}_3(z_3=a_F).$$

$$M(a_F - a_M) + C_2 = M(a_F - a_M) + C_3. \quad C_2 = C_3.$$

$$y_2(z_2=a_F) = y_3(z_3=a_F).$$



$$\frac{M(a_F - a_M)^2}{2} + C_2 a_F + D_2 = \frac{M(a_F - a_M)^2}{2} + C_3 a_F + D_3.$$

$$D_2 = D_3. \quad C_1 = C_2 = C_3. \quad D_1 = D_2 = D_3.$$

$$4. \quad E \cdot I \cdot \ddot{y}_4 = M(z_4 - a_M)^0 - F(z_4 - a_F) - \frac{q(z_4 - a_q)^2}{2}.$$

$$E \cdot I \cdot \dot{y}_4 = M(z_4 - a_M) - F(z_4 - a_F) - \frac{q(z_4 - a_q)^3}{6} + C_4.$$

$$E \cdot I \cdot y_4 = \frac{M(z_4 - a_M)^2}{2} - \frac{F(z_4 - a_F)^3}{6} - \frac{q(z_4 - a_q)^4}{24} + C_4 z_4 + D_4.$$

На границе III и IV участка ( $a_q$ ):

$$\dot{y}_3(z_3=a_q) = \dot{y}_4(z_4=a_q). \quad C_3 = C_4.$$

$$y_3(z_3=a_q) = y_4(z_4=a_q). \quad D_3 = D_4.$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4. \quad D_1 = D_2 = D_3 = D_4.$$

$$5. \quad E \cdot I \cdot \ddot{y}_5 = M(z_5 - a_M)^0 - F(z_5 - a_F) - \frac{q(z_5 - a_q)^2}{2} + \frac{q(z_5 - a_{q'})^2}{2}.$$

$$E \cdot I \cdot \dot{y}_5 = M(z_5 - a_M) - \frac{F(z_5 - a_F)^2}{2} - \frac{q(z_5 - a_q)^3}{6} + \frac{q(z_5 - a_{q'})^3}{6} - C_5.$$

$$E \cdot I \cdot y_5 = \frac{M(z_5 - a_M)^2}{2} - \frac{F(z_5 - a_F)^3}{6} - \frac{q(z_5 - a_q)^4}{24} + \frac{q(z_5 - a_{q'})^4}{24} + C_5 \cdot z_5 + D_5.$$

На границе IV и V участка  $z_4 = z_5 = a_{q'}$ :

$$\dot{y}_4(z_4=a_{q'}) = \dot{y}_5(z_5=a_{q'}). \quad y_4(z_4=a_{q'}) = y_5(z_5=a_{q'}). \quad C_4 = C_5. \quad D_4 = D_5.$$

Отсюда  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5$  и  $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5$ .

## 5.24. Случай треугольной нагрузки

На отдельном участке приложена треугольная нагрузка (рис. 5.69)

$$\frac{q_z}{q} = \frac{2a/3}{a}, \quad q_z \cdot a = q \frac{2a}{3}.$$

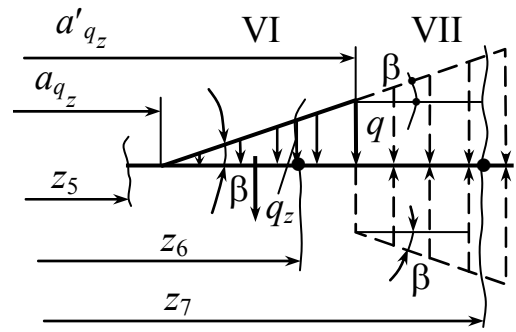


Рис. 5.69

$$6. E \cdot I \cdot \ddot{y}_6 = \dots - \frac{1}{2} \cdot \frac{q_z (z_6 - a_{q_z}) (z_6 - a_{q_z})}{3} =$$

$$= \left| q_z = q \cdot \frac{z_6 - a_{q_z}}{a'_{q_z} - a_{q_z}} = \operatorname{tg} \beta \cdot (z_6 - a_{q_z}) \right| = -\frac{1}{6} \operatorname{tg} \beta (z_6 - a_{q_z}).$$

$$E \cdot I \cdot \dot{y}_6 = \dots - \frac{1}{24} \operatorname{tg} \beta (z_6 - a_{q_z})^4 + C_6.$$

$$E \cdot I \cdot y_6 = -\frac{1}{120} \operatorname{tg} \beta (z_6 - a_{q_z})^5 + C_6 \cdot z_6 + D_6. \quad C_5 = C_6. \quad D_5 = D_6.$$

$$7. E \cdot I \cdot \ddot{y}_7 = \dots - \frac{1}{6} \operatorname{tg} \beta (z_7 - a_{q_z})^3 + \frac{q (z_7 - a'_{q_z})^2}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg} \beta (z_7 - a'_{q_z})^3;$$

$$E \cdot I \cdot \dot{y}_7 = -\frac{1}{24} \operatorname{tg} \beta (z_7 - a_{q_z})^4 + \frac{q (z_7 - a'_{q_z})^3}{6} + \frac{1}{24} \operatorname{tg} \beta (z_7 - a'_{q_z})^4 + C_7.$$

$$E \cdot I \cdot y_7 = -\frac{1}{120} \operatorname{tg} \beta (z_7 - a_{q_z})^5 + \frac{q (z_7 - a'_{q_z})^4}{24} + \frac{1}{120} \operatorname{tg} \beta (z_7 - a'_{q_z})^5 +$$

$$+ C_7 \cdot z_7 + D_7.$$

Условия на границе VI и VII участков:

$$E \cdot I \cdot \dot{y}_6(z_6=a_{q_z}) = E \cdot I \cdot \dot{y}_7(z_7=a_{q_z}). \quad C_6 = C_7 = C.$$


$$E \cdot I \cdot y_6(z_6=a_{q_z}) = E \cdot I \cdot y_7(z_7=a_{q_z}). \quad D_6 = D_7 = D.$$

$C$  и  $D$  определяем из условия закрепления балки.

## 5.25. Универсальные уравнения углов поворотов и прогибов балок

На основании предыдущего составим табл. 5.1.

Таблица 5.1

Виды нагрузок	$M(z)$	$E \cdot I \cdot \dot{y}$	$E \cdot I \cdot y$
$M$	$M(z - a_M)^0$	$M(z - a_M)$	$M \frac{(z - a_M)^2}{2}$
$F$	$F(z - a_F)$	$F \frac{(z - a_F)^2}{2}$	$F \frac{(z - a_F)^3}{6}$
$q$	$q(z - a_q)^2$	$q \frac{(z - a_q)^3}{6}$	$q \frac{(z - a_q)^4}{24}$
	$\frac{\text{tg}\beta(z - a_{q'})^3}{6}$	$\frac{1}{24} \text{tg}\beta(z - a_{q'})^4$	$\frac{1}{120} \text{tg}\beta(z - a_{q'})^5$

$$\begin{aligned}
 E \cdot I \cdot \dot{y} = & E \cdot I \cdot \dot{y}_0 + \sum M_i (z - a_{Mi}) + \frac{\sum F_i (z - a_{Fi})^2}{2} + \sum q_i \frac{(z - a_{qi})^3}{6} + \\
 & + \sum \frac{1}{24} \text{tg}\beta (z - a_{qi})^4. \tag{5.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E \cdot I \cdot y = & EIy_0 + EI\theta_0 z + \sum M_i \frac{(z - a_{Mi})^2}{2} + \sum F_i \frac{(z - a_{Fi})^3}{6} + \\
 & + \sum q_i \frac{(z - a_{qi})^4}{24} + \sum \frac{1}{120} \text{tg}\beta (z - a_{qi})^5. \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

$$1 = 0! \quad 2 = 1 \cdot 2 = 2! \quad 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \quad 24 = 4! \quad 120 = 5!$$

Уравнение (5.25) есть универсальное уравнение углов поворотов, а уравнение (5.26) – есть универсальное уравнение прогибов.

**Пример 1.** Определить прогиб балки на двух опорах (рис. 5.70).

Определяем реакции в опорах  $A$  и  $B$ .

$$\sum MOM_A = 0. \quad 4qa^2 - qa \cdot a - 1,5qa^2 + V_B \cdot 2a = 0.$$

$$V_B = -0,75qa.$$

$$\sum MOM_B = 0.$$

$$-V_A \cdot 2a + 4qa^2 + qa^2 + 0,5qa^2 = 0.$$

$$V_A = 2,75qa.$$

$$\sum Y = 0. \quad 2,75 - 1 - 1 - 0,75 = 0.$$

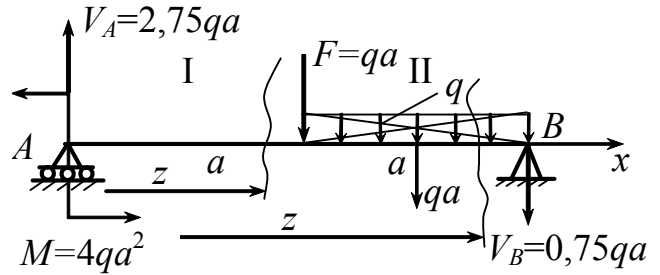


Рис. 5.70

Реакции найдены верно.

$$E \cdot I \cdot \theta = E \cdot I \cdot \theta_0 - 4qa^2 \cdot z + 2,75qa \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_I - qa \frac{(z-a)^2}{2} - q \frac{(z-a)^3}{6} \Big|_{II}.$$

$$E \cdot I \cdot y = \underset{\substack{\text{т.к.нач.коорд.} \\ 0=D}}{E \cdot I \cdot y_0} + E \cdot I \cdot \theta_0 \cdot z - 4qa^2 \cdot \frac{z^2}{2} + 2,75qa \cdot \frac{z^3}{6} \Big|_I - qa \frac{(z-a)^3}{6} - q \frac{(z-a)^4}{24} \Big|_{II}.$$

$$0 = E \cdot I \cdot \theta_0 \cdot 2a - 8qa^4 + 3,67qa^4 - \frac{1}{6}qa^4 - \frac{1}{24}qa^4.$$

прогиб:  $y_{2|z=2a|} = 0.$

$$E \cdot I \cdot \theta_0 = \frac{(4,33 + 0,21)qa^4}{2a} = 2,27qa^3.$$

$$E \cdot I \cdot \theta = 2,27qa^3 - 4qa^2 \cdot z + 1,37qa \cdot z^2 \Big|_I - 0,5qa(z-a)^2 - 0,17q(z-a)^3 \Big|_{II}.$$

$$E \cdot I \cdot y = 2,27qa^3 \cdot z - 2qa^2 \cdot z^2 + 0,45qa \cdot z^3 \Big|_I - (z-a)^3 \cdot 0,17 - 0,04q(z-a)^4 \Big|_{II}.$$

**Пример 2.** Определить перемещение в точке  $D$  (рис. 5.71).

Определяем реакции в опорах

$A$  и  $B$ .

$$\sum \text{mom}_B(F) = R_A l - q \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + ql^2 = 0.$$

$$R_A = \frac{-ql + \frac{ql^2}{8}}{l} = -\frac{7}{8}ql.$$

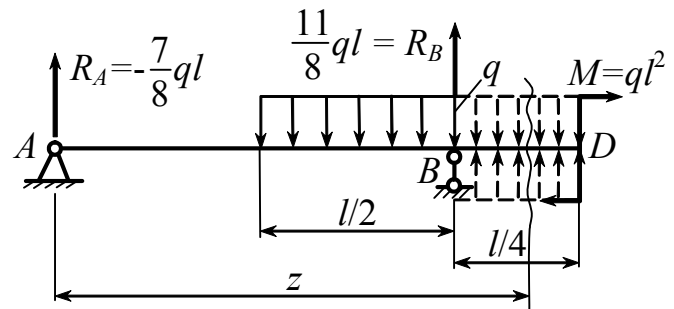


Рис. 5.71

$$\sum \text{mom}_A(F) = -ql^2 + R_B l - q \frac{l}{2} \cdot \frac{3}{4}l = 0.$$

$$R_B = \frac{ql^2 + \frac{3}{8}ql^2}{l} = \frac{11}{8}ql.$$

$$\sum Y = R_A - q \cdot \frac{l}{2} + R_B = -\frac{7}{8}ql - q \frac{l}{2} + \frac{11}{8}ql = 0, \text{ реакции найдены верно.}$$

Выбираем начало координат в  $A = 0$ , продолжаем распределенную нагрузку до точки  $D$ , а также вводим компенсирующую нагрузку обратного знака

$$EI\theta = EI\theta_0 - \frac{7}{8}ql \cdot \frac{z^2}{2} - q \frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^3}{6} + \frac{11}{8}ql \frac{(z-l)^2}{2} + \frac{q(z-l)^3}{6}.$$

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 \cdot z - \frac{7}{8}ql \cdot \frac{z^3}{6} - q \frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^4}{24} + \frac{11}{8}ql \frac{(z-l)^3}{6} + \frac{q(z-l)^4}{24}.$$

Прогиб:  $y_0|_{z=0} = 0. \quad 0 = EI\theta_0 \cdot l - \frac{7}{8}ql \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{q\left(l - \frac{l}{2}\right)^4}{24}.$

$$y_B|_{z=l} = 0. \quad \theta_0 = \frac{57}{384} \frac{ql^3}{EI}.$$

$$y_{(z)} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{57}{384} ql^3 \cdot z - \frac{7}{8} ql \frac{z^3}{6} + \frac{11}{8} ql \frac{(z-l)^3}{6} - q \frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^4}{24} + q \frac{(z-l)^4}{24} \right].$$

**Точка D:**  $z = \frac{5}{4}l.$

$$y_{z=\frac{5}{4}l} = \frac{ql^4}{EI} \left[ \frac{57}{384} \cdot \frac{5}{4} - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{4}\right)^3 + \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{24} \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \right] =$$

$$= -\frac{167}{1536} \frac{ql^4}{EI}.$$

**Пример 3.** Определить перемещение в точках B и C (рис. 5.72).

$$y_0 = \theta_0 = 0.$$

$$y_{(z)} = y_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI} \cdot$$

$$\left[ M_0 \frac{z^2}{2!} + F_0 \frac{z^3}{3!} - \frac{qz^4}{4!} + q \frac{(z-a)^4}{4!} \right].$$

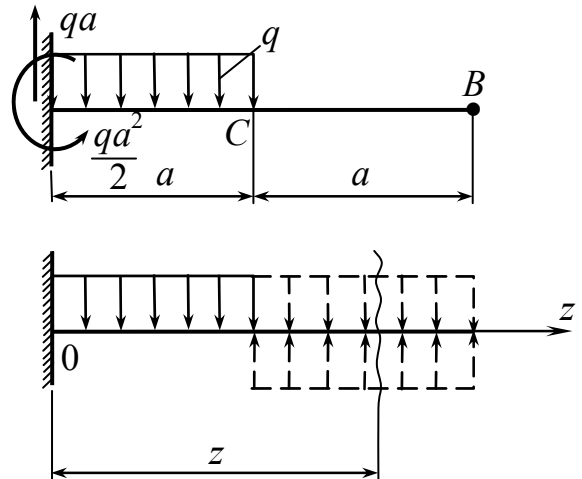


Рис. 5.72

$$y_{(z)} = 0 + 0 \cdot z + \frac{1}{EI} \left[ -\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{z^2}{2!} + qa \frac{z^3}{3!} - \frac{qz^4}{4!} + \frac{q(z-a)^4}{4!} \right].$$

$$z = 2a.$$

$$y_B = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{qa^2}{2} \frac{(2a)^2}{2!} + qa \frac{(2a)^3}{3!} - \frac{q(2a)^4}{4!} + \frac{q(2a-a)^4}{4!} \right] = -\frac{7}{24} \frac{qa^4}{EI}.$$

$$z = a. \quad y_C = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{qa^2}{2} \frac{a^2}{2!} + qa \frac{a^3}{3!} - \frac{qa^4}{4!} \right] = -\frac{qa^4}{8EI}.$$

## Контрольные вопросы

1. Какой вид нагружения называется изгибом?
2. Основные задачи теории изгиба.
3. Что такое балка?
4. Какие нагрузки вызывают плоский прямой изгиб стержня?
5. Какие типы опор применяются в технике для закрепления балок?
6. Какие типы статически определимых балок используются в технике?
7. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях балок?
8. Какие виды нагрузок могут действовать на балки?
9. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях балки?
10. Что называется поперечной силой и изгибающим моментом?
11. Чему равна поперечная сила  $Q$ ? Правило знаков для поперечной силы.
12. Чему равен изгибающий момент  $M_x$ ? Правило знаков изгибающего момента.
13. Какой изгиб называется чистым?
14. Когда имеет место поперечный изгиб?
15. Какие существуют зависимости между  $q$ ,  $Q$  и  $M_x$ ?
16. Для чего строятся эпюры поперечных сил и изгибающих моментов?
17. На каких допущениях построена теория нормальных напряжений при чистом изгибе?
18. Что такое нейтральный слой и нейтральная линия балки?
19. Откуда следует, что при изгибе нейтральная линия проходит через центр тяжести поперечного сечения?
20. Что такое силовая линия?

21. В каком случае нейтральная линия перпендикулярна силовой?
22. Какая связь существует между кривизной оси балки и изгибающим моментом?
23. Какая величина называется жесткостью поперечного сечения балки?
24. По какому закону изменяются по высоте поперечного сечения балки нормальные напряжения при изгибе?
25. Какая величина называется моментом сопротивления сечения при изгибе и какова ее размерность?
26. Чему равен осевой момент сопротивления для балок прямоугольного и круглого сечений?
27. Как записывается условие прочности по нормальным напряжениям для балок из пластичных материалов?
28. Как записываются условия прочности по нормальным напряжениям для балок из хрупких материалов?
29. Как распределяются нормальные напряжения по ширине сечения балки?
30. Какие формы сечений являются рациональными для балок из пластичных материалов?
31. Как определяется потенциальная энергия деформации при чистом изгибе?
32. На каких допущениях базируется элементарная теория касательных напряжений при изгибе балок?
33. Как определяются касательные напряжения при изгибе по формуле Д. И. Журавского?
34. Как распределяются касательные напряжения по высоте балки прямоугольного сечения?
35. В каких точках поперечного сечения максимальны касательные напряжения и чему они равны?
36. Как проводится проверка прочности по касательным напряжениям при изгибе балок?



37. Как распределяются касательные напряжения при изгибе балок тонкостенного сечения?
38. Какое напряженное состояние возникает в балке при поперечном изгибе?
39. Какое напряженное состояние возникает в точках нейтрального слоя при поперечном изгибе? Как расположены главные площадки и чему равны главные напряжения?
40. Какое напряженное состояние возникает в точках наиболее удаленных от нейтральной оси? Как расположены главные площадки и чему равны главные напряжения?
41. По каким формулам определяются величины и направления главных напряжений при поперечном изгибе?
42. Почему главные напряжения при поперечном изгибе обозначаются  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , а не  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ?
43. В чем заключается полная проверка прочности балки?
44. В каких случаях необходима проверка по касательным напряжениям?
45. Как определяются траектории главных напряжений?
46. Что такое центр изгиба?
47. Почему поперечные силы, приложенные в центре тяжести сечения балки тонкостенного сечения, вызывают деформацию изгиба и кручения?
48. Где должна быть приложена поперечная сила, чтобы изгиб балки тонкостенного сечения был плоским, а деформации кручения отсутствовали?
49. Что такое прогиб, смещение, угол поворота?
50. Что такое упругая линия?
51. Как связаны между собой прогиб  $v$  и угол поворота  $\theta$  в любом сечении балки?
52. Как определяется кривизна балки при чистом изгибе?
53. Запишите условие жесткости при изгибе.

54. Какие вы знаете способы определения деформаций при изгибе?
55. Как приближенно выражается кривизна оси балки?
56. Какой вид имеет основное дифференциальное уравнение изгиба?
57. Из каких граничных условий определяют постоянные интегрирования при использовании дифференциального уравнения изгиба?
58. В чем сущность метода начальных параметров для определения перемещений при изгибе?
59. Что представляют собой начальные параметры  $V_0$  и  $\theta_0$ ?
60. Какие должны соблюдаться условия для уравнивания произвольных постоянных интегрирования в методе начальных параметров?
61. Что представляют собой универсальные уравнения углов поворота и прогибов балок?

## Глава 6. Сложное сопротивление

### 6.1. Совокупное действие нескольких видов деформаций

#### Ключевые слова

*Брус, балка, несколько видов деформации, внутренние силы, нормальные напряжения, гипотеза Навье, гипотеза Я. Бернулли, плоскость векторов нормальных напряжений, принцип независимости действия сил, виды сложного сопротивления.*

Общий случай действия внешних сил  $F_i$  на брус представлен на рис. 6.1, а. Сложным сопротивлением называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает не менее двух внутренних силовых факторов. Рассечем брус нормальной плоскостью на две части I и II, I часть уравновесим внутренними силами:  $R$  – главным вектором сил и  $M$  – главным векторным моментом (рис. 6.1, б).

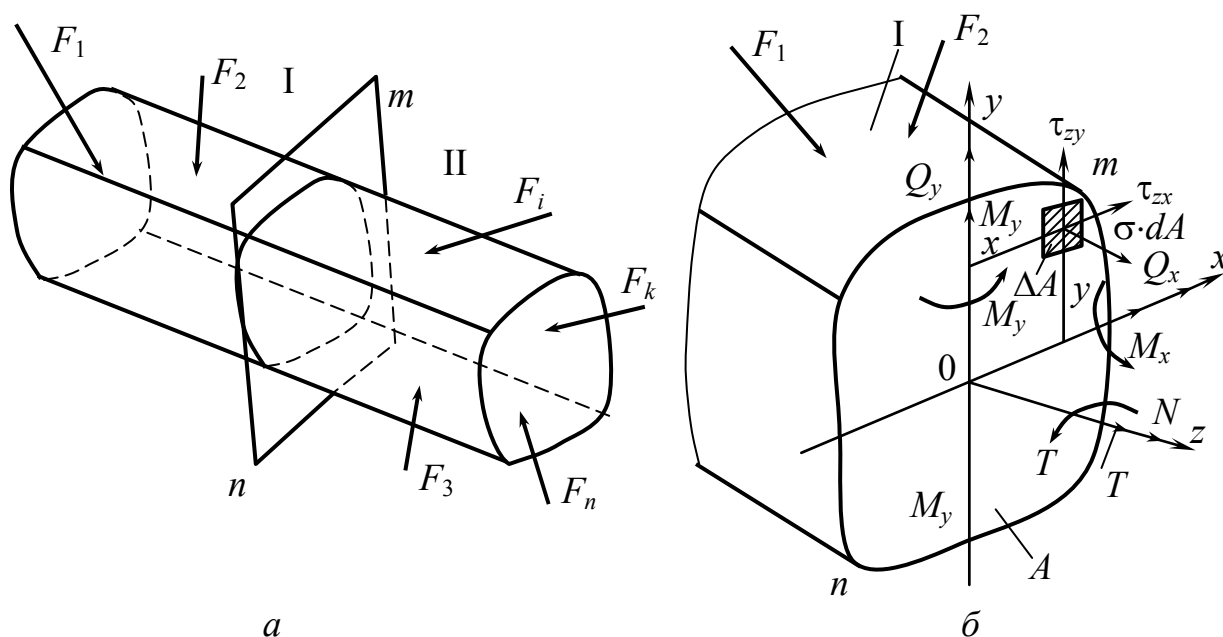


Рис. 6.1

$$R \begin{cases} N \\ Q_x \\ Q_y \end{cases} \begin{cases} \text{норм. сила} \\ \text{попер. силы} \end{cases}$$

$$M \begin{cases} T \\ M_x \\ M_y \end{cases} \begin{cases} \text{крут. момент} \\ \text{изгиб. момент в пл. } zOy \\ \text{изгиб. момент в пл. } zOx \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
N &= \int_A \sigma dA; & Q_x &= \int_A \tau_{zx} dA; & Q_y &= \int_A \tau_{zy} dA; & M_x &= \int_A \sigma \cdot y \cdot dA; \\
-M_y &= \int_A \sigma \cdot x \cdot dA; & T &= \int_A (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) dA; \\
\sigma &= \sigma(N, M_x, M_y). & \tau &= \tau(Q_y, Q_z, T).
\end{aligned}$$

Исследуем нормальные напряжения

$$\sigma = \sigma(N, M_x, M_y).$$

До сих пор в основу определения напряжений клали гипотезу плоских сечений Я. Бернулли. Гипотеза Навье – поверхность векторов нормальных напряжений, действующих по сечению, есть плоскость (рис. 6.2). Эти гипотезы равнозначны.

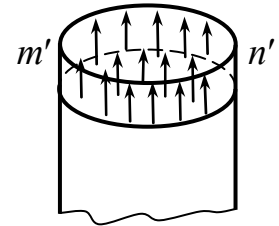


Рис. 6.2

$$\sigma = \underbrace{B \cdot x + C \cdot y + D}_{\text{ур-е плоскости}}, \quad (6.1)$$

$$\sum Z = \int_A \sigma \cdot dA = N. \quad \left| \quad B \cdot \int_{A=0} x \cdot dA + C \int_{A=0} y \cdot dA + DA = N. \right.$$

$$\sum \text{Mom}_y(F) = \int_A x \cdot \sigma dA = -M_y; \quad \sum \text{Mom}_x(F) = \int_A \sigma y \cdot dA = +M_x.$$

$$\begin{aligned}
& B \int_A x \cdot x \cdot dA + C \int_{A=0} x \cdot y \cdot dA + D \int_{A=0} x \cdot dA = \\
& = -M_y \cdot \left( B \int_A x \cdot y \cdot dA + C \int_{A=0} y \cdot y \cdot dA + D \int_{A=0} y \cdot dA \right) = M_x
\end{aligned}$$

$S_x, S_y, I_{xy}$  равны 0, так как оси  $x, y$  центральные.

$$D = \frac{N}{A}; \quad B = \frac{-M_y}{I_y}; \quad C = \frac{M_x}{I_x}.$$

$$\sigma = -\frac{M_y}{I_y} \cdot x + \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{N}{A} \dots \quad (6.2)$$

– уравнение нормальных напряжений, действующих на брус по гипотезе Навье.

$$\sigma_N = \frac{N}{A}; \quad \sigma_{M_x} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y; \quad \sigma_{M_y} = -\frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

– по гипотезе плоских сечений.

Имея в виду, что при малости деформаций (в пределах действия закона Гука) применим принцип независимости действия сил, имеем:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y + (-)\frac{M_y}{I_y} \cdot x \text{ – формула Навье.}$$

Виды сложного сопротивления:

$$\left. \begin{array}{l} M_x \neq 0; \quad M_y \neq 0; \\ Q_x \neq 0; \quad Q_y \neq 0. \end{array} \right\} \text{ косой изгиб.}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_x \neq 0; \\ M_y \neq 0; \\ N \neq 0. \end{array} \right\} \text{ изгиб с растяжением, сжатием.}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_x \neq 0; \\ M_y \neq 0; \\ T \neq 0. \end{array} \right\} \text{ изгиб с кручением.}$$

## 6.2. Косой изгиб

*Ключевые слова*

*Чистый косой изгиб, нейтральная линия, уравнение силовой плоскости, связь между угловыми коэффициентами нейтральной и силовой плоскостей, прогиб.*

$$\left. \begin{array}{l} M_x \neq 0; \quad M_y \neq 0; \\ Q_x \neq 0; \quad Q_y \neq 0. \end{array} \right\} \text{ плоский косой изгиб.}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_x \neq 0; \\ M_y^x \neq 0. \end{array} \right\} \text{ чистый косой изгиб (рис. 6.3).}$$

$$M_x = M \cos \varphi.$$

$$M_y = M \sin \varphi.$$

$$\sigma = -\frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y = M \left( -\frac{x \cdot \sin \varphi}{I_y} + \frac{y \cdot \cos \varphi}{I_x} \right);$$

Уравнение нейтральной линии:  $\sigma = 0$ .

$$-\frac{x_0 \cdot \sin \varphi}{I_y} + \frac{y_0 \cdot \cos \varphi}{I_x} = 0,$$

$x_0, y_0$  – текущие координаты точек нейтральной линии.

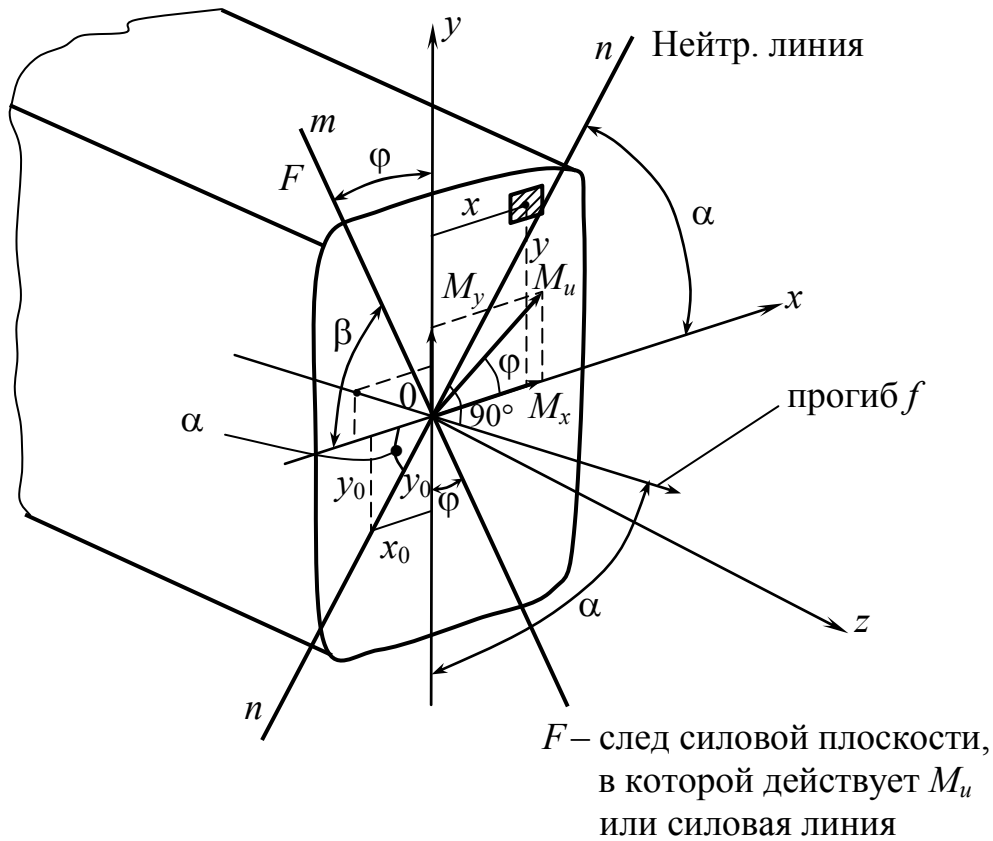


Рис. 6.3

$nn_x$  – прямая, проходящая через начало координат.

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{I_x}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (6.3)$$

$$y_0 = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi \cdot x_0; \quad y_0 = k_2 \cdot x_0; \quad k_2 = \operatorname{tg} \alpha.$$

Уравнение силовой плоскости  $y = k_1 x$ , где

$$k_1 = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(90 - \varphi) = \operatorname{ctg} \varphi.$$

$$k_2 = \operatorname{tg} \alpha = - \left( \frac{1}{k_1} \right) \left( \frac{I_x}{I_y} \right).$$

Связь между угловыми коэффициентами  $k_1 \cdot k_2 = -\frac{I_x}{I_y}$ .

Если  $I_x > I_y$ , то  $\alpha > \varphi$ . Прогиб происходит в сторону наименьшей жесткости.

### 6.3. Проверка прочности при косом изгибе

*Ключевые слова*

*Косой изгиб, прочность эюры напряжений, условие прочности, нейтральная линия, наибольшие напряжения.*

На рис. 6.4 представлены эюры напряжений для различных профилей при косом изгибе.

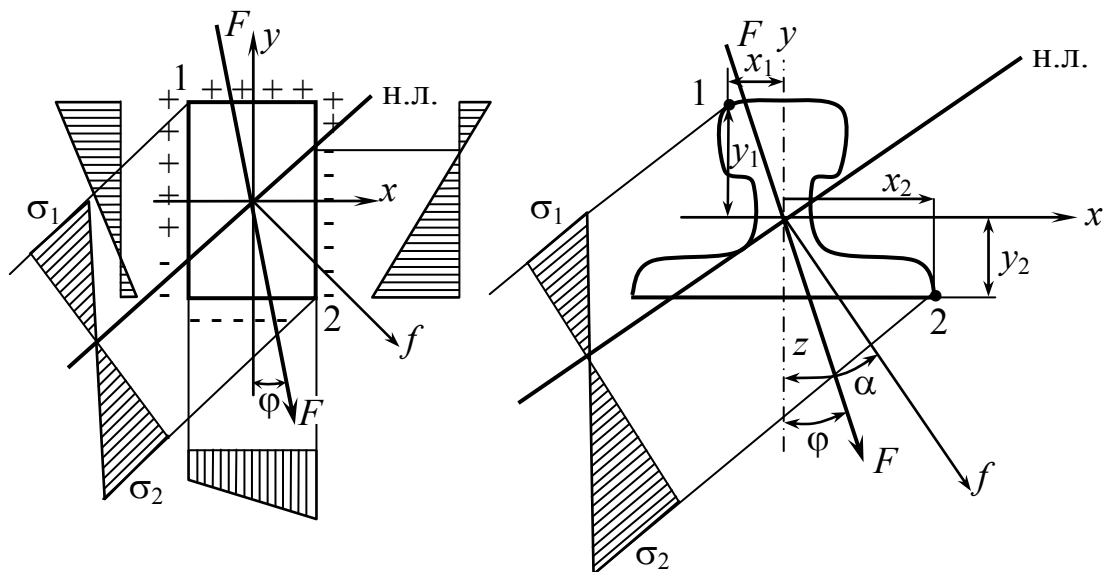


Рис. 6.4

## Условие прочности для пластичных материалов

$$\sigma_{1,2} = M_{\max} \left( -x_{1,2} \frac{\sin\varphi}{I_y} + y_{1,2} \frac{\cos\varphi}{I_x} \right) \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \left( -x_{1,2} \frac{\sin\varphi}{I_y} + y_{1,2} \frac{\cos\varphi}{I_x} \right) \leq [\sigma],$$

если  $|x_1| = |x_2| = x_{\max}$ ,  $|y_1| = |y_2| = y_{\max}$ .

$$\sigma_{1,2} = M_{\max} \left( -\frac{\sin\varphi}{\frac{I_y}{x_{\max}}} + \frac{\cos\varphi}{\frac{I_x}{y_{\max}}} \right) = M_{\max} \left( -\frac{\sin\varphi}{W_y} + \frac{\cos\varphi}{W_x} \right) \leq [\sigma].$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{M_{\max}}{W_x} \left( -\frac{W_x}{W_y} \cdot \sin\varphi + \cos\varphi \right) \leq [\sigma].$$

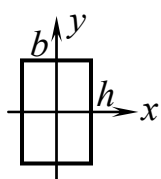


Рис. 6.5

$$\frac{W_x}{W_y} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{h}{b} \quad \text{— соотношение моментов сопротивления относительно осей } x \text{ и } y \text{ для прямоугольного сечения (рис. 6.5)}$$



## 6.4. Определение деформаций при косом изгибе

*Ключевые слова*

*Косой изгиб, прямоугольное сечение, перемещения по осям, суммарное перемещение, нейтральная линия.*

Определить деформации в прямоугольном сечении (рис. 6.6).

$$\begin{aligned}
 E \cdot I_y \cdot \ddot{f}_x &= M_y & E \cdot I_x \cdot \ddot{f}_y &= M_x \\
 f_x &=? & f_y &=? \\
 f &= \sqrt{f_y^2 + f_x^2}, \\
 f &= \frac{f_x}{\sin \alpha}.
 \end{aligned}$$

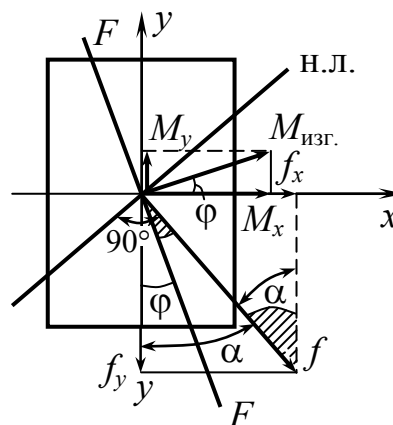


Рис. 6.6

## 6.5. Внецентренное растяжение и сжатие прямых стержней

*Ключевые слова*

*Эксцентриситет, чистый изгиб, главная плоскость, радиусы инерции, уравнение нейтральной линии, условие прочности.*

Внецентренное растяжение или сжатие приводится к осевому растяжению или сжатию и изгибу (рис. 6.7).

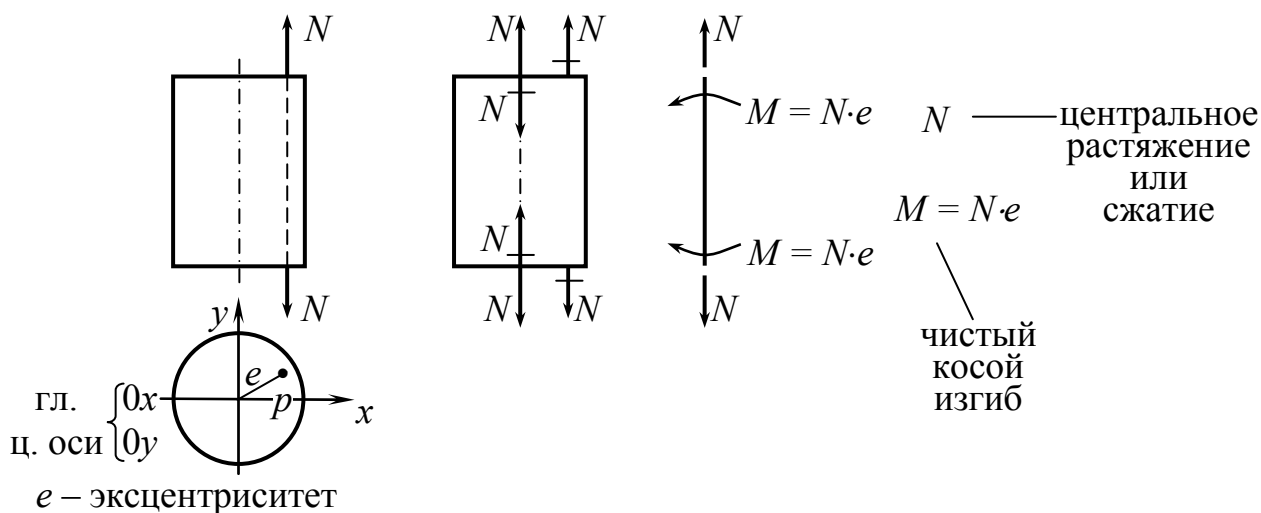


Рис. 6.7

Чистый косой изгиб –  $M_{изг}$  действует в плоскости  $z0p$ , не являющейся главной плоскостью (рис. 6.8).

$$\text{т. } p \quad \left. \begin{aligned} N \\ M_x = N \cdot y_p \\ M_y = N \cdot x_p \end{aligned} \right\}$$

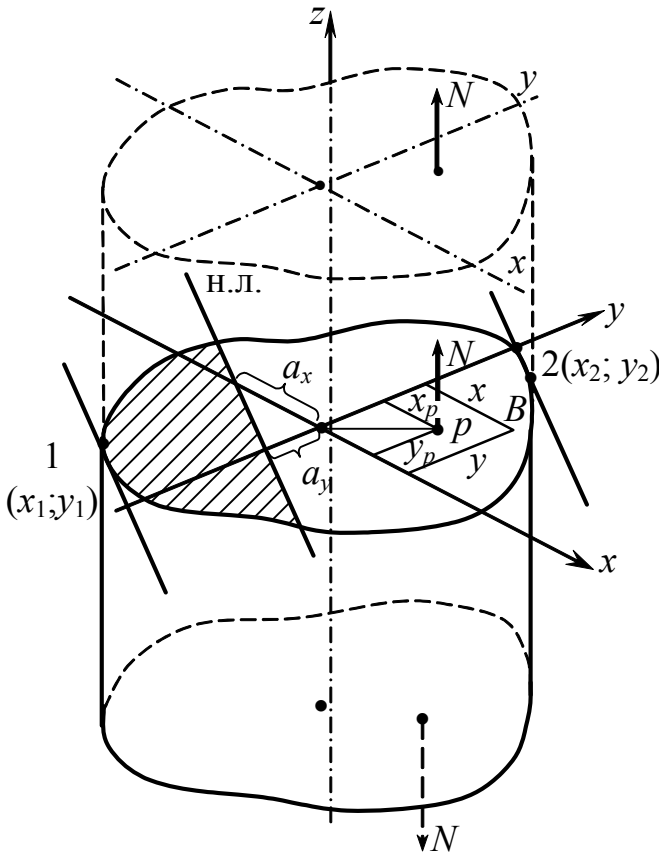


Рис. 6.8

В т.  $B$  имеем

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x + \frac{N}{A};$$

$$\sigma = \frac{N \cdot y_p \cdot y}{I_x} + \frac{N \cdot x_p \cdot x}{I_y} + \frac{N}{A};$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \left( \frac{y_p \cdot y}{I_x} + \frac{x_p \cdot x}{I_y} + 1 \right); \quad (6.4)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \left( \frac{y_p \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x}{i_y^2} + 1 \right); \quad (6.5)$$

$$\frac{I_x}{A} = i_x^2; \quad \frac{I_y}{A} = i_y^2,$$

$i_x, i_y$  – радиусы инерции.

Уравнение нейтральной оси  $\sigma = 0$ .

$y_0, x_0$  – координаты нейтральной линии.

$$\frac{y_p \cdot y_0}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_0}{i_y^2} + 1 = 0 \text{ – уравнение нейтральной линии.} \quad (6.6)$$

$$\frac{y_0}{-\frac{i_x^2}{y_p}} + \frac{x_0}{-\frac{i_y^2}{x_p}} = 1; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_p}; \quad a_x = -\frac{i_y^2}{x_p}. \quad (6.7)$$

Условие прочности

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{A} \left( \frac{y_p \cdot y_{1,2}}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_{1,2}}{i_y^2} + 1 \right) \leq [\sigma].$$

## 6.6. Ядро сечения

*Ключевые слова*

*Постоянство знака напряжений, положение нейтральной линии, центр тяжести сечения, контур сечения, ядро сечения.*

В ряде случаев бывает необходимо обеспечить постоянство знаков напряжений в пределах всего сечения, например, только сжатие в случае внецентренно сжатой колонны, изготовленной из материала, плохо сопротивляющегося растяжению. Напряжения будут одного знака, если нейтральная линия не пересекает сечение (в пределе может коснуться его). Из формулы (6.7) следует, что положение нейтральной линии определяется положением полюса  $p$ , чем ближе полюс к началу координат, тем нейтральная линия дальше от начала координат.

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_p}; \quad a_x = -\frac{i_y^2}{x_p}.$$

$$x_p \rightarrow 0; \quad a_x \rightarrow \infty.$$

$$y_p \rightarrow 0; \quad a_y \rightarrow \infty.$$

Ядром сечения называется такая замкнутая область вокруг центра тяжести сечения (рис. 6.9), что если полюс будет находиться в пределах ядра, нейтральная линия не будет пересекать сечение (если полюс находится на границе ядра, то по смыслу определения нейтральная линия будет касаться контура сечения).

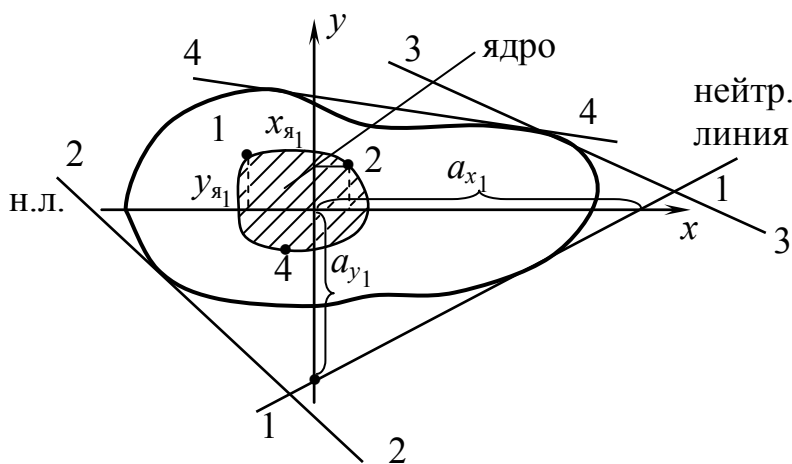


Рис. 6.9

$$\left. \begin{aligned} x_p &= -\frac{i_y^2}{a_x} \\ y_p &= -\frac{i_x^2}{a_y} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

$$x_{\text{ядра}_1} = -\frac{i_y^2}{a_x};$$

$$y_{\text{ядра}_1} = -\frac{i_x^2}{a_y}.$$

## 6.7. Совместное действие изгиба с кручением

*Ключевые слова*

*Внутренние силы, круглые сечения, нормальные, касательные напряжения, опасные сечения, эпюры изгибающих и крутящего моментов, главные напряжения, теории прочности, проверка прочности, суммарный изгибающий момент, плоское напряженное состояние, эквивалентный момент.*

**Круглые валы.** Силы, действующие на валы (давление на зубья шестерен, натяжение ремней, собственный вес вала, шкивов и т.п.), вызывают в поперечных сечениях валов следующие внутренние силовые факторы:  $T = M_z$ ;  $M_y$ ;  $M_x$ ;  $Q_y$  и  $Q_x$ ;  $N_z$ .

Таким образом, в любом поперечном сечении одновременно возникают нормальные напряжения от изгиба в двух плоскостях, а также касательные напряжения от крутящего момента и поперечных сил. Для расчета вала в первую очередь необходимо установить опасные сечения. С этой целью должны быть построены эпюры изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  и крутящего момента  $T$ . Умея определять нормальные и касательные напряжения в различных точках вала, а также главные напряжения, можно по той или иной теории прочности произвести проверку прочности данного вала.

Нагрузки, действующие на вал, разлагаем на составляющие вдоль координатных осей, а затем строим эпюры.

При изгибе вала круглого сечения в каждом из его сечений имеет место прямой изгиб под действием результирующего изгибающего момента  $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ .

Пусть  $M_x = a + bz$ ;  $M_y = c + dz$  ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  – постоянные коэффициенты), тогда  $M = \sqrt{(a + bz)^2 + (c + dz)^2}$ . Выражение, стоящее под радикалом, лишь в некоторых частных случаях является полным квадратом (например, при  $a = c = 0$ ), а в большинстве случаев эпюра криволинейна, причем  $M \leq \sqrt{a^2 + c^2} + \left(\sqrt{b^2 + d^2}\right)z$ .

Это позволяет строить эпюры  $M$  упрощенным способом, несколько завышая значения суммарного изгибающего момента  $M$  на участках между переломами эпюры. Величины суммарного изгибающего момента вычисляются лишь для тех сечений, в которых на эпюрах  $M_y$  и  $M_x$  есть переломы.

Эти величины откладывают в масштабе по одну сторону на эпюре и соединяют прямой.

Далее строим эпюру крутящих моментов.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W}; \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_p}.$$

У наиболее опасной точки  $A$  выделим элемент (рис. 6.10). По четырем граням его действуют касательные напряжения, а к двум из этих граней приложены еще и нормальные напряжения. Остальные две грани свободны. Таким образом, элемент при изгибе с кручением в опасной точке находится в плоском напряженном состоянии.

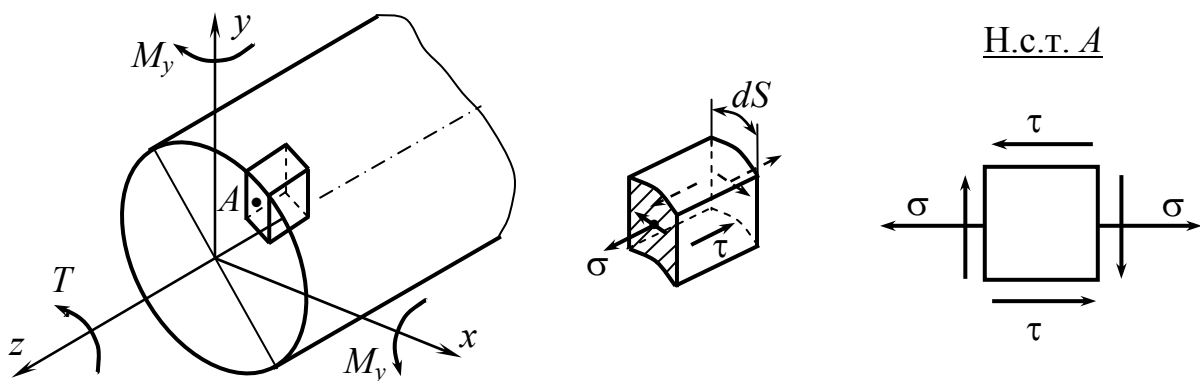


Рис. 6.10

Главные напряжения нужно определять по формулам

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[ \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \left[ \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right].$$

Для проверки прочности элемента выбираем соответствующую теорию прочности.

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad W_p^{\text{III}} = 2W_y = 2W_x = 2W.$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\frac{M_{\text{из}}^2}{W^2} + 4\frac{T^2}{(2W)^2}} = \sqrt{\frac{M_{\text{из}}^2 + T^2}{W^2}} \leq [\sigma]; \quad M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + T^2};$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{M_{\text{из}}^2 + 0,75T^2}{W^2}} \leq [\sigma]; \quad M_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75T^2};$$

$$W = 0,1d^3; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЭКВ}}}{0,1[\sigma]}}.$$

## 6.8. Совместное действие изгиба с кручением для стержней некруглого сечения

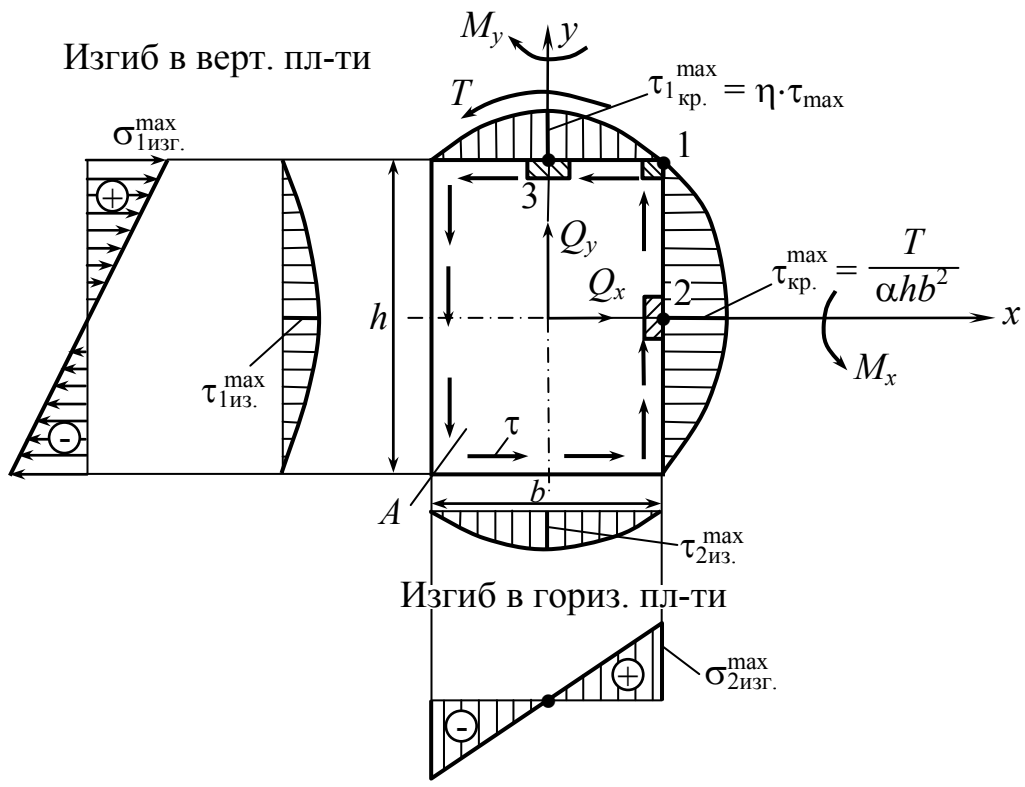
*Ключевые слова*

*Прямоугольное сечение, внутренние силы, эпюры напряжений, проверка прочности в опасных точках.*

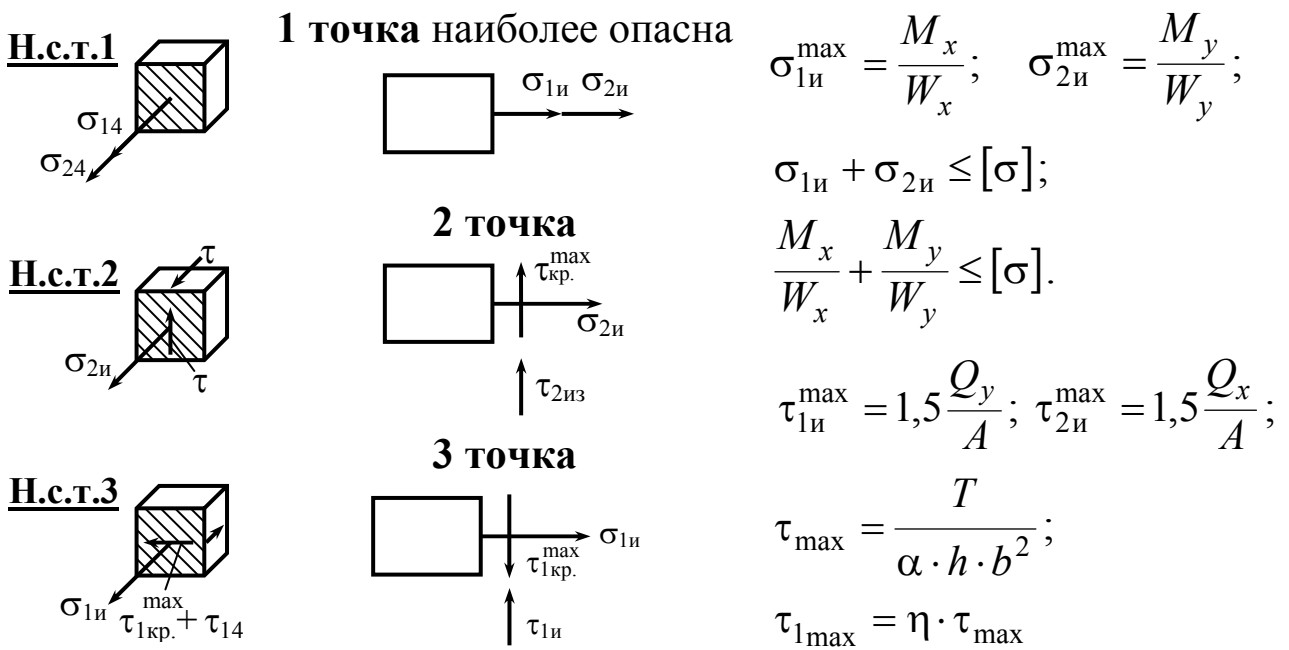
В сечении действует  $M_x, M_y, M_z = T, Q_x, Q_y$  (рис. 6.11).

Расчет на прочность стержня при изгибе с кручением. Наиболее опасными точками сечения могут быть точки 1, 2, 3. Напряженные состояния в наиболее опасных точках сечения представлены на рис. 6.11, б. Во всех точках плоское напряженное состояние.

Проверка прочности в точках 1, 2 и 3 представлена в табл. 6.1.



a



b

Рис. 6.11. a – распределение нормальных и касательных напряжений по сечению при изгибе с кручением, б – напряженное состояние в точках 1, 2, 3

Таблица 6.1

Наиболее опасные точки сечения	Эквивалентное напряжение	Условие прочности
1	$\sigma_{\max} = \sigma_{1и} + \sigma_{2и}$	$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$
2	$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{2и}^2 + 4\tau_{\max}^2}$	$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} \leq [\sigma]$
3	$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{1и}^2 + 4\tau_{\max}^2}$	$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} \leq [\sigma]$

Из условия прочности делается заключение о прочности конструкции или определяются размеры сечения, допускаемая нагрузка.

**Пример 1.** Определить диаметр опасного сечения промежуточного вала цилиндрического косозубого редуктора (рис. 6.12).

Вал изготовлен из стали с пределом текучести  $\sigma_T = 340$  МПа, требуемый коэффициент запаса  $[n] = 2,5$ . При расчете применить гипотезу наибольших касательных напряжений. Влиянием продольных и поперечных сил пренебречь. Вал передает мощность  $P = 40$  л.с. при угловой скорости  $n = 300$  об/мин.

Радиальная сила  $R = 0,36F$ . Осевая сила  $A = 0,2F$ . Эти силы вы будете определять в курсе деталей машин, где для их вычисления будут даны формулы.



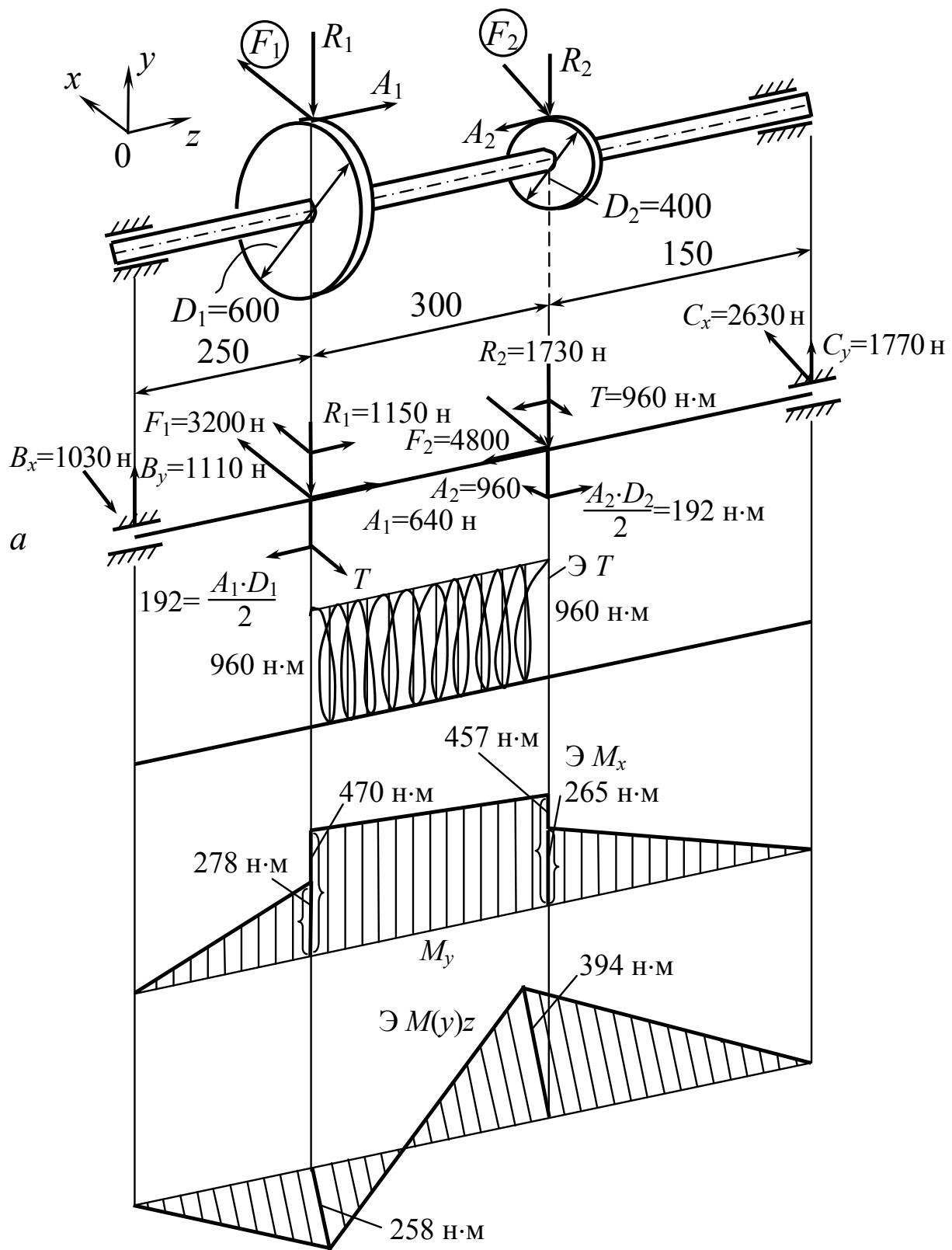


Рис. 6.12

## Решение.

Определяем момент, передаваемый валом:

$$T = 71620 \frac{P}{n} = 7162,0 \frac{40}{300} = 960 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Определяем силы, действующие на зубчатые колеса.

Окружные силы

$$F_1 = \frac{2T}{D_1} = \frac{2 \cdot 960}{0,6} = 3200 \text{ н};$$

$$F_2 = \frac{2T}{D_2} = \frac{2 \cdot 960}{0,4} = 4800 \text{ н}.$$

Радиальная сила и осевая силы на первом колесе

$$R = 0,36F_1 = 0,36 \cdot 3200 = 1150 \text{ н};$$

$$A_1 = 0,2F_1 = 0,2 \cdot 3200 = 640 \text{ н}.$$

То же на втором колесе

$$R = 0,36F_2 = 0,36 \cdot 4800 = 1730 \text{ н};$$

$$A_2 = 0,2F_2 = 0,2 \cdot 4800 = 960 \text{ н}.$$

Для этой расчетной схемы определяем опорные реакции и строим эпюры  $M_x$ ,  $M_y$  и  $T$ . Значения реакций приводим непосредственно на чертеже (рис. 6.12, а).

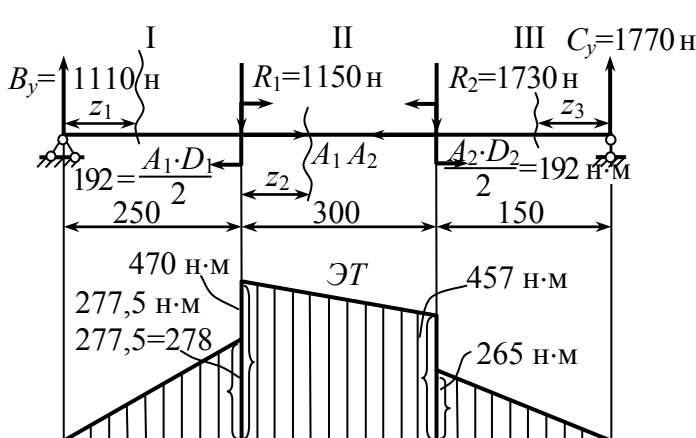


Рис. 6.13

В плоскости  $z0y$  (рис. 6.13)

$$\sum \text{Мом}_C(F) = 0:$$

$$B_y \cdot 700 + m - R \cdot 450 - m - R \cdot 150 = 0;$$

$$B_y = \frac{1150 \cdot 450 + 1730 \cdot 150}{700} = 1110 \text{ н}.$$

$$\sum \text{Мом}_B(F) = 0:$$

$$-C_y \cdot 700 + R \cdot 550 - m + m + R \cdot 250 = 0;$$

$$C_y = \frac{1730 \cdot 550 + 1150 \cdot 250}{700} = 1770 \text{ Н.}$$

Для построения эпюры изгибающих моментов вал разбиваем на участки I, II, III.

**I участок**  $0 \leq z_1 \leq 250$  мм.

$$M_{x_{z_1}} = B_y \cdot z_1, \text{ при } z_1 = 0. \quad M_{x_{z_1=0}} = 0 \text{ при } z_1 = 250.$$

$$M_{x_{z_1=250}} = B_y \cdot z_1 = 1110 \cdot 0,25 = 277,5, \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

**II участок**  $0 \leq z_2 \leq 300 = 0,3$  м.

$$M_{x_{z_2}} = B_y \cdot (z_2 + 0,25) + \frac{A_1 D_1}{2} - T_1 \cdot z_2.$$

$$M_{x_{z_2=0}} = B_y \cdot 0,25 + \frac{A_1 D_1}{2} = 1110 \cdot 0,25 + 192 = 470 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

$$M_{x_{z_2=0,3}} = B_y \cdot (0,3 + 0,25) + \frac{A_1 D_1}{2} - T_1 \cdot 0,3 = \\ = 1110 \cdot 0,55 + 198 - 1150 \cdot 0,3 = 457 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

**III участок**  $0 \leq z_3 \leq 0,15$  м.

$$M_{x_{z_3}} = C_y \cdot z_3; \text{ при } M_{x_{z_3=0}} = 0,$$

$$M_{x_{z_3=0,15}} = C_y \cdot z_3 = 1770 \cdot 0,15 = 265 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

В плоскости  $zOx$  (рис. 6.14)

$$\sum M_{C_x}(F) = 0:$$

$$-B_x \cdot 700 + F_1 \cdot 450 - F_2 \cdot 150 = 0;$$

$$B_x = \frac{3200 \cdot 450 - 4800 \cdot 150}{700} = \\ = 1028 \text{ Н} \approx 1030 \text{ Н.}$$

$$\sum M_{B_x}(F) = 0:$$

$$-C_x \cdot 700 + F_2 \cdot 550 - F_1 \cdot 250 = 0;$$

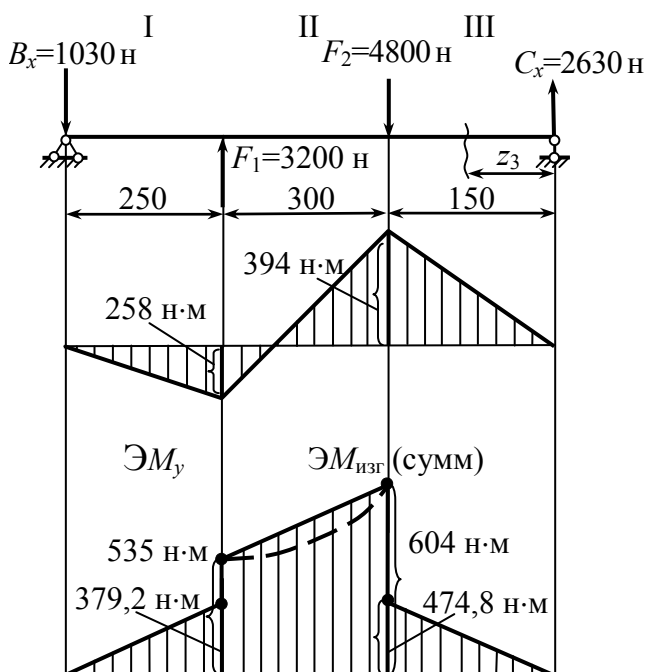


Рис. 6.14

$$C_x = \frac{4800 \cdot 550 - 3200 \cdot 250}{700} = 2628 \text{ Н} \approx 2630 \text{ Н}.$$

**I участок**  $0 \leq z_1 \leq 0,25$  м.

$$M_{y_{z_1}} = -B_y z_1 = -1030 \cdot 250 = 250 \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad \text{При } z_1 = 0 \quad M_{y_{z_1=0}} = 0,$$

$$\text{при } z = 0,25 \text{ м} \quad M_{y_{z_1=0,25}} = 1030 \cdot 0,25 = 250 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

**III участок**  $0 \leq z_3 \leq 0,15$  м.

$$M_{y_{z_3}} = C_x \cdot z_3. \quad \text{При } z_3 = 0 \quad M_{y_{z_3}} = 2630 \cdot 0 = 0,$$

$$\text{при } z_3 = 0,15 \quad M_{y_{z_3}} = 2630 \cdot 0,15 = 394 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для выяснения вопроса о том, какое сечение – под серединой первого или второго колеса, является опасным, вычисляем значения результирующих изгибающих моментов в указанных сечениях.

$$M_u \text{ I} = \sqrt{470^2 + 258^2} = 535 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$M_u \text{ II} = \sqrt{457^2 + 394^2} = 604 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Так как значения крутящих моментов в рассматриваемых сечениях одинаковы, а изгибающий момент больше в сечении II, то, следовательно, оно и является опасным.

Условие прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}}{W_u} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + T^2}}{W_u} \leq [\sigma], \quad \text{где } W_u = 0,1d^3.$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n]} = \frac{340}{2,5} = 136 \text{ МПа}.$$

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{457^2 + 394^2 + 960^2} = 1140 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Требуемый диаметр вала в опасном сечении

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{1140}{0,1 \cdot 136 \cdot 10^6}} = 4,37 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Округляя найденное значение диаметра до ближайшего стандартного по ГОСТ 6636–86 окончательно принимаем  $d = 45$  мм.

**Пример 2.**  $F = 6000 \text{ Н}$ ;  $l = 0,5 \text{ м}$ ;  $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{т сж}} = 240 \text{ МПа}$ ;  $n_{\text{т}} = 2$ ;  $\frac{h}{b} = 2$ .

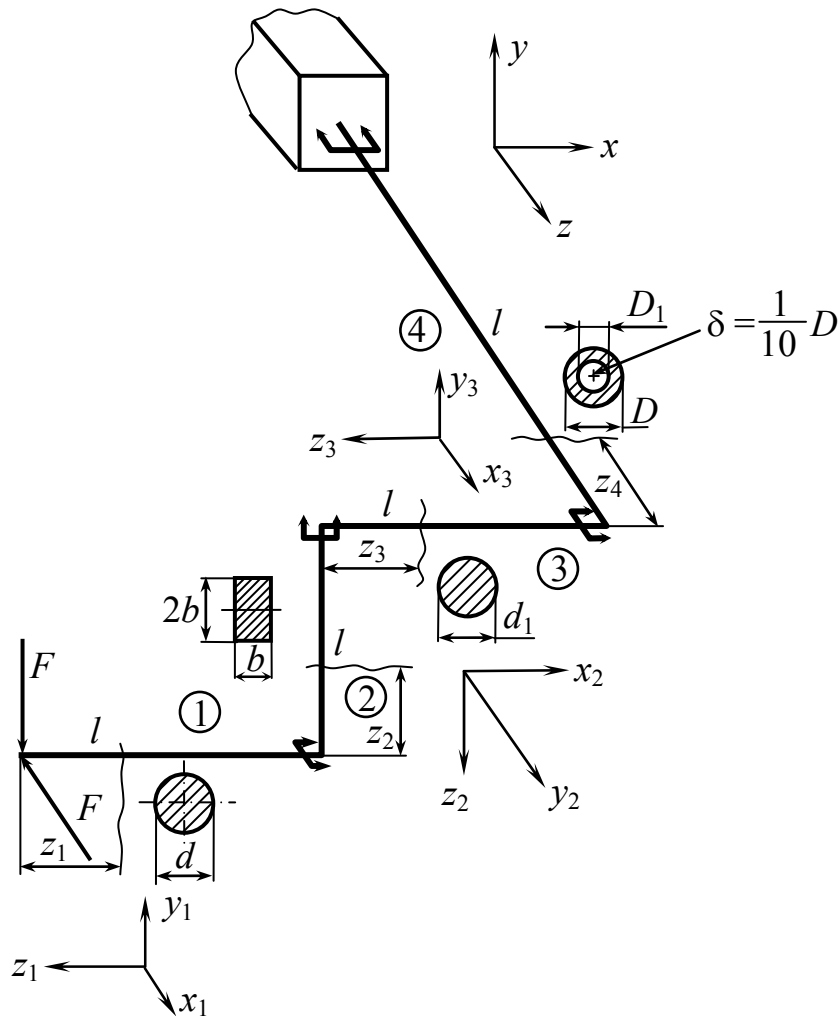


Рис. 6.15

Для консольной рамы (рис.6.15) построить эпюры изгибающих и крутящих моментов и из условия прочности определить размеры поперечного сечения для каждого участка рамы, используя четвертую гипотезу пластичности и разрушения.

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq l$ .

$$M_x = F \cdot z_1; \quad M_y = F \cdot z_1 \text{ (рис.6.16).}$$

При  $z_1 = 0$   $M_{x_1} = 0$  и  $M_{y_1} = 0$ .

При  $z_1 = l$   $M_{x_1} = Fl$  и  $M_{y_1} = Fl$ .

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{(Fl)^2 + (Fl)^2} = Fl \cdot \sqrt{2}.$$

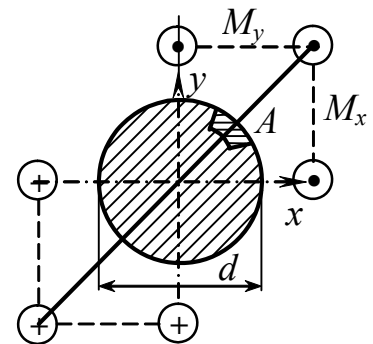


Рис. 6.16

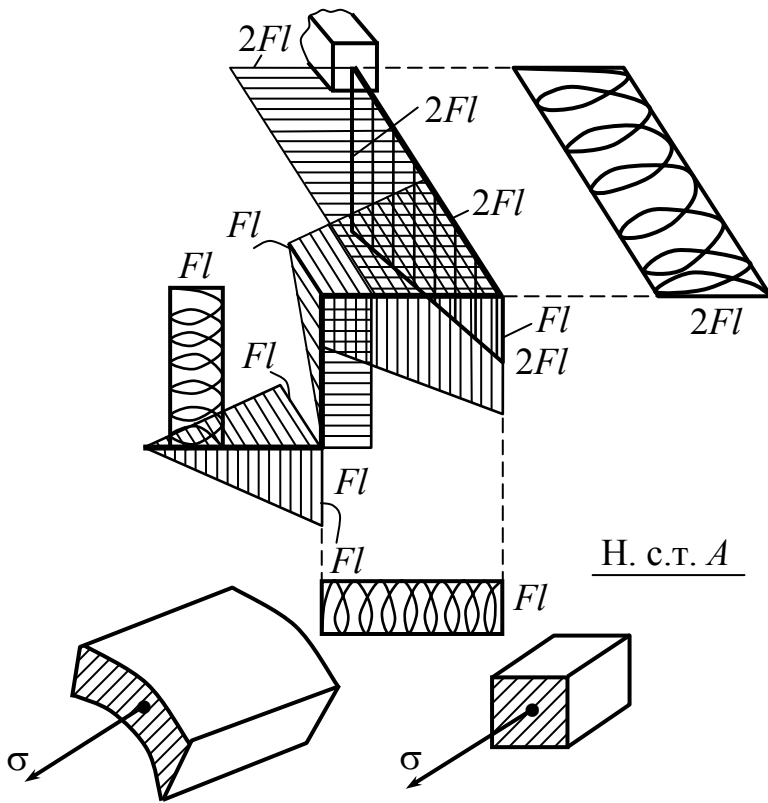


Рис. 6.17

Эпюры изгибающих и крутящих моментов представлены на рис. 6.17. Из условия прочности определим размеры поперечного сечения I участка.

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_p;$$

$$[\sigma]_p = [\sigma]_{\text{сж}} = \frac{\sigma_T}{2} = 120 \text{ МПа};$$

$$\frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{изг}}} \leq [\sigma]_p;$$

$$W_{\text{изг.}} = 0,1d^3;$$

$$\frac{M_{\text{изг.}}}{0,1d^3} \leq [\sigma];$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{изг.}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{Fl\sqrt{2}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6000 \cdot 0,5 \cdot 1,41}{0,1 \cdot 120 \cdot 10^6}} = 7,06 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 71 \text{ мм}.$$

Округляем полученный диаметр стержня на I участке по ГОСТ 6636–86 до 75 мм.

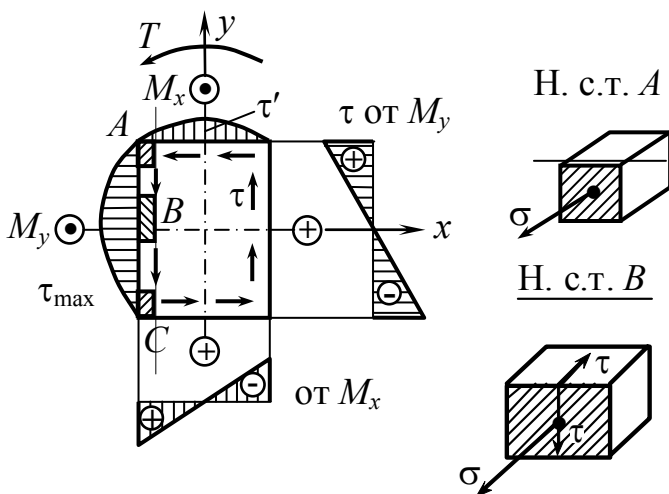


Рис. 6.18

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq l$ .

$$M_y = F \cdot l; \quad M_x = F \cdot z_2;$$

$$T = F \cdot l \text{ (рис. 6.18).}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_x}{W_x}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Fl}{\frac{b(2b)^2}{b}} + \frac{Fl}{\frac{2b \cdot b^2}{b}} = 4,5 \frac{Fl}{b^3}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{F \cdot l}{\frac{2b \cdot b^2}{6}} = 3 \frac{F \cdot l}{b^3}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{F \cdot l}{\frac{2b \cdot b^2}{6}} = 3 \frac{F \cdot l}{b^3}.$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha h b^2} \cdot \frac{h}{b} = 2. \quad \alpha = 0,246.$$

$$\tau_{\max} = \frac{F \cdot l}{0,246 \cdot 2b \cdot b^2} = 2,03 \frac{F \cdot l}{b^3}.$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]_p.$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{F \cdot l}{b^3} \sqrt{3^2 + 3 \cdot 2,03^2} = 4,62 \frac{F \cdot l}{b^3} \leq [\sigma].$$

Наиболее опасной точкой в наиболее опасном сечении второго участка является точка  $B$ , определим размер  $b$ .

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{4,62 \cdot Fl}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{4,62 \cdot 6000 \cdot 0,5}{120 \cdot 10^6}} = 4,87 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 48,7 \text{ мм}.$$

**III участок:**  $0 \leq z_3 \leq l$ .

$$M_{x_{z_3}} = F(l + z_3); \quad M_{y_{z_3}} = F(l + z_3);$$

$$T_{z_3} = Fl \text{ (рис.6.19)}.$$

$$\text{При } z_3 = 0 \quad M_{x_{z_3=0}} = Fl;$$

$$M_{y_{z_3=0}} = Fl; \quad T_{z_3=0} = Fl.$$

$$\text{При } z_3 = l \quad M_{x_{z_3=l}} = 2Fl;$$

$$M_{y_{z_3=l}} = 2Fl; \quad T = Fl.$$

$$W_{\text{изг.}} = 0,1d_1^3;$$

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = M_{x_3}^2 + M_{y_3}^2 + 0,75T^2 = \sqrt{(Fl)^2 + (Fl)^2 + 0,75(Fl)^2} = Fl\sqrt{2,75};$$

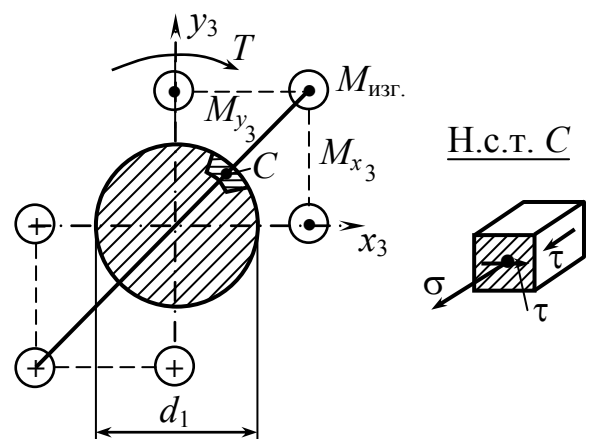


Рис. 6.19

$$\sigma_{\text{ЭКВ.}}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{ЭКВ.}}^{\text{IV}}}{W_{\text{изг.}}} = \frac{M_{\text{ЭКВ.}}^{\text{IV}}}{0,1d_1^3} \leq [\sigma];$$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЭКВ.}}^{\text{IV}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{Fl \cdot \sqrt{2,75}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6000 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{2,75}}{0,1 \cdot 120 \cdot 10^6}} = 7,46 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 74,6 \text{ мм}.$$

Округляем полученный диаметр стержня на 3-м участке по ГОСТ 6636–86 до 75 мм.

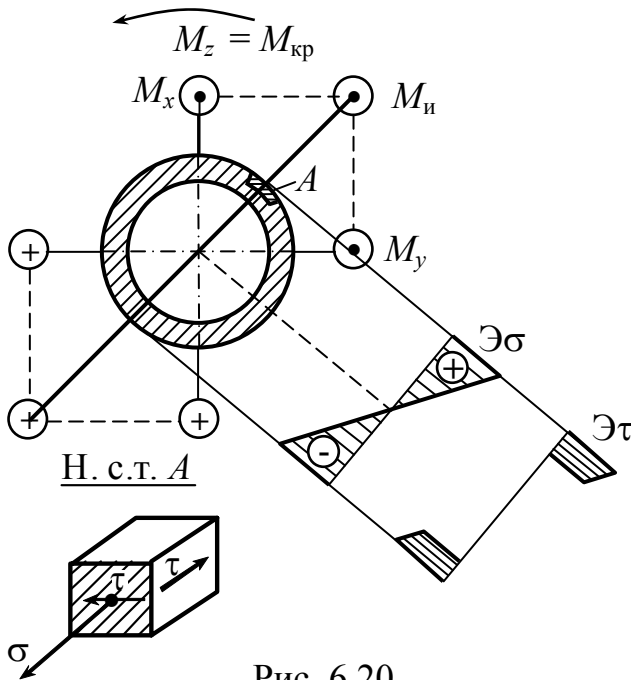


Рис. 6.20

**IV участок:**  $0 \leq z_4 \leq l$ .

$$M_{x_{z_4}} = Fl + Fz_4;$$

$$M_{y_{z_4}} = Fl + Fz_4;$$

$$M_{x_{z_4}} = F2l \text{ (рис.6.20).}$$

$$\text{При } z_4 = 0 \quad M_{x_{z_4=0}} = Fl;$$

$$M_{y_{z_4=0}} = Fl.$$

$$\text{При } z_4 = l \quad M_{x_{z_4=l}} = Fl + Fl = 2Fl;$$

$$M_{y_{z_4=l}} = 2Fl.$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{изг}}} = \sqrt{\frac{(2Fl)^2 + (2Fl)^2}{W_{\text{изг}}}};$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{изг}}} = \sqrt{\frac{(2Fl)^2 + (2Fl)^2}{W_{\text{изг}}}};$$

$$W_{\text{изг}} \cong 0,1D^3(1 - c^4).$$

$$c = \frac{d_1}{D} = \frac{0,8D_1}{D} = 0,8.$$

$$W_{\text{изг}} = 0,1D^3(1 - 0,8^4) = 0,036D^3.$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{п}}} = \frac{Fl}{2 \cdot W_{\text{изг}}}.$$



$$M_{\text{ЭКВ.}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75T^2} = \sqrt{(2Fl)^2 + (2Fl)^2 + 0,75(2Fl)^2} = Fl\sqrt{11}.$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ.}}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{ЭКВ.}}^{\text{IV}}}{W_{\text{ИЗГ.}}} \leq [\sigma].$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЭКВ.}}^{\text{IV}}}{0,036[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{Fl\sqrt{11}}{0,036[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6000 \cdot 0,5 \cdot 13,32}{0,036 \cdot 120 \cdot 10^6}} = \sqrt[3]{\frac{2305}{10^6}} =$$

$$= 12,3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 123 \text{ мм}.$$

Округляем полученный диаметр стержня на 4-м участке по ГОСТ 6636–86 до 125 мм.

### Контрольные вопросы

1. Что называется сложным сопротивлением?
2. Как определяются нормальные напряжения при сложном сопротивлении?
3. Какую поверхность представляют собой векторы нормальных напряжений, действующих по сечению стержня?
4. Запишите уравнение для определения нормальных напряжений в сечении бруса по гипотезе Навье.
5. Какие виды сложного сопротивления вы знаете?
6. Какой изгиб называется косым?
7. Что представляет собой силовая линия при косом изгибе?
8. Как распределяются нормальные напряжения по сечению при косом изгибе?
9. Как проходит нейтральная линия при косом изгибе?
10. Каково взаимное расположение силовой и нейтральной линий при косом изгибе?
11. В сторону какой оси происходит прогиб при косом изгибе?
12. Может ли балка круглого поперечного сечения испытывать косой изгиб?

13. Чему равно нормальное напряжение в центре тяжести поперечного сечения при косом изгибе?
14. В каких точках поперечного сечения нормальные напряжения при косом изгибе достигают максимальных значений?
15. Какой вид имеют условия прочности при косом изгибе?
16. Как вычисляются перемещения при косом изгибе?
17. К чему приводит внецентренное растяжение или сжатие прямых стержней?
18. Как распределяются нормальные напряжения при внецентренном продольном нагружении?
19. Чему равно нормальное напряжение в центре тяжести поперечного сечения при внецентренном продольном нагружении?
20. Как определяется положение нейтральной линии при внецентренном продольном нагружении?
21. Запишите уравнение нейтральной линии при внецентренном продольном нагружении.
22. Что такое ядро сечения?
23. Как проходит нейтральная линия, если полюс расположен на границе ядра сечения?
24. Как ведет себя полюс при вращении нейтральной линии вокруг некоторой неподвижной точки?
25. Какой вид имеет ядро сечения для прямоугольника?
26. Какие точки являются опасными при внецентренном продольном нагружении?
27. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях вала при изгибе с кручением и растяжением или сжатием?
28. Какие точки являются опасными при изгибе с кручением стержня круглого сечения?

29. Почему эпюра результирующего изгибающего момента в большинстве случаев криволинейная?
30. Как записывается условие прочности при изгибе с кручением круглого вала?
31. Как выполняется расчет на прочность стержня прямоугольного сечения, работающего на изгиб с кручением?

## Глава 7. Методы потенциальной энергии

### Ключевые слова

Работа внешних и внутренних сил, потенциальная энергия деформаций, обобщенная сила, обобщенное перемещение.

$W_F$  – работа внешних сил (положительная).

При действии внешних сил происходят деформации, возникают внутренние силы, они совершают работу.

$W_{\text{вн}} < 0$  – работа внутренних сил отрицательна.

В процессе деформации происходит накопление потенциальной энергии деформаций.

Предположение: деформации упруги (обратимы), сила и деформация линейно зависимы друг от друга.

Обобщенная сила – это собственно сила, пара сил, группа сил вообще.

Обобщенное перемещение – это перемещение, соответствующее обобщенной силе. Соответственно – произведение обобщенного перемещения на обобщенную силу дает работу.

1) Дано упругое тело, в точках приложены силы  $|F_1| = |F_2| = F$  (рис. 7.1, а).

Точка  $A$  перемещается по какой-то причине в точку  $A'$ , а точка  $B$  в точку  $B'$ .

$$W_F = F_2 \cdot \Delta_2 - F_1 \cdot \Delta_1 = F(\Delta_2 - \Delta_1) = F \cdot \lambda,$$

$(F_1, F_2)$  – обобщенная сила;  $\lambda$  – обобщенное перемещение, изменение расстояния между точками  $A$  и  $B$  в направлении  $\overline{AB}$ .

2) Дано упругое тело, в точках приложены  $(M_1, M_2)$  – 2 пары, обобщенная сила (рис. 7.1, б)

$$|M_1| = |M_2| = M.$$

$$W_M = M_1 \cdot \Delta\varphi_1 + M_2 \cdot \Delta\varphi_2 = M(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2) = M \cdot \Delta\alpha,$$

$\Delta\alpha$  – обобщенное перемещение (координата в механике).

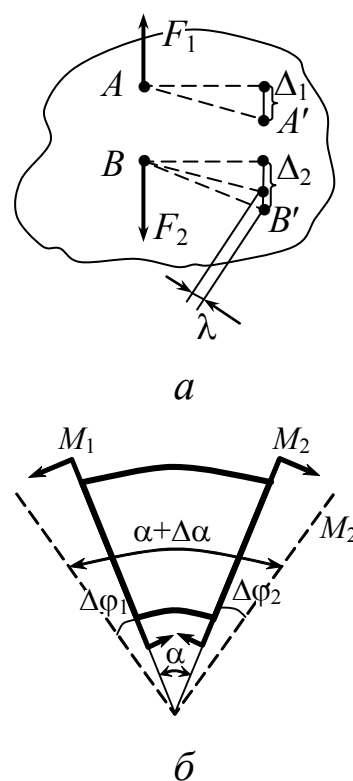


Рис. 7.1

## 7.1. Единичная сила. Единичное перемещение. Представление полного перемещения как суммы перемещений, вызванных отдельными силами (система обозначений)

*Ключевые слова*

*Единичная обобщенная сила, единичное перемещение, сумма перемещений, принцип независимости действия сил, система нагрузок.*

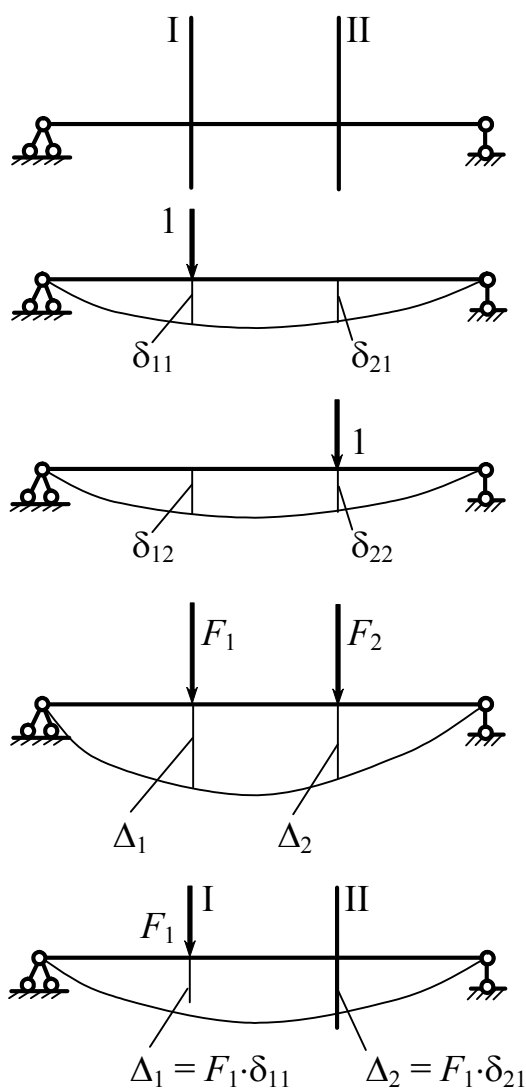


Рис.7.2

$F = 1$  – обобщенная сила или просто сила, равная единице (рис. 7.2).

$\delta$  – единичное перемещение, перемещение в соответствующей точке, вызванное единичной силой.

$\delta_{ik}$  – перемещение в точке  $i$ , вызванное единичной силой, приложенной в точке  $k$  (или в направлении).

$\delta_{11}$  – прогиб в сечении I под действием силы 1.

$\delta_{21}$  – прогиб в сечении II под действием силы 1.

$\Delta_1$  и  $\Delta_2$  – можно определять как сумму перемещений, вызванных каждой силой в отдельности; при небольших деформациях применим принцип независимости действия сил.

$$\Delta_1 = F_1 \cdot \delta_{11} + F_2 \cdot \delta_{12};$$

$$\Delta_2 = F_1 \cdot \delta_{21} + F_2 \cdot \delta_{22}.$$

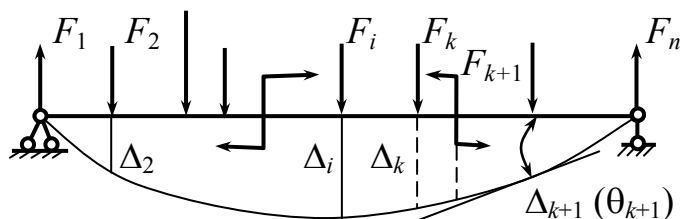


Рис.7.3

$\Delta_{i(F_{k+1})} = \delta_{ik+1} \cdot F_{k+1}$  – прогиб от момента (рис. 7.3).

$$\Delta_i = F_1 \cdot \delta_{i1} + F_2 \cdot \delta_{i2} + \dots + F_i \cdot \delta_{ii} + F_k \cdot \delta_{ik} + \dots + F_n \cdot \delta_{in}; \quad (7.1)$$

$$\Delta_2 = F_1 \cdot \delta_{21} + F_2 \cdot \delta_{22} + \dots + F_i \cdot \delta_{2i} + \dots + F_k \cdot \delta_{2k} + \dots + F_n \cdot \delta_{2n}.$$

## 7.2. Работа внешних сил при упругой деформации

*Ключевые слова*

*Формула работы внешних сил, податливость системы, работа группы сил.*

$W_F$  – работа (рис. 7.4), определяется по следующей формуле

$$W_F = \frac{1}{2} F \cdot \Delta,$$

где  $\Delta = \alpha \cdot F$ ;  $\alpha$  – податливость системы.

Для растяжения  $\alpha = \frac{l}{E \cdot A}.$

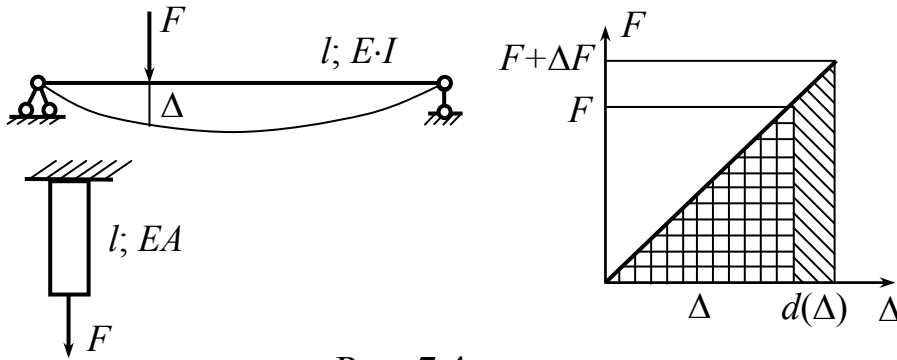


Рис. 7.4

Для группы сил  $F$  имеем:

$$W_F = \frac{1}{2} F_1 \cdot \Delta_1 + \frac{1}{2} F_2 \cdot \Delta_2 + \dots + \frac{1}{2} F_i \cdot \Delta_i + \frac{1}{2} F_k \cdot \Delta_k + \dots + \frac{1}{2} F_n \cdot \Delta_n = \frac{1}{2} \sum_1^n F_i \cdot \Delta_i; \quad (7.2)$$

$$W_F = \frac{1}{2} \sum F_i \cdot \Delta_i; \quad \Delta_i = F_1 \cdot \delta_{i1} + F_2 \cdot \delta_{i2} + \dots + F_i \cdot \delta_{ii} + F_k \cdot \delta_{ik} + F_n \cdot \delta_{in}.$$

Таким образом,  $W_F$  есть квадратичная функция сил. Поэтому работа группы сил не есть сумма работ, совершаемых каждой силой в отдельности.

$\Delta_1$  – перемещение, происходящее в первом сечении под действием всех сил, приложенных к балке.

**Пример.** Определить работы внешних сил (рис. 7.5).

$$W_I = \frac{1}{2} F_1 \cdot \Delta_1 = \frac{F_1^2 \cdot l}{2EA};$$

$$W_{II} = \frac{1}{2} F_2 \cdot \Delta_2 = \frac{F_2^2 \cdot l}{2EA};$$

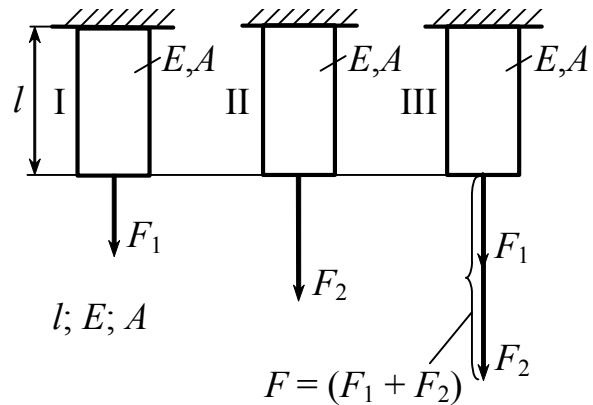


Рис.7.5

$$W_{III} = \frac{(F_1 + F_2)^2 \cdot l}{2EA} = \frac{F_1^2 l}{2EA} + \frac{F_2^2 l}{2EA} + \frac{2F_1 \cdot F_2 \cdot l}{2EA};$$

$$\frac{F_1 \cdot F_2 \cdot l}{EA} = F_1 \cdot \frac{F_2 \cdot l}{EA} = F_2 \cdot \frac{F_1 \cdot l}{EA},$$

$W_{12} \qquad \qquad \qquad W_{21}$

$W_{12}$  – работа первой силы на перемещении, вызванном второй силой;

$W_{21}$  – работа второй силы на перемещении, вызванном первой силой.

### 7.3. Работа внутренних сил при упругой деформации (плоская стержневая система)

*Ключевые слова*

*Эюры внутренних сил, плоская стержневая система, работа внутренних сил, коэффициент, учитывающий форму поперечного сечения стержня, работа внешних сил, потенциальная энергия упругой деформации.*

Будем считать, что эюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  для рамы на рис. 7.6 построены. В данном случае суммарную работу можно будет определять как простую сумму работы от изгибающего момента, перерезывающей силы и нормальной силы, ибо любой из этих 3 силовых факторов не совершает работы на перемещениях, вызванных 2 другими силовыми факторами.

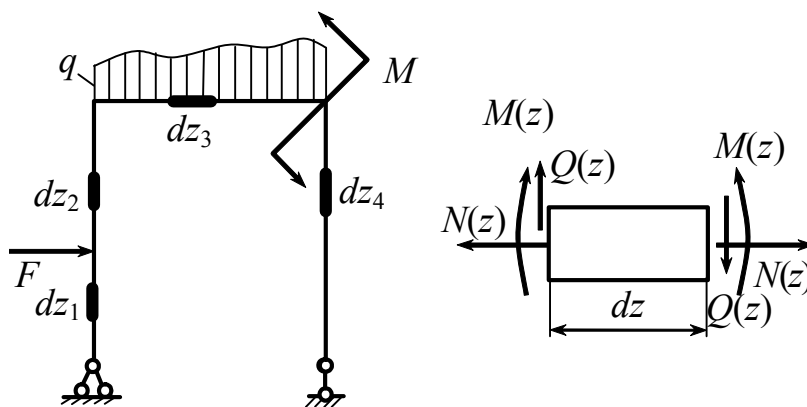


Рис.7.6

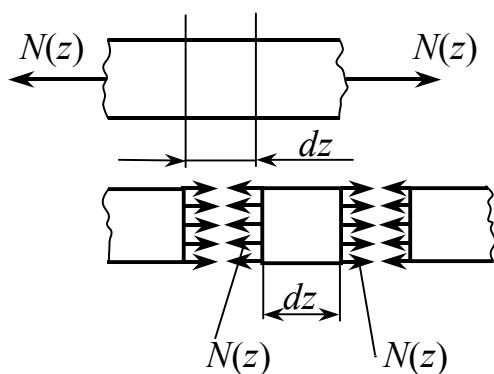


Рис.7.7

Работа внутренних продольных сил  $N(z)$

$$dW_N = -\frac{1}{2} N(z) \Delta(dz) = -\frac{1}{2} N(z) \frac{N(z) dz}{EA} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{N(z)^2 dz}{EA};$$

$$W_N = -\frac{1}{2} \sum_1^n \int_l \frac{N(z)^2 dz}{EA},$$

где  $n$  – число участков (рис. 7.7).

$W_M$  – работа, обусловленная моментом (рис. 7.8).

Картина после изгиба представлена на рис.7.9.

$$dW_M = -\frac{1}{2} M(z) d\varphi;$$

$$d\varphi = \frac{dz}{\rho} = \frac{dS}{\rho}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M(z)}{E \cdot I};$$

$$W_M = -\frac{1}{2} \sum_1^n \int_l \frac{M(z)^2 dz}{EI}.$$

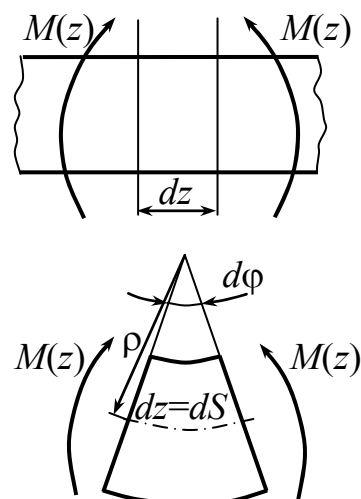


Рис.7.8



Работа есть площадь треугольника (рис. 7.10), поэтому коэффициент  $\frac{1}{2}$  имеется в формуле  $W_M$ .

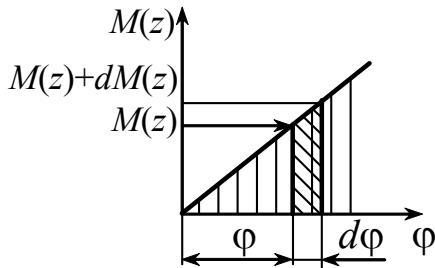


Рис.7.10

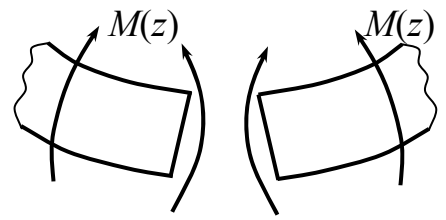


Рис.7.9

По аналогии работа перерезывающих сил равна:

$$W_Q = -\frac{1}{2} \sum_1^n \int_l k_y \cdot \frac{Q(z)^2 dz}{G \cdot A}.$$

Найдем работу и энергию сдвига  $dW(Q_y) = dU(Q_y)$ .

Для определения величины  $dW(Q_y)$  рассмотрим элементарную призму с площадью основания  $dA$  и длиной  $dz$  (рис.7.11). Энергия, заключенная в этом объеме, равна  $u \cdot dA \cdot dz$ , где  $u$  – удельная потенциальная энергия при сдвиге.

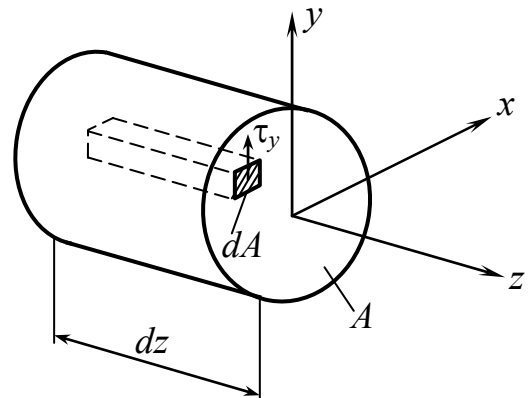


Рис.7.11

Согласно выражению (4.7) главы 4,

$$u = \frac{\tau_y^2}{2G}.$$

Таким образом,  $u \cdot dA \cdot dz = \frac{\tau_y^2}{2G} dA \cdot dz$ .

Интегрируя по площади  $A$ , находим

$$du(Q_y) = \frac{dz}{2G} \int_A \tau_y^2 dA,$$

но по формуле Журавского (5.16) главы 5  $\tau_y = \frac{Q_y S_x^*}{I_x \cdot b}$ ,

следовательно, 
$$du(Q_y) = \frac{Q_y^2 \cdot dz}{2G \cdot I_x^2} \int_A \frac{S_x^{*2} dA}{b^2},$$

или 
$$du(Q_y) = \frac{Q_y^2 \cdot dz}{2G \cdot A} \cdot \frac{A}{I_x^2} \int_A \frac{S_x^{*2} dA}{b^2}.$$

Обозначим 
$$\frac{A}{I_x^2} \int_A \frac{S_x^{*2} dA}{b^2} = k_y,$$

$k_y$  – коэффициент, учитывающий форму поперечного сечения стержня,

тогда 
$$du(Q_y) = k_y \cdot \frac{Q_y^2 \cdot dz}{2G \cdot A}.$$

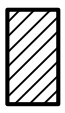


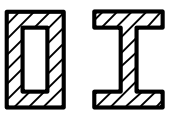
Аналогично получим 
$$du(Q_x) = k_x \cdot \frac{Q_x^2 \cdot dz}{2G \cdot A}.$$

$$A = b \cdot h; \quad S_x^* = \frac{1}{2} b \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right); \quad dA = b \cdot dy; \quad I_x = \frac{bh^3}{12};$$

$$\begin{aligned} k_y &= \frac{A}{I_x^2} \int_A \frac{S_x^{*2} dA}{b^2} = \frac{bh \cdot 12^2}{(bh^3)^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{1}{2} b \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]^2 \cdot b dy = \\ &= \frac{144}{bh^5} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{4} b^2 \left( \frac{h^4}{16} - 2 \frac{h^2}{4} y^2 + y^4 \right) \cdot b dy = \\ &= \frac{144b}{4bh^5} \left( \frac{h^4}{16} y \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - 2 \frac{h^2}{4} \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \frac{y^5}{5} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \right) = \\ &= \frac{36}{h^5} \left( \frac{h^5}{16} - \frac{h^5}{24} + \frac{h^5}{5 \cdot 16} \right) = \frac{36}{h^5} \cdot \frac{(15 - 10 + 3)h^5}{48 \cdot 5} = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

В табл. 7.1 представлены коэффициенты формы и сдвига для различных поперечных сечений.

Таблица 7.1

Форма поперечного сечения		Коэффициент формы $k_y; k_x$	Коэффициент сдвига $\alpha_{сд}$
	Прямоугольник	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{2}$
	Круг	$\frac{10}{9}$	$\frac{4}{3}$
	Тонкое кольцо	2	2
	Коробчатое сечение или двутавр	$\frac{A}{A_{ст}}$	$\frac{A}{A_{ст}}$

$$k_{y^{\square}} = 1,2.$$

$$W_{\text{внут.сил.}} = -\frac{1}{2} \sum_1^n \int_l \frac{M(z)^2 dz}{E \cdot I} - \frac{1}{2} \sum_1^n \int_l \frac{N(z)^2 dz}{E \cdot A} - \frac{1}{2} \sum_1^n \int_l k_y \cdot \frac{Q(z)^2 dz}{G \cdot A}. \quad (7.3)$$

Для стержней, работающих на изгиб, существенное значение имеет первый член, менее существенно влияние второго и тем более третьего члена, часто 2-й и 3-й член отбрасываются из-за малости их влияния. Работа внутренних сил отрицательна, но она же, взятая с обратным знаком, определяет потенциальную энергию упругой деформации –  $U$ .

$$U = \frac{1}{2} \sum_1^n \int_l \frac{M(z)^2 dz}{E \cdot I} + \frac{1}{2} \sum_1^n \int_l \frac{N(z)^2 dz}{E \cdot A} + \frac{1}{2} \sum_1^n \int_l k_y \cdot \frac{Q(z)^2 dz}{G \cdot A}. \quad (7.4)$$

Работа внешних сил при упругой деформации:

$$W_F = \frac{1}{2} \sum_1^n F_i \cdot \Delta_i. \quad (7.5)$$

Если рассеивания энергии не происходит, то можно считать (для малой упругой деформации), что вся работа внешних сил переходит в потенциальную энергию упругой деформации, тогда можно записать:  $W_F = U$  или

$$\frac{1}{2} \sum_1^n F_i \Delta_i = \frac{1}{2} \sum_1^n \int_l \frac{M(z)^2 dz}{E \cdot I} + \frac{1}{2} \sum_1^n \int_l \frac{N(z)^2 dz}{E \cdot A} + \frac{1}{2} \sum_1^n \int_l k_y \cdot \frac{Q(z)^2 dz}{G \cdot A}. \quad (7.6)$$

Иногда можно пренебречь вторым членом, более часто – третьим членом, так как их влияние незначительно.

### Пример 1.

Определить потенциальную энергию упругой деформации консольной балки под действием силы (рис. 7.12).

$$W_F = \frac{1}{2} F \cdot f = \frac{F^2 \cdot l^3}{6E \cdot I} \quad \text{– работа внешних сил.}$$

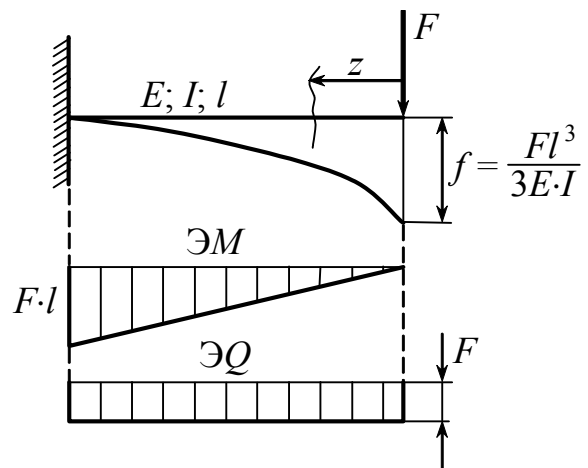


Рис.7.12

$$W_{\text{внут.сил}} = -\frac{1}{2} \int_l \frac{M(z)^2 dz}{E \cdot I}; \quad M(z) = -Fz;$$

$$W_{\text{внут.сил}} = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{(-Fz)^2 dz}{E \cdot I} = -\frac{F^2 l^3}{6E \cdot I}.$$

Прогиб, обусловленный поперечной силой, не учитывается

$$U = \frac{F^2 l^3}{6EI}.$$

**Пример 2.** Определить потенциальную энергию упругой деформации рамы под действием распределенной нагрузки и момента (рис. 7.13).

Перерезывающими силами пренебрегаем,

$$U = \frac{1}{2} \sum_1^n \int_l \frac{M(z)^2 dz}{E \cdot I} + \frac{1}{2} \sum_1^n \int_l \frac{N(z)^2 dz}{E \cdot A}.$$

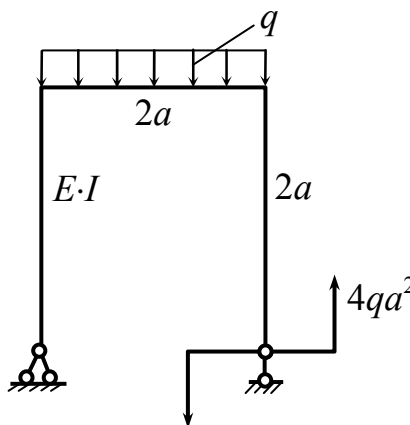


Рис.7.13

**Пример 3.** Определить потенциальную энергию упругой деформации (рис. 7.14).

$$U = \frac{1}{2} \sum_1^n \int_l \frac{N(z)^2 dz}{E \cdot A} = \frac{1}{2} \sum_1^n \frac{N_i^2 \cdot l_i}{E_i \cdot A_i};$$

$$U = \frac{1}{2EA} (N_1^2 \cdot l_1 + N_2^2 \cdot l_2).$$

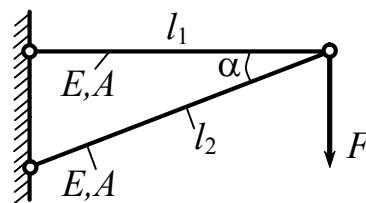


Рис.7.14

#### 7.4. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений

*Ключевые слова*

*Теоремы о взаимности работ и перемещений.*

Рассмотрим балку, нагруженную двумя вариантами групп сил A и B (рис. 7.15).

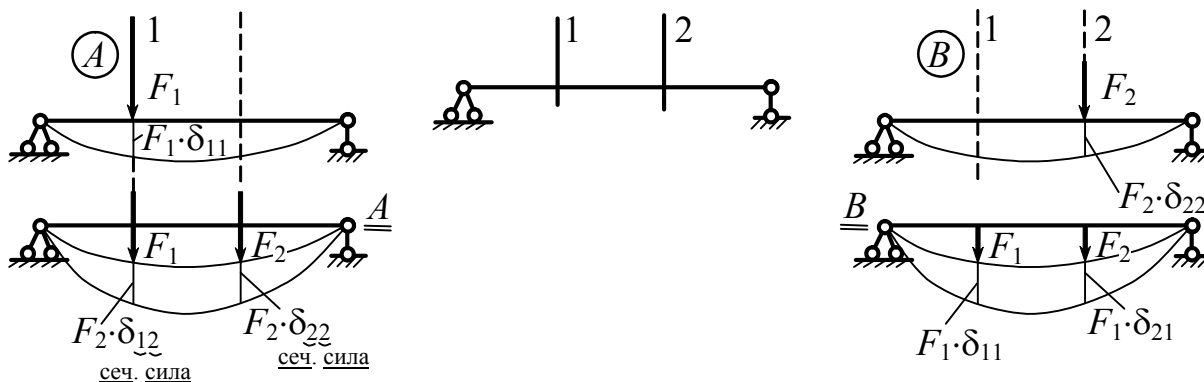


Рис.7.15

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{A.}} \quad U_A &= \frac{1}{2} \cdot F_1^2 \delta_{11} + \frac{1}{2} \cdot F_2^2 \delta_{22} + F_1 \cdot (F_2 \cdot \delta_{12}) \\ \underline{\underline{B.}} \quad U_B &= \frac{1}{2} \cdot F_2^2 \delta_{22} + \frac{1}{2} \cdot F_1^2 \delta_{11} + F_2 \cdot (F_1 \cdot \delta_{21}) \end{aligned} \right\}$$

$\frac{1}{2}$ , так как работа равна произведению силы на путь.

Прогибы балки в случае *A* и *B* одинаковы, соответственно равны  $U_A = U_B$ . Упругая линия балок одинакова.

$$\boxed{F_1 \cdot (F_2 \cdot \delta_{12}) = F_2 \cdot (F_1 \cdot \delta_{21})} \quad (7.7)$$

перем.от 2-й силы                      перем.от 1-й силы

Обобщая полученный результат на группы сил, получаем теорему о взаимности работ: **работа первой группы сил (*A*), на соответствующих этой группе сил перемещениях, вызванных второй группой сил (*B*), равна работе 2-й группы сил на соответствующих этой 2-й группе сил перемещениях, вызванных 1-й группой сил.**

$$\boxed{\delta_{12} = \delta_{21}} \quad (7.8)$$

– означает теорему о взаимности перемещений.

**Перемещение 1-го сечения под действием единичной силы 2-го направления равно перемещению единичной силы 2-го направления, вызванного единичной силой первого направления (рис 7.16).**

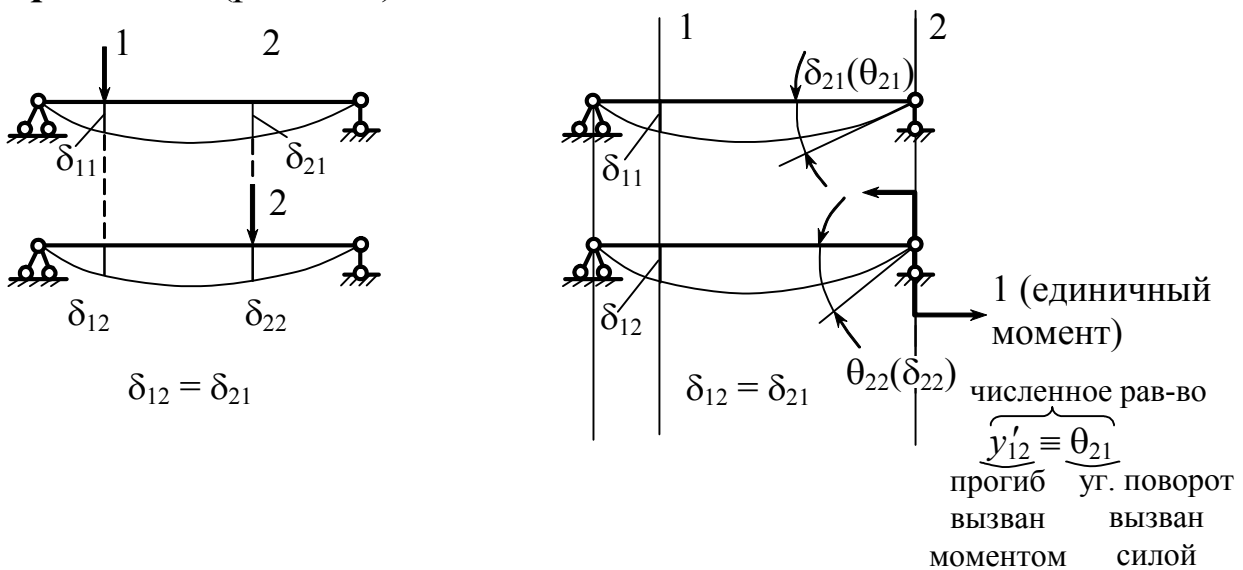


Рис.7.16

## 7.5. Теорема Кастильяно

*Ключевые слова*

*Увеличение энергии деформации, обобщенное перемещение, первая теорема Кастильяно.*

Задача – определение перемещения, используя потенциальную энергию деформации, т.е. для заданной стержневой системы определить обобщенное перемещение в точке  $K$  (рис 7.17).

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \Delta_k,$$

$$\Delta_k - ?$$

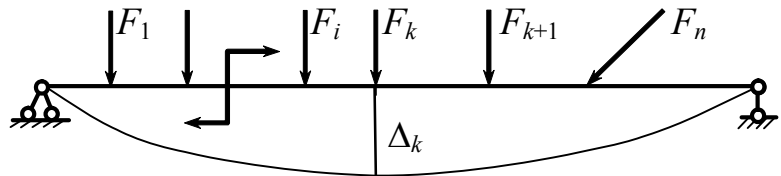


Рис.7.17

$$U = \frac{1}{2} \sum_1^n F_i \cdot \Delta_i = \frac{1}{2} F_1 \cdot \Delta_1 + \dots + \frac{1}{2} F_i \cdot \Delta_i + \frac{1}{2} F_k \cdot \Delta_k + \dots + \frac{1}{2} F_n \cdot \Delta_n.$$

$$\Delta_i = F_1 \cdot \delta_{i1} + F_2 \cdot \delta_{i2} + F_i \cdot \delta_{ii} + \dots + F_k \cdot \delta_{ik} + \dots + F_n \cdot \delta_{in}.$$

$$\Delta_2 = F_2 \cdot \delta_{21} + F_2 \cdot \delta_{22} + \dots + F_i \cdot \delta_{2i} + F_k \cdot \delta_{2k} + \dots + F_n \cdot \delta_{2n}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial F_k} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial F_k} (F_1 \cdot \Delta_1 + \dots + F_i \cdot \Delta_i + F_k \cdot \Delta_k + \dots + F_n \cdot \Delta_n) = \\ &= \frac{1}{2} \left( F_1 \cdot \frac{\partial \Delta_1}{\partial F_k} + \dots + F_i \cdot \frac{\partial \Delta_i}{\partial F_k} + \Delta_k + F_k \cdot \frac{\partial \Delta_k}{\partial F_k} + \dots + F_n \cdot \frac{\partial \Delta_n}{\partial F_k} \right). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial F_k} = \frac{\partial}{\partial F_k} (F_1 \cdot \delta_{i1} + \dots + F_i \cdot \delta_{ii} + F_k \cdot \delta_{ik} + \dots + F_n \cdot \delta_{in}) = \delta_{ik};$$

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial F_k} = \delta_{ik} \quad \frac{\partial \Delta_2}{\partial F_k} = \delta_{2k}; \quad \frac{\partial \Delta_2}{\partial F_3} = \delta_{23}; \quad \frac{\partial \Delta_2}{\partial F_1} = \delta_{21};$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{F_1 \cdot \delta_{1k} + \dots + F_i \cdot \delta_{ik}}_{\Delta_k} + \Delta_k + \underbrace{F_k \cdot \delta_{kk} + \dots + F_n \cdot \delta_{nk}}_{\Delta_k} \right).$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \cdot 2\Delta_k; \quad \boxed{\frac{\partial U}{\partial F_k} = \Delta_k}; \quad \Delta_k = \frac{\partial U}{\partial F_k}. \quad (7.9)$$

**Частная производная от потенциальной энергии деформации по некоторой силе ( $F_k$ ) равна перемещению точки приложения (в плоскости действия) этой силы по направлению силы.**

$$U = \frac{1}{2} \sum_1^n \int_l \frac{M(z)^2 dz}{E \cdot I} + \frac{1}{2} \sum_1^n \int \frac{N(z)^2 dz}{E \cdot A} + \frac{1}{2} \sum_1^n \int \frac{Q(z)^2 dz}{G \cdot A}.$$

$$F_k \begin{cases} F_k \\ M_k \end{cases} \begin{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} y_k \\ \theta_k \end{cases} \text{ прогиб} \\ \xleftrightarrow{\Delta k} \end{cases} \text{ угол поворота} \quad n - \text{число участков.}$$

$$y_k = \frac{\partial}{\partial F_k}(U) = \sum_1^n \int_l \frac{M(z) \cdot \frac{\partial M(z)}{\partial F_k} dz}{E \cdot I} + \sum_1^n \int_l \frac{N(z) \cdot \frac{\partial N(z)}{\partial F_k} dz}{E \cdot A} + \sum_1^n \int_l k \cdot \frac{Q(z) \cdot \frac{\partial Q(z)}{\partial F_k} dz}{G \cdot A}; \quad (7.10)$$

$$\theta_k = \frac{\partial}{\partial M_k}(U) = \sum_1^n \int_l \frac{M(z) \cdot \frac{\partial M(z)}{\partial M_k} dz}{E \cdot I} + \sum_1^n \int_l \frac{N(z) \cdot \frac{\partial N(z)}{\partial M_k} dz}{E \cdot A} + \sum_1^n \int_l \frac{Q(z) \cdot \frac{\partial Q(z)}{\partial M_k} dz}{G \cdot A}. \quad (7.11)$$

В выражениях (7.10) и (7.11) вторым и третьим членом можно в ряде случаев пренебречь.

**Пример 1.** Определить перемещения  $y_B$  и угол поворота  $\theta_B$  в т.  $B$  (рис. 7.18).

$$y_B = \int_0^l \frac{M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial F} dz}{E \cdot I};$$

$$M(z) = -F \cdot z - \frac{qz^2}{2}; \quad \frac{\partial M(z)}{\partial F} = -z;$$

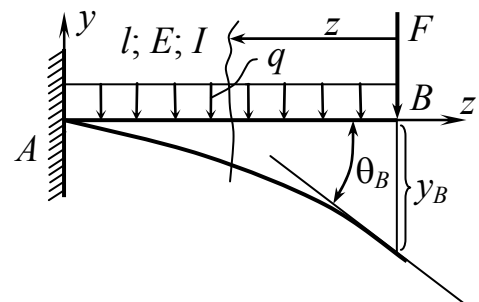


Рис.7.18



$$y_B = \int_0^l \frac{\left(-Fz - \frac{qz^2}{2}\right) \cdot (-z) dz}{E \cdot I} = \frac{Fl^3}{3E \cdot I} + \frac{ql^4}{8E \cdot I}.$$

Положительный знак у слагаемого в  $y_B$  означает, что перемещение произошло в направлении силы.

Условно приложим момент (рис. 7.19), так как в концевом сечении нет момента, а  $\theta_B$  определяется по моменту (у нас по  $M_q$ ).

$$\theta_B = \int_0^l \frac{M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial M_q} dz}{E \cdot I};$$

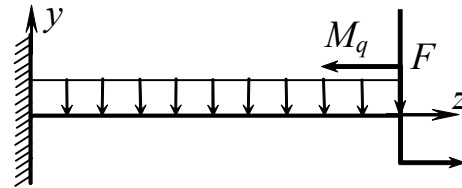


Рис.7.19

$$\theta_B = \int_0^l \frac{\left(-Fz - \frac{qz^2}{2} + M_q\right) \cdot 1 \cdot dz}{E \cdot I} = -\frac{Fl^2}{2EI} - \frac{ql^3}{6EI}.$$

Знак “-” указывает, что поворот происходит в направлении, обратном направлению введенного нами добавочного момента, т.е. поворот по часовой стрелке.

**Пример 2.** Определить перемещение  $y_K$  в т.  $K$  и угол поворота  $\theta_B$  в т.  $B$  (рис. 7.20).

В этой задаче при определении опорных реакций нужно учитывать добавочную силу и добавочный момент.

Наибольший прогиб будет близок к середине балки.

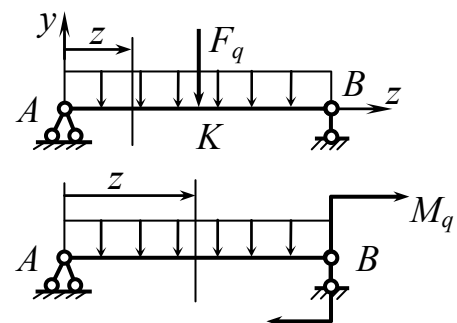


Рис.7.20

## 7.6. Общий метод определения перемещений в упругих системах (Метод Мора)

*Ключевые слова*

*Понятие потенциальной энергии, принцип взаимности работ, плоская стержневая система, грузовое состояние, единичное состояние, вычисление интегралов от произведений, формула Мора.*

Понятие потенциальной энергии позволило найти более общий способ определения перемещений в упругих системах. Этот способ основан на принципе взаимности работ. Рассмотрим его для плоской стержневой системы (рис. 7.21).

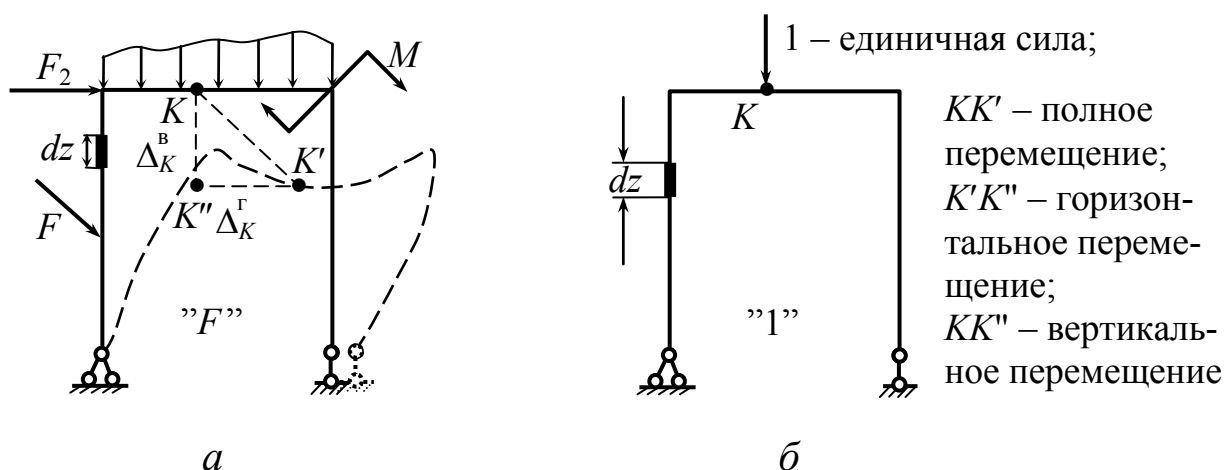


Рис.7.21

$$\Delta_K = \sqrt{(\Delta_K^Г)^2 + (\Delta_K^В)^2},$$

где  $\Delta_K^Г$  – горизонтальное перемещение;

$\Delta_K^В$  – вертикальное перемещение.

“ $F$ ” – состояние грузовое (т.е. приложение нагрузки к раме рис. 7.21, а).

“1” – единичное состояние – та же упругая система (рама рис. 7.21, б), к которой приложена единичная сила, соответствующая искомому перемещению (в точке, перемещение которой определяется в направлении искомого перемещения).

Пусть требуется определить  $\Delta_K^B - ?$

Используется теорема о взаимности работ:

$$W_{1F} = W_{F1},$$

где индекс 1 – адрес, а индекс  $F$  – причина.

Работа сил единичного состояния (единичной силы) на перемещениях грузового состояния равна работе сил грузового состояния на перемещениях единичного состояния.

$$W_{1F} = 1 \cdot \Delta_K^6,$$

где 1 – единичная сила;  $\Delta_K^6$  – искомое перемещение.

В единичном состоянии работа совершается единичной силой, реакции опор работу не совершают.

$$(W = F \cdot S \cos \alpha \text{ в механике работа}).$$

Определим работу сил состояния “ $F$ ” на перемещениях, вызванных в состоянии “1”, как работу внутренних сил грузового состояния на перемещениях, вызванных единичной силой  $W_{F1}$ .

Для состояния “ $F$ ” возьмем элемент длиной  $dz$  (рис. 7.22).

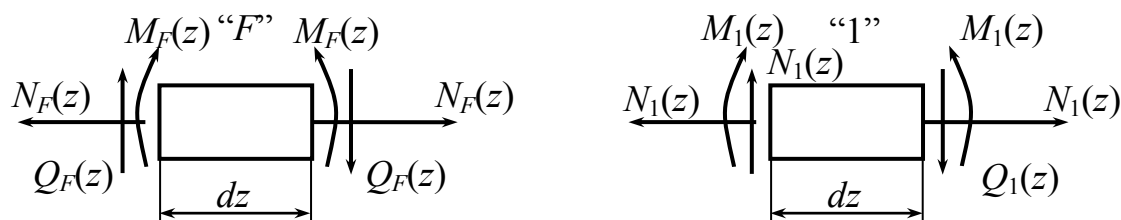


Рис.7.22

Возьмем элемент  $dz$  и для единичного состояния “1”:

$$W_{F1} = W_{F1}(M) + W_{F1}(N) + W_{F1}(Q).$$

Определим работу изгибающих моментов состояния “ $F$ ” на перемещениях, вызванных в состоянии “1”

$$dW_{F1}(M) = M_F(z) \cdot d\varphi_{1''} = M_F(z) \cdot \frac{dS}{\rho} = M_F(z) \cdot \frac{dz}{\rho};$$

$$\frac{dS}{\rho} = d\varphi_{1''} = \frac{dS \cdot M_1(z)}{E \cdot I} = \frac{dz \cdot M_1(z)}{E \cdot I}; \quad dS = dz;$$

$$dW_{F1}(M) = M_F(z) \cdot \frac{dz \cdot M_1(z)}{E \cdot I};$$

$$W_{F1}(M) = \sum_1^n \int_l \frac{M_F(z) \cdot M_1(z) \cdot dz}{E \cdot I} - \text{интегрировать нужно по участкам, а затем все это суммировать.}$$

Определим работу нормальных сил состояния “ $F$ ” на перемещениях состояния “1”:

$$dW_{F1}(N) = N_F(z) \cdot \Delta(dz_{"1"}) = N_F(z) \cdot \frac{N_1(z) \cdot dz}{E \cdot A};$$

$$W_{F1}(N) = \sum_1^n \int_l \frac{N_F(z) \cdot N_1(z) \cdot dz}{E \cdot A}.$$

По аналогии имеем:

$$W_{F1}(Q) = \sum_1^n \int_l k_y \cdot \frac{Q_F(z) \cdot Q_1(z) \cdot dz}{G \cdot A},$$

где  $Q_F(z)$  – перерезывающая сила от заданных нагрузок;  $Q_1(z)$  – перерезывающая сила от единичной силы.

$$1 \cdot \Delta_K^B = W_{F1} = \sum_1^n \int_l \frac{M_F(z) \cdot M_1(z)}{EI} dz + \sum_1^n \int_l \frac{N_F(z) \cdot N_1(z)}{EA} dz + \sum_1^n \int_l k_y \cdot \frac{Q_F(z) \cdot Q_1(z)}{GA} dz; \quad (7.12)$$

$$1 \cdot \Delta_K^B = W_{F1}. \quad (7.13)$$

Формула Мора для плоской стержневой системы. Она используется для расчета рам, ферм, балок, отдельных стержней, работающих на растяжение, сжатие, кручение, изгиб.

Так как нас интересует горизонтальное перемещение  $\Delta_K^r$  в точке  $K$  рамы, представленной на рис. 7.23, то единичная сила будет приложена горизонтально.

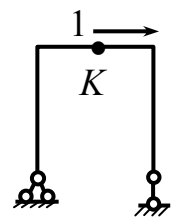


Рис.7.23

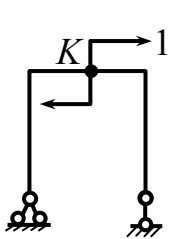


Рис.7.24

Если нас интересует угол поворота  $\theta_K$  в точке  $K$  рамы, представленной на рис. 7.24, то в точке  $K$  нужно приложить единичный момент.

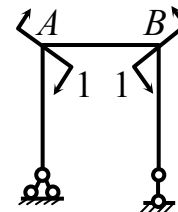


Рис.7.25

Если необходимо определить взаимный поворот двух сечений  $\theta_{A-B}$  (рис. 7.25), то в этом случае нужно приложить два единичных момента.

На рис. 7.26 приведены еще два примера.

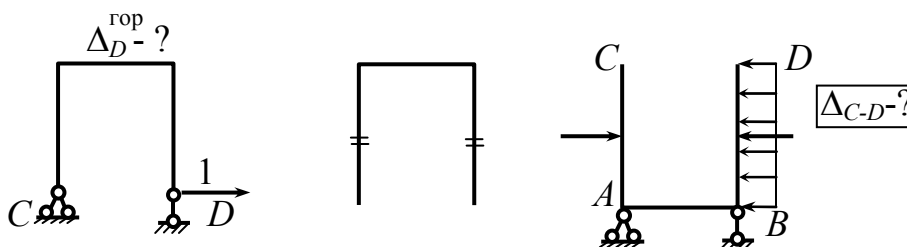


Рис.7.26

Формула (7.13) может быть расширена и для пространственной системы (см. В. И. Феодосьев).

В формуле (7.12) влиянием третьего члена обычно пренебрегают, часто в ряде случаев не учитывается влияние и второго члена.

### Пример 1.

Пусть требуется определить полное перемещение точки "С"  $\Delta_C$  для данного грузового состояния (рис. 7.27), также требуется определить угол поворота  $\theta_B$  в точке  $B$ . Жесткость частей рамы  $AB$  и  $BC$  одинакова  $EI$ .

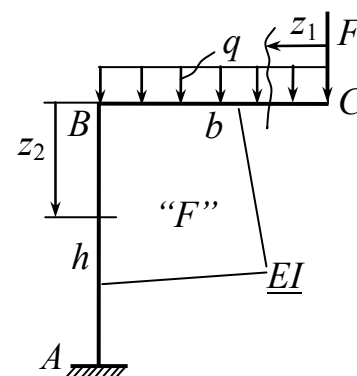


Рис.7.27

$$\Delta_C = \sqrt{(\Delta_C^B)^2 + (\Delta_C^{\text{гор}})^2}.$$

На рис. 7.28 представлены три единичных состояния для определения вертикального перемещения т.С (1), горизонтального перемещения т.С (2) и угла поворота т.В (3).

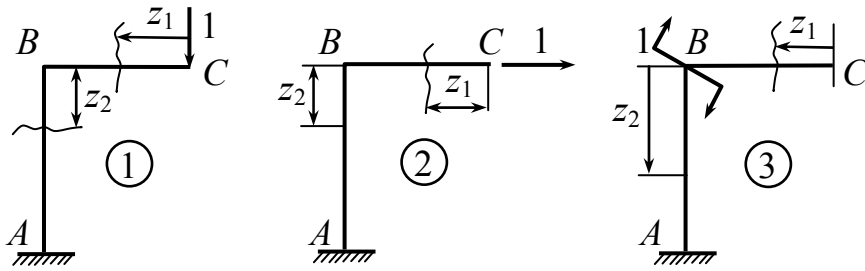


Рис.7.28

$$1) \quad \Delta_C^B = \sum_1^n \int_l \frac{M_F(z) \cdot M_1(z)}{E \cdot I} dz,$$

где  $M_1(z)$  – изгибающий момент от единичной силы.

$$\text{Участок } BC: \quad M_F(z_1) = -Fz_1 - \frac{qz_1^2}{2}; \quad M_1(z_1) = -1 \cdot z_1.$$

$$\text{Участок } AB: \quad M_F(z_2) = -Fb - \frac{qb^2}{2}; \quad M_2(z_2) = -1 \cdot b.$$

$$\Delta_c^{\text{верт}} = \frac{1}{EI} \left( \int_0^b \left( -Fz_1 - \frac{qz_1^2}{2} \right) (-1 \cdot z_1) dz + \int_0^h \left( -Fb - \frac{qb^2}{2} \right) (-1 \cdot b) dz \right).$$

$$\Delta_c^{\text{верт}} = \frac{1}{EI} \left( \frac{F \cdot b^3}{3} + \frac{q \cdot b^4}{8} + Fb^2 \cdot h + \frac{qb^3 \cdot h}{2} \right).$$

$\Delta_C^B = +$ , т.е. точка С опускается, и перемещение совпадает с единичной нагрузкой.

$$2) \quad \Delta_c^{\text{гориз}} = \sum_1^n \int \frac{M_F(z) \cdot M_2(z)}{EI} dz.$$

Участок BC:  $M_2(z_1) = 0$ , первым участком не занимаемся.

Участок AB:  $M_2(z_2) = -1 \cdot z_2$ .

$$\Delta_c^{\Gamma} = \frac{1}{EI} \left[ 0 + \int_0^h \left( -Fb - \frac{qb^2}{2} \right) (-1 \cdot z_2) dz \right] = \frac{1}{EI} \left( \frac{F \cdot b \cdot h^2}{2} + \frac{q \cdot b^2 \cdot h^2}{4} \right).$$

Точка  $C$  уходит вправо в направлении единичной горизонтальной силы, так как перемещение получили со знаком плюс.

$$\Delta_C = \sqrt{(\Delta_C^B)^2 + (\Delta_C^r)^2} \quad \text{– общее перемещение точки } C.$$

3) Определим  $\theta_B$ :

$$M_3(z_1) = 0; \quad M_3(z_2) = -1;$$

$$\theta_B = \int_0^h \frac{M_F(z_2) \cdot M_3(z_2)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^h \left( -F \cdot b - \frac{qb^2}{2} \right) (-1) dz = \frac{Fbh + \frac{qb^2 h}{2}}{EI}.$$

**Пример 2.** Определить перемещение т.  $A$  криволинейного бруса  $f_A^{\text{гоп}}$  (рис. 7.29).

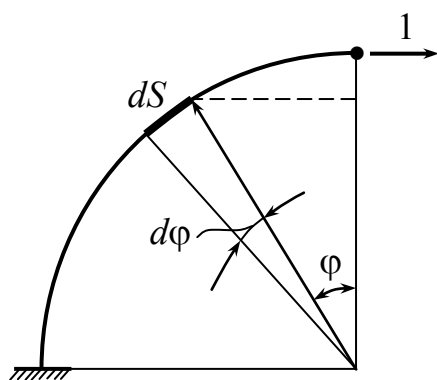
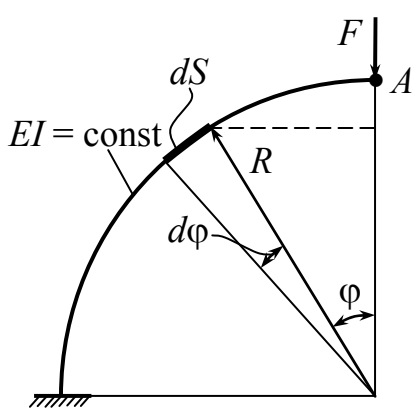


Рис.7.29

$$dS = R \cdot d\varphi; \quad M_F = F \cdot R \cdot \sin \varphi;$$

$$M_1 = 1 \cdot (R - R \cdot \cos \varphi) = R(1 - \cos \varphi).$$

$$f_A^{\text{гоп}} = \int_S \frac{M_F \cdot M_1 dS}{EI} =$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot R \cdot \sin \varphi \cdot R(1 - \cos \varphi) R \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{FR^3}{EI} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \right) =$$

$$= \frac{FR^3}{EI} \left( -\cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{FR^3}{EI} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{FR^3}{2EI}.$$

**Пример 3.** Определить перемещение  $\Delta_B^{\text{вер}}$  т.  $B$  и  $\Delta_C^{\text{гор}}$  т.  $C$  криволинейного бруса (рис. 7.30).

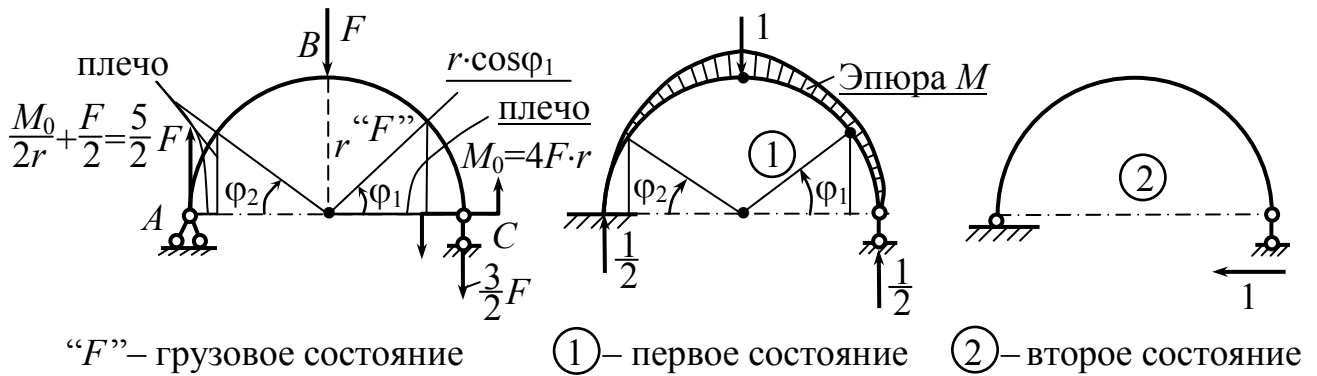


Рис.7.30

На рис. 7.31 представлена эпюра  $M$  от единичной силы в т.  $C$  для второго состояния.

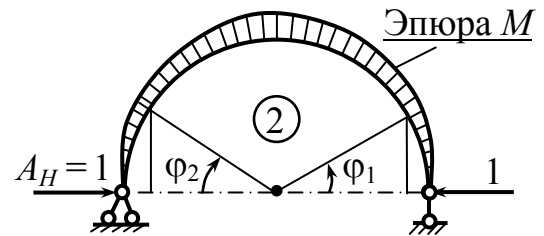


Рис.7.31

$$M_1(\varphi_1) = \frac{1}{2}r(1 - \cos\varphi_1); \quad M_1(\varphi_2) = \frac{1}{2}r(1 - \cos\varphi_2);$$

$$M_2(\varphi_1) = -1 \cdot r \cdot \sin\varphi_1; \quad M_2(\varphi_2) = -1 \cdot r \cdot \sin\varphi_2.$$

На рис. 7.32 представлена эпюра  $M_F$  от грузового состояния

$$M_F(\varphi_1) = 4F \cdot r - \frac{3}{2}F \cdot r(1 - \cos\varphi_1);$$

$$M_F(\varphi_2) = \frac{5}{2}F \cdot r(1 - \cos\varphi_2).$$

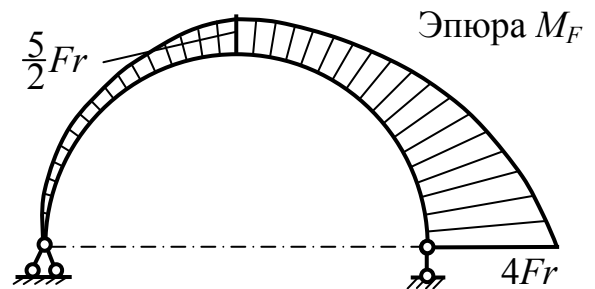


Рис.7.32

Сжатые волокна сверху – момент положительный.

Сжатые волокна внизу – момент отрицательный.



$$\Delta_c^{\text{гор}} = \frac{1}{EI} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_F(\varphi_1) \cdot M_2(\varphi_1) r \cdot d\varphi_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_F(\varphi_2) \cdot M_2(\varphi_2) r \cdot d\varphi_2 \right);$$

$$\Delta_B^{\text{вер}} = \frac{1}{EI} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_F(\varphi_1) \cdot M_1(\varphi_1) r \cdot d\varphi_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_F(\varphi_2) \cdot M_1(\varphi_2) r \cdot d\varphi_2 \right),$$

где  $dS = r \cdot d\varphi$  – элемент дуги.

**Пример 4.** Определить перемещение  $y_K$  т. К консольной балки (рис. 7.33).

$$\frac{a}{2} \leq z \leq a.$$

$$M_F(z) = 2qa^2 - \frac{qz^2}{2};$$

$$M_1(z) = -1 \cdot \left( z - \frac{a}{2} \right) \Big|_{\frac{a}{2}}^a;$$

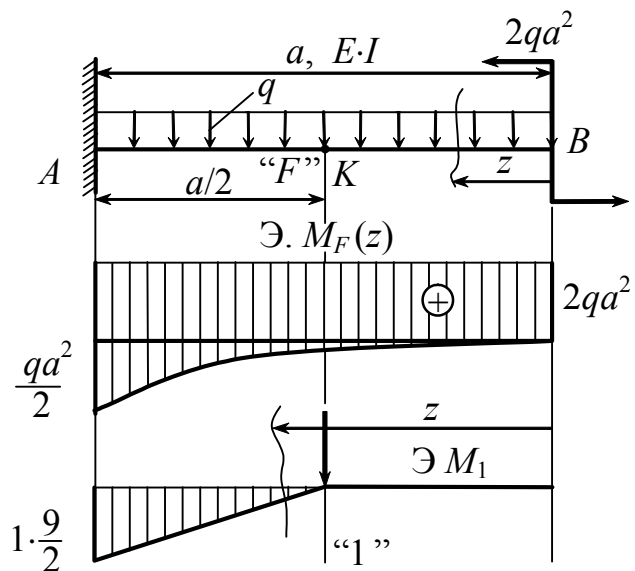


Рис.7.33

$$y_K = \int_{\frac{a}{2}}^a \frac{M_F(z) \cdot M_1(z)}{EI} dz = \frac{1}{EI} \int_{\frac{a}{2}}^a \left( 2qa^2 - \frac{qz^2}{2} \right) \left( -z + \frac{a}{2} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{EI} \left( \frac{-2qa^2 z^2}{2} \Big|_{\frac{a}{2}}^a + \frac{qz^4}{8} \Big|_{\frac{a}{2}}^a + \frac{2qa^3}{2} z \Big|_{\frac{a}{2}}^a - \frac{qaz^3}{12} \Big|_{\frac{a}{2}}^a \right).$$

## 7.7. Способ Верещагина

*Ключевые слова*

*Метод Мора, площадь эпюры, статический момент площади, координаты центра тяжести, формула Верещагина, ордината эпюры под центром тяжести другой эпюры.*

При определении перемещений по способу Мора задача сводится к взятию интегралов:

$$\int M_F(z) \cdot M_1(z) dz; \quad \int N_F(z) \cdot N_1(z) dz; \quad \int Q_F(z) \cdot Q_1(z) dz .$$

ед. момент                      ед. нор. сила                      ед. поп. сила

**А. Н. Верещагин** в 1925 г. предложил оригинальный способ вычисления интегралов подобного типа: во всех случаях, когда хотя бы одна из эпюр  $M_F(z)$ ,  $N_F(z)$ ,  $Q_F(z)$  или  $M_1(z)$ ,  $N_1(z)$ ,  $Q_1(z)$  ограничена прямой линией. Пусть на участке плоской стержневой системы имеем  $M_F(z)$  – произвольный,  $M_1(z)$  – ограничен прямой

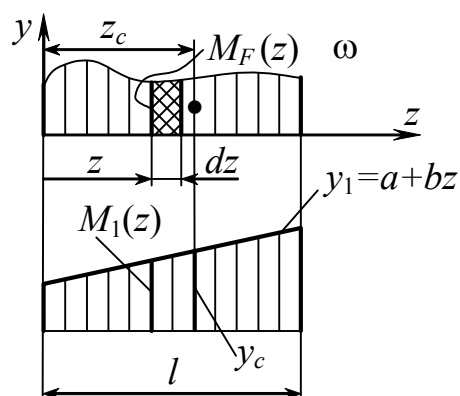


Рис.7.34

линией (рис. 7.34).

Рассмотрим интеграл:

$$\int_l M_F(z) \cdot M_1(z) dz = \int_l M_F(z)(a + bz) \cdot dz = a \int_l M_F(z) dz + b \int_l z \cdot M_F(z) dz;$$

$$\int_l M_F(z) dz = \omega - \text{площадь эпюры } M_F(z);$$

$$\int_l M_F(z) \cdot z \cdot dz = S_y^\omega - \text{статический момент площади относительно оси } y;$$

$$S_y^\omega = \omega \cdot z_c; \quad \int_l M_F(z) \cdot M_1(z) dz = a \cdot \omega + b \cdot \omega \cdot z_c = \omega \underbrace{(a + b \cdot z_c)}_{=y_c} = \omega \cdot y_c .$$

$\left. \begin{matrix} z_c \\ y_c \end{matrix} \right\}$  координаты центра тяжести.

$$\boxed{\int_l M_F(z) \cdot M_1(z) dz = \omega \cdot y_c} \quad (7.14)$$

$$\Delta = \sum_1^n \int \frac{M_F(z) \cdot M_1(z) dz}{E \cdot I} = \sum_1^n \frac{\omega \cdot y_c}{E \cdot I}.$$

$$\boxed{\Delta = \sum_1^n \frac{\omega \cdot y_c}{E \cdot I}} \text{ – формула Верещагина:}$$

перемещение ( $\Delta$ ) определяется как сумма произведений площади эпюры ( $M_F(z)$ ,  $N_F(z)$ ,  $Q_F(z)$ ) от заданной нагрузки на ординату эпюры ( $M_1(z)$ ,  $N_1(z)$ ,  $Q_1(z)$ ) от единичной нагрузки под центром тяжести эпюры от заданной нагрузки, деленная на жесткость ( $E \cdot I$ ), ( $EA$ ), ( $GA$ ) – соответственно.

Этот способ применим, когда хотя бы одна из эпюр ограничена прямой линией. Если обе эпюры ограничены прямой линией, то безразлично, где брать площадь и где – ординату (это свойство коммутативности).

## 7.8. Формула Симпсона

*Ключевые слова*

*Интеграл Мора, нелинейные, линейные эпюры, выпуклая, вогнутая кривая, эпюры грузового и единичного состояний, начало, середина и конец участков, формулы Симпсона.*

Интегралы Мора можно вычислять также по формуле Симпсона, если хотя бы одна из эпюр линейная:

1. Случай – эпюра грузового состояния – нелинейная, а эпюра единичного состояния линейная, длина участка  $l_i$  (рис. 7.35).

⊕ – когда выпуклая кривая;

⊖ – когда вогнутая кривая;

$H$  – начало участка;

$C$  – середина участка;

$K$  – конец участка.

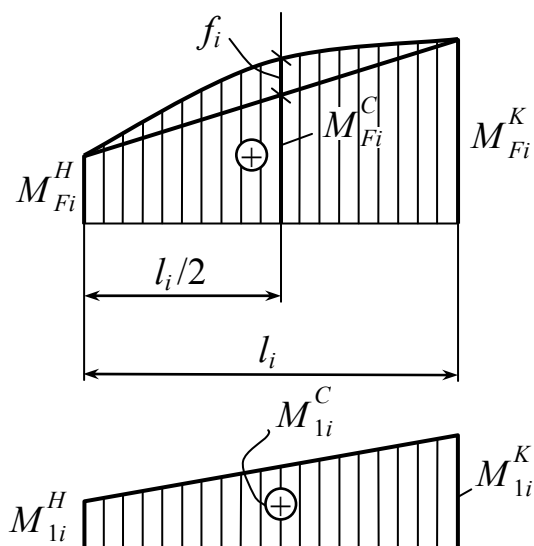


Рис.7.35

$$\int_0^{l_i} \frac{M_{Fi} M_{1i}}{EI} dz = \frac{l_i}{6EI} (M_{Fi}^H \cdot M_{1i}^H + 4M_{Fi}^C \cdot M_{1i}^C + M_{Fi}^K \cdot M_{1i}^K), \quad (7.15)$$

$$M_{Fi}^C = \frac{1}{2} (M_{Fi}^H + M_{Fi}^K) + f_i,$$

$$f_i = \frac{ql_i^2}{8} \text{ – при равномерно распределенной нагрузке по длине участка } l_i;$$

$$f_i = \frac{ql_i^2}{16} \text{ – при треугольной распределенной нагрузке.}$$

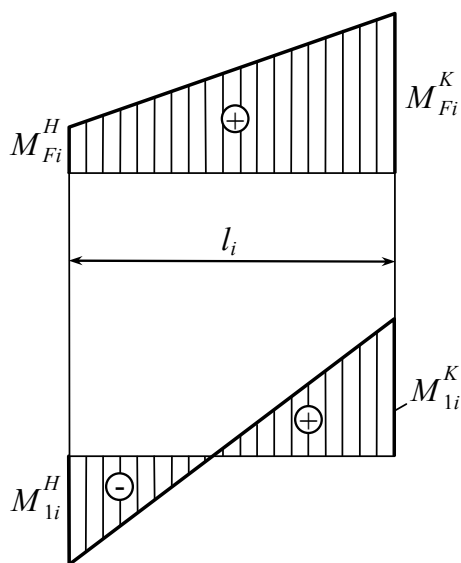


Рис.7.36

2. Случай – эпюры грузового и единичного состояний линейные (рис. 7.36).

$$\int_0^{l_i} \frac{M_{Fi} M_{1i}}{EI} dz = \frac{l_i}{6EI} (2M_{Fi}^H \cdot M_{1i}^H + \quad (7.16)$$

$$+ M_{Fi}^H \cdot M_{1i}^K + M_{Fi}^K \cdot M_{1i}^H + 2M_{Fi}^K \cdot M_{1i}^K).$$

И в первом, и во втором случаях значения изгибающих моментов подставляем в выражения (7.15) и (7.16) со своими знаками.

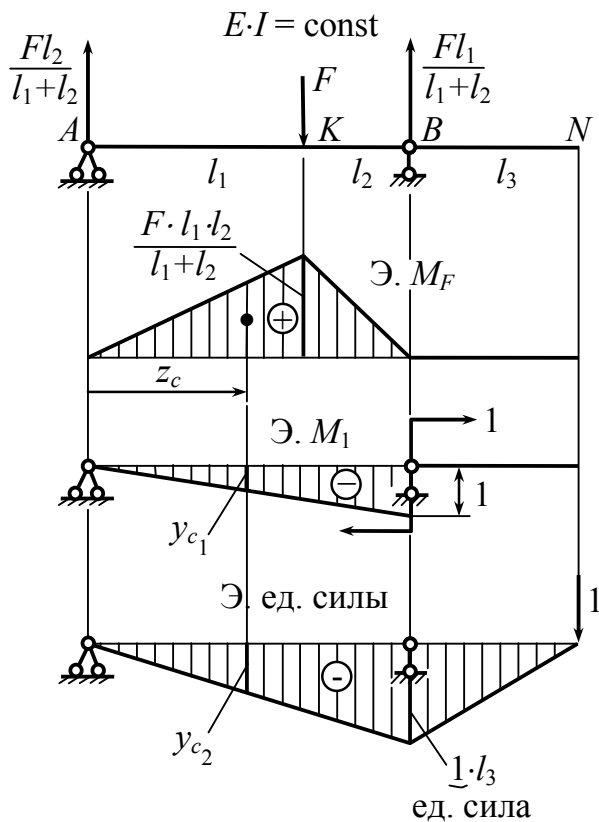


Рис.7.37

Центр тяжести треугольника показан на рис. 7.38.

$$z_c = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

**Пример 1.** Определить  $\theta_B$  и  $y_N$  по способу Верещагина (рис. 7.37).

$$\Delta = \sum \frac{\omega \cdot y_c}{E \cdot I}.$$

$$1) \theta_B = \sum \frac{\omega \cdot y_{c1}}{E \cdot I};$$

$$\omega = \frac{1}{2}(l_1 + l_2) \cdot \frac{F \cdot l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2};$$

$$\omega = \frac{F \cdot l_1 \cdot l_2}{2}.$$

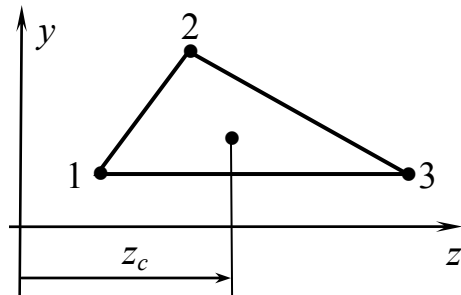


Рис.7.38

$$\text{У нас: } z_c = \frac{0 + l_1 + (l_1 + l_2)}{3}.$$

$y_{c1}$  определяется из  $\Delta \text{Э}M_1$

$$y_{c1} = 1 \frac{z_c}{l_1 + l_2} = 1 \frac{2l_1 + l_2}{3(l_1 + l_2)}.$$

$$\theta_B = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} F \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot 1 \cdot \frac{2l_1 + l_2}{3(l_1 + l_2)} = -\frac{F \cdot l_1 \cdot l_2 (2l_1 + l_2)}{6E \cdot I (l_1 + l_2)}.$$

2)  $y_N = \frac{\omega \cdot y_{c2}}{E \cdot I_N}$ ;  $y_{c2}$  определяется из эпюры единичной силы,

$$y_{c2} = -1 \cdot l_3 \cdot \frac{2l_1 + l_2}{3(l_1 + l_2)};$$

$$y_N = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} (l_1 + l_2) \frac{Fl_1 l_2}{l_1 + l_2} - \frac{l_3 (2l_1 + l_2)}{3(l_1 + l_2)} \right) = - \frac{Fl_1 l_2 l_3 (2l_1 + l_2)}{6EI(l_1 + l_2)}$$

**Пример 2.** Определить взаимное перемещение точек  $A$  и  $B$  —  $\Delta_{A-B}$  и взаимный угол поворота  $\theta_{M-N}$  (рис. 7.39,  $a$ )

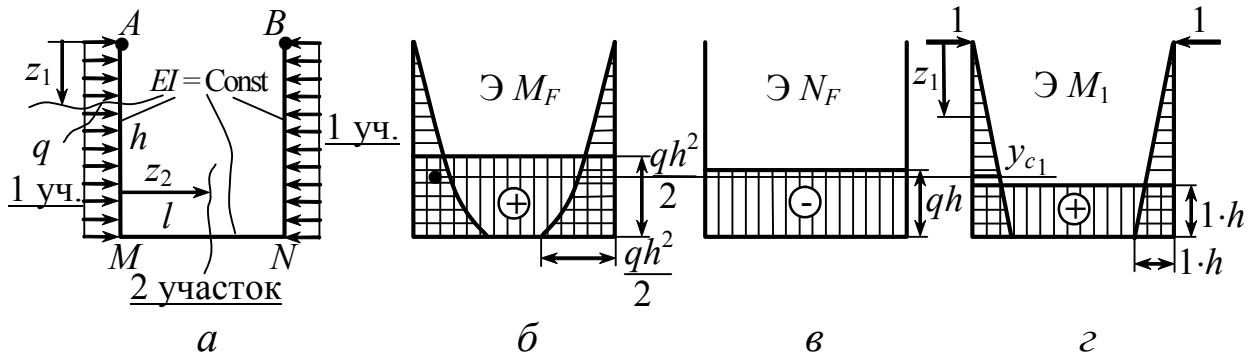


Рис.7.39

Решим методом Мора и способом Верещагина. Сделаем это с учетом влияния изгибающих моментов и нормальных сил.

$\mathcal{E} M_F$  (рис. 7.39, б)

$$M_F(z_1) = + \frac{qz_1^2}{2};$$

$$M_F(z_2) = + \frac{qh^2}{2}.$$

$\mathcal{E} N_F$  (рис. 7.39, в)

$$N_F(z_2) = -qh \text{ (сжатие)}$$

$\mathcal{E} M_1$  (рис. 7.39, г)

Прикладываем единичные силы в точках  $A$  и  $B$

$$\rightarrow \quad \leftarrow$$

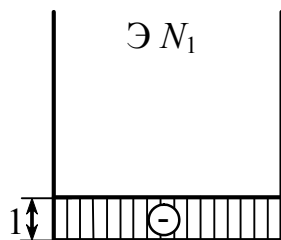
$$M_1(z_1) = 1 \cdot z_1; \quad M_1(z_2) = 1.$$

$\mathcal{E} N_1$  (рис. 7.40, а)

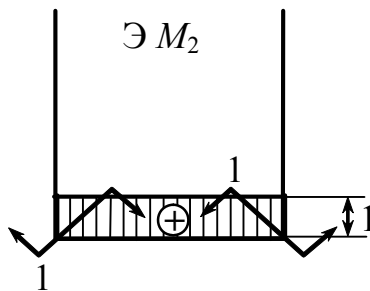
$$N_1(z_2) = -1$$

$\mathcal{E} M_2$  (рис. 7.40, б)

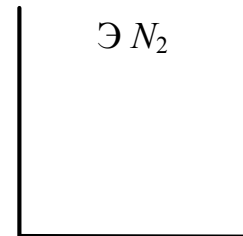
$\mathcal{E} N_2$  (рис. 7.40, в)



а



б



в

Рис.7.40

**По Мору:**

$$\begin{aligned} \Delta_{A-B} &= \sum \int_{l_i} \frac{M_{F_i}(z) \cdot M_i(z) dz}{E \cdot I} + \sum \int_{l_i} \frac{N_{F_i}(z) \cdot N_i(z) dz}{E \cdot A} = \\ &= 2 \cdot \int_0^h \frac{M_F(z_1) \cdot M_1(z_1) dz}{E \cdot I} + \int_0^l \frac{M_F(z_2) \cdot M_1(z_2) dz}{E \cdot I} + \int_0^l \frac{N_F(z_2) \cdot N_1(z_2) dz}{E \cdot A} = \\ \left| 2 \int_{\text{так как у нас}} \right. &= 2 \int_0^h \frac{qz^2}{2} \cdot 1 \cdot z \cdot dz - \int_0^l \frac{qh^2}{2} \cdot 1 \cdot h \cdot dz + \int_0^l \frac{(-qh) \cdot (-1) dz}{E \cdot A} = \\ &= \frac{1}{E \cdot I} \left( \frac{qh^4}{4} + \frac{qh^3 \cdot l}{2} \right) + \frac{qh \cdot l}{E \cdot A}. \end{aligned}$$

**Эта же задача – по способу Верещагина**

Примечание из математики (рис. 7.41).

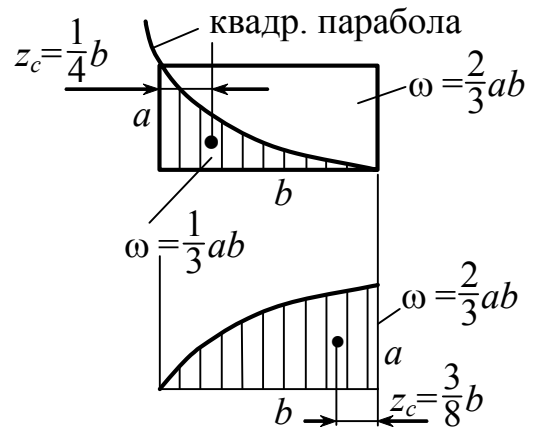
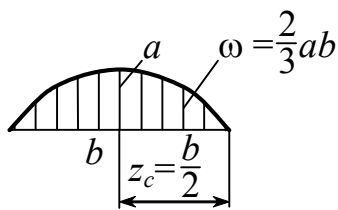


Рис.7.41

$$\begin{aligned} \Delta_{A-B} &= \sum \frac{\omega_{(M)} \cdot y_c^M}{E \cdot I} + \sum \frac{\omega^N \cdot y_c^N}{E \cdot A} = \\ &= \frac{1}{E \cdot I} \left[ 2 \cdot \left( \frac{1}{3} h \cdot \frac{qh^2}{2} \cdot l \right) \cdot \frac{3}{4} (1 \cdot h) + \left( \frac{qh^2}{2} \right) \cdot (1 \cdot h) \right] + \frac{1}{E \cdot A} (qh \cdot l) \cdot 1. \end{aligned}$$

$\theta_{MN} - ?$

$$\text{По Мору} \quad \theta_{M-N} = \int_0^l \frac{M_F(z_2) \cdot M_2(z_2) dz}{E \cdot I} = \int_0^l \frac{qh^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot 1 dz = \frac{qh^2 l}{2EI}.$$

$$\text{По Верещагину} \quad \theta_{MN} = \frac{\omega \cdot y_c}{E \cdot I} = \frac{\frac{qh^2}{2} \cdot l \cdot 1}{E \cdot I}.$$

## 7.9. Расчет статически неопределимых плоских стержневых систем на основе метода потенциальной энергии

*Ключевые слова*

*Плоская стержневая система, степень статической неопределимости, замкнутый контур, уравнения равновесия, уравнения деформаций, способы расчета статически неопределимых систем.*

Статическая неопределимость возникает при наложении на систему связей в количестве большем, чем необходимо и достаточно для обеспечения равновесия.

Число лишних неизвестных, равное числу лишних связей, называется *степенью статической неопределимости*, может быть определено исходя из формулы (7.17)

$$L = -W = C_0 + 2Ш + 3К - 3Д = C - 3Д, \quad (7.17)$$

где  $C$  – общее число связей.

Для рам степень статической неопределимости проще определять исходя из того, что каждый замкнутый бесшарнирный контур обладает тремя лишними связями, а каждый шарнир, введенный в такой контур, снимает одну связь и снижает степень статической неопределимости на единицу. Тогда, обозначив количество замкнутых контуров через  $K$ , количество снятых связей, т.е. общее число шарниров и ползунов через  $C_{сн}$ , получим



$$L = 3K - C_{\text{сн}}.$$

Все связи статически неопределимой системы разделяют на абсолютно необходимые и условно необходимые (они же условно лишние). При этом силы в абсолютно необходимых связях называются статически определимыми.

Для плоской системы  $C = 3$  число абсолютно необходимых связей,  $(C - 3)$  “лишние” связи, без них обеспечивается равновесие. Различают внешнюю и внутреннюю статическую неопределимость, смотря по тому – наложены лишние связи внешние или внутренние (рис.7.42). В пространственной системе – 6 абсолютно необходимых связей.

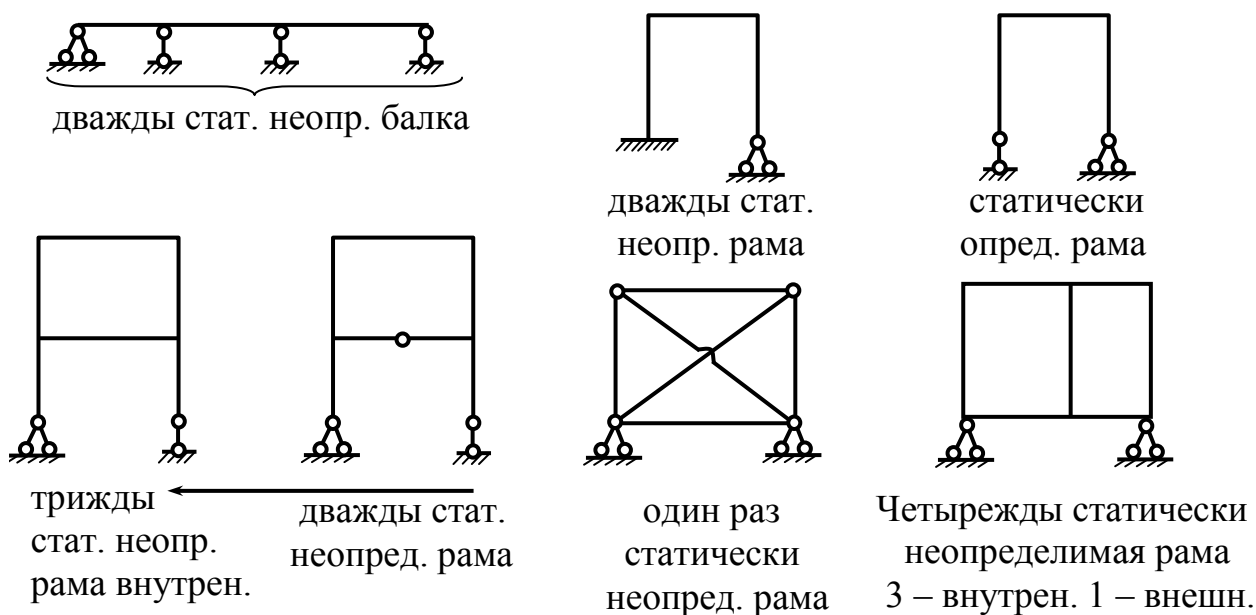


Рис.7.42

Реакции связей определяются из уравнений равновесия статики.

Если  $L > 0$ , возникает статическая неопределимость, т.е. недостаточно уравнений равновесия для определения реакций связей.

К уравнениям равновесия добавляют уравнения деформаций.

Лишние связи накладывают определенные ограничения на характер деформации, рассмотрение которых позволяет составить недостающие уравнения. В направлении жесткой связи поры  $B$  нет перемещения (рис. 7.43,  $a$ ), а в месте установки пружины перемещение равно осадке пружины, т.е.  $f_B = \lambda_{\text{пруж}}$ . (рис. 7.43,  $b$ ).

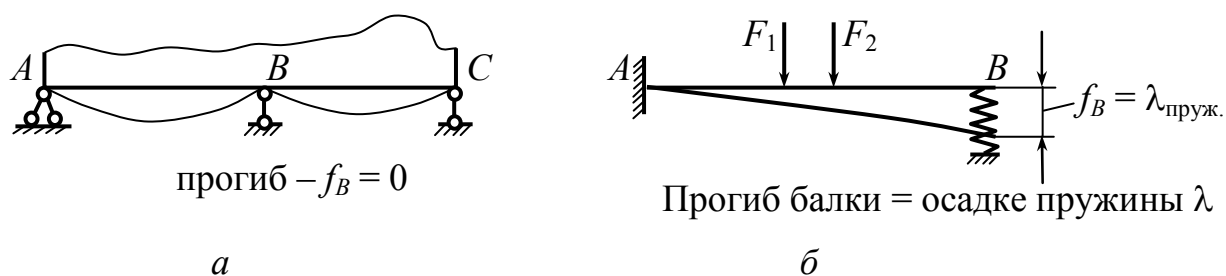


Рис.7.43

Различают два способа расчета статически неопределимых систем:

- 1) метод сил: за основные неизвестные, подлежащие определению, принимаются реакции лишних связей;
- 2) метод перемещений: за основные неизвестные принимаются линейные и угловые перемещения.

Мы рассмотрим детально метод сил.

### 7.10. Метод сил. Канонические уравнения метода сил

*Ключевые слова*

*Плоская статически неопределимая стержневая система, рама, лишние реакции связей, основная система, эквивалентная система, канонические уравнения метода сил, метод Мора, способ Верещагина, формула Симпсона, симметричные и кососимметричные системы нагрузок, статическая, кинематическая проверка.*

Ход рассуждений будем иллюстрировать на плоской стержневой системе (рис. 7.44,  $a$ ).

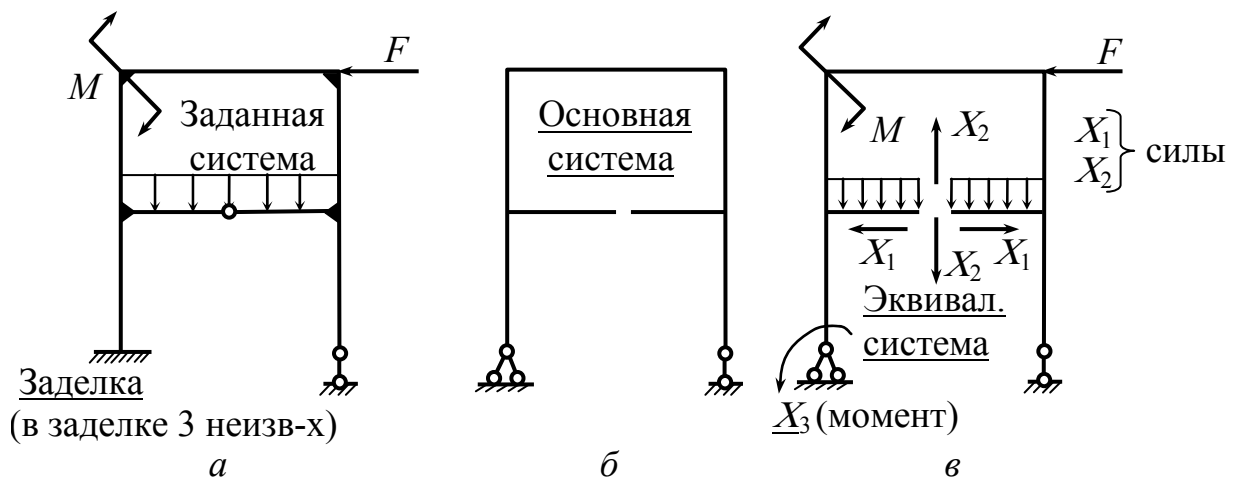


Рис.7.44

1. **Определяется число лишних связей.** 3 лишних связи: 1 – внешняя и 2 внутренних.

2. **Выбор основной системы.** Она получается из заданной путем удаления связей, принятых за лишние (рис. 7.44, в). Основная система должна быть геометрически неизменяема и статически определима. Целесообразно стремиться к получению основной системы, симметричной или кососимметричной в отношении геометрии и схемы нагружения.

3. **Составление эквивалентной системы.** Эквивалентная система получается из основной путем приложения заданных нагрузок и реакций лишних связей (рис. 7.44, в). (Полученная эквивалентная система симметрична в отношении геометрии, она может быть симметрична или кососимметрична и в отношении нагрузок, и в отношении схемы нагружения, и может быть приведена к совокупности двух систем: симметричной и кососимметричной.) Эквивалентность окончательно обеспечивается тем, что составляются условия отсутствия перемещений в направлении удаленных лишних связей. Из этих условий определяются реакции лишних связей.

4. **Составление канонических уравнений метода сил.**

$\Delta_1 = 0$  – нет взаимного перемещения в направлении  $X_1$ ;

$\Delta_2 = 0$  – то же в направлении  $X_2$ ;

$\Delta_3 = 0$  – нет углового перемещения левого опорного сечения в направлении  $X_3$ ;

$$\Delta_1 = \Delta_1(X_1) + \Delta_1(X_2) + \Delta_1(X_3) + \Delta_{1F} = 0,$$

где  $\Delta_{1F}$  – взаимное перемещение в направлении  $X_1$ , обусловленное всеми заданными нагрузками;  $\Delta_1(X_1)$ ,  $\Delta_1(X_2)$ ,  $\Delta_1(X_3)$  – перемещения в направлении неизвестной силы  $X_1$  от неизвестных сил  $X_1, X_2, X_3$ .

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1F} = 0; \\ \Delta_2 &= \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2F} = 0; \\ \Delta_3 &= \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3F} = 0. \end{aligned} \right\} \text{– канонические уравнения.}$$

5.  $\delta_{iK} = \delta_{Ki}$ , **определяются аналитически по методу Мора или графоаналитически по способу Верещагина, или по формуле Симпсона.**

$\Delta_{iF}$  – полное перемещение в  $i$ -м направлении, также определяется по методу Мора или по способу Верещагина, или по формуле Симпсона.

6. **Из системы канонических уравнений определяются  $X_1, X_2, X_3$ .** После определения  $X_1, X_2, X_3$  – реакций лишних связей – дальнейший ход решения задачи по существу не отличается от расчета статически определимых систем.

Рассмотрим преобразование заданной системы нагрузок (рис. 7.45) в совокупность симметричной и кососимметричной систем нагрузок.

Вместо заданной рамы можно рассчитать 2 рамы с симметричной и кососимметричной нагрузкой и получить  $X'_1, X'_2, X''_1, X''_2, X''_3$ , алгебраически сложить их значения и определить  $X_1, X_2, X_3$ .

При этом уменьшение объема вычислений связано с тем, что при умножении симметричных эпюр (от симметричных нагрузок при симметричной геометрии) на кососимметричные эпюры (от кососимметричных нагрузок при симметричной геометрии) – получается нуль, а умножение симметричных эпюр на симметричные и кососимметричных на кососимметричные упрощается.

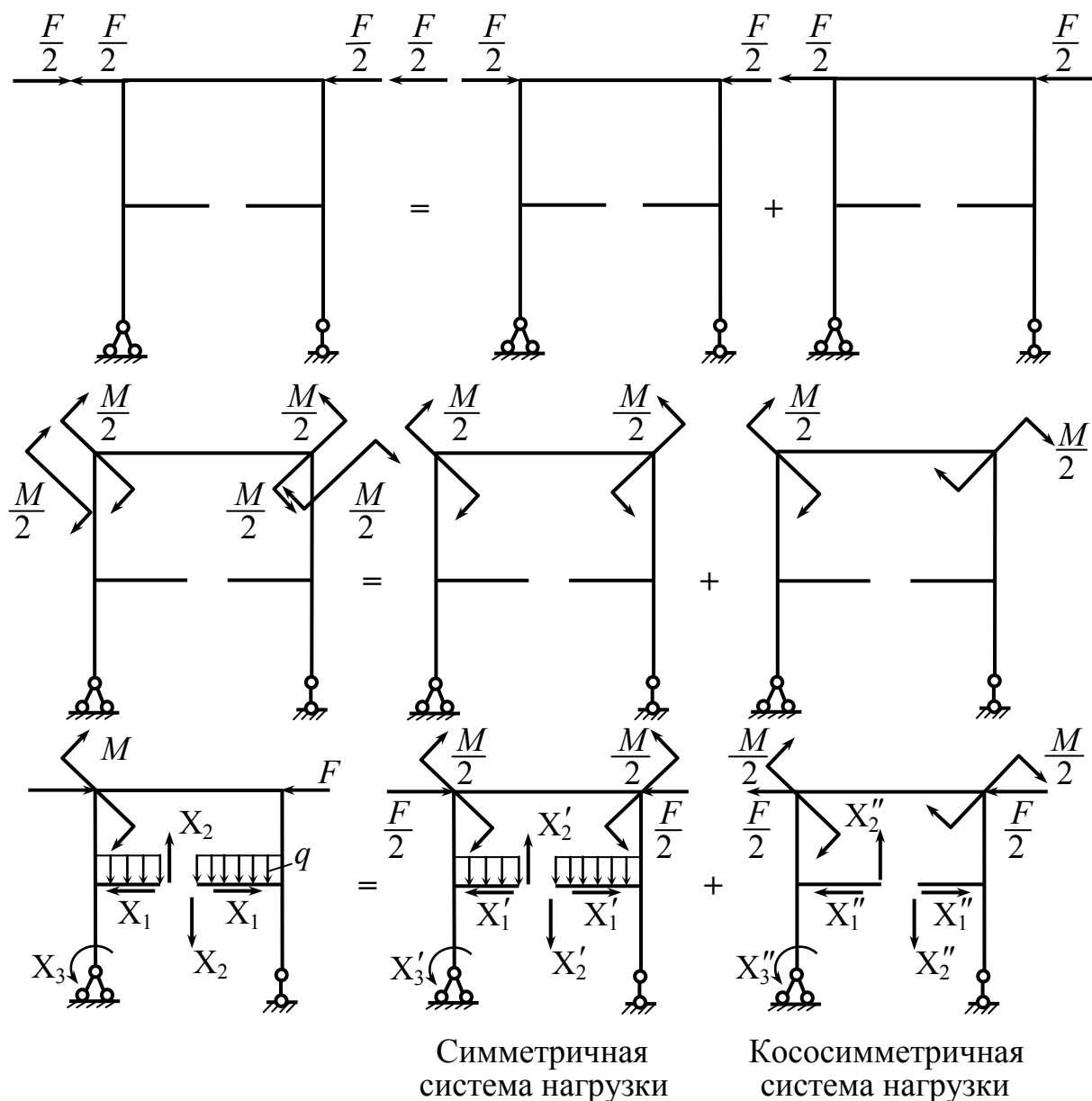


Рис.7.45

**Пример.**

1) требуется раскрыть статическую неопределимость рамы (рис. 7.46) и построить эпюры суммарные изгибающих моментов, поперечных и нормальных сил;  $M(z)$ ,  $N(z)$ ,  $Q(z)$ ;

2) определить горизонтальное перемещение т.С  $\Delta_c^{\text{гор}}$ .

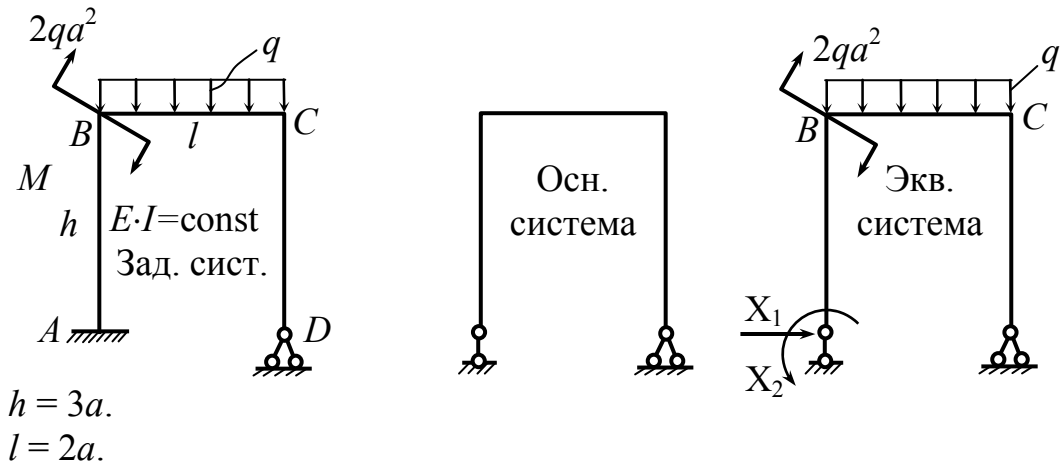


Рис.7.46

Преобразование нагрузки к симметричному и кососимметричному виду представлено на рис. 7.47.

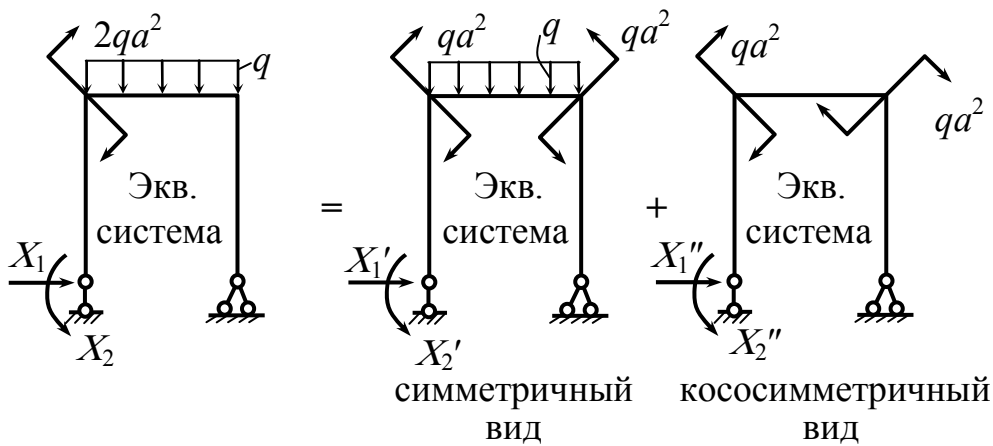


Рис.7.47

Составим канонические уравнения метода сил:

$$\left. \begin{aligned}
 1) \quad & \delta_{11} \cdot X_1' + \delta_{12} \cdot X_2' + \Delta_{1F}' = 0 \\
 & \delta_{21} \cdot X_1' + \delta_{22} \cdot X_2' + \Delta_{2F}' = 0
 \end{aligned} \right\} \quad \text{— нет перемещений в направлении } X_1',$$

где  $\delta_{11}$  — перемещение по горизонтали от единичной силы  $X_1'$ ;

$\delta_{12}$  — перемещение по горизонтали от момента  $X_2'$ .

$$2) \left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1'' + \delta_{12} \cdot X_2'' + \Delta_{1F}'' &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1'' + \delta_{22} \cdot X_2'' + \Delta_{2F}'' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Построим эпюры  $M_{\text{изгиб}}$  от внешних нагрузок (рис. 7.48). Влияние нормальной и перерезывающей силы не будем учитывать, а только –  $M_{\text{изгиб}}$ .

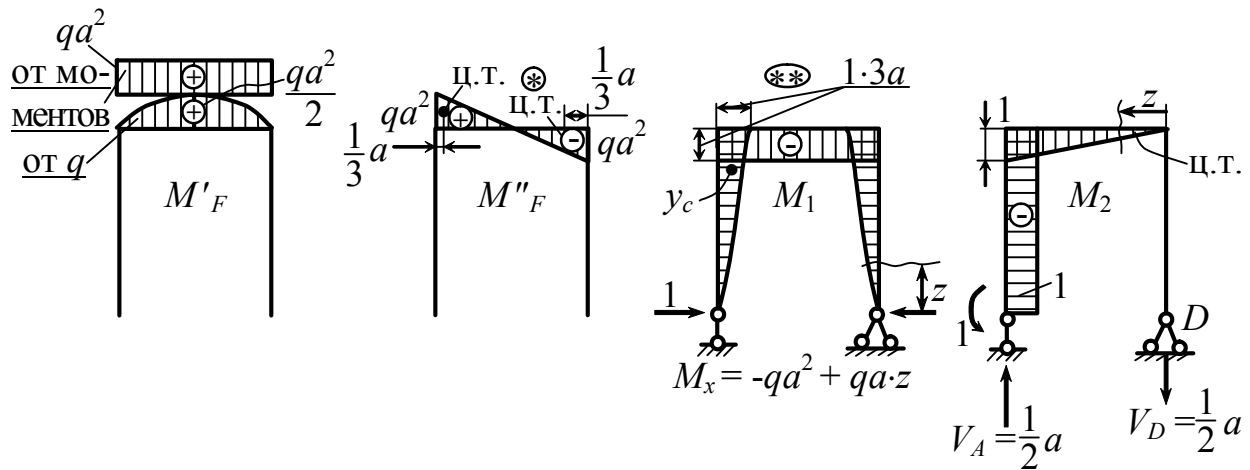


Рис.7.48

Определить  $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{12} = \delta_{21}, \Delta'_{1F}, \Delta'_{2F}, \Delta''_{1F}, \Delta''_{2F}$ .

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_i \int \frac{M_1(z) \cdot M_1(z) dz}{E \cdot I} = \sum \frac{\omega \cdot y_c}{E \cdot I} = \left| \omega = \left( \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \right) \right| = \\ &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ 2 \left( \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 3a + 1 \cdot 3a \cdot 2a \right] = \frac{36a^3}{E \cdot I}; & \delta_{11} &= \frac{36a^3}{E \cdot I}; \\ \delta_{12} &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (3a \cdot 3a) \cdot 1 + (3a \cdot 2a) \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{15a^2}{2E \cdot I}; & \delta_{12} &= \frac{15a^2}{2E \cdot I}; \\ \delta_{22} &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ \underset{\text{площ.}}{(1 \cdot 3a)} \cdot 1 + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{11a}{3E \cdot I}; & \delta_{22} &= \frac{11a}{3E \cdot I}. \end{aligned}$$

Определить перемещение под действием внешней силы  $\Delta'_{1F}$ :

$$\begin{aligned}\Delta'_{1F} &= \sum_l \int \frac{M'_F(z) \cdot M_1(z) dz}{E \cdot I} = \sum \frac{\omega \cdot y_c}{E \cdot I} = \\ &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ \underbrace{(qa^2 \cdot 2a)}_{\text{плоч.}} \cdot \underbrace{(-3a)}_{\text{ордин.}} + \underbrace{\left( \frac{2}{3} \frac{qa^2}{2} \cdot 2a \right)}_{\text{плоч.}} \cdot \underbrace{(-3a)}_{\text{ордин.}} \right] = -\frac{8qa^4}{E \cdot I}; \quad \Delta'_{1F} = -\frac{8qa^4}{E \cdot I}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta'_{2F} &= \sum_l \int \frac{M'_F(z) \cdot M_2(z) dz}{E \cdot I} = \\ &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ (qa^2 \cdot 2a) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} \frac{qa^2}{2} \cdot 2a\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right] = -\frac{4qa^3}{3E \cdot I};\end{aligned}$$

$$\Delta'_{2F} = -\frac{4qa^3}{3E \cdot I}.$$

$$\Delta''_{1F} = \sum_l \int \frac{M''_F(z) \cdot M_1(z) dz}{E \cdot I} = \sum \frac{\omega \cdot y_c}{E \cdot I} = 0 \quad \text{— произведение симметричной и кососимметричной нагрузки} = 0, \text{ (рис. 7.48).}$$

$$\begin{aligned}\Delta''_{2F} &= \int_l \frac{M''_F(z) \cdot M_2(z) dz}{E \cdot I} = \left| y_c = \frac{1 \cdot \frac{5}{3} a}{2a} = 1 \cdot \frac{5}{6} \right| = \\ &= \sum \frac{\omega \cdot y_c}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} qa^2 \cdot a \right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2} qa^2 \cdot a\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \right] = -\frac{1}{3} qa^3 \frac{1}{E \cdot I};\end{aligned}$$

$$\Delta''_{2F} = -\frac{qa^3}{3E \cdot I}.$$



$$1) \left\{ \begin{array}{l} X'_1 \cdot 36a^3 + \frac{15a^2}{2} X'_2 - 8qa^4 = 0; \\ \frac{15}{2} a^2 \cdot X'_1 + \frac{11}{3} a \cdot X'_2 - \frac{4}{3} qa^3 = 0; \end{array} \right. \begin{array}{l} X'_1 \\ X'_2 \end{array} \left| \begin{array}{l} 72aX'_1 + 15X'_2 = 16qa^2; \\ 45aX'_1 + 22X'_2 = 8qa^2; \\ 176X'_2 - 75X'_2 = (64 - 80)qa^2; \\ 101X'_2 = -16qa^2; \\ 45aX'_1 + 22 \cdot \frac{-16}{101} qa^2 = 8qa^2; \\ X'_1 = \frac{1160}{101 \cdot 45} qa = 0,255qa. \end{array} \right.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{36a}{EI} \cdot X''_1 + \frac{15a^2}{2EI} \cdot X''_2 = 0; \\ \frac{15a}{2EI} \cdot X''_1 + \frac{11a}{3EI} \cdot X''_2 - \frac{qa^2}{3EI} = 0; \end{array} \right. \begin{array}{l} X''_1 \\ X''_2 \end{array} \left| \begin{array}{l} X''_1 = -X''_2 \cdot \frac{15}{2 \cdot 36 \cdot a} = -\frac{5}{24a} \cdot X''_2; \\ \frac{15qa^2}{2} \left( -\frac{5}{24a} \cdot X''_2 \right) + \frac{11}{3} \cdot X''_2 = \frac{qa^2}{3}; \end{array} \right.$$

$$\left( -\frac{75}{16} + \frac{11 \cdot 16}{16} \right) \cdot X''_2 = qa^2; \quad X''_2 = \frac{16qa^2}{101};$$

$$X''_1 = -\frac{5}{24a} \cdot \frac{16}{100} \cdot qa^2 = -\frac{4qa}{120} = -\frac{qa}{30} \approx -0,033qa.$$

$$\begin{cases} X'_1 = 0,255qa; \\ X'_2 = -0,16qa^2; \end{cases} \quad \begin{cases} X''_1 = -0,033qa; \\ X''_2 = 0,16qa^2; \end{cases}$$

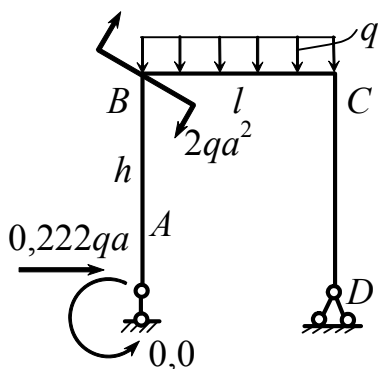


Рис.7.49

$$X_1 = X'_1 + X''_1 = 0,255qa - 0,0334qa = 0,222qa;$$

$$X_2 = X'_2 + X''_2 = -0,16qa^2 + 0,16qa^2 = 0.$$

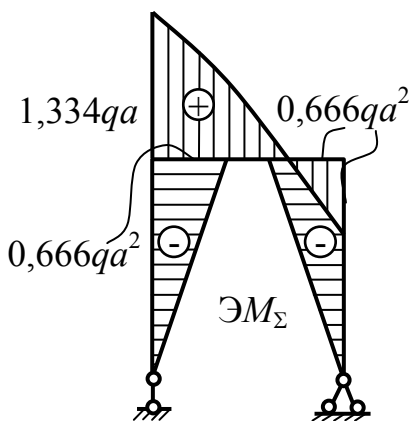


Рис.7.50

Построение суммарных эпюр (рис. 7.50):

$$M(z)^{\text{сум.}} = (M'_F + M''_F) + \underset{\substack{\text{орд.един.} \\ \text{мом.}}}{M_1} \cdot X_1 + \underset{\substack{\text{орд.един.} \\ \text{мом.}}}{M_2} \cdot X_2;$$

$$N(z) = N'_F + N_1 \cdot X_1 + N''_F + N_2 \cdot X_2;$$

$$Q(z) = (Q'_F + Q''_F) + Q_1 \cdot X_1 + Q_2 \cdot X_2.$$

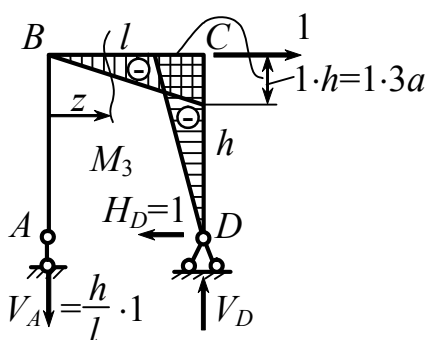


Рис.7.51

Определить горизонтальное перемещение т.С  $\Delta_c^{\text{гор}}$  и определить взаимный угол поворота т.В и т.С  $\theta_{B-C}$  (рис. 7.51).

$$V_D \cdot l - 1 \cdot h = 0; \quad V_D = \frac{h}{l} \cdot 1; \quad 1 \cdot \frac{h}{l} \cdot l = 1 \cdot h;$$

$$M_3(z) = -V_A \cdot z = -1 \cdot \frac{h}{l} \cdot z;$$

$$M_{3(z=l)} = -1 \cdot \frac{h}{l} \cdot l = 1 \cdot h = 1 \cdot 3a.$$

$$\begin{aligned} \Delta_c^{\text{гор}} &= \frac{2a}{6EI} \left( 1,334qa^2 \cdot 0 + 4 \cdot 0,884qa^2 \cdot \left( -\frac{3a}{2} \right) + \left( -0,666qa^2 \right) \cdot \left( -1 \frac{3a}{2} \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} 0,666qa^2 \cdot 3a \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 3a \right) \right) = \frac{0,058qa^4}{EI}, \end{aligned}$$

где  $\omega$  – площадь суммарных эпюр на соответствующих участках;  $y_c$  – ордината эпюр от единичной горизонтальной нагрузки, приложенной в т. l.

**Проверка:** В системах с лишними связями условиям равновесия может удовлетворять не одна система значений  $X_1$   $X_2$   $X_3$  ..., и проверка правильности решения должна решаться не только по условиям равновесия. Необходима капитальная проверка, которая

сводится к проверке отсутствия перемещений в направлении лишних, жестких связей. Перемножая эюру  $M_1$  с эюрой  $M(z)^{сум.}$ , должны получить нуль.

Убедимся в этом применительно к нашему примеру.

Выбираем новую основную систему. Прикладываем единичную силу в направлении отброшенной вертикальной связи и строим эюру изгибающих моментов (рис. 7.52).

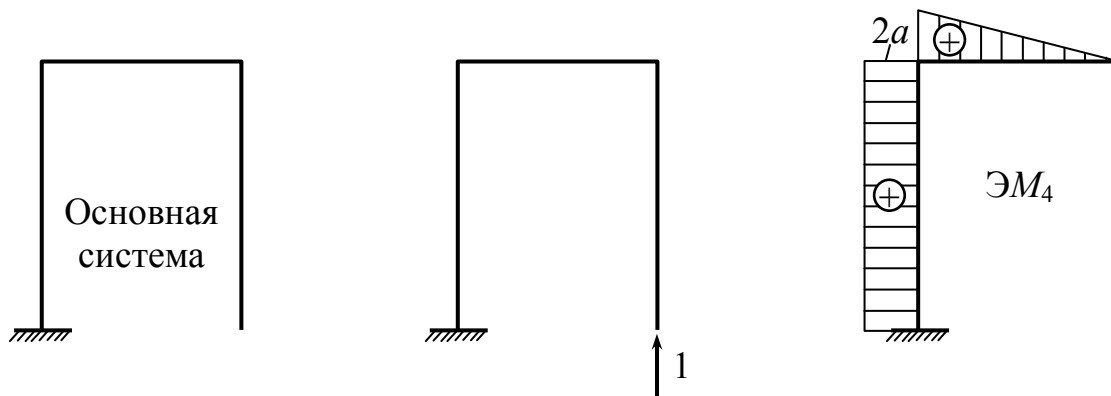


Рис.7.52

Перемножим эюру  $M_4$  и суммарную эюру изгибающих моментов, пользуясь формулой Симпсона, получим

$$\Delta_4 = \frac{3a}{6EI} \left( 2 \cdot 2a \cdot 0 + 2a(-0,666qa^2) + 0 \cdot 2a + 2 \cdot 2a(-0,666qa^2) \right) + \\ + \frac{2a}{6EI} \left( 2a \cdot 1,334qa^2 + 4 \cdot 0,884qa^2 \cdot a + (-0,666qa^2) \cdot 0 \right) \approx \frac{0,06qa^4}{EI}.$$

Этот результат показывает, что в примере правильно были определены неизвестные реакции  $X_1$  и  $X_2$ .

### 7.11. Расчет многопролетных неразрезных балок

*Ключевые слова*

*Неразрезная статически неопределимая многопролетная балка, число лишних связей, рациональная основная система, эквивалентная система, опорные моменты, система канонических уравнений.*

Неразрезной многопролетной балкой называется балка, проходящая, не прерываясь, над рядом опор, с которыми сочленена шарнирно (рис. 7.53).

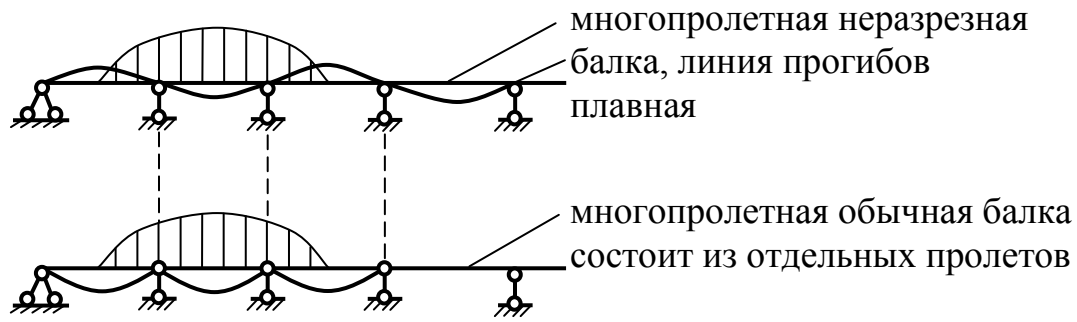


Рис.7.53

Число лишних связей равно числу промежуточных опор. Оказывается, в этом случае построение основной системы (рис. 7.54) путем удаления промежуточных опор нецелесообразно, ибо получается при этом система канонических уравнений (по числу промежуточных опор), в каждое из которых входят все лишние неизвестные, решение становится сложным.

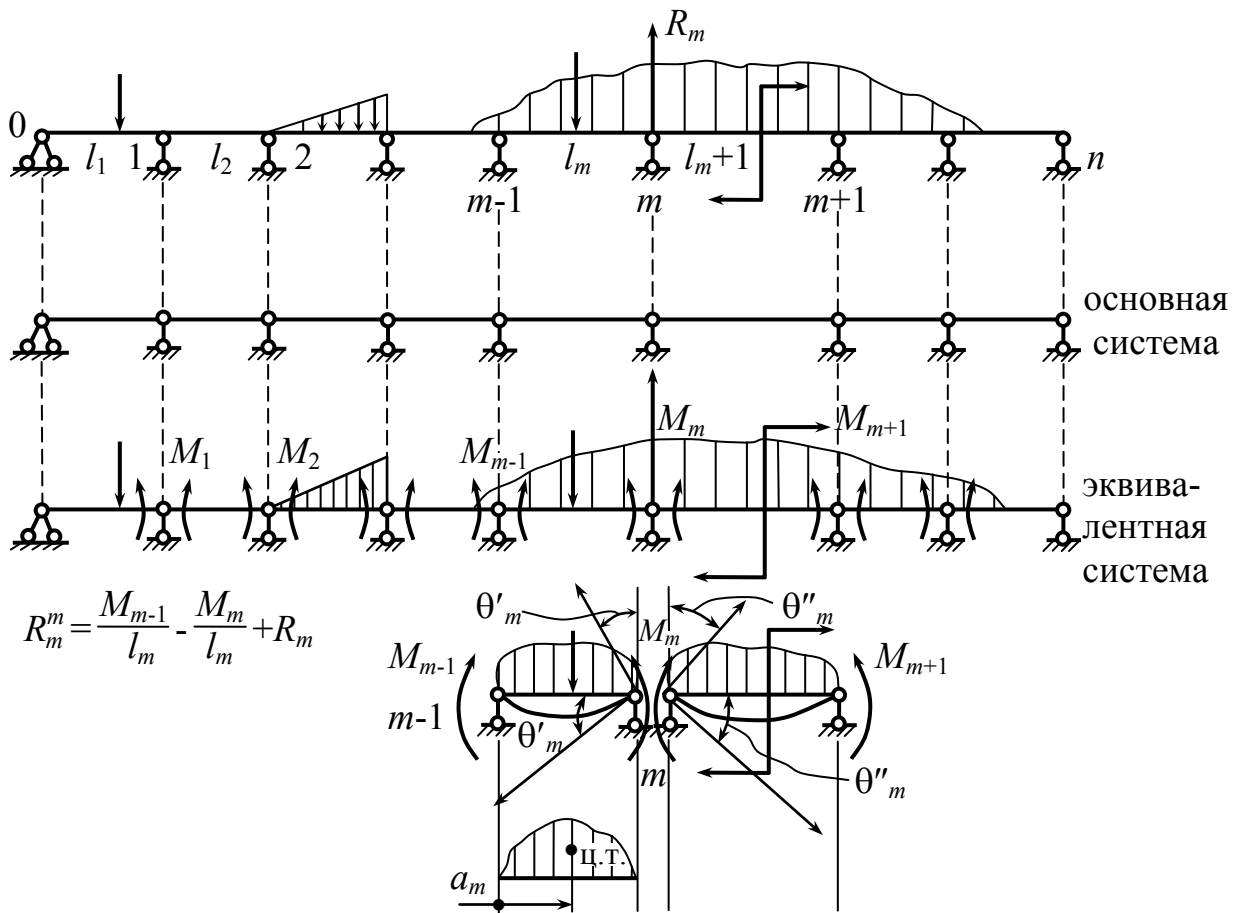


Рис.7.54

Метод расчета основан на том, что основная система (геометрически неизменяемая и статически определимая) получается не путем удаления лишних внешних связей (промежуточных опор), а за счет удаления лишних внутренних связей – угловых связей в сечениях, расположенных над промежуточными опорами. Прикладываем вместо удаленных связей в эквивалентной системе опорные моменты  $M_1, M_2, M_{m-1}, M_m$  и т.д.

Для того, чтобы деформации в эквивалентной системе (рис. 7.56) были такими же, как в заданной (рис. 7.55), необходимо выполнить условие отсутствия взаимных поворотов в смежных сечениях, расположенных над промежуточными опорами, т.е. выполнить условие (7.18)

$$\theta'_m + \theta''_m = 0. \quad (7.18)$$

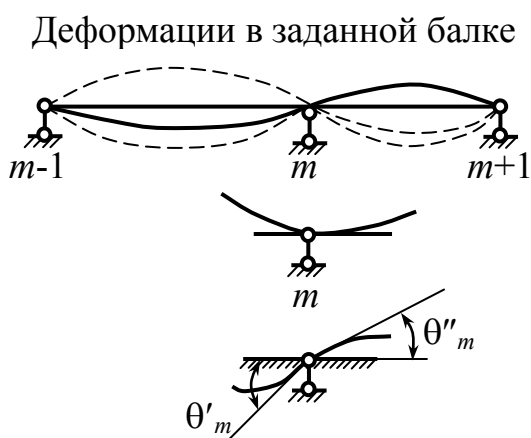


Рис.7.55

Деформации в эквивалентной системе

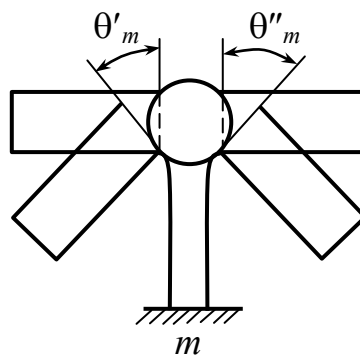


Рис.7.56

Поскольку задача сводится к раскрытию статической неопределимости заданной балки, для этого достаточно определить значение опорных моментов  $M_{m-1}, M_m, M_{m+1}$ . Выразим  $\theta'_m$  и  $\theta''_m$  через заданную или пролетную нагрузку и опорные моменты по методу Мора или способу Верещагина, или по формуле Симпсона.

1. Уравнения составляются по числу промежуточных опор. Совместное решение полученной системы позволяет определить значение опорных моментов. При этом необходимо иметь в виду,

что значение моментов на крайних опорах для шарнирно опертой балки известно и равно:

а) нулю, если на этих опорах не приложено внешних моментов и если за опорой нет консоли, несущей нагрузку;

б) значению внешнего момента, приложенного в опорном сечении, или значению момента нагрузки, приложенной к консоли относительно крайнего опорного сечения, если есть консоль.

2. Полученная система уравнений для определения опорных моментов проще той системы канонических уравнений, которая получилась бы в случае удаления внешних опорных связей.

У нас  $(n - 1)$  уравнений, каждое из которых содержит 3 неизвестных (для второй и предпоследней опоры – 2 неизвестных). При составлении системы канонических уравнений будем иметь  $(n - 1)$  уравнений, в каждое из которых входит  $(m - 1)$  неизвестная.

3. После определения опорных моментов статическая неопределимость задачи будет раскрыта. Дальнейшее решение может быть сведено к рассмотрению отдельных шарнирно опертых пролетов, представляющих собой статически определимые балки, несущие заданную внешнюю нагрузку плюс опорные моменты (уже известные).

## 7.12. Определение значений реакций в опорах

*Ключевые слова*

*Реакции в опорах балки.*

Определить реакцию в опоре  $m$   $R_m$  (рис. 7.54):

$$R_m = R_m^m + R_m^{m+1}; \quad R_m^m = R_m^m(Fl_m) + \frac{M_{m-1}}{l_m} - \frac{M_m}{l_m},$$

где  $Fl_m$  – любая внешняя нагрузка.

$$R_m^{m+1} = R_m^{m+1}(Fl_{m+1}) + \frac{M_{m+1}}{l_{m+1}} - \frac{M_m}{l_{m+1}}.$$

Сложим:

$$R_m = R_m^m (Fl_m) + R_m^{m+1} (Fl_{m+1}) + \frac{M_{m-1} - M_m}{l_m} + \frac{M_{m+1} - M_m}{l_{m+1}}. \quad (7.19)$$

### 7.13. Вычисление перерезывающих сил

$$Q(x_m) = Q(Fl_m) - \frac{M_{m-1}}{l_m} + \frac{M_m}{l}. \quad (7.20)$$

### 7.14. Определение изгибающих моментов

$$M(x_m) = M(Fl_m) + M_{m-1} \cdot \frac{l_m - x_m}{l_m} + M_m \frac{x_m}{l_m}. \quad (7.21)$$

В случае заделки (рис. 7.57), т.е. учитывая схематически работу защемленного конца, см. схему – вместо заделки ставят две шарнирных опоры 0 и -1 и добавляют пролет  $l_0$  (рис. 7.58).

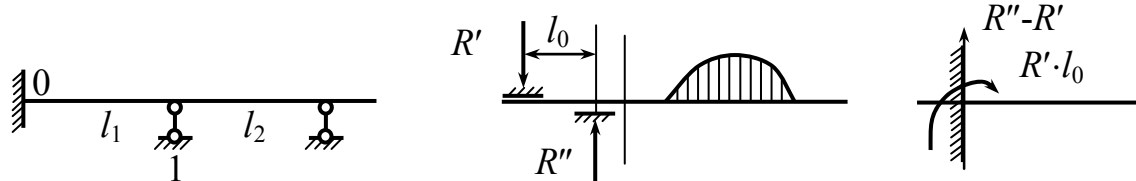


Рис.7.57

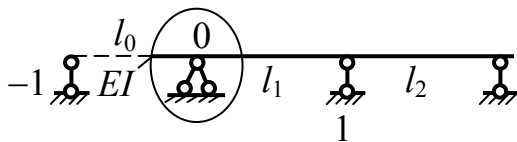


Рис.7.58

Опора становится промежуточной и для нее можно составить каноническое уравнение; для нее впоследствии принимается  $M_{-1} = 0$ ,  $l_0 = 0$ , или что  $E \cdot I \rightarrow \infty$  жесткость бесконечно велика.

**Пример:** построить эпюры суммарных изгибающих моментов и поперечных сил для балки, представленной на рис. 7.59.

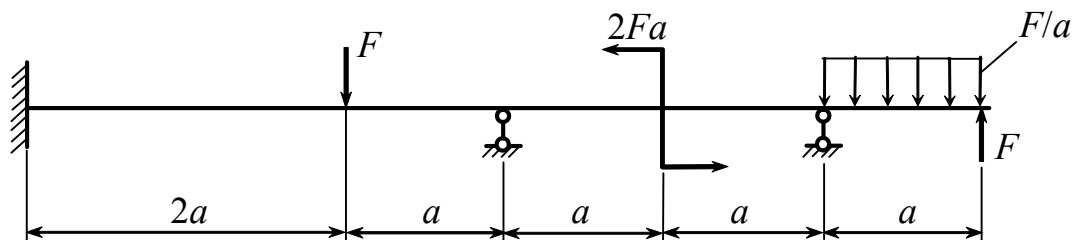


Рис.7.59

Решение данного примера выполним двумя способами: 1 – когда за неизвестные силовые факторы будут приниматься моменты во врезанных шарнирах; 2 – когда за неизвестные силовые факторы будут приниматься реакции в отброшенных лишних опорах.

**Решение 1.**

Основная и эквивалентная системы приведены на рис. 7.60, а, б. Строим эпюры грузового и единичных состояний (рис. 7.60, в-е).

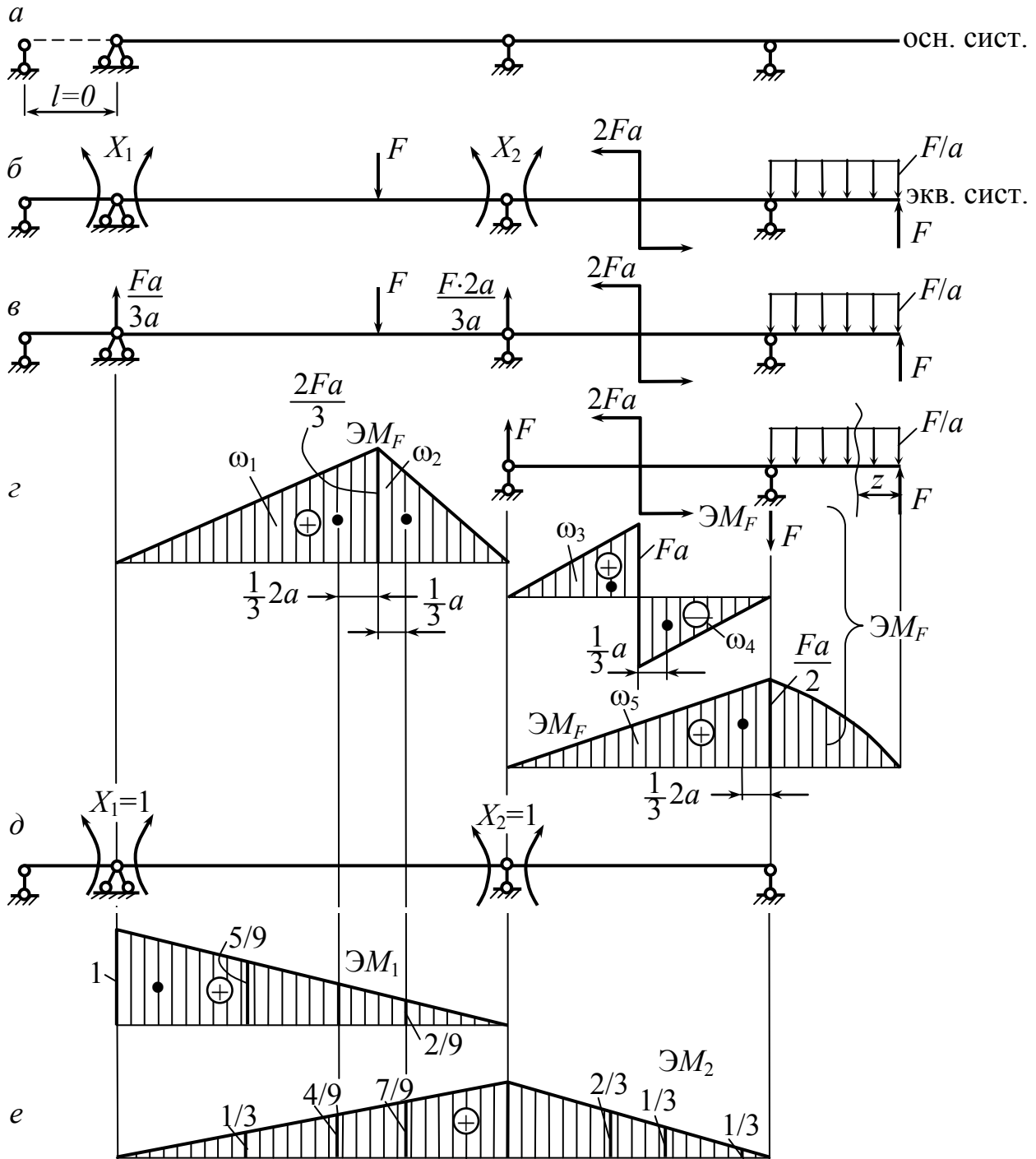


Рис.7.60



Вычисляем коэффициенты канонических уравнений по способу Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{a}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{5a}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3a \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{a}{2EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2Fa}{3} \cdot 2a \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2Fa}{3} \cdot a \cdot \frac{2}{9} \right) = \frac{12 Fa^2}{27 EI} = \frac{4 Fa^2}{9 EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} &= \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2Fa}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2Fa}{3} \cdot \frac{7}{9} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot Fa \cdot \frac{2}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{1}{2} a \cdot Fa \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{Fa}{2} \cdot 2a \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{2Fa^2}{3EI} \left( \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{Fa^2}{54EI} (16 + 14 + 18 - 9 + 9) = \frac{48 Fa^2}{54 EI} = \frac{8 Fa^2}{9 EI}. \end{aligned}$$

Записываем канонические уравнения с учетом найденных коэффициентов:

$$\begin{cases} \phi X_1 + \frac{\phi}{2} X_2 + \frac{4}{9} Fa = 0; \\ \frac{\phi}{2} X_1 + \frac{5\phi}{3} X_2 + \frac{8}{9} Fa = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18X_1 + 9X_2 = -8Fa; \\ 9X_1 + 30X_2 = -16Fa. \end{cases}$$

Упрощая и решая систему уравнений, находим неизвестные  $X_1$  и  $X_2$ :

$$51X_2 = (-32 + 8)Fa = -24Fa.$$

$$X_2 = -\frac{24}{51}Fa = -\frac{8}{17}Fa = -0,47Fa.$$

$$X_1 = \frac{-8Fa + 9 \cdot 0,47Fa}{18} = -0,22Fa.$$

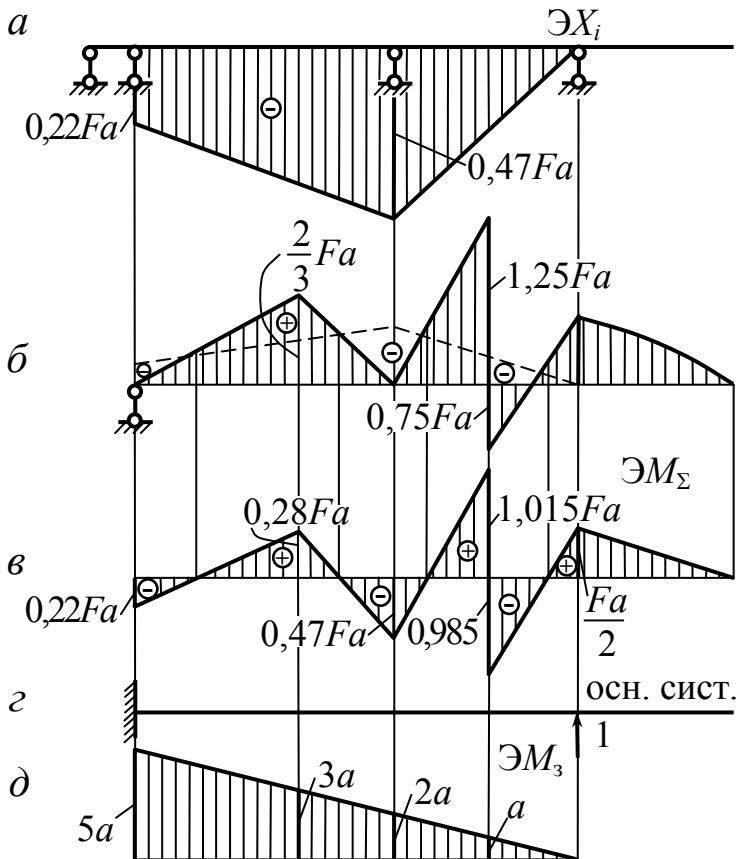


Рис.7.61

Строим эпюру найденных опорных моментов (рис. 7.61, а). Далее методом наложения строим эпюру суммарных изгибающих моментов (рис. 7.61, б, в). Также суммарную эпюру изгибающих моментов можно строить, используя для каждого сечения балки алгебраическую сумму

$$\mathcal{E}M_\Sigma = \mathcal{E}M_F + \mathcal{E}M_1 \cdot X_1 + \mathcal{E}M_2 \cdot X_2.$$

Правильность решения задачи проверим, учитывая, что в самой крайней шарнирной опоре балки вертикальное перемещение равно нулю. Принимаем новую основную систему (рис. 7.59, з). Строим единичную эпюру изгибающих моментов  $\mathcal{E}M_3$  (рис. 7.59, д) и перемножаем  $\mathcal{E}M_\Sigma \cdot \mathcal{E}M_3$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}M_2 \cdot \mathcal{E}M_3 &= \frac{2a}{6EI} (2(-0,22Fa) \cdot 5a + 2 \cdot 0,28Fa \cdot 3a + (-0,22Fa) \cdot 3a + 0,28Fa \cdot 5a) + \\ &+ \frac{a}{6EI} (2 \cdot 0,28Fa \cdot 3a + 2 \cdot (-0,47Fa) \cdot 2a + 0,28Fa \cdot 2a + (-0,47Fa) \cdot 3a) + \\ &+ \frac{a}{6EI} (2 \cdot (-0,47Fa) \cdot 2a + 21,015Fa \cdot a + (-0,47Fa) \cdot a + 1,015Fa \cdot 2a) + \\ &+ \frac{a}{6EI} \left( 2(-0,985Fa) \cdot a + 2 \frac{Fa}{2} \cdot 0 + (-0,985Fa) \cdot 0 + a \cdot \frac{Fa}{2} \right) \approx \frac{0}{EI}. \end{aligned}$$

Значит, задача решена верно.

Определение реакций в опорах (рис. 7.62 и рис. 7.63) и построение эпюры перерезывающих сил (рис. 7.64)

$$\sum \text{mom}_2(F) = 0 \rightarrow R_1 -!$$

$$R_1 \cdot 3a - 0,22Fa - F \cdot a + 0,47Fa = 0;$$

$$R_1 = \frac{0,22Fa + Fa - 0,47Fa}{3a} = 0,25F.$$

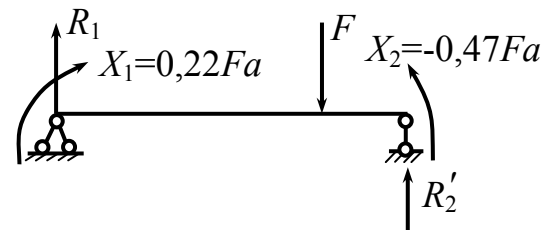


Рис.7.62

$$\sum \text{mom}_1(F) = 0 \rightarrow R_2' -!$$

$$R_2' \cdot 3a - 0,47F \cdot a - 1 - 2a + 0,22Fa = 0;$$

$$R_2' = \frac{+0,47Fa + 2Fa - 0,22Fa}{3a} = 0,75F.$$

$$\sum \text{mom}_3(F) = 0 \rightarrow R_2'' -!$$

$$R_2'' \cdot 2a - 0,47Fa - 2Fa + \frac{F}{a} \cdot \frac{a^2}{2} - Fa = 0;$$

$$R_2'' = \frac{0,47Fa + 2Fa - 0,5Fa + Fa}{2a} \approx 1,5F;$$

$$R_2 = R_2' + R_2'' = 0,75Fa + 1,5Fa = 2,25Fa.$$

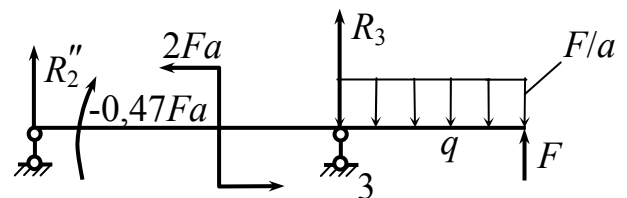


Рис.7.63

$$\sum \text{mom}_2(F) = 0 \rightarrow R_3 -!$$

$$R_3 \cdot 2a + F3a - \left(2a + \frac{a}{2}\right) + 0,47Fa + 2Fa = 0;$$

$$R_3 = \frac{-3Fa + 2,5Fa - 0,47Fa - 2Fa}{2a} = -1,5F.$$

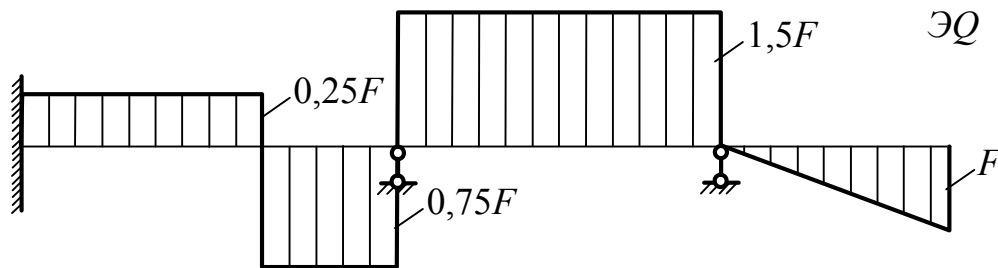


Рис.7.64

**Решение 2.** В качестве неизвестных выбраны реакции в опорах  $X_1$  и  $X_2$  (рис. 7.62, б), тогда представим основную систему (рис. 7.65, б) и эквивалентную систему (рис. 7.65, в). Записываем систему канонических уравнений по методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты канонических уравнений определяем графо-аналитически: по способу Верещагина или по формуле Симпсона. Для этого строим эпюры грузового состояния (рис. 7.65, д) и единичных состояний (рис. 7.65, ж, и). При построении эпюры грузового состояния разбиваем балку на участки (рис. 7.65, з). Ниже приведены вычисления изгибающих моментов по длине балки, по которым построена эпюра грузового состояния  $M_F$  (рис. 7.65, д).

Вычисления изгибающих моментов для построения ЭМ<sub>F</sub>

$$\text{I. } 0 \leq z_1 \leq a: \quad M_{z_1} = F_{z_1} - \frac{F}{a} z_1^2;$$

$$z_1 = 0; \quad M_{z_1} = 0; \quad z_1 = a; \quad M_{z_1} = \frac{Fa}{2};$$

$$z_1 = \frac{a}{2}; \quad M_{z_1} = F \cdot \frac{a}{2} - \frac{F}{a} \left( \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{3}{8} Fa.$$

$$\text{II. } 0 \leq z_2 \leq a: \quad M_{z_2} = F(a + z_2) - \frac{F}{a} \cdot a \left( \frac{a}{2} + z_2 \right);$$

$$z_2 = 0; \quad M_{z_2} = \frac{Fa}{2};$$

$$z_2 = a; \quad M_{z_2} = a = F(a + a) - \frac{F}{a} \cdot a \left( \frac{a}{2} + a \right) = \frac{Fa}{2}.$$

$$\text{III. } 0 \leq z_3 \leq 2a: \quad M_{z_3} = F(a + a + z_3) - \frac{F}{a} \cdot a \left( \frac{a}{2} + a + z_3 \right) + 2Fa;$$

$$M_{z_3=0} = 2,5Fa; \quad M_{z_3=2a} = 2,5Fa.$$

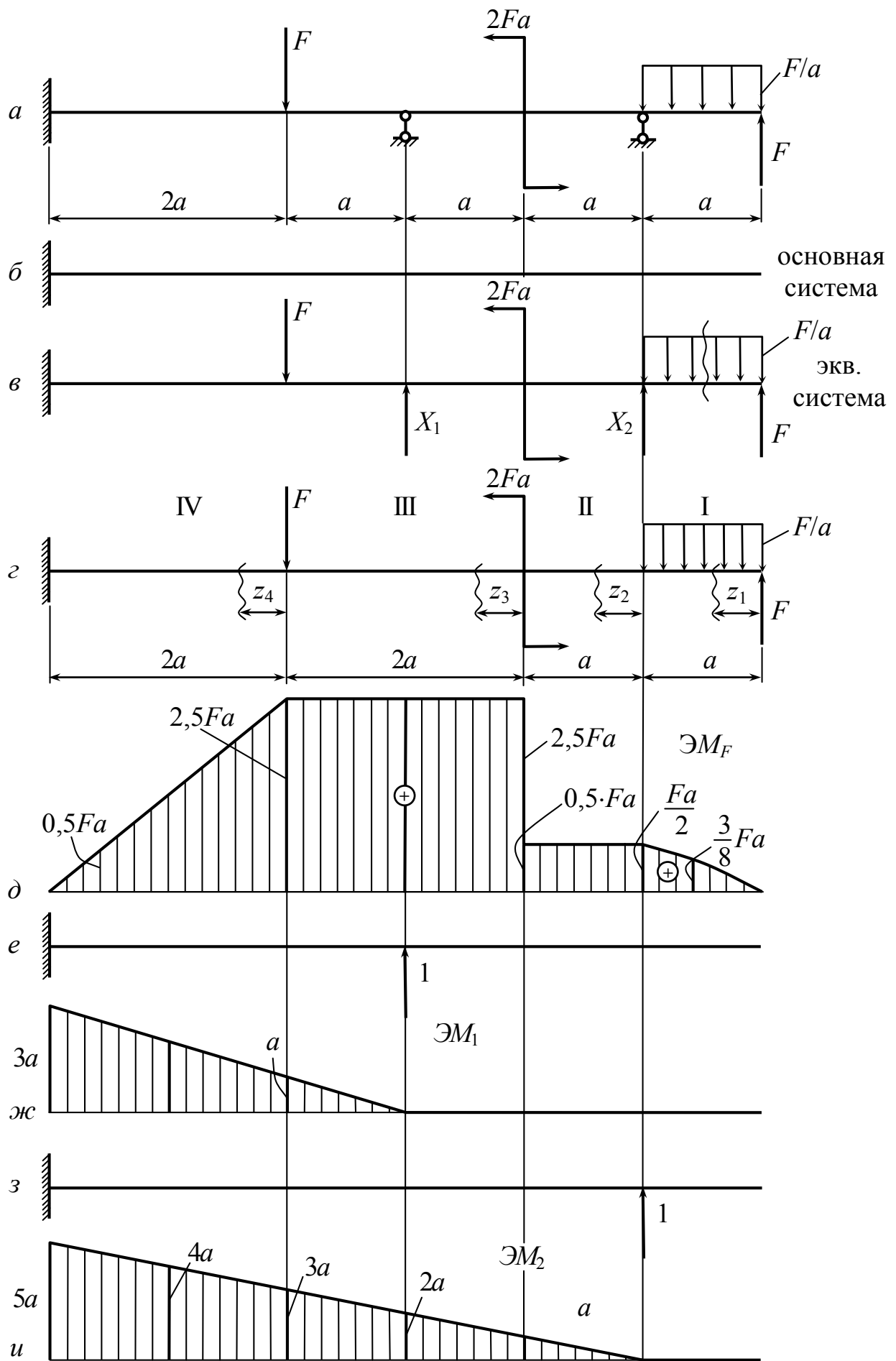


Рис. 7.65

IV.  $0 \leq z_4 \leq 2a$ :

$$M_{z_4} = F(a + a + 2a + z_4) - \frac{F}{a} \cdot a \left( \frac{a}{2} + a + 2a + z_4 \right) + 2Fa - Fz_4;$$

$$M_{z_4=0} = 2,5Fa;$$

$$M_{z_4=2a} = 6F \cdot a - F \left( \frac{a}{2} + a + 2a + 2a \right) + 2Fa - F2a = 0,5Fa.$$

Определяем коэффициенты канонических уравнений

$$\delta_{11} = \sum_1^n \frac{\omega y_c}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 3a \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} 3a = \frac{9a^3}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum_1^n \frac{\omega y_c}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 5a \cdot 5a \cdot \frac{2}{3} 5a = \frac{125a^3}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_1^n \frac{\omega y_c}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 3a \cdot 3a \cdot 4a = \frac{18a^3}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{2a}{6EI} (2 \cdot 0,5Fa \cdot 3a + 0,5Fa \cdot a + 2,5Fa \cdot 3a + 2 \cdot 2,5Fa \cdot a) + \frac{a}{6EI} (2 \cdot 2,5F \cdot a \cdot a + a \cdot 2,5Fa + 2 \cdot 2,5F \cdot a \cdot 0 + 0 \cdot 2,5F \cdot a) = \frac{39,5Fa^3}{6EI};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{2a}{6EI} (2 \cdot 5a \cdot 0,5Fa + 0,5Fa \cdot 3a + 5a \cdot 2,5Fa + 2 \cdot 2,5Fa \cdot 3a) + \frac{2a}{6EI} (2 \cdot 2,5Fa \cdot 3a + 3a \cdot 2,5Fa + 2,5Fa \cdot a + 2 \cdot 2,5Fa \cdot a) + \frac{a}{6EI} \left( 2 \cdot 0,5Fa \cdot a + \frac{Fa}{2} \cdot a + 0,5Fa \cdot 0 + \frac{2Fa}{2} \cdot 0 \right) = \frac{129,5Fa^3}{6EI};$$

$$\begin{cases} \frac{9a^3}{EI} X_1 + \frac{18a^3}{EI} X_2 + \frac{39,5Fa^3}{6EI} = 0; \\ \frac{18a^3}{EI} X_1 + \frac{125a^3}{3EI} X_2 + \frac{129,5Fa^3}{6EI} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 54X_1 + 108X_2 = -39,5F; \\ 108X_1 + 250X_2 = -129,5F. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим  $X_2 = -1,485F$ ,  $X_1 = 2,24F$ .

Построение суммарной эпюры изгибающих моментов производим путем алгебраического суммирования в каждом сечении балки (рис. 7.66).

$$\mathcal{E}M_F + \mathcal{E}M_1X_1 + \mathcal{E}M_2X_2.$$

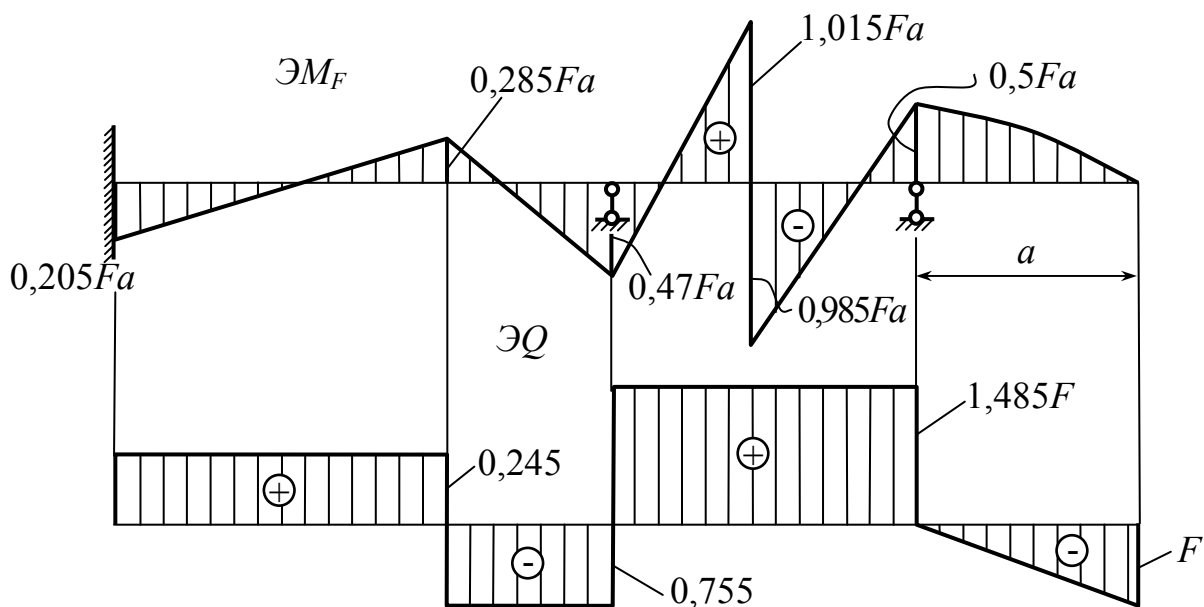


Рис.7.66

Сравнивая решение этой задачи двумя способами (первый из них, когда за неизвестные силовые факторы принимались моменты, второй способ – за неизвестные были приняты реакции в опорах балки), следует отметить, что результаты полученных решений практически совпадают.

### 7.15. О методе перемещений

*Ключевые слова*

*Винтовые пружины, пространственный стержень, винтовая линия, определение перемещений, высота пружины, нормальное поперечное сечение витка, касательные напряжения, единичные силы, интегралы Мора, жесткость витка на кручение.*

Метод перемещений отличается от метода сил тем, что при раскрытии статической неопределимости в качестве неизвестных принимают не силы, а перемещения.



Сложно выбрать один из методов – метод перемещений и рассмотренный выше метод сил, так как они в основном равноценны. Преимущества одного перед другим определяются особенностями статически неопределимой системы и в какой-то мере привычками и традициями.

Особенно просто методом перемещений можно раскрыть статическую неопределимость систем с малым числом углов. Рассмотрим пример, очень простой для метода перемещений и вместе с тем сложный для метода сил.

На рис. 7.67 показана система, состоящая из  $n$  стержней, связанных в единый шарнирный узел в точке  $A$ .

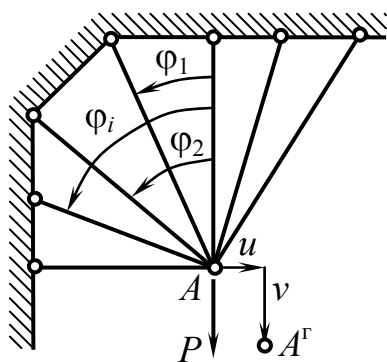


Рис. 7.67

Система  $n - 2$  раза статически неопределима, и определение усилий в стержнях методом сил затруднительно, особенно, если стержней много и к тому же они имеют различные длины и различные жесткости при растяжении. Метод перемещений позволяет решать такие задачи неожиданно просто.

Обозначим горизонтальное и вертикальное перемещения узла  $A$   $u$  и  $v$  соответственно (см. рис. 7.67). Удлинение  $i$ -го стержня определяется суммой проекций  $u$  и  $v$  на ось стержня, т.е.

$$\Delta l_i = u \sin \varphi_i + v \cos \varphi_i.$$

Выражение для растягивающей силы имеет вид

$$N_i = \frac{EF_i}{l_i} (u \sin \varphi_i + v \cos \varphi_i). \quad (7.22)$$

Напишем два уравнения равновесия для отсеченного узла  $A$ :

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i \cos \varphi_i = P; \quad \sum_{i=0}^{n-1} N_i \sin \varphi_i = 0.$$

Исключая силы  $N_i$  и переходя к перемещениям, получаем два уравнения для вычисления  $u$  и  $v$ :

$$u \sum_{i=0}^{n-1} \frac{EF_i}{l_i} \sin \varphi_i \cdot \cos \varphi_i + v \sum_{i=0}^{n-1} \frac{EF_i}{l_i} \cos^2 \varphi_i = P;$$

$$u \sum_{i=0}^{n-1} \frac{EF_i}{l_i} \sin^2 \varphi_i + v \sum_{i=0}^{n-1} \frac{EF_i}{l_i} \sin \varphi_i \cos \varphi_i = 0.$$

После того как перемещения найдены, не представляет труда с помощью выражения (7.22) определить усилие в любом стержне.

Методом перемещений столь же просто можно раскрыть статическую неопределимость системы, показанной на рис. 7.68, при любом числе поддерживающих стержней. Решение очевидно. Надо ввести вертикальное и угловое перемещения жесткого стержня, выразить через них удлинения и силы, а затем написать в перемещениях два уравнения равновесия.

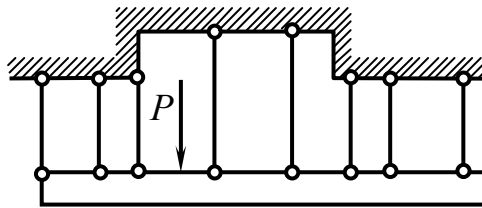


Рис. 7.68

При большом числе узлов и конструктивных элементов методы равноценны и, как один, так и другой, могут быть положены в основу создания машинных алгоритмов так называемого метода конечных элементов для анализа сложнейших систем стержневого и оболочечного типов.

## 7.16. Расчет винтовых цилиндрических пружин

Винтовые пружины – наиболее распространенный в технике тип пружин (рис. 7.69). Они применяются в самых различных конструкциях как аккумуляторы упругой энергии амортизирующих, возвратно подающих и многих других механических устройств.

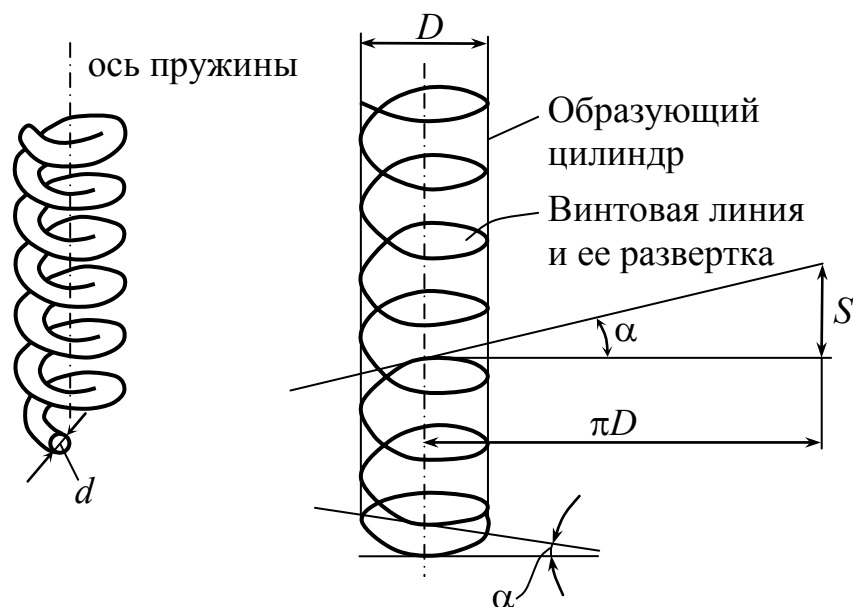


Рис.7.69

Вопросы расчета и проектирования витых пружин относятся к курсам деталей машин приборов. Однако основные формулы выводятся обычно в курсе сопротивления материалов, поскольку примеры расчетов пружин дают наглядную иллюстрацию методов определения перемещений.

Витая пружина может рассматриваться как пространственный стержень, осевая линия которого в простейшем случае представляет собой винтовую линию. Геометрическая форма осевой линии определяется диаметром витка  $D$ , числом витков  $n$  и углом подъема  $\alpha$ . Подъем витка можно характеризовать также шагом пружины  $S$ .

$$S = \pi D \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

Для всех пружин  $S \ll \pi D$  и, следовательно,  $\alpha$  может рассматриваться как величина малая, обычно  $\alpha < 5^\circ$ .

Свойства пружин зависят также от формы поперечного сечения витка. Обычно пружины навивают из круглой проволоки. Диаметр сечения проволоки обозначим через  $d$ .

В зависимости от воспринимаемых нагрузок пружины разделяются на пружины растяжения (рис. 7.70, а), сжатия (рис. 7.70, б) и кручения.

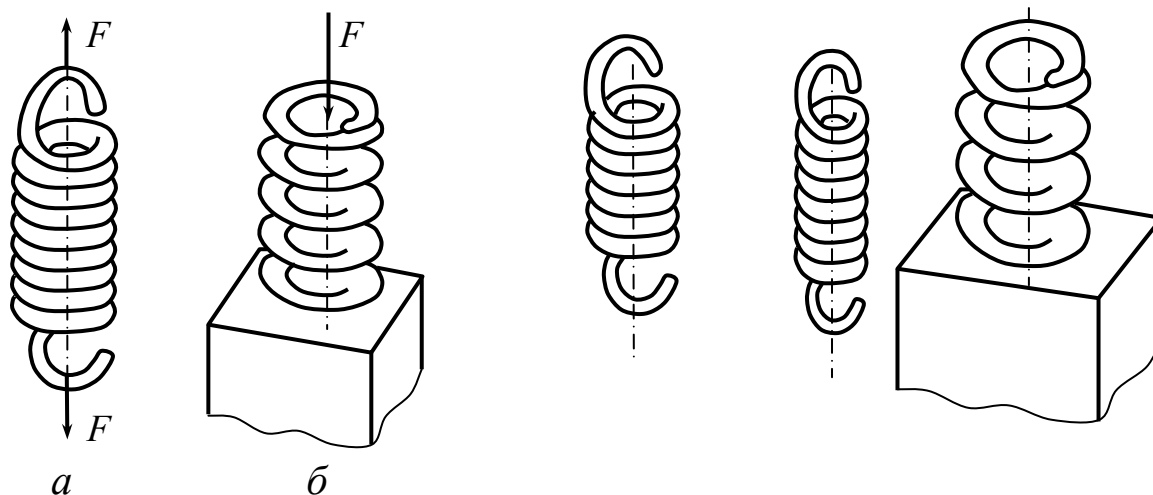


Рис.7.70

Определим зависимость изменения высоты пружины растяжения – сжатия от осевой силы  $F$ . В любом поперечном сечении витка пружины растяжения возникает результирующая внутренняя сила  $F$  и момент  $M = \frac{FD}{2}$  (рис. 7.71). Полная сила в сечении параллельна оси пружины, а плоскость момента совпадает с плоскостью пары сил  $F$ . Нормальное поперечное сечение витка повернуто по отношению к этой плоскости на угол  $\alpha$ . Раскладывая момент и силу на составляющие относительно осей, связанных с сечением, находим

$$T = F \cdot \frac{D}{2} \cos \alpha;$$

$$M_{\text{изг}} = F \cdot \frac{D}{2} \sin \alpha; \quad Q = F \cdot \cos \alpha; \quad N = F \cdot \sin \alpha.$$

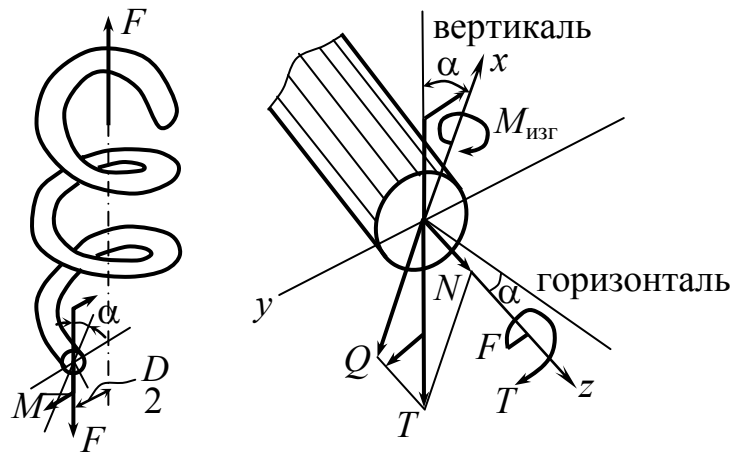


Рис.7.71

На внутреннем радиусе пружины касательные напряжения максимальные (рис. 7.72).

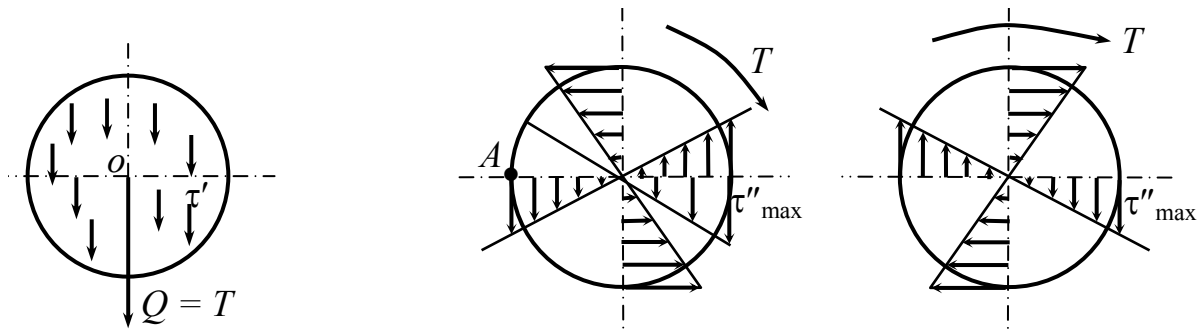


Рис.7.72

$$\tau' = \frac{Q}{F} = \frac{4T}{\pi d^2};$$

$$\tau''_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{8FD}{\pi d^3};$$

$$\tau_{\max} = \tau' + \tau''_{\max} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{8FD}{\pi d^3}$$

ИЛИ

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left( \frac{d}{2D} + 1 \right) \quad \text{при} \quad \frac{d}{2D} \ll 1.$$

$\tau''_{\max} > \tau'$  значительно, поэтому с достаточной степенью точности

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3}.$$

Для определения перемещения  $\lambda$ , прикладываем к концам пружины единичные силы и находим возникающие силовые факторы

$$T = \frac{D}{2} \cos \alpha; \quad M_{\text{изг}_1} = \frac{D}{2} \sin \alpha; \quad Q_1 = \cos \alpha; \quad N_1 = \sin \alpha.$$

Необходимо написать четыре интеграла Мора из шести. Однако перемещения, обусловленные нормальной и поперечной силами, как для всякого бруса, малы, а вследствие малости угла  $\alpha$  малым будет и осевое перемещение, связанное с изгибом витка,

поэтому

$$\lambda = \int_l \frac{T \cdot T \cdot dz}{C_T I_K},$$

где  $C_T I_K$  – жесткость витка на кручение.

Полагая  $\cos \alpha \approx 1$ , получим  $\lambda = \frac{FD^2}{4\sigma I_K} l$ ,

где  $l = \pi D n$  – полная длина рабочей части витков.

Таким образом,  $\lambda = \frac{F\pi D^3 n}{4\sigma I_K} l$ .

При определении величины  $n$  полагается, что 1,5 витка в работе не участвуют.

### Контрольные вопросы

1. Где используются понятия обобщенной силы, обобщенного перемещения?
2. Поясните, что означает в сопротивлении материалов (механике материалов и конструкций) работа внешних сил и работа внутренних сил?
3. Что такое единичные силовые факторы?
4. Что такое единичные перемещения?
5. Как можно представить полное перемещение?

6. Запишите выражение для определения работы внешних сил при упругой деформации для группы сил.
7. Почему при вычислении работы внешних сил нельзя применять принцип независимости действия сил?
8. Как определяется работа внутренних сил при упругой деформации (плоская стержневая система)?
9. Что представляет собой коэффициент формы и сдвига при вычислении внутренней работы от поперечных сил?
10. Запишите выражение для определения потенциальной энергии упругой деформации.
11. Как связаны между собой работа внешних сил и потенциальная энергия упругой деформации?
12. Чему равна потенциальная энергия упругой деформации при изгибе?
13. Как формулируется теорема взаимности работ?
14. В чем заключается теорема взаимности перемещений?
15. Как формулируется теорема Кастильяно?
16. В каком случае теорема Кастильяно не применима?
17. Что позволило найти более общий способ определения перемещений в упругих системах?
18. Что такое грузовое состояние?
19. Что такое единичное состояние?
20. Запишите формулу Мора для плоской стержневой системы.
21. Где используется формула Мора?
22. В чем преимущество интеграла Мора по сравнению с теоремой Кастильяно?
23. Какие графоаналитические приемы вычисления интеграла Мора вы знаете?
24. В каком случае операции перемножения эпюр по правилу Верещагина обладают свойством коммутативности?
25. Как можно вычислить интегралы Мора по формуле Симпсона?

26. Почему нельзя использовать графоаналитические способы при вычислении интегралов Мора для криволинейных стержней?
27. Можно ли применять правило Верещагина при сложных эпюрах моментов от заданной нагрузки?
28. Какие системы называются статически неопределимыми? Что такое степень статической неопределимости?
29. Сколько раз статически неопределим замкнутый контур?
30. Какие методы раскрытия статической неопределимости наиболее широко применяются в инженерных расчетах?
31. Что такое абсолютно необходимые и дополнительные связи?
32. Какие уравнения добавляются к уравнениям равновесия при раскрытии статической неопределимости?
33. Какова последовательность раскрытия статической неопределимости по методу сил?
34. Что понимают под основной системой?
35. Что понимают под эквивалентной системой?
36. Каким требованиям должна удовлетворять основная система?
37. Каков физический смысл канонических уравнений метода сил?
38. Что представляют собой коэффициенты канонических уравнений и как они определяются?
39. Как проверить правильность расчета статически неопределимой системы?
40. В чем заключается статическая проверка?
41. В чем заключается кинематическая проверка?
42. Какова последовательность определения перемещений в статически неопределимых системах?
43. Какие упрощения вносит использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости?



44. Поясните, что означает понятие неразрезной многопролетной балки?
45. Какая основная система для неразрезной многопролетной балки будет рациональной?
46. Какова последовательность раскрытия статической неопределимости многопролетных неразрезных балок?
47. Как определяются реакции в опорах многопролетных неразрезных балок?
48. Чем отличается метод перемещений от метода сил?
49. В каких случаях более рационально использовать метод перемещений при раскрытии статической неопределимости?
50. Запишите формулу для определения максимальных касательных напряжений в витках винтовых цилиндрических пружин.
51. Как рассчитываются перемещения винтовых цилиндрических пружин?

## Глава 8. Динамическое действие сил

*Ключевые слова*

*Дополнительные перемещения и деформации, статические, динамические силы, удар, колебания, усталостное разрушение.*

Статическое действие – ускорения или малы, или равны нулю. Динамическое действие в широком смысле слова: ускорение не равно нулю, возникают дополнительные силы, которые учитываются при определении напряжений и деформаций (т.е. учитываются силы инерции),  $a$  – ускорение.

1.  $a = \text{const}$ , учет динамичности – учет и определение дополнительных перемещений и напряжений, обусловленных силами инерции, характер действия нагрузок и поведение материала не отличается от случая статического действия.

2.  $a$  не является постоянным, динамическое действие в узком (непосредственном) смысле слова:

а) удар;

б) колебания.

Удар – за малые промежутки времени значительно изменяется скорость, большие ускорения, значительные дополнительные напряжения и деформации по сравнению со статическим действием.

Колебания – ускорения периодически меняются во времени, напряжения и деформации меняются также во времени. Возможен резонанс. Многократное повторение циклов нагружения и разгрузки может привести к усталостному разрушению.

## 8.1. Определение напряжений и деформаций с учетом сил инерции

*Ключевые слова*

*Постоянное ускорение, поступательное движение, динамические напряжения и деформации, условие прочности.*

Случай  $a = \text{const}$ .

$v = \text{const}$ ;  $a = 0$ ;  $Q$  – вес груза (рис.8.1);

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{Q + \gamma A \cdot z}{A}.$$

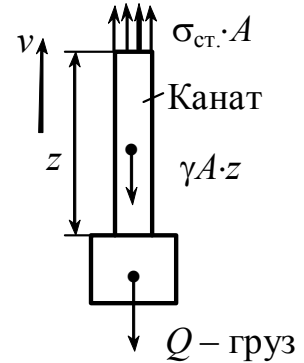


Рис. 8.1

$v = v_0 + at$  (рис. 8.2);

$$\sigma_{\text{дин.}} \cdot A = \gamma Az + \frac{\gamma Az}{g} \cdot a + Q + \frac{Q}{g} \cdot a;$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{дин.}} &= \frac{Q + \gamma Az}{A} + \frac{Q + \gamma Az}{gA} \cdot a = \\ &= \frac{Q + \gamma Az}{A} \left( 1 + \frac{a}{g} \right) = \sigma_{\text{ст}} \left( 1 + \frac{a}{g} \right); \end{aligned}$$

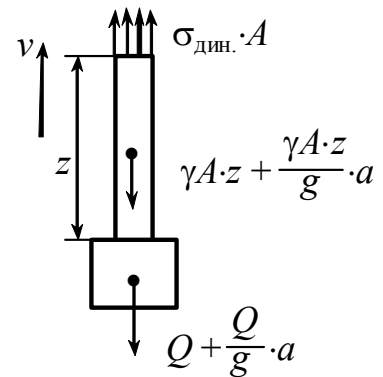


Рис. 8.2

$$\sigma_{\text{дин.}} = \sigma_{\text{ст}} \left( 1 + \frac{a}{g} \right); \quad \varepsilon_{\text{дин.}} = \varepsilon_{\text{ст}} \left( 1 + \frac{a}{g} \right) - \text{деформация};$$

$$A_{\text{дин}} = A_{\text{ст}} \left( 1 + \frac{a}{g} \right) - \text{нагрузка.}$$

$$\text{Условие прочности } \sigma_{\text{дин.макс}} = \sigma_{\text{стмакс}} \left( 1 + \frac{a}{g} \right) \leq [\sigma].$$

$[\sigma]$  принимается как для статического случая.

## 8.2. Случай тонкого вращающегося колеса

*Ключевые слова*

*Центростремительное ускорение, вращательное движение, динамическое напряжение, допускаемое напряжение, допускаемая скорость, допускаемые обороты вращения кольца.*

$a_m$  – центростремительное ускорение (рис. 8.3).

$$d_m \cdot a_m = \frac{\gamma A \cdot dS}{g} \cdot \underbrace{\omega^2 \cdot r_0}_{a_m} =$$

$$= \frac{\gamma \cdot A \cdot (r_0 d\varphi)}{g} \cdot \omega^2 \cdot r_0 = q \cdot r_0 \cdot d\varphi;$$

$$q = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2 \cdot r_0}{g} \text{ – интенсивность.}$$

Проектируем на  $Oy$

$$-2\sigma A + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q \cdot r_0 \cdot \cos\varphi d\varphi = 0.$$

$$\sigma_d \cdot A = q \cdot r_0 = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \omega^2 \cdot r_0^2.$$

$$\sigma_d = \frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot r_0^2}{g} = \frac{\gamma \cdot v^2}{g} \leq [\sigma], \quad v \leq \sqrt{\frac{g[\sigma]}{\gamma}};$$

$$\sigma_d = \frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot r_0^2}{g} = \frac{\gamma \cdot v^2}{g} = \frac{\pi^2 n^2 r_0^2 \cdot \gamma}{900 \cdot g} \leq [\sigma].$$

$$\sigma_{пч} = \sigma_B = \frac{\gamma \cdot \pi^2 \cdot n_{разр.}^2 \cdot r_0^2}{900 \cdot g}; \quad n_{разр.} = \sqrt{\frac{900 \cdot g \cdot \sigma_{пч}}{\gamma \cdot \pi^2 \cdot r_0^2}};$$

$$n_{доп.} = \sqrt{\frac{900 \cdot g \cdot [\sigma]}{\gamma \cdot \pi^2 \cdot r_0^2}}.$$

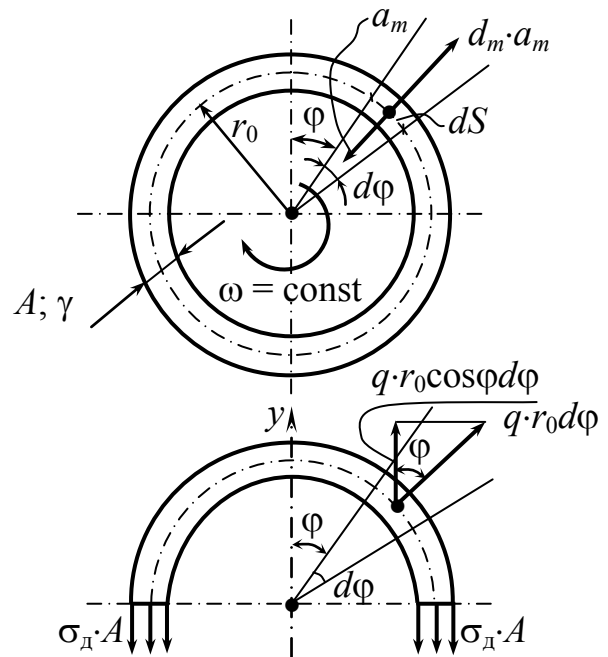


Рис. 8.3

### 8.3. Ударное действие сил

*Ключевые слова*

*Сжимающий удар, ускорение переменное, деформации упругие, контактные деформации не учитываются, «приведенная» масса ударяемого тела, ударяющее тело, скорость ударяющего тела, условие равенства количества движения, скорость двух масс после соударения, закон живых сил, кинетическая энергия, работа груза, работа упругих сил, статическая и динамическая жесткость, коэффициент динамичности.*

Скорость сильно меняется за  $\Delta t$ .

$a \neq \text{const}$ . Явление это сложно по характеру.

Рассмотрим растягивающий (сжимающий) удар применительно к прямому брусу. Произведем допущения: ударяющее тело после соударения остается в контакте с телом, воспринимающим удар, деформации упруги, местные контактные деформации не рассматриваются, так как наибольшие напряжения, деформации имеются в первый момент.

Расчетная схема представлена на рис. 8.4.

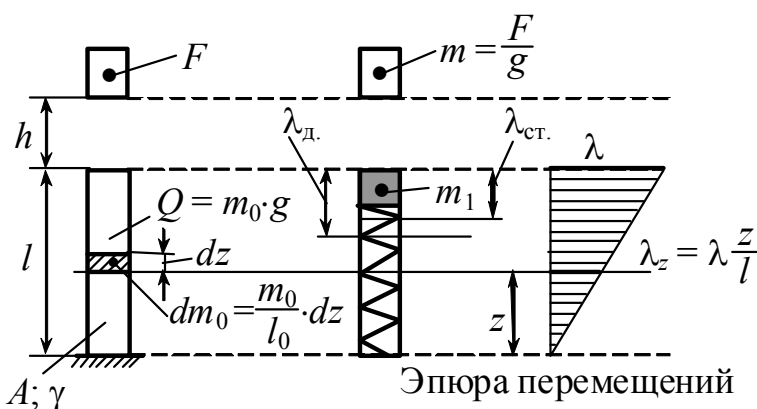


Рис. 8.4

Расчет произведем с учетом массы тела, воспринимающего удар. Для приближенного учета массы тела, воспринимающего удар, приведем массу тела к точке соударения.

$m_1$  – “приведенная” масса;  $\lambda_d$  – динамическая осадка.

Будем считать эпюру перемещения статического нагружения одинаковой и при динамическом нагружении.

### 1. Определение приведенной массы.

Приведенная масса определяется из условий равенства кинетической энергии.

$$\text{Для массы } m_1 \quad T_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v^2 = \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2;$$
$$v = \frac{d\lambda}{dt} \text{ — скорость.}$$

$$\text{Для стержня:} \quad T_0 = \int_0^l \frac{1}{2} dm_0 (v_z)^2, \quad v_z = \frac{d\lambda_z}{dt},$$

где  $v_z$  — скорость на уровне элемента массы.

$$v_z = \frac{d}{dt} \left( \lambda \cdot \frac{z}{l} \right) = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{z}{l};$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{m_0}{l} \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \cdot \frac{z^2}{l^2} dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot m_0 \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2.$$

Из условия  $T_1 = T_0$ ,

$$\boxed{m_1 = \frac{1}{3} m_0}. \quad (8.1)$$

### 2. Скорости.

Скорость массы  $m$  непосредственно определяется перед моментом соударения.

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Скорость  $(m + m_1)$  непосредственно после соударения.

Из условия равенства количества движения

$m \cdot v = (m + m_1) \cdot v_*$ ,  $v_*$  — скорость двух масс после соударения.

$$v_* = \frac{mv}{m + m_1} = \frac{m \cdot \sqrt{2gh}}{m + \frac{1}{3} m_0} = \frac{\sqrt{2gh}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{m_0}{m}}; \quad v_* = \frac{\sqrt{2gh}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{m_0}{m}}. \quad (8.2)$$

### 3. Для определения наибольших отклонений обратимся к условию

$T_{\text{кон.}} - T_{\text{нач.}} = W$  — закон живых сил.

$$T_{\text{кон.}} = 0; \quad T_{\text{нач.}} = \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{3} m_0 \right) \cdot v_*^2 = \frac{1}{2} m \frac{2gh}{\left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{m_0}{m} \right)};$$

$$T_{\text{нач.}} = \frac{mgh}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{m_0}{m}} = \frac{Fh}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{m_0}{m}};$$

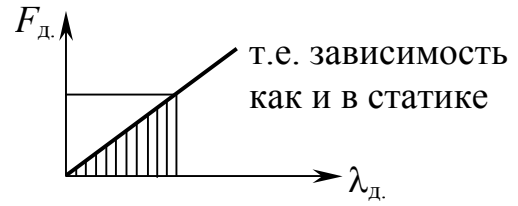


Рис. 8.5

$$W = \underbrace{F \cdot \lambda_{\text{д.}}}_{\text{работа груза}} - \underbrace{\frac{1}{2} F_{\text{д.}} \cdot \lambda_{\text{д.}}}_{\text{работа упругих сил}} \quad (\text{рис.8.5});$$

$$\lambda_{\text{д.}} = \frac{F_{\text{д.}} \cdot l}{EA} = \frac{F_{\text{д.}}}{C}; \quad C = \frac{EA}{l} \text{ — жесткость.}$$

$$\lambda_{\text{ст.}} = \frac{F \cdot l}{EA} = \frac{F}{C}; \quad \lambda_{\text{д.}} = \frac{F_{\text{д.}}}{C}; \quad F_{\text{д.}} = \lambda_{\text{д.}} \cdot C = \lambda_{\text{д.}} \cdot \frac{F}{\lambda_{\text{ст.}}};$$

$$W = F \cdot \lambda_{\text{д.}} - \frac{1}{2} \cdot \lambda_{\text{д.}}^2 \cdot \frac{F}{\lambda_{\text{ст.}}}.$$

Перепишем (\*)  $0 - \frac{Fh}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{m_0}{m}} = F \cdot \lambda_{\text{д.}} - \frac{1}{2} \lambda_{\text{д.}}^2 \cdot \frac{F}{\lambda_{\text{ст.}}};$

$$\lambda_{\text{д.}}^2 - 2\lambda_{\text{д.}} \cdot \lambda_{\text{ст.}} - \frac{2h \cdot \lambda_{\text{ст.}}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{m_0}{m}} = 0;$$

$$\lambda_{\text{д.}} = \lambda_{\text{ст.}} \pm \sqrt{\lambda_{\text{ст.}}^2 + \frac{2h \cdot \lambda_{\text{ст.}}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{m_0}{m}}}, \quad (8.3)$$

где  $\lambda_{\text{ст.}}$  — осадка, если бы груз был статически положен.

$$(\lambda_{\text{д.}})_{\text{max}} = \lambda_{\text{ст.}} \cdot \underbrace{\left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{\text{ст.}} \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q}{F} \right)}} \right)}_{\text{коэффициент динамичности } k_{\text{д.}}}. \quad (8.4)$$

$$\lambda_{д.} = \lambda_{ст.} \cdot k_{д.} \quad (8.5)$$

$$k_{д.} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{ст.} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q}{F}\right)}}. \quad (8.6)$$

Если расчет – без учета собственного веса, то  $k_{д.} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{ст.}}}$ . (8.7)

$T_0$  – кинетическая энергия груза в момент соударения;  $W_{ст.}$  – работа.

$$k_{д.} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{W_{ст.} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q}{F}\right)}}; \quad k_{д.} \cong \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{ст.}}};$$

$$k_{д.} \cong \sqrt{\frac{2h}{\lambda_{ст.}}}; \quad \lambda_{д.} : \lambda_{ст.} = F_{д.} : F_{ст.} = \sigma_{д.} : \sigma_{ст.};$$

$$F_{д.} = F_{ст.} \cdot k_{д.}; \quad \sigma_{д.} = \sigma_{ст.} \cdot k_{д.}; \quad \tau_{д.} = \tau_{ст.} \cdot k_{д.}.$$

При ударном действии меняется сопротивляемость нагрузкам, металл пластичный при действии ударов работает не как пластичный и выдерживает малые нагрузки.

**Пример.** Определить максимальные динамические касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении вала от внезапного торможения колеса.

Дано:  $D$  – диаметр колеса – 60 мм;

$Q = G_2 = 400$  н – вес колеса;

$d = 30$  мм – диаметр вала;

$n = 1000$  об/мин – число оборотов вала.

$T_{кд}$  – крутящий момент от внезапного торможения найдем из уравнения.

**Решение**

$$\frac{I_0 \cdot \omega^2}{2} = \frac{T_{кд}^2 \cdot l}{2GI_p};$$



$$T_{\text{кд}} = \omega \cdot \sqrt{\frac{I_0 G I_p}{l}},$$

где  $I_0 = \frac{Q \cdot D^2}{8g} = \frac{400(6 \cdot 10^{-2})^2}{8 \cdot 981}$  – момент инерции колеса.

Максимальные касательные напряжения в вале

$$\tau_{\text{max}} = \frac{T_{\text{кд}}}{W_p} = \omega \sqrt{\frac{I_0 G I_p}{l W_p^2}} = \omega \sqrt{\frac{2 I_0 G}{l A}},$$

где  $\frac{I_p}{W_p^2} = \frac{\pi d^4}{32} \frac{16^2}{(\pi d^3)^2} = \frac{2 \cdot 4}{\pi d^2} = \frac{2}{A}$ .

$$\begin{aligned} \tau_g &= \omega \sqrt{\frac{2 I_0 G}{l A}} = \frac{3,14 \cdot 100}{3} \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 36 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 9,81 \cdot 1 \cdot 3,14 (3 \cdot 10^{-2})^2}} = \\ &= 100 \cdot 10^5 \cdot 5,5 = 550 \cdot 10^5 \text{ Па} = 55 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$K_d = \frac{T_{\text{кд}}}{T_{\text{к ст}}}; \quad \boxed{\tau_n = \tau_{\text{ст}} \cdot K_d}.$$

## 8.4. Расчеты на прочность и жесткость при колебаниях

*Ключевые слова*

*Общее учение о колебаниях, механические колебания, масса и упругость тела, периодические и непериодические колебания, период, гармонические колебания, число степеней свободы, собственные, вынужденные, параметрические и автоколебания, продольные, поперечные и крутильные колебания.*

Изучение колебательных процессов имеет важное значение для различных разделов механики, физики и техники. Вибрация сооружений и машин, электромагнитные колебания в радиотехнике и оптике, звуковые и ультразвуковые колебания – все эти не похожие друг на друга процессы объединяются методами математической физики в одно общее учение о колебаниях.

Рассмотрим механические колебания, с которыми приходится иметь дело в машиностроении и строительном деле. Изучение этих колебаний очень важно при решении задач прочности при переменных напряжениях.

Чтобы то или иное тело способно было совершать колебания, ему необходимо иметь определенную массу и упругость. Если упругое тело (нагруженная балка, скрученный вал или деформированная рессора) будет выведено из положения равновесия какой-либо посторонней причиной (ударом, внезапно приложенной силой), то сила упругости этого тела в новом положении уже не уравновесится нагрузкой и возникнут колебания.

Различают периодические и непериодические колебательные процессы.

Периодическим называется такой процесс, при котором колеблющаяся величина, взятая в любой момент времени  $t$ , через определенный отрезок времени  $T$  (период) имеет то же самое значение

$$f(t + T) = f(t).$$

Остальные функции, не удовлетворяющие указанному условию, называются непериодическими. Гармонические или синусоидальные колебания – периодические колебания.

Непериодические – затухающие синусоидальные колебания.

При исследовании колебательных процессов упругих систем важно знать, какое число независимых параметров определяет положение системы в каждый данный момент времени. Число таких параметров называется числом степеней свободы (рис. 8.6).

Любая деформируемая механическая система, строго говоря, обладает бесконечным множеством степеней свободы. Однако в зависимости от условий задачи число степеней свободы, учитываемых при расчете, может быть ограничено.

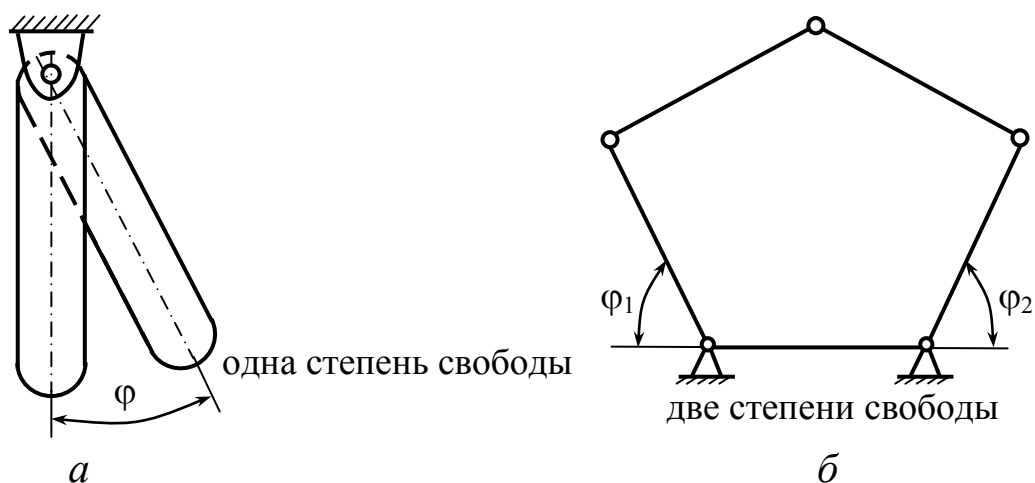


Рис. 8.6

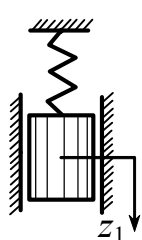


Рис. 8.7

Так, система, представленная на рис. 8.7, может рассматриваться как система с одной степенью свободы, если масса пружины мала по сравнению с массой груза, если нас не интересует поведение отдельных витков пружины, а груз может перемещаться только в вертикальном направлении.

Классифицируя механические колебания по другим признакам, различают следующие четыре типа возможных колебаний: собственные, вынужденные, параметрические и автоколебания (рис. 8.8).

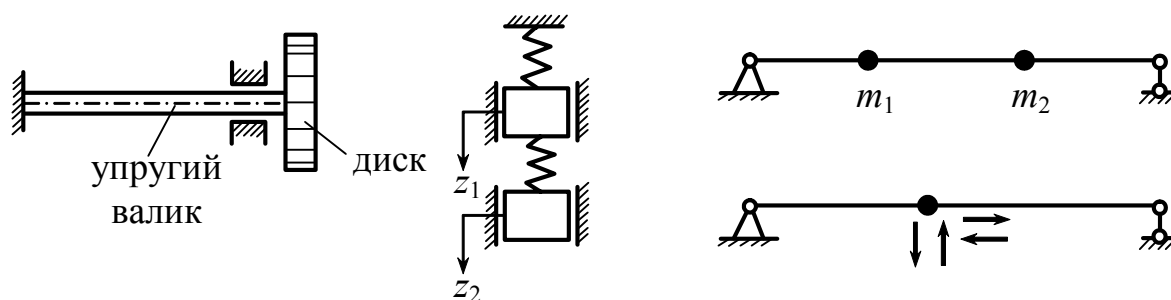


Рис. 8.8

Собственными (свободными) называются колебания, возникающие в изолированной системе вследствие внешнего возбуждения (толчков), вызывающего у точек системы начальные отклонения от положения равновесия или начальные скорости

и продолжающиеся затем благодаря наличию внутренних упругих сил, восстанавливающих равновесие.

По виду упругих деформаций различают: продольные колебания (рис. 8.9, *а*), поперечные колебания (рис. 8.9, *б*) и крутильные колебания (рис. 8.9, *в*).

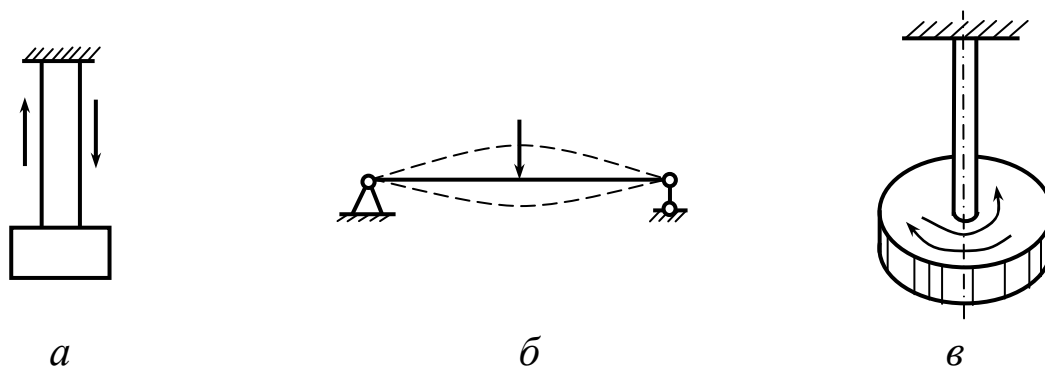


Рис. 8.9

Вынужденными называются колебания упругой системы, происходящие при действии на систему (на протяжении всего периода колебаний) заданных внешних периодически изменяющихся возмущающих сил. Вынужденные колебания возникают не только при переменной, но и при постоянной нагрузке (рис. 8.10). Такие колебания называются параметрическими.

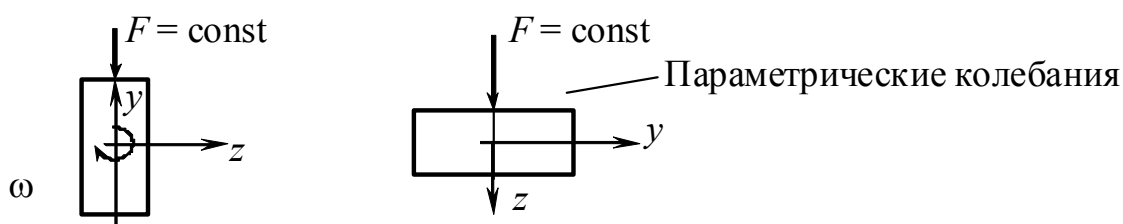


Рис. 8.10

Автоколебаниями или самоколебаниями упругой системы называют незатухающие колебания, поддерживаемые такими внешними силами, характер воздействия которых определяется самим колебательным процессом. Например, флаттер – поток воздуха на вибрирующую часть крыла самолета.

### 8.4.1. Свободные гармонические колебания упругой системы с одной степенью свободы

*Ключевые слова*

*Упругая система, малые перемещения, масса груза, податливость пружины, сила инерции, принцип Даламбера, дифференциальное уравнение колебаний груза, постоянные интегрирования, амплитуда колебаний, круговая частота собственных колебаний, фаза колебаний, период колебаний, частота колебаний.*

В большинстве упругих систем при достаточно малых перемещениях сила упругости линейно зависит от перемещения  $\xi$  (рис. 8.11).

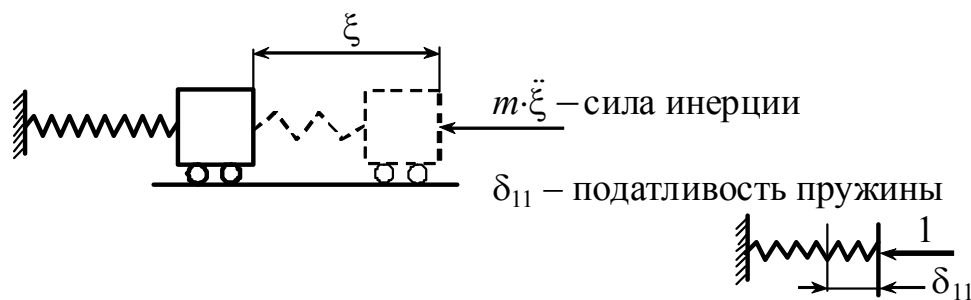


Рис. 8.11

Дифференциальное уравнение колебаний груза массы  $m$  (пренебрегая массой пружины) можно получить, пользуясь принципом Даламбера.

$$\xi = \delta_{11} \left( -m \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right). \quad (8.8)$$

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{1}{\delta_{11} \cdot m} \xi = 0; \quad \frac{1}{\delta_{11} \cdot m} = \omega^2; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} \cdot m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{11} \cdot F}} = \sqrt{\frac{g}{\xi_{ст.}}}; \quad (8.9)$$

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0. \quad (8.10)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения будет

$$\xi = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (8.11)$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные интегрирования, зависят от начальных условий.

Если заданы  $\xi_0$  и  $\dot{\xi}_0$  при  $t=0$ , то из уравнения (8.11) определяются постоянные интегрирования.

$$C_1 = \xi_0, \quad C_2 = \frac{\dot{\xi}_0}{\omega}.$$

Если  $\xi_0 = A \cdot \sin\varphi$  и  $\frac{\dot{\xi}_0}{\omega} = A \cdot \cos\varphi$ , то (8.11) запишется

$$\xi = A \cdot \sin(\omega t + \varphi);$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{\xi_0^2 + \frac{\dot{\xi}_0^2}{\omega^2}},$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – круговая частота собственных колебаний или число колебаний, совершаемых в течение  $2\pi$  сек., размерность круговой частоты 1/сек;  $c$  – жесткость пружины.

$\xi_{\max} = A$  – первоначальное наибольшее отклонение, амплитуда (рис. 8.12);

$\omega t + \varphi$  – фаза колебаний;

$\varphi$  – сдвиг фазы.

$$\xi = A \cdot \sin(\omega t_0 + \varphi) = 0;$$

$$t_0 = \frac{\varphi}{\omega}.$$

$T$  – период колебаний;

$\nu = \frac{1}{T}$  – носит название секундной частоты; частота колебаний выражается в герцах; число герц равно числу колебаний в секунду.

$$A \cdot \sin[\omega(t + T) + \varphi] - A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 0;$$

$$\omega t + \omega T + \varphi - \omega t - \varphi = 2\pi; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

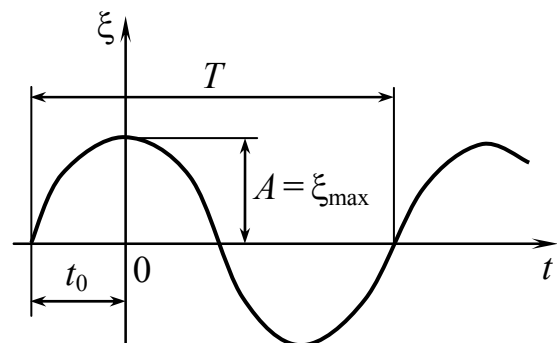


Рис. 8.12

**Пример 1.** Найти частоту собственных колебаний груза на кронштейне (рис. 8.13).

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} \cdot m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{11} \cdot F}};$$

$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega \cdot y_c}{E \cdot I} =$$

$$= \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{l_1 \cdot l_1}{E \cdot I_1} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot l_1 + \frac{1 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot l_1}{E \cdot I_2} \right).$$

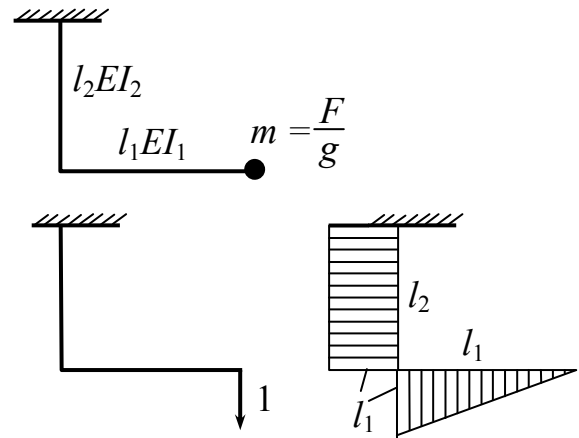
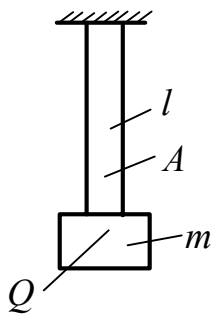


Рис. 8.13

**Пример 2.** Найти частоту собственных колебаний груза (рис. 8.14).



$$\lambda_{ст} = \frac{Q \cdot l}{E \cdot A}; \quad C = \frac{E \cdot A}{l};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{ст}}} = \sqrt{\frac{E \cdot A}{ml}}.$$

Рис. 8.14

Отсюда видно, что частота свободных колебаний системы возрастает с увеличением жесткости.

## 8.5. Крутильные колебания (собственные)

*Ключевые слова*

*Диск, пара сил, крутильная жесткость вала, крутящий момент в произвольный момент времени, силы инерции диска, момент инерции диска, вес диска, дифференциальное уравнение движения диска, круговая частота колебаний, период колебаний.*

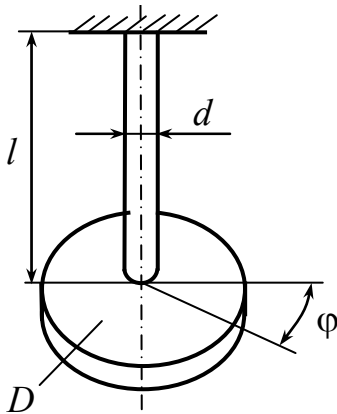


Рис. 8.15

Если к диску приложена и удалена пара сил (рис. 8.15), то возникнут свободные колебания кручения стержня вместе с диском, где  $C = \frac{G\pi d^4}{32l}$  – крутильная жесткость вала (момент, необходимый для закрутки вала на один радиан);  $C\phi$  – крутящий момент в произвольный момент времени;  $d$  – диаметр стержня;  $l$  – длина.

Пренебрегая силами инерции массы стержня по сравнению с массой диска и приравнявая крутящий момент в стержне моменту сил инерции диска, получим следующее дифференциальное уравнение движения диска:

$$I \frac{d^2\phi}{dt^2} + C\phi = 0, \quad (8.12)$$

$I$  – момент инерции диска.

$$I = \frac{\pi D^4 h \cdot \gamma}{32g} = \frac{Q \cdot D^2}{8g}, \quad \text{где } Q \text{ – вес диска.}$$

Обозначая  $\omega^2 = \frac{C}{I}$ , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega^2\phi = 0,$$



общее решение которого будет  $\phi = a \cdot \cos \omega t + b \cdot \sin \omega t$ .

$$\phi = A \cdot \sin(\omega t + \phi_1);$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{32II}{G\pi d^4}}.$$

## 8.6. Собственные колебания систем с одной степенью свободы с учетом силы сопротивления

*Ключевые слова*

*Сила инерции, сила сопротивления, характеристика затухания, период колебаний, закон колебательных движений, логарифмический декремент колебаний.*

Будем считать сопротивление пропорциональным скорости перемещения (рис. 8.16).

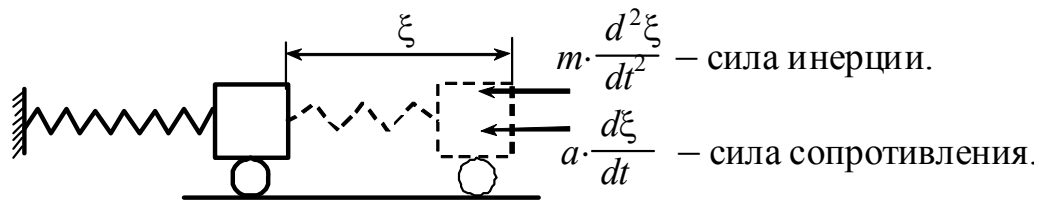


Рис. 8.16

$$\xi = \delta_{11} (-m\ddot{\xi} - a \cdot \dot{\xi});$$

$$\ddot{\xi} + \frac{a}{m} \dot{\xi} + \frac{1}{\delta_{11} \cdot m} \cdot \xi = 0, \quad \frac{a}{m} = 2n, \quad \frac{1}{\delta_{11} \cdot m} = \omega^2;$$

$$\ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0, \quad \xi = e^{-nt} \cdot A \cdot \sin(\omega_1 t + \phi),$$

где  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ ;  $n$  — характеристика затухания (рис. 8.17).

$$\frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{A \cdot e^{-nt}}{A \cdot e^{-n(t+T)}} = e^{nT};$$

$$e = 2,718;$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}.$$



Рис. 8.17

Уменьшение амплитуды соответствует геометрической прогрессии.

$$\ln\left(\frac{A_i}{A_{i+1}}\right) = \ln e^{nT} = nT = \delta - \text{логарифмический декремент колебаний.}$$

Обычно является основной характеристикой затухающих колебаний.

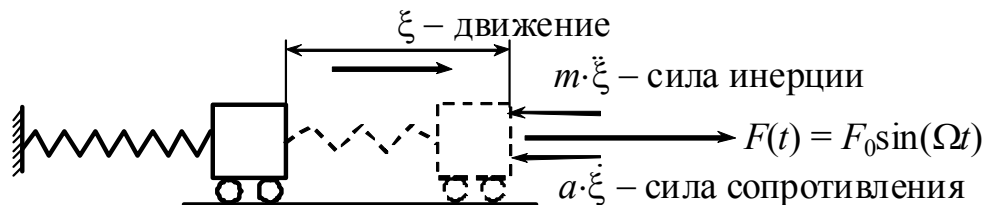
### 8.7. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы (при наличии сопротивления, пропорционального скорости)

*Ключевые слова*

*Сила инерции, сила сопротивления, упругое перемещение, максимальное значение возмущающей силы, неоднородное дифференциальное уравнение, максимальное отклонение, вызванное статическим действием возмущающей силы, резонансные кривые, демпферы.*

Сопротивление пропорционально скорости, возбуждающая сила (рис. 8.18)

$$F(t) = F_0 \sin(\Omega t).$$



$F_0$  – максимальное значение возбуждающей силы

Рис. 8.18

$$\xi = \delta_{11} \left[ F_0 \cdot \sin(\Omega t) - m \ddot{\xi} - a \dot{\xi} \right]$$

делим на  $\delta_{11}m$ , получим

$$\ddot{\xi} + \frac{a}{m} \dot{\xi} + \frac{1}{\delta_{11} \cdot m} \xi = \frac{F_0}{m} \cdot \sin(\Omega t);$$

$$\ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + \omega^2 \xi = \frac{F_0}{m} \cdot \sin(\Omega t) - \text{неоднородное уравнение.} \quad (8.13)$$

Общее решение этого уравнения найдем, если к решению однородного уравнения прибавим частное решение

$$\xi = \xi_1 + \xi_2,$$

где  $\xi_1$  – решение однородного уравнения.

$$\xi_1 = Ae^{-nt} \cdot \sin(\omega_1 t + \phi); \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}.$$

Влияние  $\xi_1$  несущественно, так как эти отклонения быстро убывают со временем;  $\xi_2$  – происходит с частотой возмущающей силы:

$$\xi_2 = C_1 \cdot \sin \Omega t + C_2 \cdot \cos \Omega t, \quad (8.14)$$

$C_1$  и  $C_2$  – неопределенные коэффициенты.

Подставляя (8.14) в (8.13), подбираем  $C_1$  и  $C_2$ , чтобы уравнение удовлетворяло тождественно.

$$C_1 = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}; \quad C_2 = -\frac{F_0}{m} \cdot \frac{2n\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2};$$

$$\xi_2 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \times$$

$$\times \left[ \frac{(\omega^2 - \Omega^2)}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \sin \Omega t - \frac{2n\Omega}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \cos \Omega t \right];$$

$\cos \psi$   $\sin \psi$

$$\xi_2 = \frac{F_0 \cdot \delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\Omega^2}{\omega^4}}} \cdot \sin(\Omega t - \psi). \quad (8.15)$$

$$\psi = \arcsin \frac{2n\Omega}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}}.$$

$$\xi = \frac{F_0 \cdot \delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\Omega^2}{\omega^4}}} \cdot \sin(\Omega t - \psi) + \underbrace{A \cdot e^{-nt} \cdot \sin(\omega_1 t + \phi)}_{\substack{\text{не учитывается, так как} \\ \text{быстро убывает}}}. \quad (8.16)$$

$$\xi = \frac{F_0 \delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\Omega^2}{\omega^4}}} \cdot \sin(\Omega t - \psi).$$

$$\xi_{\max} = \frac{F_0 \cdot \delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\Omega^2}{\omega^4}}}. \quad (8.17)$$

$$\xi_{\max} = F_0 \cdot \delta_{11} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\Omega^2}{\omega^4}}} = A_{\text{вын.}}$$

$$\xi_{\max} = \xi_{\text{стат.}}^* \cdot \beta,$$

где  $\xi_{\text{стат.}}^* = F_0 \delta_{11}$  – отклонение, вызванное статическим действием возмущающей силы.

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\Omega^2}{\omega^4}}}.$$

На рис. 8.19 представлены резонансные кривые.

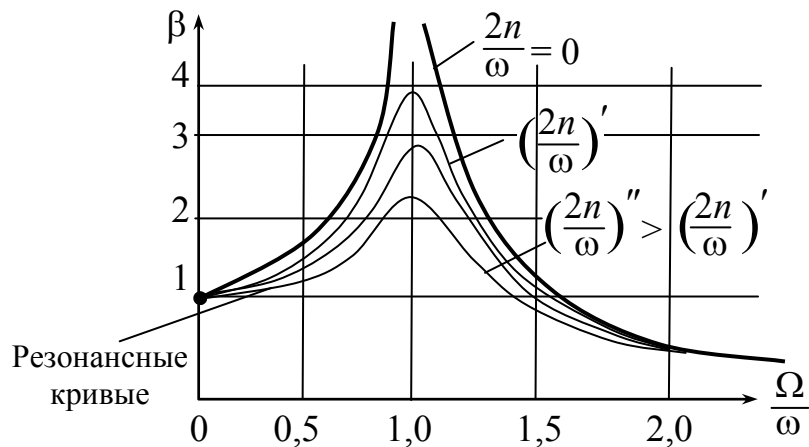


Рис. 8.19

Анализ резонансных кривых показывает, что при  $\frac{2n}{\omega} = 0$ ,

$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$ , при  $\Omega = \omega$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ , то имеем явление резонанса,

который не должен быть допущен.

Для борьбы с резонансом используются демпферы – поглотители колебаний, а также рекомендуется исключать из зоны рабочих режимов частоту возбуждения  $0,7\omega < \Omega < 1,3\omega$ .

$\beta$  – показывает во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше статического перемещения, вызванного максимальным значением возмущающей силы. Во столько же раз большими по сравнению со статическими будут и напряжения, возникающие в упругом элементе (пружине, балке, валу и пр.)?

Если коэффициент  $\beta$  найден, легко определить напряжения в упругих элементах колебательной системы

$$\sigma_a = \sigma_{ст} \cdot \beta,$$

где  $\sigma_{ст}$  – статическое напряжение, вызванное статическим действием возмущающей силы.

По напряжению  $\sigma_a$ , если это представляется необходимым, может быть проведен расчет на усталостную прочность, а также статическую прочность

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ст}} + \sigma_a \leq [\sigma],$$

где  $\sigma_{\text{ст}}$  – напряжение, вызванное статическим действием возмущающей силы.

**Пример.** Электродвигатель весом  $Q = 4000$  Н (рис. 8.20), делающий  $n = 1000$  об/мин., установлен на двух швеллерах, консольно заделанных в стене. Подобрать сечение швеллеров, если расстояние от стены до центра тяжести двигателя  $l = 1$  м, вертикальная составляющая центробежной силы, возникающая от неуравновешенности двигателя равна  $F_0 \cdot \sin \Omega t$ , где амплитуда центробежной силы  $F_0$  составляет 25 % от веса двигателя.

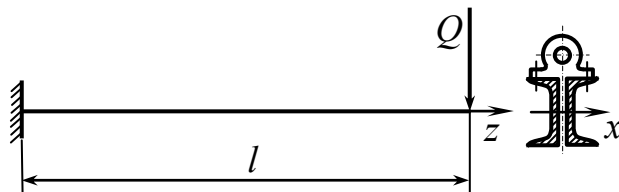


Рис. 8.20

Сечение швеллера должно быть таким, чтобы собственная частота колебаний системы примерно на 30 % была больше частоты возмущающей силы

$$n_c = 1,3n = 1,3 \cdot 1000 = 1300 \text{ об/мин,}$$

или  $\omega = \frac{\pi n_c}{30} = \frac{3,14 \cdot 1300}{30} = 136 \text{ сек}^{-1}$ , и возникающее напряжение не превышало допускаемого  $[\sigma] = 100$  МПа.

**Решение.**

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}} = 136 \text{ сек}^{-1},$$

откуда 
$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{g}{\omega^2} = \frac{981}{136^2} = 0,053 \text{ см} = 5,3 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{Ql^3}{3E2 \cdot I_x}.$$

$$I_x = \frac{Ql^3}{3E\lambda_{\text{ст}} \cdot 2} = \frac{400 \cdot 100^3}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 5,3 \cdot 10^{-2}} = 629 \text{ см}^4.$$

Согласно таблице для стандартных профилей ближайший номер швеллера № 16 с  $I_x = 714 \text{ см}^4$ ,  $W_x = 92,6 \text{ см}^3$ .

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{g3 \cdot 2 \cdot EI_x}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 71,4}{400 \cdot 100^3}} = 147 \text{ сек}^{-1}.$$

$$n'_c = \frac{30 \cdot \omega'}{\pi} = \frac{30 \cdot 147}{3,14} = 1400 \text{ об/мин.}$$

Проверим напряжения, возникающие в швеллерах с учетом вибрационной нагрузки

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{Ql}{2W_x} = \frac{400 \cdot 100}{2 \cdot 92,6} = 216 \text{ кг/см}^2 = 21,6 \text{ МПа.}$$

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1000}{1400}\right)^2} = 2,04.$$

$$\sigma_a = \beta \cdot \frac{F_0 l}{2W_x} = 2,04 \cdot \frac{100 \cdot 100}{2 \cdot 92,6} = \pm 110 \text{ кг/см}^2 = \pm 11 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{ст}} + \sigma_a = 21,6 + 11,0 = 32,6 < [\sigma] = 100 \text{ МПа.}$$

## 8.8. Колебания систем с большим числом степеней свободы

*Ключевые слова*

*Система с большим числом степеней свободы, способ Релея, закон сохранения энергии, величины максимальной потенциальной и кинетической энергии.*

Приближенный способ определения частот собственных колебаний системы с большим числом степеней свободы (способ Релея). Для балки на рис. 8.21 необходимо решить 2 уравнения.

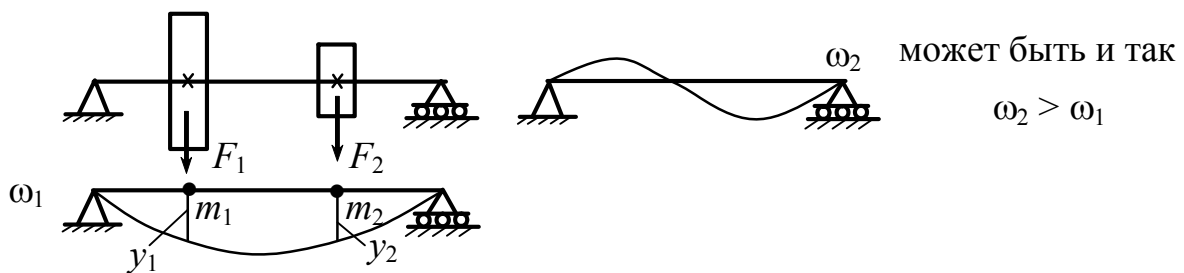


Рис. 8.21

$m_1 \dots m_n$  – точечные массы (рис. 8.22);

$y_1 \dots y_i$  – отклонения точечных масс.

$$y_i = A_i \cdot \sin(\omega t + \phi);$$

$$\dot{y}_i = \omega \cdot A_i \cdot \cos(\omega t + \phi).$$

$$\dot{y}_{i_{\max}} = \omega \cdot A_i$$

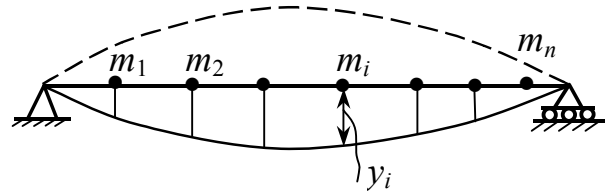


Рис. 8.22

Рассмотрим момент прохождения через положение равновесия  $U = 0; (\dot{y}_{i_{\max}})$ :

$$T = T_{\max} = \frac{1}{2} \sum_1^n m_i (\dot{y}_i)^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_1^n m_i A_i^2.$$

Момент наибольшего отклонения  $(y_{i_{\max}}) T = 0; U = U_{\max}.$

По закону сохранения энергии, пренебрегая рассеиванием энергии, имеем:

$$U_{\max} = T_{\max}.$$

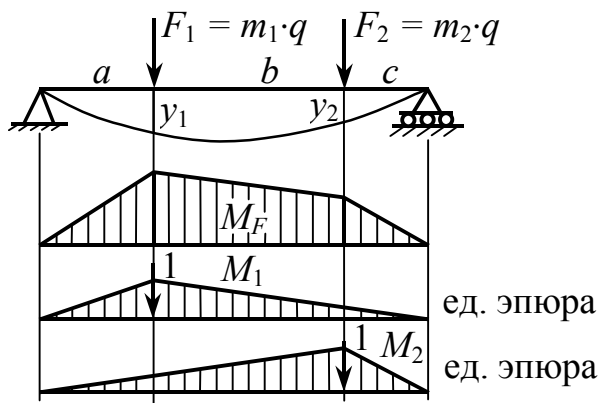


$$U_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \sum_1^n m_i A_i^2; \quad \omega^2 = \frac{2 \cdot U_{\max}}{\sum_1^n m_i A_i^2}. \quad (8.18)$$

Для определения частоты  $\omega$  не обязательно иметь дело с фактическими отклонениями колеблющейся системы от положения равновесия (фактические отклонения не известны до решения задачи). Можно избрать соответствующую схему нагружения и для нее определять отклонения и  $U_{\max}$  – величину максимальной потенциальной энергии. Получаемые из (164) значения  $\omega$  мало отличаются от действительных. В нашем случае можно предположить, что балка нагружена статически силами  $F_i = m_i \cdot g$  (рис. 8.23).

$$U_{\max} = \sum_1^n \frac{1}{2} F_i y_i = \frac{1}{2} g \sum m_i A_i;$$

$$\omega^2 = \frac{g \sum_1^n m_i A_i}{\sum_1^n m_i A_i^2}.$$



$$y_1 = \sum \int \frac{M_F \cdot M_1 \cdot dz}{E \cdot I};$$

$$y_2 = \sum \int \frac{M_F \cdot M_2 \cdot dz}{E \cdot I};$$

$$\omega^2 = \frac{g(m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2)}{m_1 \cdot y_1^2 + m_2 \cdot y_2^2}.$$

Рис. 8.23

Элементы колеблющихся систем рассчитываются на усталость или долговечность.

## 8.9. Крутильные колебания валов

В валах поршневых машин (двигателях внутреннего сгорания, поршневых компрессорах и т.п.) часто наблюдаются крутильные колебания, связанные с неравномерностью (по времени) вращающего момента или момента сопротивления. Крутильные колебания могут возникать и в других машинах, если крутящий момент, передаваемый валом, не является постоянным. В качестве динамической модели при крутильных колебаниях обычно используется вал с дисками. Моменты инерции масс дисков  $J_1, J_2, \dots, J_n$  рассматриваются как приведенные моменты инерции. Например, в поршневых машинах инерционные массы связаны с движением поршней, шатунов и других элементов и приводятся к дискам с эквивалентными моментами инерции. Жесткость участков валов, соединяющих диски, принимается как эквивалентная для участков с непрямой осью (коленчатые валы и др.), при шлицевых соединениях и т.п. На рис. 8.24 показаны: *а* – конструктивная схема коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания и *б* – динамическая модель крутильных колебаний.

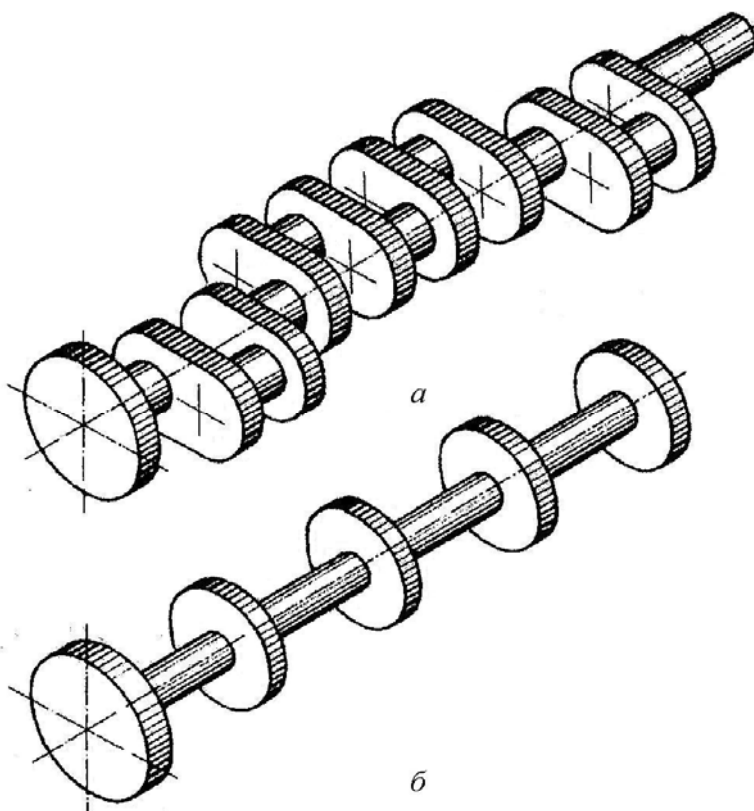


Рис. 8.24

Существуют более сложные модели крутильных колебаний с несколькими ветвями, что определяется конструктивными особенностями машин. Остановимся на схеме «цепочечной системы» [2] динамической модели крутильных колебаний в машинах (рис. 8.25).

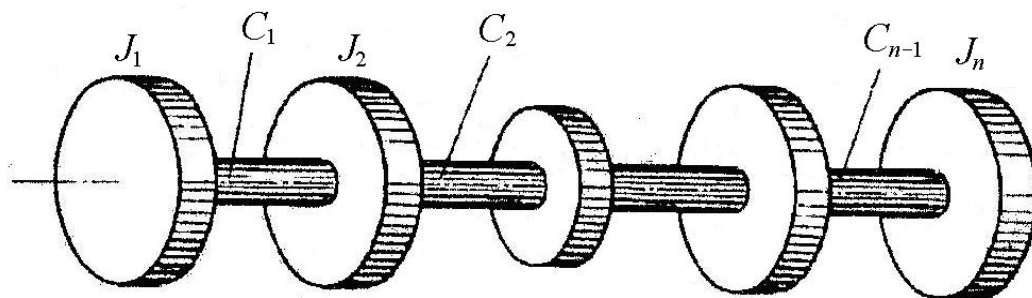


Рис. 8.25

Выведем уравнение крутильных колебаний для системы из дисков. Рассмотрим уравнение движения  $i$ -го диска (рис. 8.26). Обозначив угол поворота  $i$ -го диска  $\varphi_i(t)$ , получим

$$J_i = \frac{d^2 \varphi_i(t)}{dt^2} = T_i - T_{i-1}, \quad (8.19)$$

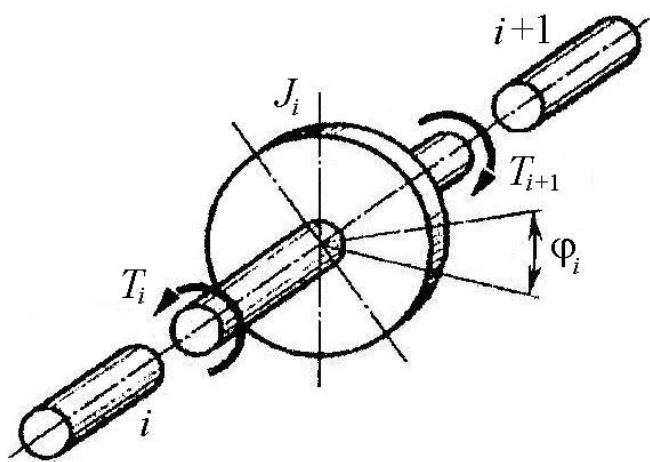


Рис. 8.26

где  $T_i$ ,  $T_{i-1}$  – крутящие моменты, действующие на диск со стороны валов правого ( $i$ -го) и левого ( $i-1$ )-го участков. Угол поворота диска зависит от времени.

Если обозначить жесткость  $i$ -го участка  $C_i$ , то

$$T_i = C_i [\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)], \quad (8.20)$$

здесь  $\varphi_{i+1}(t)$ ,  $\varphi_i(t)$  – углы поворота конечных сечений  $i$ -го участка;  $\varphi_{i+1} - \varphi_i$  – упругий угол поворота вала на  $i$ -м участке.

$$C_i = \frac{GJ_{pi}}{l_i}, \quad (8.21)$$

где  $l_i$  – длина участка;  $J_{pi}$  – эквивалентная жесткость вала на кручение;  $G$  – модуль сдвига.

Подобным образом получаем

$$T_{i-1} = C_{i-1} [\varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t)].$$

Теперь из уравнения (8.20) находим

$$J_i = \frac{d^2 \varphi_i(t)}{dt^2} = C_i [\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)] - C_{i-1} [\varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t)]. \quad (8.22)$$

Пренебрегая моментами инерции участков вала, можем считать уравнение (8.22) при  $i = 1, \dots, n$  дифференциальным уравнением крутильных колебаний «цепочечной системы». Полагая

$$\varphi_i(t) = \varphi_i \cos pt, \quad (8.23)$$

где  $\varphi_i$  – амплитудное значение угла поворота;  $\omega$  – круговая частота крутильных колебаний, из уравнения (8.22) получаем

$$C_{i-1} \varphi_{i-1}(t) + [\omega^2 J_i - (C_{i-1} + C_i)] \varphi_i + C_i \varphi_{i+1} = 0 \quad (8.24)$$

$$(i = 1, \dots, n; C_0 = 0; C_{n+1} = 0).$$

Это и есть уравнение амплитудных углов поворота при крутильных колебаниях «цепочечной системы».

**Пример.** Рассмотрим крутильные колебания динамической модели, состоящей из двух дисков, соединенных валом (рис. 8.27).

Применяя уравнение (8.24) при

$i = 1$  и  $i = 2$ , находим

$$(\omega^2 J_1 - C_1) \varphi_1 + C_1 \varphi_2 = 0,$$

$$C_1 \varphi_1 + (\omega^2 J_2 - C_1) \varphi_2 = 0.$$

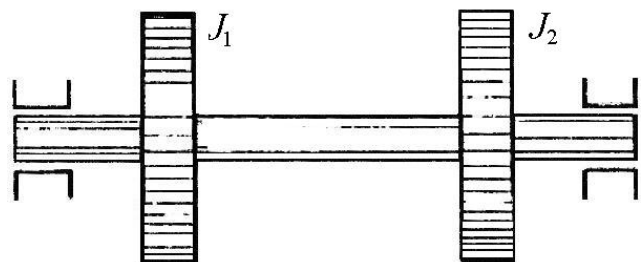


Рис. 8.27

Приравниваем нулю детерминант системы:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 J_1 - C_1 & C_1 \\ C_1 & \omega^2 J_1 - C_1 \end{vmatrix} = (\omega^2 J_1 - C_1)(\omega^2 J_2 - C_1) - C_1^2 = 0,$$

находим

$$\omega^2 J_1 J_2 - C_1 \omega^2 (J_1 + J_2) = 0.$$

Из этого уравнения получим

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \omega = \sqrt{C_1 \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}} = \sqrt{C_1 \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}. \quad (8.25)$$

**Замечание.** Нулевая частота характерна для любой незакругленной системы, которая может двигаться как недеформируемое твердое тело. Поскольку «возвращающие» силы упругости отсутствуют, частота системы равна нулю.

## 8.10. Расчеты на прочность при напряжениях переменных во времени

### 8.10.1. Явление усталости материалов

*Ключевые слова*

*Напряжения, переменные во времени, накопление повреждений, субмикроскопические трещины, макроскопическая трещина, концентрация напряжений, усталость материала, зона развития трещин усталости, зона хрупкого разрушения, выносливость материала, механизм процесса усталостного разрушения, линии сдвига, долговечность образца, детали.*

Сопротивление материалов действию нагрузок, меняющихся во времени по величине или по величине и знаку, существенно отличается от сопротивления действию статической нагрузки. Большинство деталей машин (валы, шестерни, болты, рамы, упругие элементы и т.д.) в процессе работы подвергаются воздействию

напряжений переменных во времени. Если уровень переменных напряжений превосходит определенный предел, то в материале деталей происходит процесс постепенного накопления повреждений, который приводит к образованию субмикроскопических трещин. Длина этих трещин увеличивается, затем они объединяются, образуя первую макроскопическую трещину (рис. 8.28), под которой понимается трещина протяженностью  $0,1 \div 0,5$  мм. У корня этой трещины возникает местное увеличение напряжений, называемое концентрацией напряжений, которое облегчает ее дальнейшее развитие. Трещина, постепенно развиваясь и ослабляя сечение, вызывает в некоторый момент времени внезапное разрушение детали, которое нередко бывает связано с авариями и весьма тяжелыми последствиями. Указанный процесс постепенного накопления повреждений в материале детали под действием переменных напряжений, приводящих к изменению свойств материала, образованию, развитию трещин и разрушению детали, называют усталостью материала (рис. 8.29).



Рис. 8.28

$MM_1$  – линия разгрузки;  
 $0M_1$  – остаточная деформация

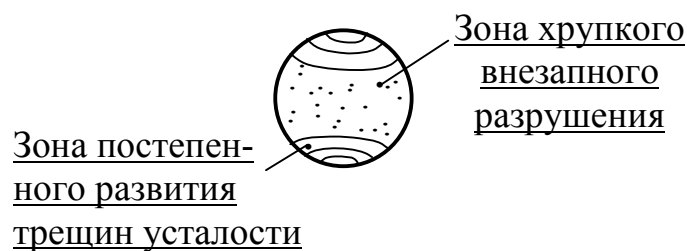


Рис. 8.29

Способность металлов сопротивляться разрушению при действии повторно-переменных напряжений называется выносливостью материала.

Механизм процесса усталостного разрушения металлов неразрывно связан со структурной неоднородностью, заключающейся в случайных вариациях размеров и очертаний отдельных кристаллитов (зерен) металла, направлений их кристаллографических плоскостей, в наличии различных фаз, включений дефектов кристаллической решетки (вакансий, дислокаций) и т.д. Вследствие указанной неоднородности при переменных напряжениях, даже не превосходящих предел пропорциональности, в отдельных неблагоприятно ориентированных зернах начинается циклическая пластическая деформация, которая связана с циклическими деформациями сдвига по определенным кристаллографическим плоскостям. Первые линии сдвига появляются в отдельных зернах на ранних стадиях нагружения, составляющих по числу циклов 1–10 % от общей долговечности образца до разрушения.

В более нагруженных точках материал постепенно упрочняется, будет испытывать постепенно повышающуюся напряженность, которая приводит к появлению микротрещин усталости.

Образование первых следов сдвига начинается, как правило, на поверхности образца вследствие облегченных условий деформирования зерен и наличия концентрации напряжений

от микронеровностей поверхности. Усталостный излом отличается от хрупкого или вязкого в условиях статического разрушения и др.

Блеск и шероховатость поверхности усталостной трещины бывают различными: более блестящая поверхность (наименее шероховатая) получается при малых нагрузках.

Гладкий и блестящий вид поверхности усталостной трещины связан с микроизбирательностью распространения усталостной трещины. В зоне избирательного развития обычно видны характерные усталостные линии, имеющие волнообразный вид и расходящиеся от очага разрушения как из центра. Усталостные линии являются следами фронта продвижения трещины. Форма усталостных линий зависит от формы детали и характера ее нагружения.

## **8.11. Экспериментальное определение характеристик сопротивления усталости**

### ***8.11.1. Характеристики сопротивления усталости при симметричных и асимметричных циклах***

#### *Ключевые слова*

*Гармонические колебания, постоянные напряжения, напряжения, меняющиеся во времени, цикл напряжений, наименьшее напряжение цикла, наибольшее напряжение цикла, среднее напряжение цикла, амплитуда цикла напряжений, размах напряжений, коэффициент асимметрии цикла, симметричный, асимметричный, отнулевой циклы, предел усталости, выносливости.*

Для определения характеристик сопротивления усталости лабораторных образцов или деталей из данного материала проводят их усталостные испытания. Основные понятия, определения и методика усталостных испытаний регламентированы ГОСТ 25.502-79.



Характер изменения напряжений во времени при стандартных испытаниях близок к гармоническому. Напряжения являются суммой постоянного (среднего напряжения) и напряжения, меняющегося по синусоиде с амплитудой  $\sigma_a$  (рис. 8.30). Циклом напряжений называют совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период процесса их изменения.

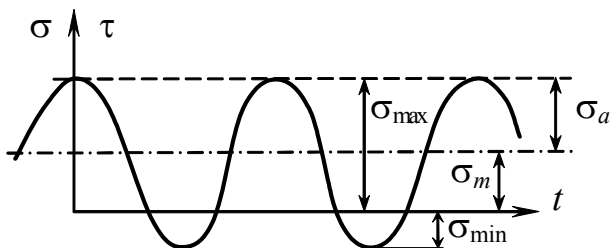


Рис. 8.30

$\sigma_{\min}$  – наименьшее напряжение цикла;  
 $\sigma_{\max}$  – наибольшее напряжение цикла;  
 $\sigma_m$  – среднее напряжение цикла;  
 $\sigma_a$  – амплитуда цикла напряжений.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (8.26)$$

Отсюда следует

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (8.27)$$

Размахом напряжений называют разность максимального и минимального напряжений цикла, т.е.

$$2\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}. \quad (8.28)$$

Все понятия и формулы справедливы и для кручения, если в них  $\sigma$  заменить на  $\tau$ .

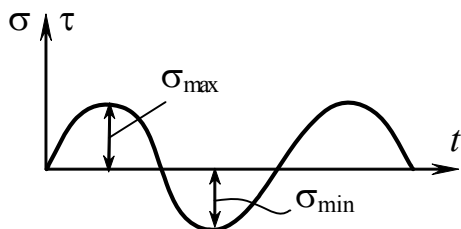


Рис. 8.31

$R_\sigma, r = -1$  – симметричный цикл (рис. 8.31).

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}; \quad \sigma_m = 0.$$

Цикл, в котором  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  различны, называется асимметричным.

$$R_{\sigma} = r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} - \text{коэффициент асимметрии цикла.}$$

$R \neq -1$  – асимметричный цикл.

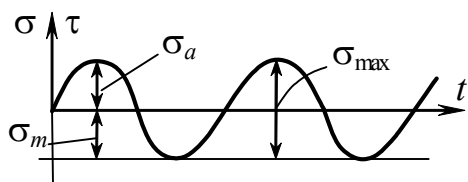


Рис. 8.32

Частный случай асимметричного цикла – отнулевой или (пульсационный) цикл (рис. 8.32), у которого

$$\sigma_{\min} = 0; \quad R_{\sigma} = r = 0; \quad \sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_{\max}}{2}.$$

Для каждого материала и вида напряженного состояния существует такое наибольшее напряжение цикла, которое материал выдерживает не разрушаясь сколь угодно большое (или достаточно большое наперед заданное) число циклов нагружений. Это напряжение называется пределом усталости или пределом выносливости и обозначается  $\sigma_R$  и  $\tau_R$ .

## 8.12. Установление предела выносливости

*Ключевые слова*

*Специальные усталостные машины, характеристики сопротивления усталости, долговечность образца, амплитуда напряжений, кривая усталости (кривая Веллера), лабораторные образцы по ГОСТ 25.502-79, база испытаний, базовое число циклов.*

Для проведения усталостных испытаний используются специальные усталостные машины. По способу возбуждения нагрузок в испытуемом объекте усталостные машины можно разделить на механические, гидравлические, электромеханические, пневматические, по виду нагружения образца – машины для испытаний при изгибе, кручении, растяжении-сжатии, сложном напряженном состоянии, а также универсальные.

Для получения характеристик сопротивления усталости, согласно ГОСТ 25.502-79, необходимо провести испытания не менее 10 одинаковых образцов из деформируемых и не менее 15 образцов из литейных сплавов.

На рис. 8.33 представлена схема машины для испытаний при консольном изгибе с вращением.

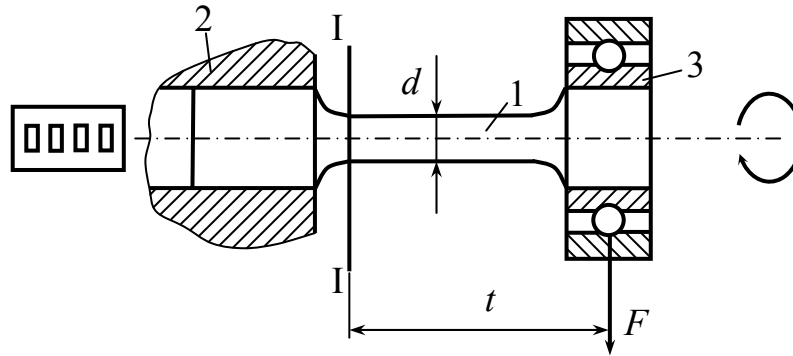


Рис. 8.33:

- 1 – испытуемый образец; 2 – шпиндель;  
3 – подшипник; 4 – счетчик циклов

Первый образец испытывают обычно при амплитуде напряжений  $\sigma_a$ , составляющей  $(0,65-0,75) \sigma_B = \sigma_{ПЧ}$ , и при этом фиксируют число циклов до его разрушения.

Постепенное снижение амплитуды напряжений приводит к повышению долговечности образца, под которой понимается число циклов до разрушения (или до появления трещины определенных размеров).

На рис. 8.34, а представлена кривая усталости (кривая Веллера) и на рис. 8.34, б представлена кривая усталости лабораторных образцов из легированной стали при изгибе с вращением.

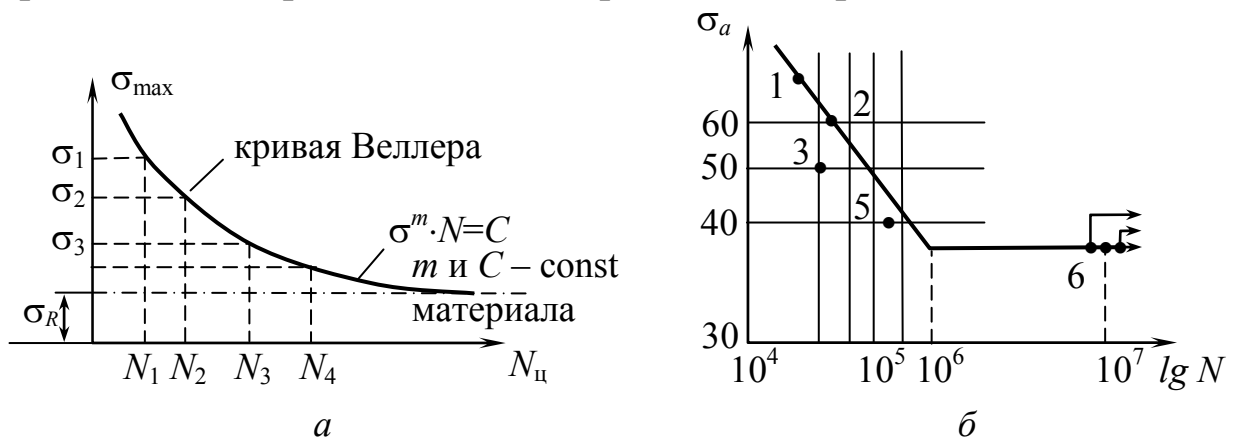


Рис. 8.34

Образец № 6 при  $\sigma_a = 35 \text{ кг/мм}^2$  проработал без разрушения  $10^7$  циклов (чему соответствует непрерывная работа усталостной машины в течение 56 часов при частоте вращения шпинделя  $n = 3000 \text{ об/мин}$ ). В процессе более длительных испытаний было установлено, что в условиях нормальных температур и отсутствия коррозии образцы из сталей малой и средней прочности ( $\sigma_{\text{пч}} < 1000 \div 1200 \text{ МПа}$ ), титановые сплавы не разрушаются при  $N = 10^7$ , не разрушаются и далее. Поэтому испытания этих образцов можно прекратить при  $N = 10^7$  циклов в том случае, если они не разрушились. Соответствующая точка на графике в этом случае снабжается стрелкой.

Предварительно задаваемое число циклов напряжений, до которого образцы испытывают на усталость, называют базой испытания и обозначают  $N_0$ . В данном случае  $N_0 = 10^7$  циклов.

Не для всякого материала и не при всяком напряженном состоянии кривая выносливости имеет горизонтальный участок (цветные сплавы, высоколегированные стали) в условиях контактных напряжений, высоких температур, коррозионной среды и т.д. (рис. 8.35).

В этом случае для определения предела усталости принимается определенное базовое число циклов, для цветных сплавов  $N = (50 \div 100) \cdot 10^6$  циклов.

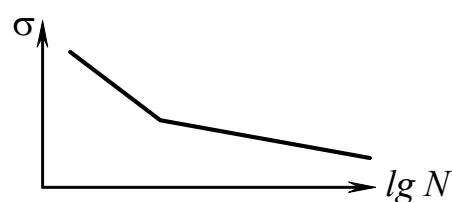


Рис. 8.35

### 8.13. Диаграмма предельных напряжений

*Ключевые слова*

*Диаграмма предельных напряжений, наибольшие, наименьшие и среднее напряжения цикла, диаграмма Смита, диаграмма Хейя, пределы выносливости при симметричном и отнулевом циклах, подобные циклы, схематизация диаграмм предельных напряжений, коэффициенты асимметрии цикла, плоское, объемное напряженное состояние, сложные переменные напряжения, условия прочности при переменных напряжениях, условие прочности Гафа.*

Чтобы охарактеризовать сопротивляемость материала действию переменных напряжений с различной асимметрией цикла, строят так называемую диаграмму предельных напряжений. В ней по оси ординат откладывают наибольшее  $\sigma_{\max}$  и наименьшее  $\sigma_{\min}$  напряжения цикла, а по оси абсцисс – среднее напряжение цикла  $\sigma_m$  (диаграмма Смита, рис. 8.36, диаграмма Хейя, рис. 8.37), в ней по оси ординат откладывают предел выносливости, а по оси абсцисс – среднее напряжение цикла.

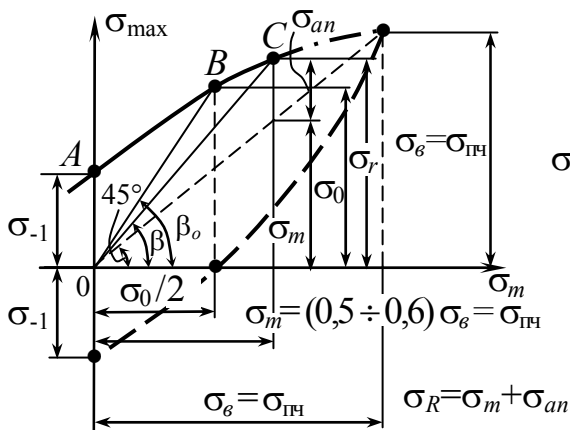


Рис. 8.36

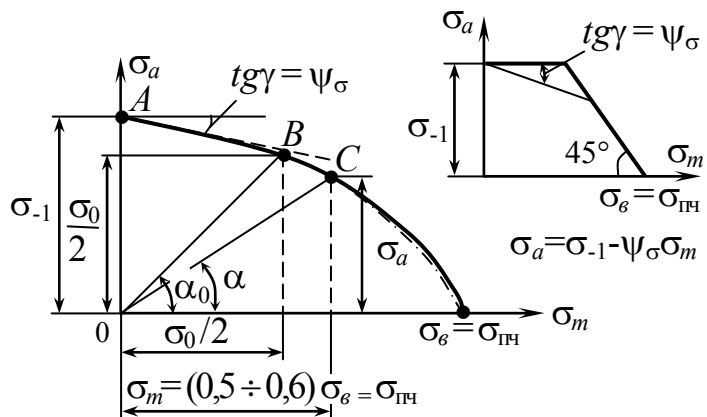


Рис. 8.37

$\sigma_{-1}$  – предел выносливости при симметричном цикле;

$\sigma_0$  – предел выносливости при отнулевом цикле  $\sigma_a = \frac{\sigma_0}{2}$

Подобным циклам  $R = \text{const}$  соответствуют лучи  $OC$ , проходящие через начало координат под углом  $\beta$  и  $\alpha$ , соответственно для диаграмм Смита и Хейя.

$$\text{tg}\beta = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{\max}}{\frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})} = \frac{2}{1+R} \quad \text{для текущей точки.}$$

Иначе говоря, точки, расположенные на луче  $OC$ , соответствуют подобным циклам с заданным коэффициентом асимметрии  $R$ .

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{1-R}{1+R}.$$

На диаграммах Смита (рис. 8.36) и Хейя (рис. 8.37) показан луч  $OB$ , соответствующий отнулевому циклу, для которого тангенсы углов наклона соответственно равны  $\text{tg}\beta_0 = 2$ ,  $\text{tg}\alpha_0 = 1$ .

Точка  $B$  – координата  $\frac{\sigma_0}{2}, \sigma_0$  (рис. 8.36).

Точка  $B$  – координата  $\frac{\sigma_0}{2}, \frac{\sigma_0}{2}$  (рис. 8.37).

Для расчета на усталость диаграмму предельных амплитуд  $ABC$  схематизируют, а именно заменяют ее прямой линией, проходящей через точки  $A$  и  $B$  (рис. 8.38).

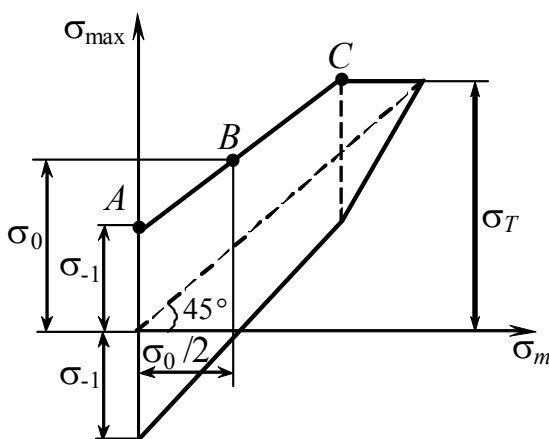


Рис. 8.38. Схематизированная диаграмма Смита

Уравнение  $AC$ :

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + \sigma_m (1 - \psi_\sigma); \quad (8.29)$$

$$\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_m = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m; \quad (8.30)$$

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}; \quad \psi_\tau = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}.$$

$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m$  – уравнение схематизированной диаграммы предельных амплитуд Хейя.

$\psi_{\sigma}$  – коэффициент, характеризующий влияние асимметрии цикла на предельную амплитуду напряжений;

$$\operatorname{tg} \gamma = \psi_{\sigma};$$

$\psi_{\sigma} = 0,1 \div 0,2$  – для углеродистых сталей;

$\psi_{\sigma} = 0,15 \div 0,30$  – для легированных сталей и легких сплавов;

$\psi_{\tau} = 0 \div 0,1$  – для углеродистых сталей;

$\psi_{\tau} = 0,05 \div 0,15$  – для легированных сталей.

В случае плоского или объемного напряженного состояния сопротивление усталости можно охарактеризовать, исходя из соответствующих гипотез прочности, согласующихся с экспериментальными данными.

Для исследования действительного поведения материала, в условиях сложных переменных напряжений, например, при сочетании изгиба с кручением используют специальные испытательные машины, позволяющие одновременно нагружать образец переменными изгибающим и крутящим моментами. В связи с тем, что во многих деталях машин в местах повышенной напряженности возникает плоское (или объемное) напряженное состояние, необходимо использовать условия прочности при сложном напряженном состоянии для расчета на усталость. Условия прочности при переменных напряжениях аналогичны следующим условиям пластичности:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_T = \frac{\sigma_T}{2}; \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Губера – Мизеса – Генки (гипотеза энергии формоизменения)

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2.$$

Геста Мора

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_T - \lambda(\sigma_1 + \sigma_3). \quad (8.31)$$

Здесь  $\tau_T$  и  $\sigma_T$  – соответственно пределы текучести при чистом сдвиге и растяжении;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения.

Применяя к одноосному растяжению ( $\sigma_1 = \sigma_T, \sigma_3 = 0$ ), получаем

$$\lambda = \frac{2\tau_T}{\sigma_T} - 1. \quad (8.32)$$

Из выражений (8.31) и (8.32) следует, что условие пластичности Геста – Мора может быть представлено в виде:

$$\sigma_1 - \left( \frac{\sigma_T}{\tau_T} - 1 \right) \sigma_3 = \sigma_T. \quad (8.33)$$

Наиболее распространен в деталях машин случай плоского напряженного состояния, который характеризуется возникновением нормальных  $\sigma$  и касательных напряжений  $\tau$  на одной из площадок, в этом случае  $\sigma_2 = 0$ ,

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}. \quad (8.34)$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_T, \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma_T^2}{\tau_T^2} = 4.$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_T, \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma_T^2}{\tau_T^2} = 3.$$

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_T^2} + \frac{\tau^2}{\tau_T^2} = 1.$$

При  $\frac{\sigma_T}{\tau_T} = 2$ ,  $\left( \frac{\sigma}{\sigma_T} \right)^2 \left( \frac{\sigma_T}{\tau_T} - 1 \right) + \left( 2 - \frac{\sigma_T}{\tau_T} \right) + \left( \frac{\tau}{\tau_T} \right)^2 = 1$  – условие

пластичности Геста – Мора.

Если в этих формулах заменить  $\tau_T$  и  $\sigma_T$  на  $\tau_{-1}$  и  $\sigma_{-1}$ , то под величинами  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma, \tau$  следует понимать тогда  $\sigma_{1a}, \sigma_{2a}, \sigma_{3a}, \sigma_a, \tau_a$ .



Таким образом, условие прочности при переменных нагрузках и плоском напряженном состоянии при изменении напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  по симметричному циклу можно записать в виде

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1 - \text{окружность.}$$

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right) + \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\left(2 - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right) + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1 - \text{условие прочности Гафа}$$

(рис. 8.35).

$$(\sigma_1)_a - (\sigma_3)_a = \sigma_{-1};$$

$$\sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2} = \sigma_{-1}.$$

На рис. 8.39:

кривая 1 – конструкционные стали, построена экспериментально;  
2 – высокопрочные стали и чугун.

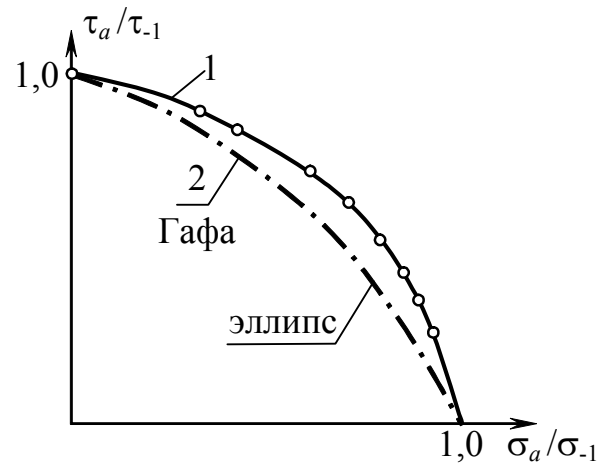


Рис. 8.39

## 8.14. Влияние конструктивно-технологических факторов на предел выносливости

*Ключевые слова*

*Предел выносливости, симметричный цикл при изгибе, стандартный гладкий полированный образец, предел выносливости натурной детали при симметричном цикле, номинальные напряжения, концентрация напряжений, масштабный фактор, качество обработки поверхности, эксплуатационные факторы, технологические методы поверхностного упрочнения, коэффициент, учитывающий влияние всех факторов на предел выносливости, теоретический коэффициент концентрации, эффективный коэффициент концентрации напряжений, коэффициент чувствительности, градиент напряжений, линейная протяженность концентратора.*

Предел выносливости  $\sigma_{-1}$  при симметричном цикле изгиба гладкого (с плавными очертаниями) лабораторного тщательно полированного образца диаметром  $d_0 = 7,5$  составляет для сталей (0,4-0,5) ( $\sigma_s = \sigma_{пч}$ ). Предел выносливости натурной детали при симметричном цикле, найденный по описанной выше для образцов методике и выраженный в номинальных напряжениях, обозначают  $\sigma_{-1d}$ . Под номинальными напряжениями в дальнейшем будем понимать напряжения, вычисленные по следующим формулам:

$$\sigma_n = \frac{M}{W} \text{ – при изгибе,} \quad (8.35)$$

$$\sigma_n = \frac{F}{A} \text{ – при растяжении или сжатии,} \quad (8.36)$$

$$\tau_n = \frac{T_{кр}}{W_p} \text{ – при кручении,} \quad (8.37)$$

где  $W$ ,  $W_p$  – осевой и полярный моменты сопротивления сечения (для круга  $W \cong 0,1d^3$ ;  $W_p = 0,2d^3$ );  $M$ ,  $T$  – изгибающий и крутящий моменты;  $F$ ,  $A$  – сила и площадь поперечного сечения.

Опыты показывают, что величины  $\sigma_{-1d}$  могут быть в 2–6 раз меньше  $\sigma_{-1}$ .

Указанное снижение предела выносливости является следствием влияния ряда следующих факторов:

- 1) концентрации напряжений;
- 2) абсолютных размеров поперечных сечений (масштабный фактор);
- 3) качества обработки поверхности;
- 4) эксплуатационных факторов (коррозия, повышенная или пониженная температура, радиация, частота переменной нагрузки и т.д.);
- 5) технологических методов поверхностного упрочнения деталей (наклеп поверхностного слоя роликами, дробью и т.п., химико-термические методы и т.д.);
- 6) примем, что коэффициент, учитывающий суммарное влияние всех факторов на предел выносливости деталей,

$$K = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1d}}. \quad (8.38)$$

#### 1. Влияние концентрации напряжений.

В растягиваемом продольной силой стержне распределение напряжений по длине и поперечному сечению стержня, исключая малые концевые части, равномерно.

Распределение напряжений существенно изменяется, если стержень имеет выточку (рис. 8.40), ступенчатое по длине поперечное сечение (рис. 8.41, а), отверстия (рис. 8.41, б) и тому подобные нарушения гладкости геометрической формы. В переходной зоне в окрестности сечения *aa* (рис. 8.41, а) распределение неравномерно, возникают повышенные напряжения  $\sigma_{\max}$ , как показано на рис. 8.40 в стержне с выточкой. Такое явление носит название концентрации напряжений. Отношение  $\sigma_{\max}$  к номинальному напряжению в части стержня с более высоким уровнем напряжений (номинальное напряжение) называется коэффициентом концентрации напряжений.

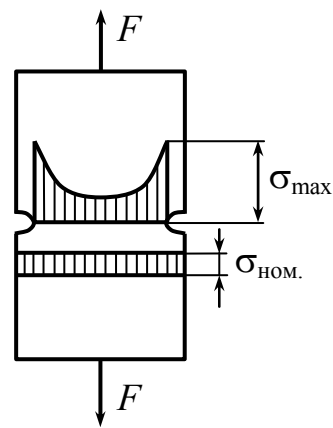


Рис. 8.40

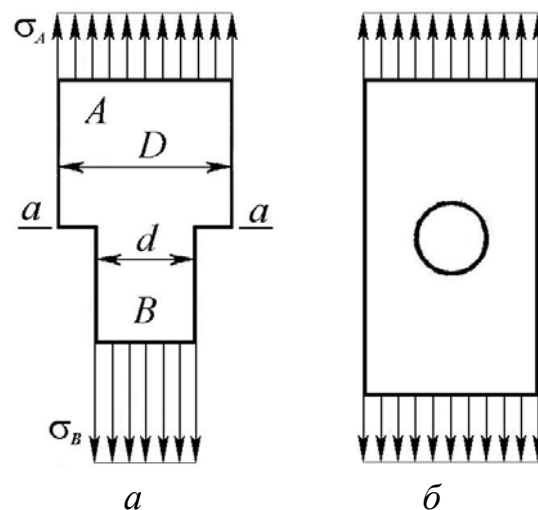


Рис. 8.41

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{НОМ}}} = \alpha_{\sigma} \quad \text{— теоретический коэффициент концентрации.} \quad (8.39)$$

Концентраторы напряжений, вызывая местный повышенный уровень напряжений, создают неблагоприятные условия использования материала и приводят к преждевременному разрушению.

Так как при конструировании деталей концентраторов избежать не удастся, то их вредное влияние должно быть сведено к минимуму. Для снижения уровня концентрации используют различного вида сглаживающие переходы контуры, которые называются галтелями.

Для наглядности образования концентрации напряжений удобно пользоваться гидродинамической аналогией, которая приближенно отражает плотность расположения силовых линий в детали.

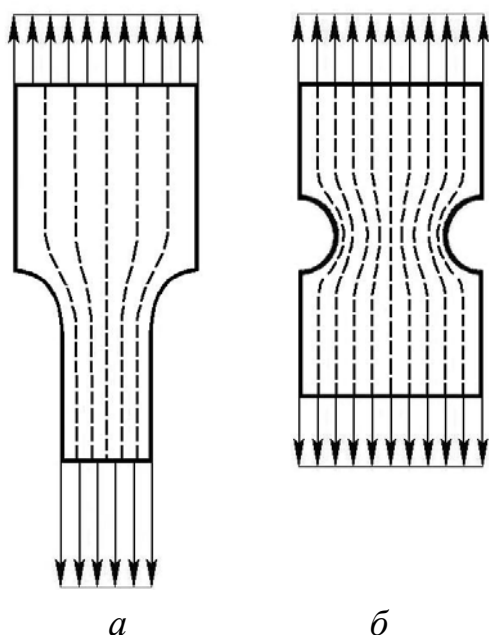


Рис. 8.42

Представим, что стержень заменен трубкой соответствующего сечения, и изобразим линии тока жидкости (рис. 8.42, а, б). Там, где плотность этих линий тока более высокая, там и более высок уровень напряжений. Особенно опасна концентрация напряжений при циклическом нагружении, которое, как известно, приводит к охрупчиванию материала, и разрушение происходит по типу хрупкого разрушения.

В этом случае вводят эффективный (действительный) коэффициент концентрации напряжений

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1к}}, \quad (8.40)$$

где  $\sigma_{-1}$  – предел выносливости гладкого образца из исследуемого материала без концентратора напряжений;  $\sigma_{-1к}$  – предел выносливости детали с концентрацией напряжений.

$$\sigma_{\text{ном}} = \frac{F}{A}; \quad \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1к}} = K_{\tau} < K_{\sigma}. \quad (8.41)$$

Связь между эффективными и теоретическими коэффициентами концентрации

$$K_{\sigma} = 1 + q_{\sigma}(\alpha_{\sigma} - 1), \quad (8.42)$$

где  $q_{\sigma}$  – коэффициент чувствительности,  $0 \leq q_{\sigma} \leq 1$ ;  $q = 0,8 \div 0,9$  для титановых сплавов,  $q = 0,1 \div 0,2$  для малоуглеродистых сплавов,

$q = 0,6 \div 0,8$  для легированных сталей,  $q = 0,3 \div 0,5$  для алюминиевых сплавов. Величина  $q$  зависит от числа циклов нагружения, при  $N < 10^5$  она уменьшается.

Значения  $K_\sigma$ ,  $K_\tau$  имеются в справочниках.

2. Масштабный фактор (чем крупнее деталь, тем предел выносливости ниже). Неблагоприятно:

- а) большие размеры детали,
- б) высокие местные напряжения,
- в) малый градиент напряжений  $\bar{G}$ ,
- г) большая протяженность концентратора –  $L$ .

$$K_{d\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}} < 1. \quad (8.43)$$

В расчетах используется величина, учитывающая влияние концентрации напряжений и масштабного фактора

$$\sigma_{a \text{ обр}} = \sigma_{a \text{ дет}} \cdot \frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}}. \quad (8.44)$$

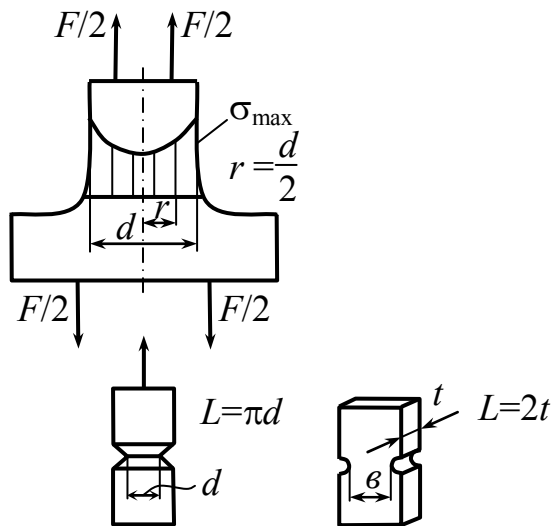


Рис. 8.43

Градиент напряжений (рис. 8.43)

$$\bar{G} = \left( \frac{d\sigma}{dr} \right)_{r=d/2} \cdot \frac{1}{\sigma_{\max}} \left[ \frac{1}{\text{мм}} \right]. \quad (8.45)$$

Увеличение  $\bar{G}$  снижает чувствительность материала к местным напряжениям.

Линейная протяженность концентратора  $L$

$\bar{G}$  подобно теоретическому коэффициенту концентрации, зависит от формы тела и условий нагружения и определяется законом изменения напряжений в окрестности очага концентрации.

Введение в расчет градиента не требует специального решения каких-либо новых задач. Его определяют в каждом конкретном случае одновременно с теоретическим коэффициентом концентрации.

Приведем данные по градиентам.

Для полосы с отверстием (рис. 8.44)

$$\bar{G} = \frac{4,6}{d}.$$

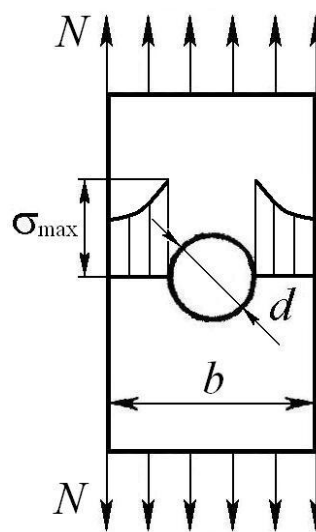


Рис. 8.44

Для вала с выточкой (рис. 8.45),

если  $\frac{D}{d} > 1,5$ , то при растяжении  $\bar{G} = \frac{2}{r}$ ,

а при изгибе  $\bar{G} = \frac{2}{r} + \frac{2}{d}$ .

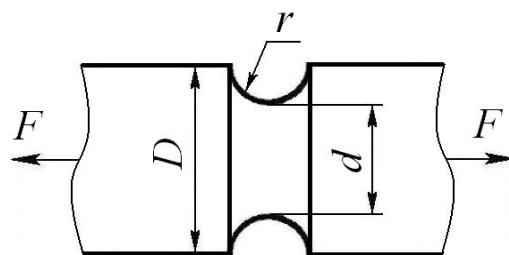


Рис. 8.45

Если  $\frac{D}{d} < 1,5$ , то соответственно имеем  $\bar{G} = \frac{2(1+\varphi)}{r}$  и  $\bar{G} = \frac{2(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{d}$ ,

где

$$\varphi = \frac{1}{4\sqrt{\frac{D-d}{2r}} + 2}. \quad (8.46)$$

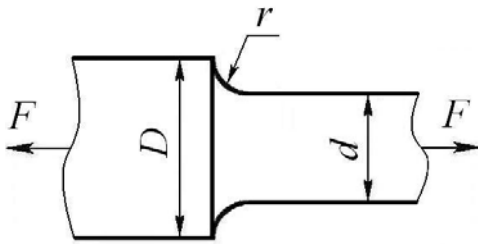
При кручении, независимо от  $\frac{D}{d}$ ,  $\bar{G} = \frac{1}{r} + \frac{2}{d}$ .

Для вала с галтелью (рис. 8.46) при  $\frac{D}{d} > 1,5$  для растяжения и изгиба

$$\bar{G} = \frac{2,3}{r} \quad \text{и} \quad \bar{G} = \frac{2,3}{r} + \frac{2}{d},$$

а при  $\frac{D}{d} < 1,5$   $\bar{G} = \frac{2,3(1+\varphi)}{r}$  и  $\bar{G} = \frac{2,3(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{d}$ ,

где  $\varphi$  по-прежнему определяется выражением (8.46).



Для кручения также независимо от  $\frac{D}{d}$

$$\bar{G} = \frac{1,15}{r} + \frac{2}{d}. \quad (8.47)$$

Рис. 8.46

Чувствительность материала к масштабному фактору и местным напряжениям определяется величиной

$$\frac{K_{\sigma}}{K_{d_{\sigma}}} = \frac{2\alpha_{\sigma}}{1 + \left(88,3 \frac{\bar{G}}{L}\right)^{v_{\sigma}}}; \quad \frac{K_{\tau}}{K_{d_{\tau}}} = \frac{2\alpha_{\tau}}{1 + \left(88,3 \frac{\bar{G}}{L}\right)^{v_{\tau}}}, \quad (8.48)$$

где 88,3 – коэффициент, мм<sup>2</sup> (поэтому  $\frac{1}{G}$  и  $L$  следует подставлять в мм).

$v_{\sigma} = 0,1 \div 0,14$  – для малоуглеродистых сталей;

$v_{\sigma} = 0,08 \div 0,09$  – для алюминиевых сплавов;

$v_{\sigma} = 0,5$  – для чугуна;

$v_{\sigma} = 0,04 \div 0,08$  – для легированных сталей;

$v_{\tau} = (1,5 \div 2)v_{\sigma}$ .

### 3. Влияние состояния поверхности.

$$K_F = \frac{\sigma_{-1F}}{\sigma_{-1}}.$$

$\sigma_{-1F}$  – предел выносливости образца с определенной обработкой поверхности.

$\sigma_{-1}$  – предел выносливости гладкого полированного лабораторного образца.



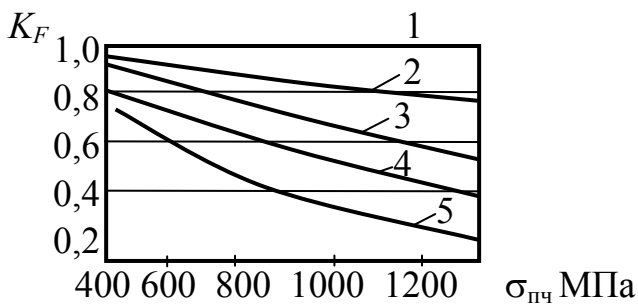


Рис. 8.47

- 1 – полирование; 2 – шлифование;  
 3 – тонкое точение; 4 – грубое точение;  
 5 – наличие окалины

Качество обработки поверхности оказывает весьма сильное влияние на сопротивление усталости, что связано с влиянием концентрации напряжений вследствие микронеровностей поверхности, а также остаточных напряжений и наклепа тонкого поверхностного слоя, возникающего при механической обработке (рис. 8.47).

$$K = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1})_d} = \frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_F} - 1.$$

4. За счет коррозии происходит снижение предела выносливости деталей.

$$K_{\text{кор}} = \frac{\sigma_{-1\text{д кор.}}}{\sigma_{-1\text{д}}}; \quad K = \frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_{\text{кор}}} + \frac{1}{K_F} - 1.$$

5. Несущая способность или предел выносливости образцов можно повысить за счет технологических методов упрочнения: наклеп поверхности путем обкатки роликами, обдувкой дробью и т.д.

$$K_y = \frac{\sigma_{-1\text{д упр.}}}{\sigma_{-1\text{д}}}; \quad K_y = 2 \div 3 \text{ могут быть.}$$

$$K = \frac{\left( \frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_F} + \frac{1}{K_{\text{кор}}} - 1 \right)}{K_y}.$$

## 8.15. Проверка прочности при переменных напряжениях

*Ключевые слова*

*Коэффициенты запаса, проверочный расчет, симметричный цикл, предел выносливости гладкого полированного образца, асимметричный цикл напряжений, диаграмма Хейя, расчет на выносливость, расчет на статическую прочность, линейное напряженное состояние.*

Методы расчета по коэффициентам запаса. Они, как правило, проводятся в форме проверочных расчетов. Ведутся с целью определения коэффициента запаса прочности и в его оценке.

1. Регулярное изменение нагрузок по симметричному циклу при линейном напряженном состоянии  $R = -1$  (рис. 8.48).

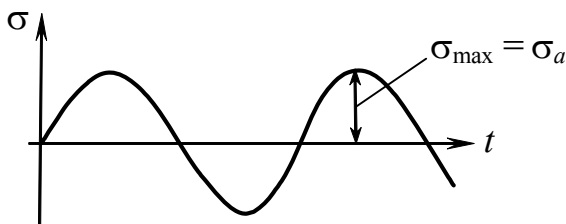


Рис. 8.48

$n$  — коэффициент запаса.

$[n] = 1,5 \div 2,5$  — общее машиностроение;

$[n] = 1,3 \div 1,5$  — авиационная промышленность.

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma^{\text{опасн.}}}{(\sigma_{\text{факт}})_{\max}}; \quad n_{\tau} = \frac{\tau^{\text{опасн.}}}{(\tau_{\text{факт}})_{\max}};$$

при статическом нагружении  $\sigma^{\text{опасн.}} = \sigma_{\text{пч}}$  или  $\sigma_T$ ;

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{пч}}}{(\sigma_{\text{факт}})_{\max}}; \quad n_T = \frac{\sigma_T}{(\sigma_{\text{факт}})_{\max}};$$

при переменных напряжениях  $\sigma^{\text{опасн.}} \rightarrow \sigma_R$  — предел усталости,

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a K}.$$

$\sigma^{\text{опасн.}} \rightarrow \sigma_{-1}$  — симметричный цикл;  $\tau^{\text{опасн.}} = \tau_{-1}$ .

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \cdot K}; \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \cdot K},$$

где  $\sigma_{-1}$  – предел выносливости для гладкого полированного образца  $d = 7,5$  мм;  $\sigma_a, \tau_a$  – амплитуды циклов напряжений рассчитываемой детали.

## 2. Асимметричный цикл напряжений.

Пусть деталь испытывает фактические напряжения  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  (рис. 8.49), на схематизированной диаграмме Смита  $AC$  – предельная линия по усталости,  $CS$  – предельная линия по текучести.

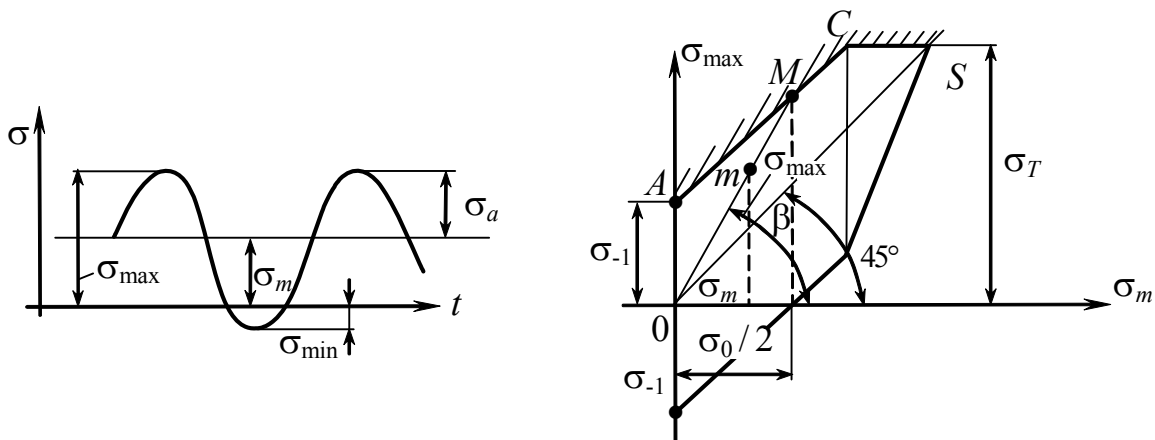


Рис. 8.49

$$\psi_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0};$$

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \sigma_m; \quad \sigma_m + \sigma_a \leq \sigma_T.$$

Для детали  $\sigma_a = \frac{1}{K}(\sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \sigma_m)$ .

т. А (рис. 8.50)  $\sigma_{a_{\text{НОМ.}}}$  и  $\sigma_{m_{\text{НОМ.}}}$  для

цикла  $n_{\sigma} = \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OA_1}$ .

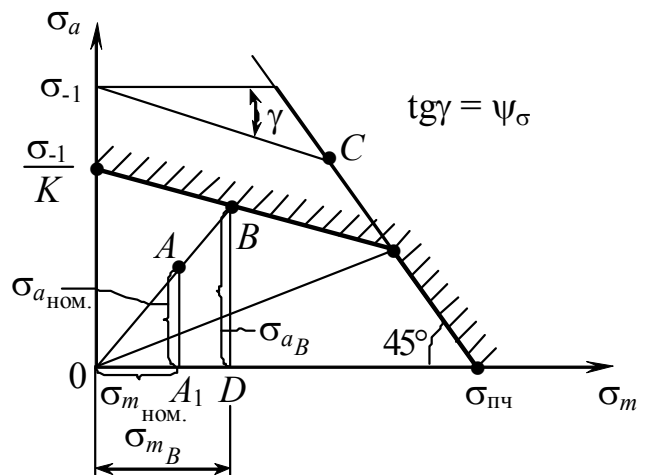


Рис. 8.50

$$\sigma_{a_B} = \frac{1}{K} (\sigma_{-1} - \psi \sigma_{m_B}). \quad (8.49)$$

$$\sigma_{a_B} = \sigma_{m_B} \frac{\sigma_{a_{НОМ.}}}{\sigma_{m_{НОМ.}}}. \quad (8.50)$$

Приравняем (8.49) и (8.50)

$$\sigma_{m_B} = \frac{\sigma_{-1}}{K \cdot \sigma_{a_{НОМ.}} + \psi_{\sigma} \cdot \sigma_{m_{НОМ.}}} \cdot \sigma_{m_{НОМ.}}$$

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K \cdot \sigma_{a_{НОМ.}} + \psi_{\sigma} \cdot \sigma_{m_{НОМ.}}}.$$

Наряду с расчетом на выносливость необходимо проверить также выполнение условия статической прочности, которое для пластичных материалов имеет вид

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_m + \sigma_a} > [n_T] = 1,2 \div 1,5.$$

### 8.16. Сложное напряженное состояние

При плоском напряженном состоянии (рис. 8.51) действуют  $\sigma$  и  $\tau$ :

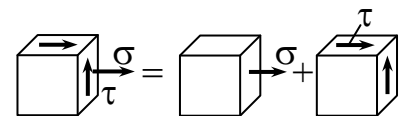


Рис. 8.51

$$K = \frac{\sigma_{-1д.}}{\tau_{-1д.}}$$

$$\sqrt{\sigma_{a_d}^2 + K^2 \tau_{a_d}^2} = \sigma_{-1д.}, \quad (8.51)$$

где  $\sigma_{a_d}$ ,  $\tau_{a_d}$  – предельные амплитуды напряжений в детали при совместном действии нормальных и касательных напряжений;  $\sigma_a$  и  $\tau_a$  – рабочие амплитудные напряжения.

$$n = \frac{\sigma_{-1д.}}{\sigma_{\text{расч.}}} = \frac{\sigma_{-1д.}}{\sqrt{\sigma_a^2 + K^2 \tau_a^2}}. \quad (8.52)$$

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1д.}}{\sigma_a}, \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1д.}}{\tau_a}. \quad (8.53)$$

Подставляя (8.53) в (8.52), получим

$$n_r = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}},$$

$$\frac{1}{n_r^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}, \quad (8.54)$$

где  $n_r$  – искомый коэффициент запаса;  $n_\sigma$  – коэффициент запаса в предположении, что касательные напряжения  $\tau$  отсутствуют;  $n_\tau$  – коэффициент запаса по касательным напряжениям, установленный в предположении, что  $\sigma = 0$ .

Эта эмпирическая формула Гафа и Полларда справедлива и для асимметричных циклов нагружения (рис. 8.52).

$$n = \frac{OM}{Om}.$$

$\tau_{-1K}$ ,  $\sigma_{-1K}$  – пределы выносливости детали с концентрацией напряжений;

$\tau_{aKL}$ ,  $\sigma_{aKL}$  – предельные значения амплитуд нормальных и касательных напряжений при совокупном их действии.

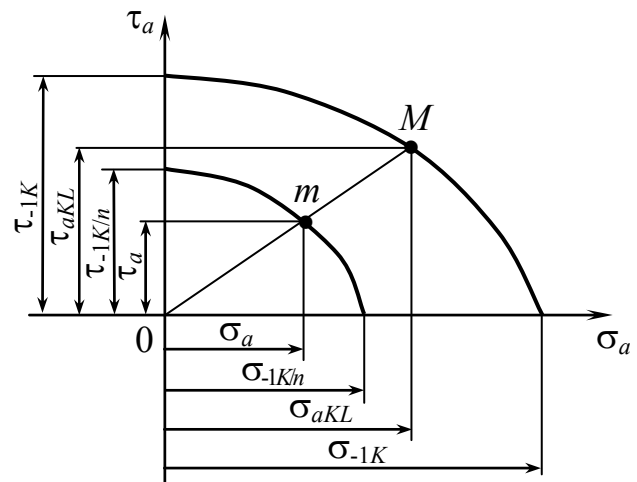


Рис. 8.52

$$\frac{\left(\frac{\sigma_{aLK}}{\sigma_a}\right)^2}{\left(\frac{\sigma_{-1K}}{\sigma_a}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\tau_{aLK}}{\tau_a}\right)^2}{\left(\frac{\tau_{-1K}}{\tau_a}\right)^2} = 1.$$

$n = 1,3 \div 1,4$  – повышенная точность расчета;

$n = 1,4 \div 1,7$  – обычный коэффициент запаса;

$n = 1,7 \div 3,0$  – пониженная точность расчета.

## 8.17. Расчеты при нестационарных режимах

*Ключевые слова*

*Нестационарный режим нагружения, динамическая характеристика конструкции, осциллограмма, интервалы напряжений, блоки значений, амплитуд напряжений, ступенчатая диаграмма, долговечность, рабочее число циклов, базовое число циклов, относительная амплитуда напряжений, относительное суммарное число циклов, опытный показатель.*

Расчеты таких деталей, как рессоры и упругие подвески рамы автомашин и железнодорожных вагонов, силовые узлы самолетов и им подобные, производятся с учетом нестационарных режимов нагружения. Напряжения в таких элементах конструкции изменяются довольно сложным образом (рис. 8.53) в зависимости от состояния автомобильной дороги, от профиля железнодорожного пути, от степени турбулентности атмосферы в условиях полета самолета, а также от динамических характеристик самой конструкции.



Рис. 8.53

Производится разметка точек максимума и минимума. Каждая последующая полуразность между максимальным и минимальным напряжениями принимается за амплитуду очередного цикла. В результате таких обмеров мы получаем множество значений амплитуд, которое называется блоком. Число значений амплитуд в блоке должно быть достаточно большим (несколько сотен), чтобы

можно было произвести статистическую обработку замеренных значений. Блок должен характеризовать и эксплуатационные условия.

Далее производится подсчет числа циклов, имеющих определенную амплитуду, а точнее, амплитуду, лежащую в пределах заданного интервала напряжений.

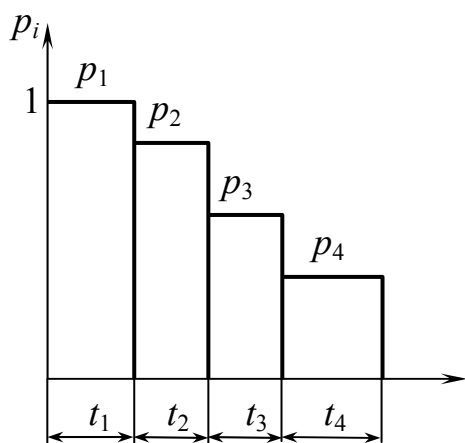


Рис. 8.54

В результате все замеренные амплитуды разбиваются на группы. 20–24 кг/мм<sup>2</sup> – 75 амплитуд, 24–28 → 103 амплитуды и т.д. Эти подсчеты могут быть представлены в виде ступенчатой диаграммы (рис. 8.54). Вопрос долговечности – понятие накопления повреждений.

$$p_i = \frac{\sigma_{a_i}}{\sigma_{a_{\max}}} = \frac{\tau_{a_i}}{\tau_{a_{\max}}}; \quad t_i = \frac{n_i}{n_{\Sigma}};$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1;$$

$$K_{\text{эс}} = \sqrt[m]{\frac{N_{\sigma}}{N_{\text{баз}}} \sum p_i^m t_i},$$

где  $N_{\sigma}$  – рабочее число циклов напряжений изгиба за весь срок службы вала;  $N_{\text{баз}}$  – базовое число циклов;  $p_i$  – относительная амплитуда напряжений изгиба, кручения для  $i$  – ступени режима нагрузки;  $t_i$  – относительное суммарное число циклов действия напряжения;  $m$  – опытный показатель.

$$N_{\sigma} = 60 \cdot nT.$$

$$N_{\text{баз}} = 10^7 \text{ циклов};$$

$$m = 9,$$

$$0,6 \leq \frac{K_{\text{эс}}}{K_{\text{эс}}} \leq 1.$$

В табл. 8.1. представлены базовое число циклов и опытный показатель  $m$  для отдельных элементов конструкций.

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\text{э}\sigma} K \sigma_a + \psi_{\sigma} \cdot \sigma_m}; \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\text{э}\tau} K \tau_a + \psi_{\tau} \cdot \tau_m}; \quad n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}.$$

$$m = \frac{C}{K}.$$

$C = 12$  – сварные соединения;

$C = 12 \div 20$  – углеродистые стали;

$C = 20 \div 35$  – высоколегированные стали.

Таблица 8.1

	$m$	$N_{\sigma}$
Образцы без концентраторов полирования	9–18	$(1 \div 4) \cdot 10^6$
Образцы с концентратором и полированием	6–10	$(1 \div 4) \cdot 10^6$
Вал с напрессовкой	6–10	$(6 \div 10) \cdot 10^6$
При наличии поверхностного упрочнения	18–20	$(1 \div 5) \cdot 10^6$

### Контрольные вопросы

1. Какие вам известны разновидности динамических нагрузок?
2. На чем базируется расчет на прочность движущихся элементов конструкций?
3. Как определяются напряжения и перемещения в детали, движущейся поступательно с ускорением  $a$ ?
4. Некоторый груз перемещается вертикально с помощью троса. В какие моменты трос подвергается наибольшему воздействию груза?
5. Чему равны напряжения в поперечном сечении тонкого кольца, равномерно вращающегося в своей плоскости с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси?
6. Какие вам известны разновидности удара?
7. Какие допущения принимаются при расчетах на удар?
8. Как приближенно учитывается масса конструкции при ударе?
9. Что такое приведенная масса конструкции?



10. Чему равен динамический коэффициент при вертикальном ударе?
11. Как влияет масса конструкции на величину динамического коэффициента?
12. Как влияет податливость конструкции на величину динамического коэффициента при ударе?
13. Каково значение динамического коэффициента при мгновенном (без начальной скорости) приложении нагрузки?
14. По какой формуле определяется динамический коэффициент, если  $H \gg \sigma_{ст}$ ?
15. Как определяются напряжения и перемещения при ударе?
16. Как определяются максимальные касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении вала от внезапного торможения колеса?
17. Чем должно обладать тело, чтобы оно могло совершать колебания?
18. Как различаются между собой периодические и непериодические колебательные процессы?
19. Почему при исследовании колебательных процессов упругих систем важно знать для них число степеней свободы?
20. Как классифицируются механические колебания?
21. Как различаются колебания по виду упругих деформаций?
22. Что такое свободные и вынужденные колебания упругой системы?
23. Что такое параметрические колебания и автоколебания упругой системы?
24. Что такое крутильные колебания упругой системы?
25. Как вычисляется частота собственных колебаний упругой системы с одной степенью свободы?

26. Что такое фаза, период и частота колебаний упругой системы?
27. Как определить крутильную жесткость и период колебаний вала?
28. Что такое логарифмический декремент колебаний?
29. Чему равна амплитуда вынужденных колебаний?
30. Как влияет частота  $\Omega$  изменения возмущающей силы на амплитуду вынужденных колебаний?
31. Как определяется динамический коэффициент при вынужденных колебаниях? Какое наименьшее значение он может принимать?
32. Что используется для борьбы с резонансом и какую частоту возбуждения следует исключить из зоны рабочих режимов?
33. Как производится расчет на прочность элементов конструкций при вынужденных колебаниях?
34. Расскажите о приближенном способе определения собственных частот колебаний с большим числом степеней свободы (способ Релея).
35. Запишите формулу Релея для определения частот собственных колебаний систем с большим числом степеней свободы.
36. Чем отличается конструктивная схема коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания от динамической модели крутильных колебаний?
37. Запишите уравнение амплитудных углов поворота при крутильных колебаниях «цепочечной системы».
38. Что называется усталостью и выносливостью материала?
39. Чем отличается зона постепенного развития трещин усталости от зоны хрупкого внезапного разрушения детали?
40. С чем связан механизм процесса усталостного разрушения металлов?

41. От чего зависит степень блеска и шероховатости поверхности усталостной трещины?
42. От чего зависит форма усталостных линий в детали?
43. Что такое цикл напряжений?
44. Перечислите основные параметры цикла.
45. Назовите характерные циклы, которые реализуются в испытательных машинах.
46. Что означает коэффициент асимметрии цикла?
47. Какие циклы считаются подобными?
48. Какие предъявляются требования к образцам с точки зрения количества и размеров при проведении стандартных испытаний на усталость?
49. При каких видах деформации проводятся испытания на усталость?
50. Что представляет собой кривая усталости?
51. Что называется пределом выносливости материала?
52. Что такое база испытаний? Чему она равна для сталей и цветных металлов?
53. Что представляет собой кривая усталости в полулогарифмических координатах?
54. Может ли предел выносливости быть равным пределу текучести, пределу прочности материала?
55. Может ли образец из стали разрушиться при 200 млн циклов, если он не разрушился при 10 млн циклов?
56. Какие существуют эмпирические зависимости между пределом выносливости и пределом прочности для сталей?
57. Что характеризует диаграмма предельных напряжений?
58. Какие диаграммы предельных напряжений вы знаете?
59. Для чего строится диаграмма предельных амплитуд?
60. Как схематизируются диаграммы предельных амплитуд?

61. Запишите уравнения схематизированной диаграммы предельных амплитуд Хейя.
62. Как определяются коэффициенты  $\psi_\sigma$  и  $\psi_\tau$ , характеризующие влияние асимметрии цикла на предельную амплитуду напряжений?
63. Гипотезы прочности при сложном напряженном состоянии для расчета на усталость.
64. Какие факторы влияют на величину предела выносливости деталей машин?
65. Что такое концентрация напряжений и как она оценивается в упругой стадии работы материала?
66. Как оценивается влияние концентрации напряжений на величину предела выносливости?
67. Как оцениваются теоретические коэффициенты концентрации напряжений в элементах конструкций при растяжении или сжатии, при изгибе и кручении?
68. Какая связь имеется между теоретическими и эффективными коэффициентами концентрации?
69. От чего зависит коэффициент чувствительности материала  $q$  к концентрации напряжений?
70. Как влияют и как учитываются в расчетах абсолютные размеры поперечного сечения детали?
71. Как учитывается в расчетах совместное влияние концентрации напряжений и абсолютных размеров поперечного сечения?
72. По какой формуле определяется множитель  $K_\sigma/K_{d\sigma}$ ?
73. Как определяются относительный градиент напряжений и линейная протяженность концентратора?
74. Как определяется относительный градиент напряжений для полосы с отверстием при растяжении, вала с выточкой при растяжении, изгибе и при кручении?

75. Запишите выражение для определения относительного градиента напряжений для вала с галтелью для растяжения и изгиба и для кручения?
76. Как влияет качество обработки поверхности на величину предела выносливости детали?
77. Как влияет коррозионная среда на предел выносливости детали?
78. Какие методы поверхностного упрочнения применяют в современной технике?
79. Какой положительный эффект дает поверхностная обработка деталей машин?
80. Как учитывается в расчетах эффект поверхностного упрочнения?
81. Какие пути повышения усталостной прочности деталей?
82. На что ориентированы металлургические мероприятия?
83. К чему сводятся конструктивные мероприятия по борьбе с усталостным разрушением?
84. На что направлены технологические мероприятия?
85. Как влияет вид деформации на величину предела выносливости?
86. Как определяется предел выносливости детали при симметричном цикле?
87. Как определяется предел выносливости детали при несимметричном цикле?
88. Как определяется запас усталостной прочности детали при простых видах деформации?
89. По какой формуле определяется запас усталостной прочности при сложном напряженном состоянии?
90. Как определяется запас усталостной прочности детали при сложном напряженном состоянии при нестационарных режимах работы?

## 9. Расчет конструкций по предельным нагрузкам.

### Основные понятия о предельном состоянии

*Ключевые слова*

*Расчет по предельному состоянию, пластические шарниры, предел текучести, значительные остаточные деформации, виды предельных состояний, резервы прочности, пластичные материалы, диаграмма Прандтля, теория пластичности Сен-Венана.*

Расчеты на прочность отдельных стержней, балок и конструкций, рассмотренные в предыдущих разделах курса, основаны на оценке прочности материала в опасной точке. При таких расчетах наибольшие нормальные, касательные или эквивалентные напряжения (в зависимости от вида напряженного состояния и принятой теории прочности) в опасном сечении и в опасной точке сравниваются с допускаемым напряжением. Если

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad \tau_{\max} \leq [\tau], \quad \sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma],$$

то считается, что надлежащий запас прочности конструкции этим обеспечивается. Такой способ расчета на прочность называют расчетом по допускаемым напряжениям. При расчете по допускаемым напряжениям опасным или предельным состоянием конструкции считается такое ее состояние, при котором наибольшее напряжение хотя бы в одной точке материала конструкции достигает опасной величины – предела текучести (для пластичного материала) или предела прочности (для хрупкого материала). Состояние всей остальной массы материала во внимание не принимается.

Метод расчета на прочность по допускаемым напряжениям, бесспорно, обеспечивает прочность конструкции, однако во многих случаях не позволяет рационально использовать все ее возможности и часто приводит к завышенному весу.

Практика показывает, что при появлении местных пластических деформаций конструкция еще может удовлетворять предъявляемым к ней требованиям и для перехода ее в предельное состояние требуется дальнейшее возрастание нагрузки. Таким образом, в действительности конструкция обладает запасом прочности большим, чем при расчете по допускаемым напряжениям. Поэтому был предложен метод расчета конструкций по предельному состоянию.

Под предельным состоянием конструкции понимают такое состояние, при котором она теряет способность сопротивляться внешним нагрузкам или перестает удовлетворять предъявляемым эксплуатационным требованиям.

Примеры, характеризующие предельные состояния. Стальные стержневые конструкции могут превратиться в кинематически изменяемые после образования достаточного числа так называемых пластических шарниров, т.е. появления в стержнях таких сечений во всех точках, в которых напряжения равны пределу текучести.

В некоторых случаях эксплуатация делается невозможной из-за возникших значительных остаточных деформаций.

Различают три вида предельных состояний:

а) первое предельное состояние – по несущей способности (прочности, устойчивости и выносливости при переменных напряжениях);

б) второе предельное состояние – по развитию чрезмерных деформаций (прогибов, перекосов и др.);

в) третье предельное состояние – по образованию и раскрытию трещин.

Расчеты по предельным состояниям позволяют вскрыть резервы прочности, не используемые при расчетах по допускаемым напряжениям.

Нами будут рассмотрены примеры расчетов по несущей способности конструкций из пластичных материалов, у которых за линейно упругой областью следует область значительного пластического течения. Для такого материала диаграмму зависимости напряжения от деформации с удовлетворительной точностью можно представить двумя прямолинейными отрезками (рис. 9.1).

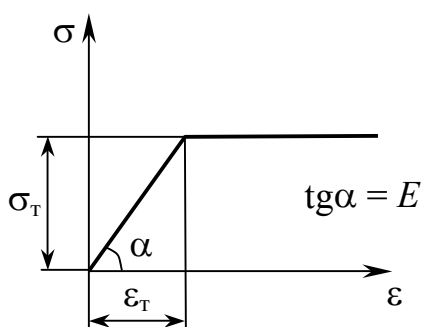


Рис. 9.1

$$1) \varepsilon \leq \varepsilon_T; \quad \varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E}; \quad \sigma = E \cdot \varepsilon.$$

$$2) \varepsilon > \varepsilon_T; \quad \sigma = \sigma_T.$$

Предполагается, что материал следует закону Гука вплоть до предела текучести, а после этого течет при постоянном напряжении.

Материал, который течет без увеличения напряжения, называется идеально пластическим. Длина горизонтального участка диаграммы не ограничивается, т.е. материал считается не упрочняющимся. Такая диаграмма носит название диаграммы Прандтля.

Рассмотрим диаграмму растяжения материала со значительной зоной пластической деформации и упрочнением (рис. 9.2).

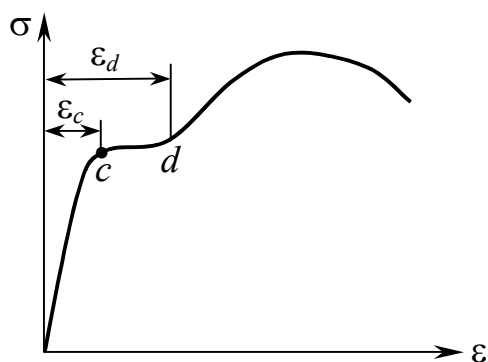


Рис. 9.2

$\varepsilon_c$  – величина относительного удлинения в начале появления пластической деформации;

$\varepsilon_d$  – в начале появления упрочнения;

$\varepsilon_d > \varepsilon_c$  в несколько раз, поэтому даже при неравномерном начальном распределении напряжений (изгиб,

кручение, наличие концентраторов) при дальнейшем последовательном распространении пластической зоны



с выравниванием напряжений, предела текучести они достигнут одновременно по всему сечению элемента и раньше, чем начнется упрочнение материала в точках с наибольшей пластической деформацией. Таким образом, предельное состояние, определяемое значительной пластической деформацией, наступит до начала упрочнения материала и предельная нагрузка может быть вычислена по пределу текучести.

При сложном напряженном состоянии наиболее просто расчеты выполняются при использовании теории пластичности Сен-Венана

$$\tau_{\max} = \tau_T.$$

### 9.1. Расчеты при растяжении и сжатии

*Ключевые слова*

*Статически определимые и неопределимые системы, предельное состояние системы, растяжение, сжатие, нормальные напряжения, продольная сила.*

При растяжении и сжатии напряжения по площади поперечного сечения стержня распределяются равномерно. Вследствие этого расчет на прочность статически определимых систем по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию дает один и тот же результат. В случае статически неопределимых систем результаты расчета будут различными.

**Пример.** Определить нагрузку  $F_T$ , при которой возникает течение в наиболее нагруженном стержне, и предельную нагрузку  $F_n$  для конструкции (рис. 9.3), если горизонтальный стержень является абсолютно жестким, а два вертикальных троса сделаны из упруго-идеально пластического материала. Найдем также допускаемую нагрузку  $F_g$  при условии, что коэффициент запаса прочности по отношению к предельной нагрузке равен 1,85.

$$\sum \text{mom}_A(F) = 0, \quad 3Fl = N_1l + N_2 \cdot 2l.$$

Удлинение правого троса в два раза больше левого в упругой области

$$N_2 = 2N_1.$$

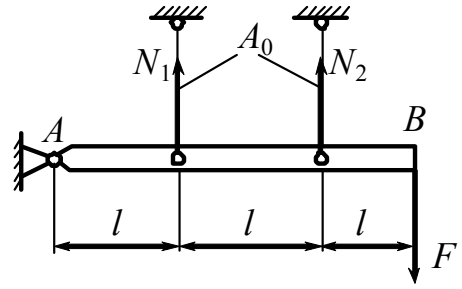


Рис. 9.3

При увеличении силы  $F$  сила  $N_2$  первым достигнет значения  $\sigma_T \cdot A_0$ , при котором возникнет пластическое течение. При этом

$$N_1 = \sigma_T \cdot \frac{A_0}{2}.$$

$F_T = \frac{5}{6} \sigma_T \cdot A$  – нагрузка, при которой происходит течение.

Когда будет достигнута предельная нагрузка  $F_{II}$ , обе силы  $N_1$  и  $N_2$  будут равны  $\sigma_T \cdot A$ :

$$F_{II} = \sigma_T \cdot A_0;$$

$$\frac{F_{II}}{F_T} = \frac{\sigma_T \cdot A_0}{\frac{5}{6} \sigma_T \cdot A_0} = 1,2;$$

$$F_g = \frac{F_{II}}{1,85} = \frac{\sigma_T \cdot A_0}{1,85}.$$

Таким образом, предельное состояние системы характеризуется появлением текучести одновременно в обоих тросах.

## 9.2. Расчеты при кручении

*Ключевые слова*

*Статически определяемые и неопределимые стержневые системы, предельное состояние, касательные напряжения, диаграмма Прандтля, несущая способность, крутящий момент, пластический момент сопротивления при кручении.*

При кручении стержней с круглым поперечным сечением касательные напряжения в упругой области пропорциональны расстояниям точек сечения от оси стержня (рис. 9.4).

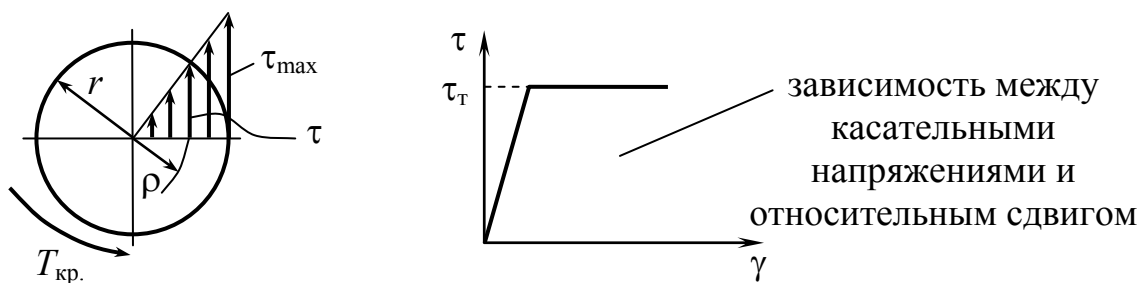


Рис. 9.4

$$\tau_{max} = \frac{T_{кр.} \cdot r}{I_p} = \frac{T_{кр.}}{W_p}; \quad \tau = \frac{T_{кр.} \cdot \rho}{I_p}.$$

При увеличении  $T_{кр.}$  пластические деформации, которые вначале появляются на поверхности, постепенно распространяются по всему сечению. Вследствие этого расчеты на прочность по напряжениям в наиболее опасных точках и по предельному состоянию дают различные значения даже в статически определяемых системах.

При некотором значении крутящего момента  $T_T = \tau_T \cdot W_p$  напряжения  $\tau_{max}$  в наиболее удаленных точках сечения достигнут предела текучести (рис. 9.5, а).

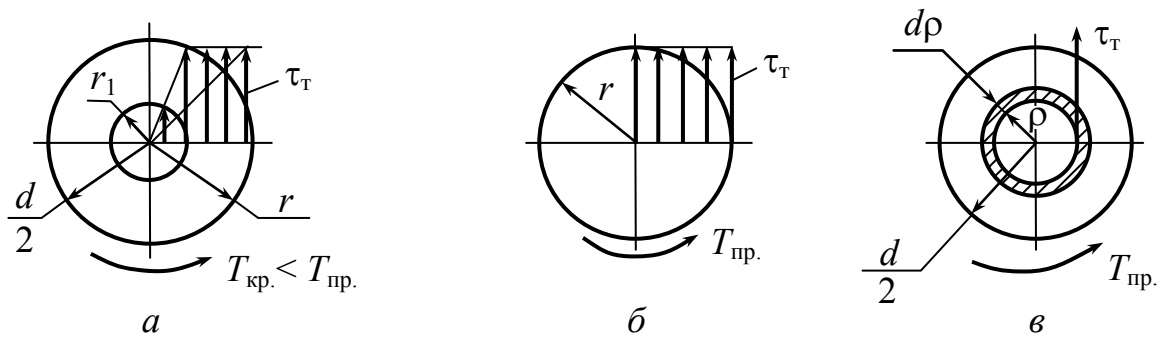


Рис. 9.5

Несущая способность исчерпана (рис. 9.5, б), стержень будет закручиваться без увеличения  $T_{кр}$ . Вычислим величину предельного крутящего момента  $T_{пр}$ . Выделим в поперечном сечении элементарную площадку в виде кольца шириной  $d\rho$  (рис. 9.5, в). Величина площадки, на которой действуют касательные напряжения  $\tau_T$ , составит  $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$ , а величина момента от этих напряжений относительно оси стержня будет  $\tau_T \cdot 2\pi\rho^2 d\rho$ . Крутящий момент в сечении равен сумме всех элементарных моментов внутренних сил. Поэтому

$$T_{кр} = \tau_T \cdot 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 d\rho \quad \text{или} \quad T_{пр} = \tau_T \frac{\pi d^3}{12}.$$

$W_{p\text{пл}} = \frac{\pi d^3}{12}$  — называется пластическим моментом сопротивления при кручении.

Найдем отношение предельного момента  $T_{пр}$  и момента  $T_T$ , при котором в сечении впервые возникнут напряжения текучести.

$$\frac{T_{пр}}{T_T} = \frac{W_{p(\text{пл})}}{W_p} = \frac{\pi d^3 16}{12\pi d^3} = \frac{4}{3}; \quad T_{пр} = 1,33T_T.$$

**Пример.** Определить запас прочности при расчете по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию (рис. 9.6).

Расчет по допускаемым напряжениям.

1) Раскрываем статическую неопределимость

$$T_A + T_B = T_{кр}.$$

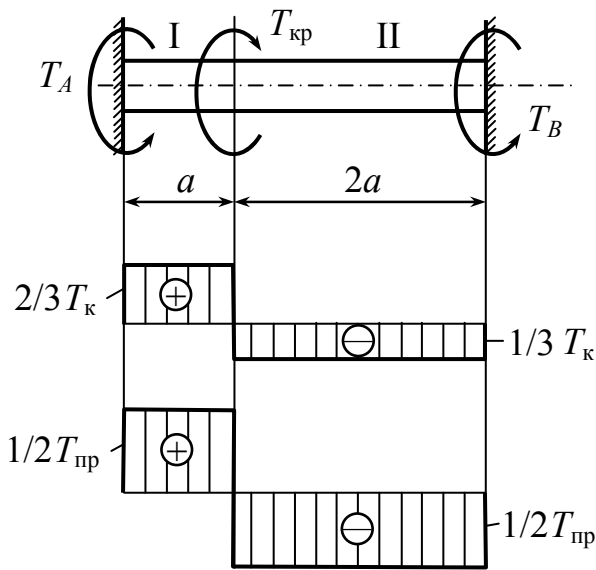


Рис. 9.6

2) Деформации должны удовлетворять условию

$$\varphi = \varphi_I - \varphi_{II} = 0$$

или 
$$\frac{T_A \cdot a}{GI_p} = \frac{T_B \cdot 2a}{GI_p},$$

отсюда 
$$T_A = 2T_B.$$

Решая, находим

$$T_A = T_{Iкр} = \frac{2}{3} T_{кр}; \quad T_B = \frac{1}{3} T_{кр}.$$

$$\tau_{\max} = \frac{T_A}{W_p} = \frac{2}{3} \cdot \frac{T_{кр}}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{32 T_{кр}}{3 \pi d^3} \leq [\tau] = \frac{\tau_T}{[n_T]}.$$

$$[n_T] = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{3 \tau_T \cdot \pi d^3}{32 T_{кр}}; \quad T_{Aпр} = T_{Bпр} = \tau_T \cdot W_{p(пл)}.$$

$$T_{Bпр} = \tau_T \cdot \frac{\pi d^3}{12}.$$

Предельное значение скручивающего момента для всего стержня найдем из условия равновесия

$$T_{крпр} = T_{Aпр} + T_{Bпр}; \quad T_{пр} = \tau_T \frac{\pi d^3}{6} \quad (\text{рис. 9.7}).$$

Запас прочности

$$n_{\text{пр}} = \frac{T_{\text{кр пр}}}{T_{\text{кр}}} = \frac{\tau_T \pi d^3}{6T_{\text{кр}}};$$

$$\frac{n_{\text{пр}}}{n_T} = \frac{\tau_T \pi d^3 32T_{\text{кр}}}{6T_{\text{кр}} \cdot 3\tau_T \pi d^3} = 1,78.$$

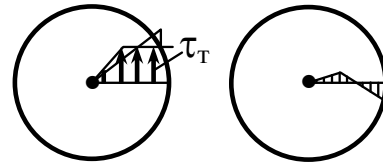


Рис. 9.7

### 9.3. Расчеты при изгибе

*Ключевые слова*

*Нормальные напряжения, упругий идеально-пластичный материал, расчет по допускаемым напряжениям, пластическая и упругая зоны, пластический шарнир, предельный изгибающий момент, пластический момент сопротивления, степень увеличения запаса прочности балки, чистый изгиб.*

Рассмотрим чистый изгиб балки из упруго-идеально-пластического материала, поперечные сечения которой имеют две оси симметрии.

В поперечных сечениях балки при изгибе нормальные напряжения в упругом состоянии материала распределяются неравномерно, линейно изменяясь по высоте балки (рис. 9.8).

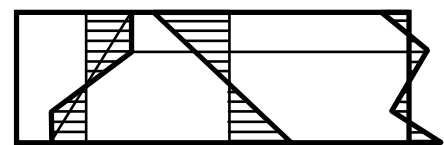


Рис. 9.8

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{W}.$$

Диаграмма зависимости напряжения от деформации для упруго-идеально-пластического материала (рис. 9.9).

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{max}}} \quad \text{— расчет по допускаемым}$$

напряжениям.

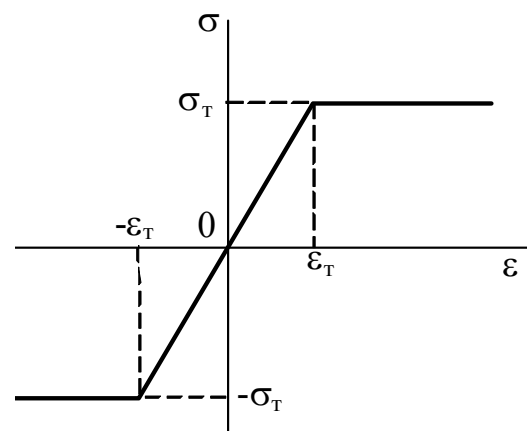


Рис. 9.9

Балка сохраняет способность воспринимать увеличивающийся изгибающий момент. Пластическое состояние материала будет распространяться в направлении к нейтральной оси (рис. 9.10). До полного исчерпания несущей способности балки в ее поперечных сечениях будут две зоны – пластическая и упругая. Предельное состояние наступит, когда текучесть распространится по всему поперечному сечению. В рассматриваемом поперечном сечении образуется так называемый пластический шарнир, который передает постоянный момент, равный предельному изгибающему моменту.

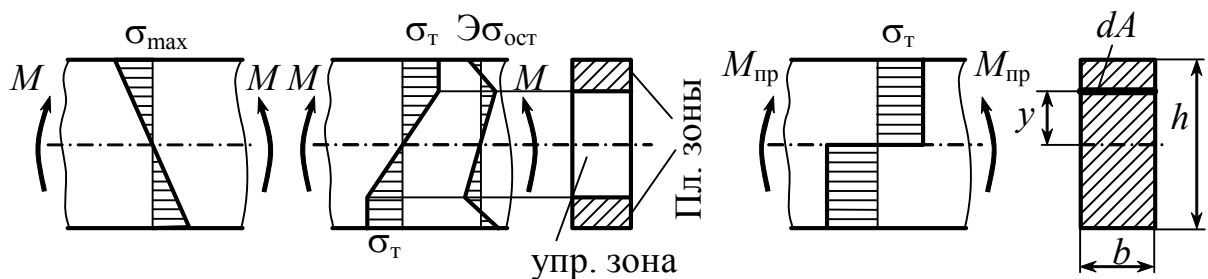


Рис. 9.10




Предельный изгибающий момент можно вычислить как сумму моментов относительно нейтральной оси сил  $\sigma_T \cdot dA$  в поперечном сечении, т.е.

$$M_{\text{пр}} = \int_A \sigma_T \cdot y dA = \sigma_T \cdot 2 \int_{\frac{A}{2}} y dA = \sigma_T \cdot 2S_{\text{max}},$$

где  $S_{\text{max}}$  – статический момент площади половины поперечного сечения относительно нейтральной оси;

$2S_{\text{max}}$  – принято называть пластическим моментом сопротивления и обозначать  $W_{\text{пл}}$ , в табл. 9.1 приведены  $W_{\text{пл}}$  для разных сечений.

Таблица 9.1



Для прямоугольного сечения		$W_{\text{пл}} = \frac{bh^2}{4}$
Для круглого сечения		$W_{\text{пл}} = \frac{d^3}{6}$
Для треугольного сечения		$W_{\text{пл}} = \frac{1}{3}bh^2 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$$M_{\text{пр}} = \sigma_{\text{T}} \cdot W_{\text{пл}}.$$

По допускаемым напряжениям  $M_{\text{T}} = \sigma_{\text{T}} \cdot W$ .

Степень увеличения запаса прочности балки при переходе к расчету по предельному состоянию представлена в табл. 9.2.

Таблица 9.2

$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{T}}} = \frac{W_{\text{пл}}}{W}$		$\frac{W_{\text{пл}}}{W} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = 1,5$
		$\frac{W_{\text{пл.}}}{W} = 1,18$

Если сечение имеет одну ось симметрии в плоскости нагрузки, то в предельном состоянии нейтральная ось не будет проходить через центр тяжести поперечного сечения. Положение нейтральной оси определяется из равенства нулю суммы проекций на ось балки всех сил  $\sigma_{\text{T}} \cdot dA$ , распределенных по ее сечению (рис. 9.11).

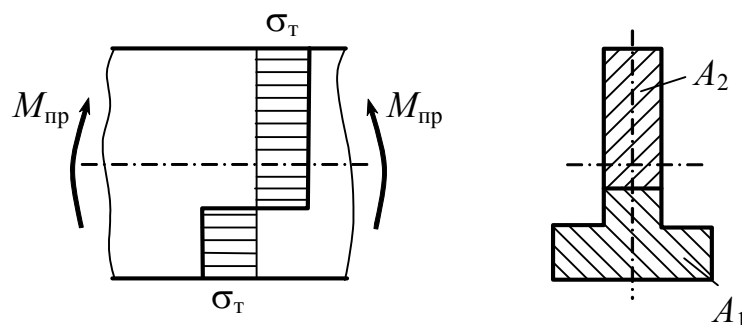


Рис. 9.11



$$\int_A \sigma_T dA = \int_{A_1} \sigma_T dA = \int_{A_2} (-\sigma_T) dA = 0,$$

где  $A_1$  – площадь растянутой зоны;  $A_2$  – площадь сжатой зоны.

Отсюда получаем

$A_1 - A_2 = 0$ , или  $A_1 = A_2$ , т.е. в предельном состоянии нейтральная ось сечения делит его пополам.

Предельный изгибающий момент

$$M_{\text{пр}} = \int_A \sigma_T \cdot y dA = \int_{A_1} \sigma_T \cdot y dA + \int_{A_2} (-\sigma_T) \cdot (-y) dA = \sigma_T (S_p + S_{\text{сж}}),$$

где  $S_p$  – статический момент растянутой зоны сечения относительно нейтральной оси;  $S_{\text{сж}}$  – абсолютная величина статического момента сжатой зоны сечения относительно той же оси.

$$W_{\text{пл}} = S_p + S_{\text{сж}}.$$

Это справедливо только для чистого изгиба. Определение предельного состояния с учетом поперечной силы более сложно. Этот вопрос здесь не рассматривается.

## 9.4. Пластические шарниры

*Ключевые слова*

*Теория чистого изгиба, размеры пластической зоны, нейтральная ось, пластический шарнир, максимальный изгибающий момент, жесткие стержни.*

Эпюра изгибающих моментов представляет собой треугольник (рис. 9.12), а  $M_{\text{max}} = \frac{Fl}{4}$ .

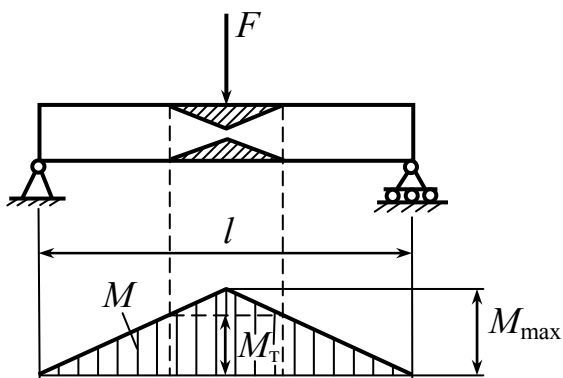


Рис. 9.12

Если  $M_T < M_{\max} < M_{\text{пред}}$ , то в центральной части балки будет иметь место ограниченное пластическое течение. Пластические зоны заштрихованы. Поскольку для каждого поперечного сечения известны величины изгибающих моментов, можно без труда найти размеры этих зон.

При определении размеров пластической зоны пренебрегают влиянием поперечных сил и используют теорию чистого изгиба. Подобный подход вполне допустим, поскольку влияние поперечного сдвига мало.

При увеличении нагрузки  $M_{\max}$ , приближающейся к  $M_{\text{пред}}$ , пластические зоны распространяются быстро внутрь к нейтральной оси. При  $M_{\max} = M_{\text{пред}}$  образуется пластический шарнир (рис. 9.13).

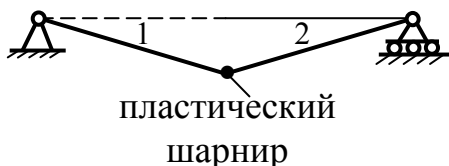


Рис. 9.13

**1, 2 – жесткие стержни**, под действием  $M_{\text{п}}$  они поворачиваются.

$$M_{\max} = M_{\text{п}}; \quad \frac{Fl}{4} = M_{\text{п}}; \quad F_{\text{пр}} = \frac{4M_{\text{п}}}{l}.$$

Пластические шарниры, разумеется, всегда возникают в сечениях с максимальным изгибающим моментом.

## 9.5. Пластический анализ балок

*Ключевые слова*

*Упругий идеально-пластичный материал, пластический шарнир, статически определимая балка, уравнения статического равновесия, принцип возможных перемещений, механизмы разрушения, истинный механизм, статически неопределимая балка, величина предельной нагрузки.*

Понятие пластического шарнира обеспечивает удобный способ определения максимальной нагрузки, которую может выдержать балка из упруго-идеально-пластического материала. В случае статически определимой балки образование пластического шарнира оказывается достаточным для того, чтобы вызвать разрушение. Величину нагрузки, необходимой для образования шарнира (т.е. предельной нагрузки), можно вычислить при помощи уравнений статики. Рассмотрим еще один пример статически определимой балки.

**Пример 1.** Определить величину предельной нагрузки для балки на рис. 9.14.

$M_{\max} = \frac{9ql^2}{128}$ . Как и для всех статически определимых балок, эюра моментов для данного примера строится с помощью только уравнений равновесия и не зависит от того, является ли материал балки упругим.

$$q_T = \frac{128M_T}{9l^2}; \quad q_{\Pi} = \frac{128M_{\Pi}}{9l^2},$$

где  $M_{\Pi}$  – предельный изгибающий момент.

Отношение  $M_{\Pi} / M_T$  зависит для статически определимых балок от формы поперечного сечения.

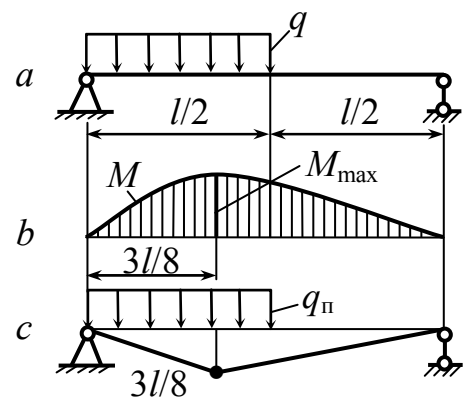


Рис. 9.14

Для статически неопределимых балок это отношение изменяется в зависимости от типа балки и вида нагружения.

### Пример 2.

Провести предельный анализ статически неопределимой балки (рис. 9.15, *a*). При  $F < F_T$  эпюра  $M$  (рис. 9.15, *b*). В заделке имеет место максимальный изгибающий момент

$M_{\max} = \frac{3Fl}{16}$ , так что нагрузка, при которой начинают возникать пластические деформации, составляет  $F_T = \frac{16M_T}{3l}$ .

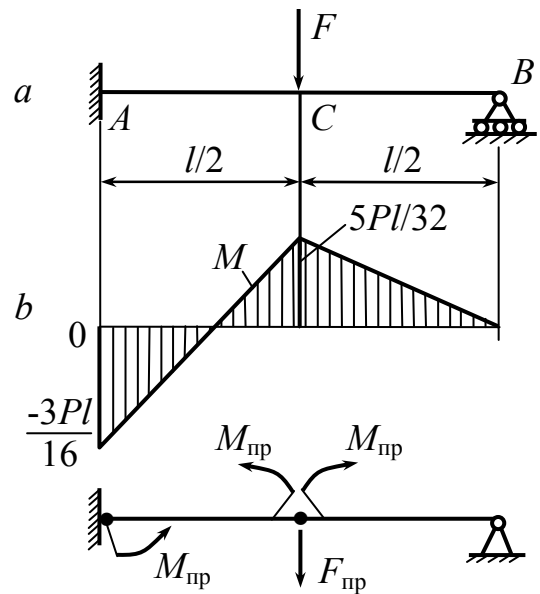


Рис. 9.15

При увеличении нагрузки вначале образуется пластический шарнир на конце  $A$  балки. Однако такой единственный шарнир не вызовет полного разрушения балки. Вместо этого балка будет вести себя как статически определимая свободно опертая балка, на которую действуют приложенная в точке  $C$  сила  $F$  и приложенный на конце  $A$  момент  $M_{\text{пр}}$ . Затем пластический шарнир образуется и в точке  $C$ . Теперь могут возникать неограниченные прогибы; следовательно, достигнута величина предельной нагрузки.

Для того, чтобы найти величину предельной нагрузки, нет необходимости подробно исследовать поведение балки от начала нагружения до разрушения. Вместо этого можно сразу перейти к условию разрушения (рис. 9.16, *c*) и вычислить  $F_{\text{п}}$  при помощи уравнений статики.

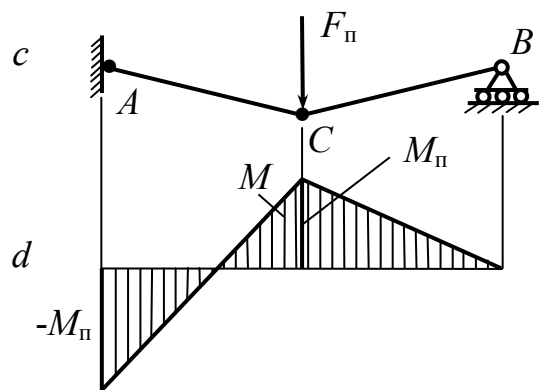


Рис. 9.16

1) Уравнение равновесия для незакрепленной балки

$$M_{\Pi} - \frac{F_{\Pi} \cdot l}{2} + R_B \cdot l = 0, \quad R_B = \frac{F_{\Pi}}{2} - \frac{M_{\Pi}}{l}.$$

2) Уравнение равновесия для части балки  $CB$ , взяв моменты относительно точки  $C$

$$-M_{\Pi} + \frac{R_B \cdot l}{2} = 0; \quad R_B = \frac{2M_{\Pi}}{l}; \quad F_{\Pi} = \frac{6M_{\Pi}}{l}; \quad \frac{F_{\Pi}}{F_T} = \frac{9M_{\Pi}}{8M_T}.$$

Эта величина больше, чем для статически определимых балок, в случае статически неопределимых балок имеет место перераспределение моментов.

Подход, основанный на использовании только уравнений статического равновесия, гораздо проще, чем раскрытие статической неопределимости, которое требуется проводить при линейно-упругом поведении материала.

Если предельная нагрузка находится из условий равновесия, то часто оказывается весьма удобным использование принципа возможных перемещений.

*Этот принцип формулируется так: если система твердых тел находится в равновесии под действием системы сил, то работа, совершаемая этими силами на любом малом возможном перемещении системы, должна быть равна нулю.*

Возможное перемещение –  $\theta$  (рис. 9.17).

Точка  $C$  переместится на величину  $\theta \cdot \frac{l}{2}$ .

$F_{\Pi} \cdot \theta \frac{l}{2}$  – работа  $> 0$ .

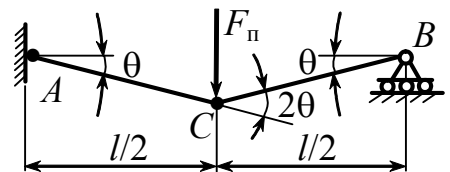


Рис. 9.17

Работа, совершаемая предельными моментами  $M_{\Pi} < 0$ ,  $M_{\Pi} \cdot \theta$  – точка  $A$  и  $M_{\Pi} \cdot 2\theta$  – точка  $C$ .

$$\frac{F_{\Pi} \cdot \theta l}{2} - M_{\Pi} \theta - 2M_{\Pi} \theta = 0; \quad F_{\Pi} = \frac{6M_{\Pi}}{l}.$$

Удобство применения возможных перемещений заключается в простоте. Часто бывает, что могут иметь место несколько различных механизмов и не очевидно, который из них истинный. В этом случае по очереди рассматривается каждый механизм разрушения. Истинный будет тот, который возникает при наименьшей нагрузке. Эта нагрузка и является истинной предельной для данной конструкции.

**Пример 3.** Определить величину предельной нагрузки для балки на рис. 9.18.

В точках  $A$ ,  $C$ ,  $D$  достигают максимального значения изгибающие моменты.

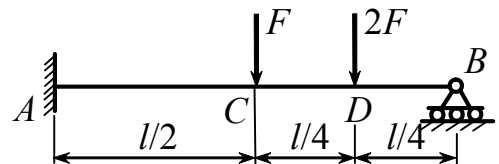
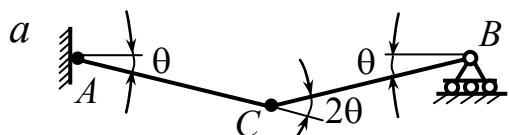


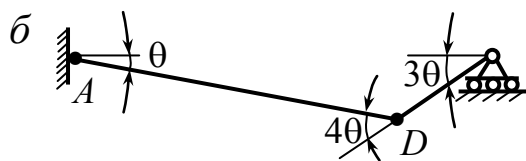
Рис. 9.18

Механизм разрушения образуется при возникновении пластических шарниров в двух из указанных трех поперечных сечений (рис. 9.19).



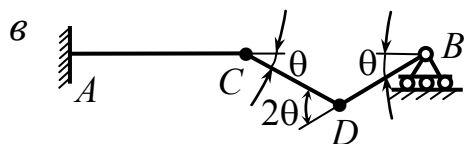
$$F_{\Pi} \left( \frac{\theta l}{2} \right) + 2F_{\Pi} \left( \frac{\theta l}{4} \right) - M_{\Pi} \cdot \theta - M_{\Pi} \cdot 2\theta = 0;$$

$$F_{\Pi} = \frac{3M_{\Pi}}{l};$$



$$2F_{\Pi} \left( \frac{l \cdot 3\theta}{4} \right) + F_{\Pi} \left( \frac{\theta l}{2} \right) - M_{\Pi} \cdot 4\theta - M_{\Pi} \cdot \theta = 0;$$

$$F_{\Pi} = \frac{5M_{\Pi}}{2l};$$



$$2F_{\Pi} \frac{l}{4} \theta - M_{\Pi} \theta - 2M_{\Pi} \theta = 0;$$

$$F_{\Pi} = \frac{6M_{\Pi}}{l}; \quad F_{\Pi} = \frac{5M_{\Pi}}{2l}.$$

Рис. 9.19

**Пример 4.** Определить величину предельной нагрузки для балки на рис. 9.20.

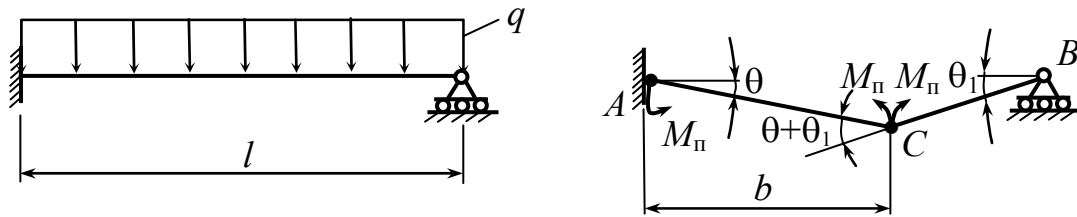


Рис. 9.20

Работу, совершаемую приложенной нагрузкой  $q$ , можно найти, взяв малый элемент  $q \cdot dz$  нагрузки, умножив его на возможное перемещение, соответствующее этому элементу, и затем проинтегрировав по длине балки. Поскольку величина  $q$  постоянна, в результате получим произведение нагрузки  $q$  на площадь эпюры перемещений.

$$q \cdot \frac{l}{2} \cdot b \cdot \theta,$$

$$q \frac{lb\theta}{2} - M_p \theta - M_p (\theta + \theta_1) = 0, \quad \theta_1 = \frac{\theta b}{l - b},$$

$$q_p = \frac{2M_p}{bl} \left( \frac{2l - b}{l - b} \right).$$

Для определения величины “ $b$ ” необходимо взять производную  $q_p$  по “ $b$ ” и решить относительно “ $b$ ”, получим  $b = l(2 - \sqrt{2})$ ,

$$q_p = \frac{2M_p}{l^2} (3 + 2\sqrt{2}) = \frac{11,66M_p}{l^2}.$$

Заданная по обоим концам балка превращается в механизм, когда образуются три пластических шарнира, обычно по шарниру на концах и в промежуточном сечении.

Нерезные балки разрушаются, когда в одном из пролетов образуется механизм. Если этот пролет является внутренним, то необходимо появление трех шарниров – по одному на каждый конец пролета и один в промежуточном сечении. Пролету, расположенному на краю свободно опертой балки, необходимо образование двух шарниров.

## Контрольные вопросы

1. Какой способ расчета на прочность элементов конструкций называют по допускаемым напряжениям?
2. Что понимают под предельным состоянием конструкции?
3. Перечислите виды предельных состояний.
4. Какой материал называется идеально пластическим?
5. Почему предельное состояние в деталях из материалов со значительной зоной пластической деформации и упрочнением наступает до начала упрочнения материала?
6. Почему расчеты на прочность статически определимых систем при растяжении и сжатии по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию дают один и тот же результат?
7. Почему расчет на прочность статически неопределимых систем по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию будет различным?
8. Вследствие чего расчеты по напряжениям в наиболее опасных точках и по предельному состоянию дают различные значения при кручении стержней с круглым поперечным сечением даже в статически определимых системах?
9. В какой момент касательные напряжения в наиболее удаленных точках круглого сечения достигнут предела текучести?
10. Когда будет исчерпана несущая способность круглого стержня?
11. Что называется пластическим моментом сопротивления при кручении?
12. Приведите отношение предельного момента и момента, при котором впервые в сечении возникнут напряжения текучести?



13. От чего зависит запас прочности при расчете по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию статически неопределимого круглого стержня?
14. Когда наступает предельное состояние в сечениях балки с двумя осями симметрии при изгибе?
15. Что называют пластическим моментом сопротивления при изгибе и как его обозначают?
16. Запишите пластические моменты сопротивления при изгибе для прямоугольного сечения, для круглого сечения и для треугольного сечения?
17. Почему если сечение имеет одну ось симметрии, то в предельном состоянии нейтральная ось не будет проходить через центр тяжести сечения?
18. Запишите, как вычисляется предельный изгибающий момент при чистом изгибе детали, имеющей одну ось симметрии в сечении, в плоскости нагрузки?
19. В каком сечении статически определимой балки возникают пластические шарниры и когда?
20. Как производится пластический анализ статически определимой балки?
21. От чего зависит величина отношения  $M_{\text{п}}/M_{\text{т}}$  для статически определимых балок?
22. От чего зависит величина отношения  $M_{\text{п}}/M_{\text{т}}$  для статически неопределимых балок?
23. Сформулируйте принцип возможных перемещений?
24. В каком случае можно использовать принцип возможных перемещений для определения предельной нагрузки в статически неопределимых системах?
25. В чем удобство применения возможных перемещений при определении истинной предельной нагрузки?
26. Когда разрушаются неразрезные балки?

## Глава 10. Расчет кривых брусьев

### Ключевые слова

*Брусья, криволинейная ось, нормальные напряжения, максимальные напряжения, кривизна бруса, радиус кривизны, малая, большая кривизна, плоскость симметрии, прочность и жесткость кривых брусьев, полярная система координат, внутренние силовые факторы.*

В различных конструкциях часто встречаются брусья с криволинейной осью. К ним относятся грузоподъемные крюки, проушины, звенья цепей, ободы шкивов и колес, арки и т.п. (рис. 10.1).

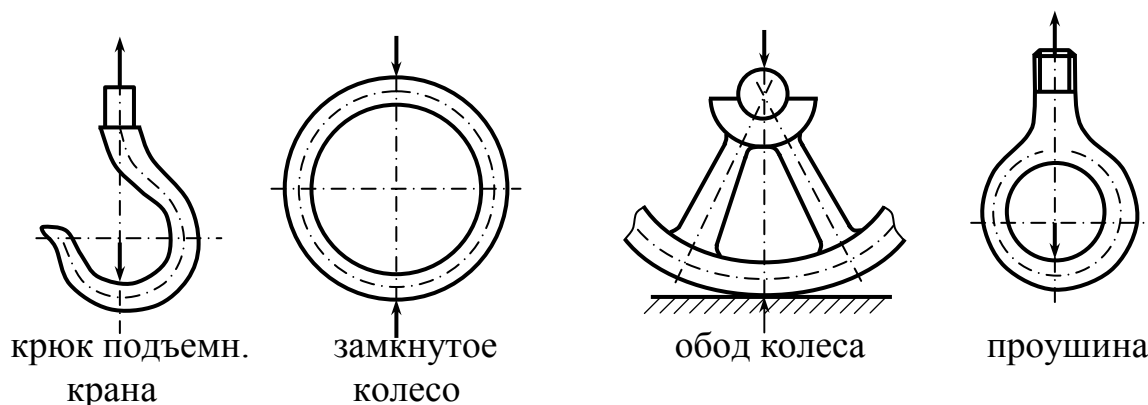


Рис. 10.1

Исследования показывают, что при изгибе брусьев с криволинейной осью распределение нормальных напряжений в поперечном сечении, а также величина максимальных напряжений в кривом брусее иные, нежели в балке с прямой осью. При прочих равных условиях это различие тем больше, чем больше кривизна бруса, которая характеризуется отношением высоты  $h$  поперечного сечения к радиусу  $R$  кривизны его оси (рис. 10.2).

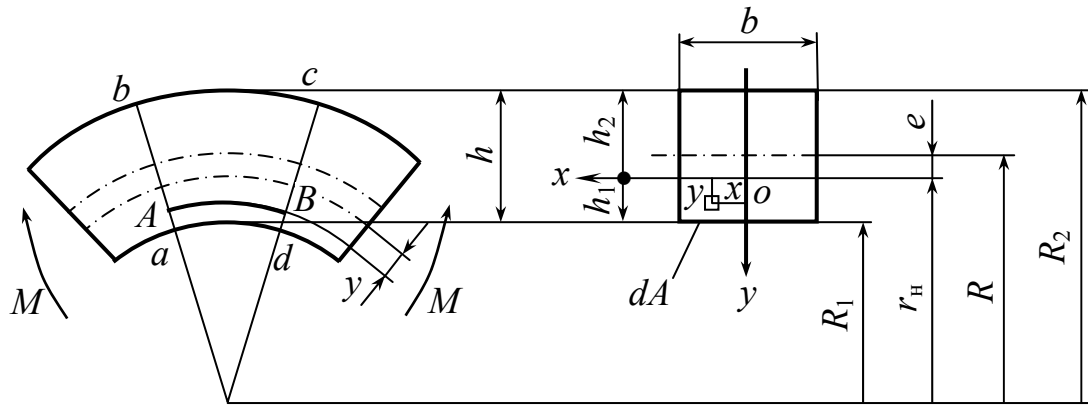


Рис. 10.2

Поэтому различают брусья малой кривизны, у которых  $\frac{h}{R} < \frac{1}{5}$ ,

и брусья большой кривизны, у которых  $\frac{h}{R} \geq \frac{1}{5}$ .

Предполагается, что стержни имеют плоскую кривизну, ось бруса лежит в одной плоскости. Брусья имеют плоскость симметрии. Внешние силы приложены в плоскости симметрии. После деформации изогнутая ось лежит в той же плоскости симметрии.

### Задачи расчета

1. Определение напряжений и расчет на жесткость.
2. Определение деформаций и расчет на прочность.

$$\tau = \tau(Q) \quad \text{— касательные напряжения.}$$

$$\sigma = \sigma(N; M)$$

В поперечных сечениях плоского кривого бруса в общем случае имеются три силовых фактора –  $N$ ,  $Q$  и  $M$  (рис. 10.3).

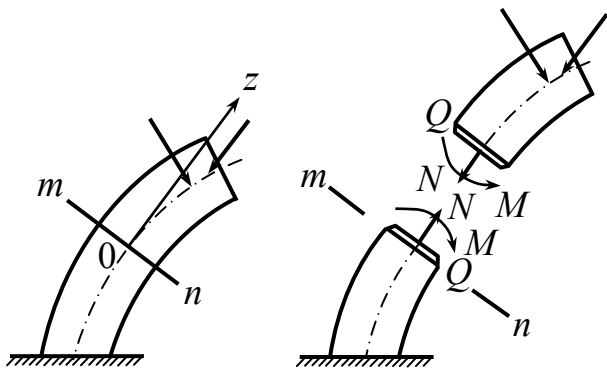


Рис. 10.3

Определение значений  $N$ ,  $Q$  и  $M$  выполняется как обычно, с помощью метода сечений. При этом изгибающий момент так же, как в прямом брус, подсчитывается относительно оси, проходящей через центр тяжести поперечного сечения.

Наиболее часто на практике приходится иметь дело со стержнями, ось которых очерчена по дуге окружности. В этом случае положение любого сечения удобно определять при помощи полярной системы координат, тогда продольная сила, поперечная сила и изгибающий момент будут функциями угла  $\varphi$ :  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  и  $M(\varphi)$ .

В качестве примера рассмотрим плоский кривой брус, схема которого показана на рис. 10.4. Напишем значения  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  и  $M(\varphi)$  для произвольного сечения  $C$ .

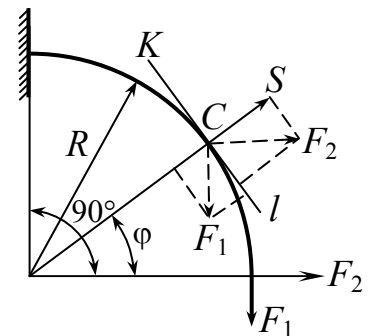


Рис. 10.4

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= F_1 \cos\varphi + F_2 \sin\varphi; \\ Q_\varphi &= F_1 \sin\varphi - F_2 \cos\varphi; \\ M_\varphi &= F_1 R(1 - \cos\varphi) - F_2 R \sin\varphi. \end{aligned} \right\}$$

К криволинейным стержням, как и к другим стержневым системам, иногда бывает приложена равномерно распределенная нагрузка (рис. 10.5).

Для вычисления сил и моментов от такой нагрузки полезно иметь в виду следующую теорему: равнодействующая равномерно распределенной нагрузки, приложенной к дуге любого очертания, равна произведению величины интенсивности нагрузки на длину хорды,

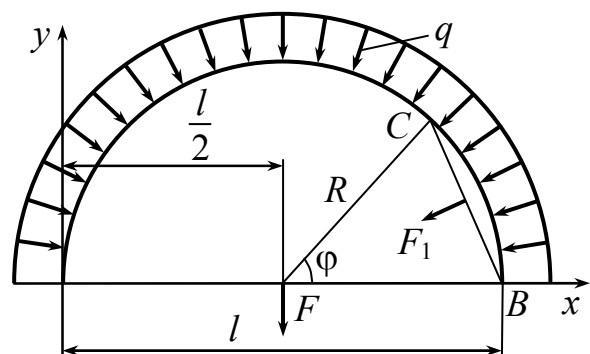


Рис. 10.5

стягивающей эту дугу, и проходит через ее середину:

$$F = ql \text{ или } F_1 = CB \cdot q \text{ (рис. 10.5).}$$

Напишем значения  $N_\varphi$ ,  $Q_\varphi$  и  $M_\varphi$  для произвольного сечения  $C$ :

$$N_\varphi = 2qR \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = 2qR \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$Q_\varphi = 2qR \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} = qR \cdot \sin \varphi,$$

$$M_\varphi = 2qR \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot R \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = 2qR^2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

При изгибе брусьев малой кривизны нормальные напряжения с достаточной для инженерных расчетов точностью можно определять по формулам (10.1) и (10.2)

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}, \quad (10.1)$$

$$\sigma = \frac{M}{W_z}, \quad (10.2)$$

выведенным для балок с прямой осью.

### 10.1. Вывод формулы для определения нормальных напряжений при чистом изгибе бруса большой кривизны

*Ключевые слова: радиус кривизны, радиус оси стержней, гипотеза плоских сечений, чистый изгиб, закон Гука, нормальные напряжения, статический момент, площадь поперечного сечения, нейтральная ось, гиперболический закон распределения напряжений, эпюры  $\sigma$  от  $M$ ,  $N$  и суммарная эпюра.*

Вывод формулы проводится по схеме, которая применяется для бруса с прямой осью. Предположим, что нейтральный слой, в случае бруса большой кривизны, имеет пока неизвестный радиус кривизны  $r_n$ , вообще говоря, отличный от радиуса  $R$  оси стержня. (Для прямого стержня мы сначала предположили неизвестным положение нейтрального слоя, а затем выяснили, что он совпадает с осью стержня.)

В основу вывода формулы для напряжений  $\sigma$  при изгибе положим те же гипотезы: гипотезу плоских сечений и гипотезу о том, что продольные волокна не давят друг на друга. Рассмотрим случай чистого изгиба кривого бруса.

Проведем оси  $y$  и  $x$ , как показано на рис. 10.2. Ось совпадает с нейтральной линией сечения, положение ее пока не определено. Положительным принимаем направление оси  $y$  к центру кривизны бруса (точка  $C$ ).

Рассмотрим **статическую сторону задачи**.

Для составления уравнений статики разрежем кривой брус на две части (рис. 10.6, *a*).

Рассмотрим равновесие I части. Выделим в сечении элемент площади  $dA$ , находящийся на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя (рис. 10.6, *б*, *в*).

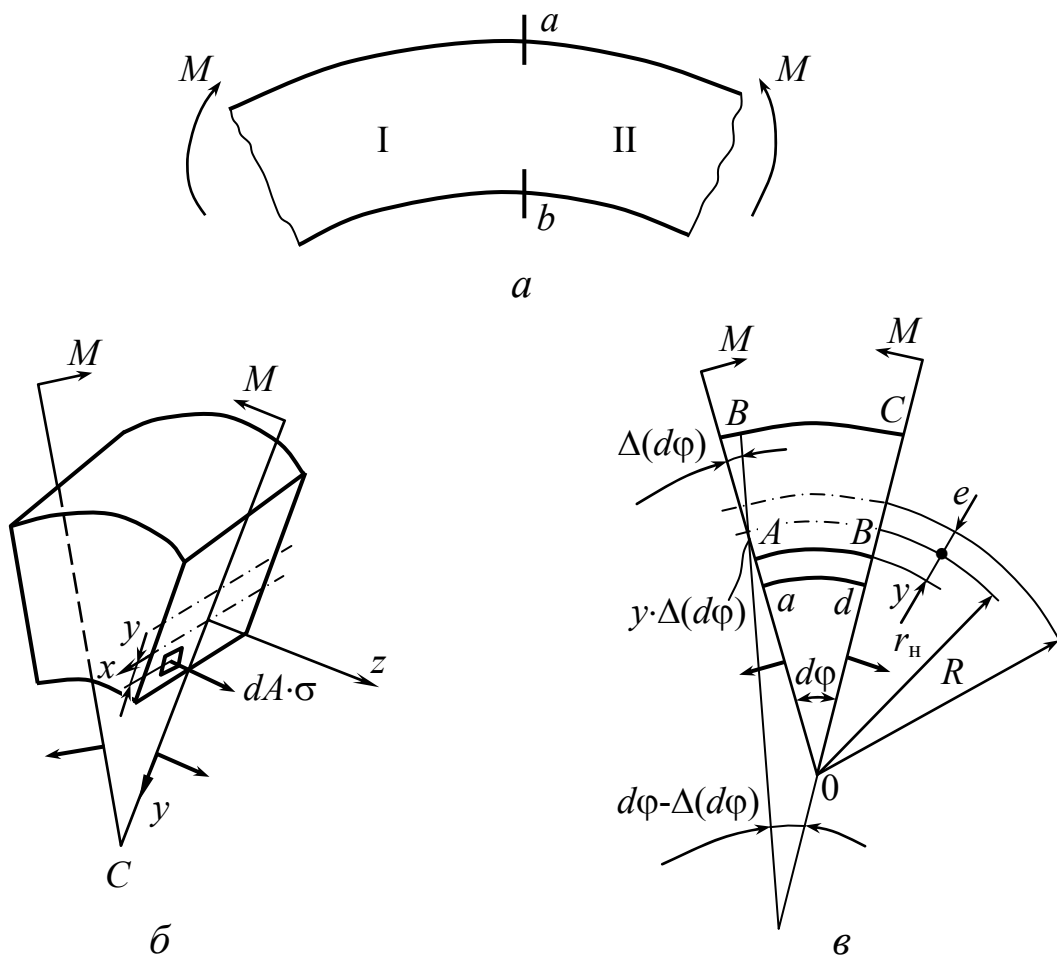


Рис. 10.6

На элемент действует внутренняя сила  $\sigma \cdot dA$ . При  $N = 0$ ,  $M_x = M$  получим

$$\int_A \sigma \cdot dA = 0; \quad \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = M. \quad (10.3)$$

Рассматривая геометрическую сторону задачи, выделим из кривого бруса двумя бесконечно близкими сечениями  $ab$  и  $cd$  (рис. 10.6, в) элементарный участок, которому соответствует до деформации угол  $d\varphi$ . Наблюдая деформацию произвольного волокна  $AB$ , расположенного на расстоянии “ $y$ ” от нейтрального слоя, легко заметить, что относительное удлинение выбранного волокна будет

$$\varepsilon = \frac{y \cdot \Delta(d\varphi)}{(r_H - y)d\varphi}. \quad (10.4)$$

**Физическая сторона задачи.** Пренебрегая давлением продольных волокон друг на друга, можно выразить напряжение по закону Гука:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Подставляя в эту формулу выражение  $\varepsilon$ , согласно формуле (10.3), будем иметь

$$\sigma = \frac{E \cdot \Delta(d\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r_H - y}. \quad (10.5)$$

Для определения нормальных напряжений при чистом изгибе кривого бруса большой кривизны необходимо определить радиус  $r_H$  нейтрального слоя и изменение угла  $\Delta(d\varphi)$ . Для их определения воспользуемся двумя условиями (10.3). Из первого условия имеем:

$$\int_A \sigma \cdot dA = \frac{E \cdot \Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_A \frac{y \cdot dA}{r_H - y} = 0.$$

Так как в этом выражении  $\frac{E \cdot \Delta(d\varphi)}{d\varphi} \neq 0$ , то

$$\int \frac{y \cdot dA}{r_H - y} = 0, \quad (10.6)$$

из второго условия имеем

$$\int_A \sigma \cdot y dA = \frac{E \cdot \Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_A \frac{y^2 \cdot dA}{r_H - y} = M. \quad (10.7)$$

Интеграл в последнем уравнении можно записать так:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{y^2 \cdot dA}{r_H - y} &= \int_A \frac{y^2 + r_H y - r_H y}{r_H - y} dA = - \int_A \left( y - \frac{r_H \cdot y}{r_H - y} \right) dA = \\ &= - \int_A y dA + r_H \int_A \frac{y \cdot dA}{r_H - y}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Первый интеграл в правой части уравнения (10.8) представляет собой статический момент  $S_x$  площади поперечного сечения относительно нейтральной оси  $x$ , т.е.  $A \cdot (-e)$  (рис. 10.2), а второй согласно выражению (10.6) равен нулю. Учитывая это, выражение (10.8) можно записать так:

$$\int_A \frac{y^2 \cdot dA}{r_H - y} = -S_x = -(-e) \cdot A. \quad (10.9)$$

Очевидно, интеграл в левой части выражения (10.9) – всегда величина положительная. Следовательно,  $e$  – всегда величина отрицательная, т.е. при изгибе кривого бруса нейтральная ось всегда смещена от центра тяжести сечения к центру кривизны бруса.

В дальнейшем в формулах, содержащих  $e$  и  $S_x$ , будем иметь в виду их абсолютные величины.

Подставляя выражение (10.9) в условие (10.7), получим:

$$\frac{E \cdot \Delta(d\varphi)}{d\varphi} \cdot e \cdot A = M,$$

откуда

$$\frac{E \cdot \Delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{M}{eA}. \quad (10.10)$$



Учитывая выражение (10.10), формулу (10.5) для определения напряжений теперь можно представить в виде

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{eA(r_H - y)}$$

или

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{S_x(r_H - y)}. \quad (10.11)$$

Из анализа формулы (10.11) видно, что, как и в брус с прямой осью, нормальные напряжения по ширине сечения одинаковы (не зависят от  $x$ ) и изменяются только с изменением расстояния точек от нейтральной линии. По высоте сечения напряжения в кривом брус изменяются по гиперболическому закону (рис. 10.7). Наибольшие по абсолютной величине напряжения будут в крайних точках сечения, находящихся у внутренней поверхности бруса.

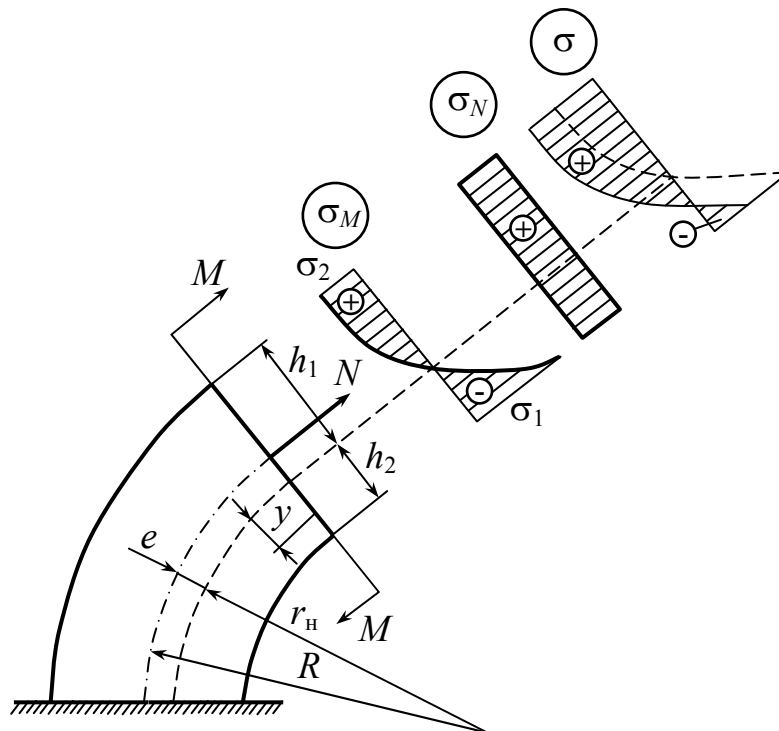


Рис. 10.7

Абсолютные величины напряжений в крайних точках сечения кривого бруса согласно выражению (10.11) определяются по формулам

$$\sigma_{(1)} = \frac{M \cdot h_1}{A \cdot e \cdot R_1}; \quad \sigma_{(2)} = \frac{M \cdot h_2}{A \cdot e \cdot R_2}. \quad (10.12)$$

Если в сечении кривого бруса действует момент  $M$  и продольная сила  $N$  (случай сложного сопротивления), получим следующее выражение для расчета на прочность:

$$\sigma_{1,2} = \frac{M \cdot y_{1,2}}{S_x \cdot r} \pm \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (10.13)$$

При этом нужно рассматривать сечения, в которых суммарные напряжения от изгибающего момента и от нормальной силы имеют наибольшие значения. В этих сечениях опасной будет одна из крайних точек. Для этих точек в формулу (10.13) нужно подставлять  $y = h_1$  или  $y = h_2$  и, соответственно,  $r = R_1$  или  $r = R_2$  (рис. 10.7).

На рис. 10.7 показаны эпюры  $\sigma$  от  $M$ ,  $N$  и суммарная эпюра.

## 10.2. Определение положения нейтральной оси

*Ключевые слова: кривой брус, изгиб, нейтральный слой, радиус нейтрального слоя, радиус слоя, центр тяжести сечения.*

Для определения по формулам (10.11) и (10.12) напряжений в кривом брус при изгибе, нужно прежде всего определить величину  $e$  (расстояние от нейтрального слоя до центра тяжести) или радиус  $r_n$  нейтрального слоя, поскольку

$$e = R - r_n, \quad (10.14)$$

$R$  – радиус слоя, содержащего центры тяжести сечений кривого бруса.

Эксцентриситет приближенно может быть вычислен по формуле Н. Н. Давиденкова  $e \cong Jx_c / (\rho A)$ , где  $Jx_c$  – момент инерции сечения относительно центральной оси  $x_c$ ,  $\rho$  – радиус кривизны оси стержня.

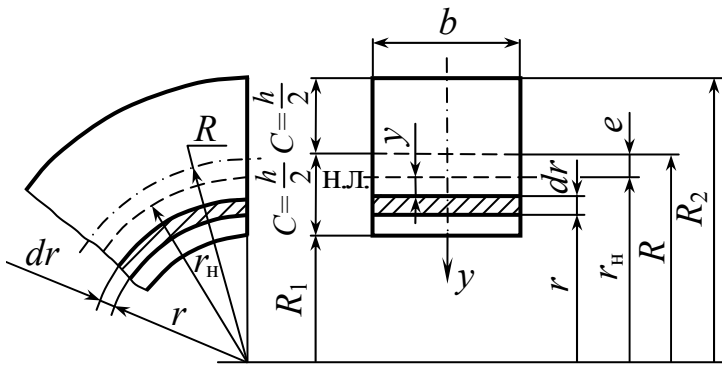


Рис. 10.8

Покажем, как определяется положение нейтрального слоя на примере бруса прямоугольного поперечного сечения высотой  $h$  и шириной  $b$  (рис. 10.8).

Для этого воспользуемся уравнением (10.6)

$$\int_A \frac{y \cdot dA}{r_H - y} = 0.$$

Введем в этом уравнении следующую замену переменных (рис. 10.8):

$$r = r_H - y \quad \text{или} \quad y = r_H - r.$$

Тогда уравнение (10.6) может быть переписано так:

$$\int_A \frac{r_H - r}{r} dA = 0 \quad \text{или} \quad r_H \int_A \frac{dA}{r} - A = 0,$$

откуда

$$\boxed{r_H = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}}. \quad (10.15)$$

Учитывая, что  $A = bh$ ,  $dA = b \cdot dr$ , будем иметь:

$$r_H = \frac{bh}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{b \cdot dr}{r}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{2,3 \lg \frac{R_2}{R_1}}. \quad (10.16)$$

Путем разложения в ряд правой части формулы (10.16) можно получить следующую приближенную формулу:

$$r_H = R \left[ 1 - \left( \frac{1}{12} \right) \cdot \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right]. \quad (10.17)$$

Для круглого поперечного сечения с диаметром  $d$  (рис. 10.9, а) аналогичным путем, можно получить следующие формулы:

точную

$$r_H = \frac{1}{2} \left( R + \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \right); \quad (10.18)$$

приближенную

$$r_H = R \left[ 1 - \left( \frac{1}{16} \right) \cdot \left( \frac{d}{r} \right)^2 \right]. \quad (10.19)$$

Для поперечного сечения в форме трапеции (рис. 10.9, б)

$$r_H = \frac{(b_1 + b_2)h^2}{2 \left[ (R_2 \cdot b_1 - R_1 \cdot b_2) \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) - (b_1 - b_2)h \right]}. \quad (10.20)$$

Центр тяжести трапеции находится, как известно, на расстоянии  $a$  от основания, имеющего размер  $b_1$ , равном

$$a = \frac{2b_2 + b_1}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}. \quad (10.21)$$

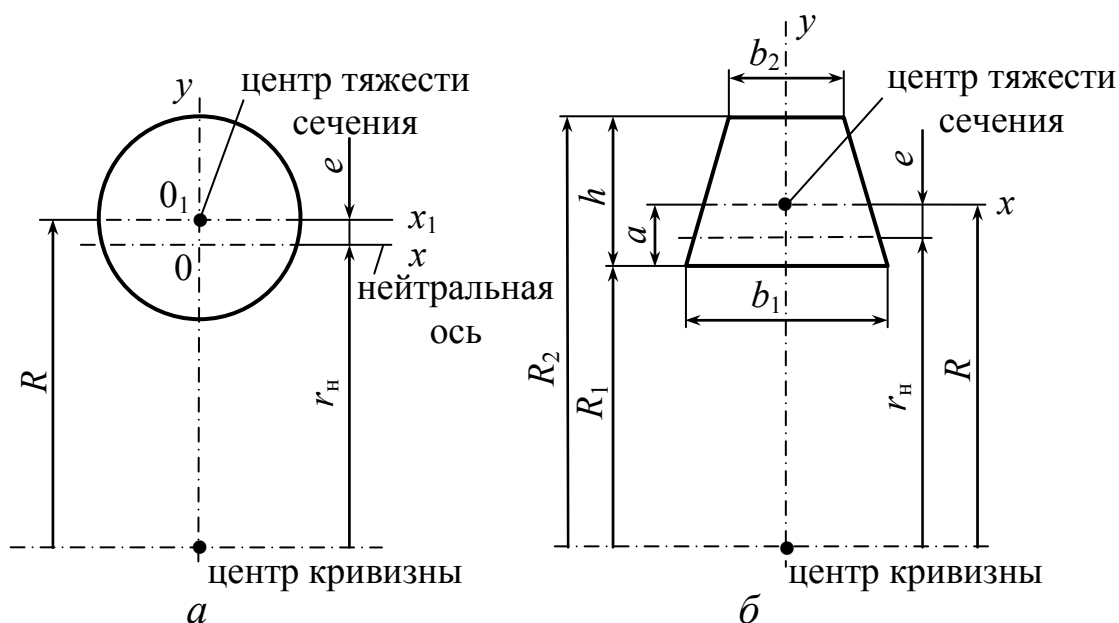


Рис. 10.9

Из формулы (10.19) можно получить формулы для прямоугольника (при  $b_1 = b_2$ ) и треугольника (при  $b_1 = 0$  или  $b_2 = 0$ ).

При поперечных сечениях сложной формы определение радиуса нейтрального слоя можно производить по следующей формуле:

$$r_n = \frac{\sum A}{\sum \int \frac{dA}{r_i}}. \quad (10.22)$$

Числитель этой формулы представляет собой площадь сложного сечения, в знаменателе под знак суммы входят интегралы, подсчитанные для каждой ( $i$ -й) из простых фигур, на которые расчленяется сложное сечение.

Вычисление радиуса  $r_n$  нейтрального слоя необходимо вести с высокой степенью точности: ошибка, например, всего на 0,1 % в значении  $\ln(R_2/R_1)$  при определении  $r_n$  может существенно отразиться на полученных величинах нормальных напряжений.

Положение нейтральной оси можно определить также с помощью таблиц.

### 10.3. Определение положения нейтральной оси с помощью таблицы

*Ключевые слова: круглое сечение, центр тяжести, крайнее внутреннее волокно, прямоугольное сечение.*

Рассмотрим круглое сечение. Обозначим расстояние между осью  $O_1Z_1$ , проходящей через центр тяжести сечения, и нейтральной осью  $OZ$  через (рис. 10.8, а):  $e = R - r_n$ . Находим величину  $e$  по значениям коэффициента  $k$ :

$$e = k \cdot R, \quad (10.23)$$

где  $k$  – находится из табл. 10.1 в зависимости от отношения  $\frac{R}{c}$ ;

$c$  – расстояние от центра тяжести  $O_1$  сечения до крайнего внутреннего волокна кривого бруса.

Таблица 10.1

$\frac{R}{c}$	Значение $k$	
	Круглое сечение	Прямоугольное сечение
1,2	0,224	0,305
1,4	0,151	0,204
1,6	0,108	0,149
1,8	0,084	0,112
2,0	0,069	0,090
2,4	0,049	0,065
3,0	0,0286	0,041
4,0	0,016	0,021
6,0	0,0070	0,0093
8,0	0,0039	0,0052
10,0	0,0025	0,0033

**Пример 1.** Найти напряжение в точке  $A$  крюка трапецидального сечения (рис. 10.10) со следующими размерами:  $b_1 = 4$  см;  $b_2 = 1$  см;  $R_1 = 3$  см;  $R_2 = 10$  см;  $h = 7$  см. Сила  $F = 2000$  Н. Сначала определяем положение центра тяжести сечения.

Статический момент сечения относительно большого основания имеет величину

$$\frac{b_2 \cdot h^2}{2} + \frac{b_1 - b_2}{6} h^2.$$

Разделив статический момент на площадь сечения, находим расстояние от основания трапеции до центра тяжести

$$y_0 = \frac{\frac{b_2 h^2}{2} + \frac{b_1 - b_2}{6} h^2}{\frac{b_1 + b_2}{2} h} = \frac{(3b_2 h^2 + b_1 h^2 - b_2 h^2)2}{6h(b_1 + b_2)} =$$

$$= \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{4 + 2 \cdot 1}{4 + 1} \cdot \frac{7}{3} = 2,8 \text{ см.}$$

Радиус кривизны  $R = y_0 + R_1 = 2,8 + 3 = 5,8$  см.

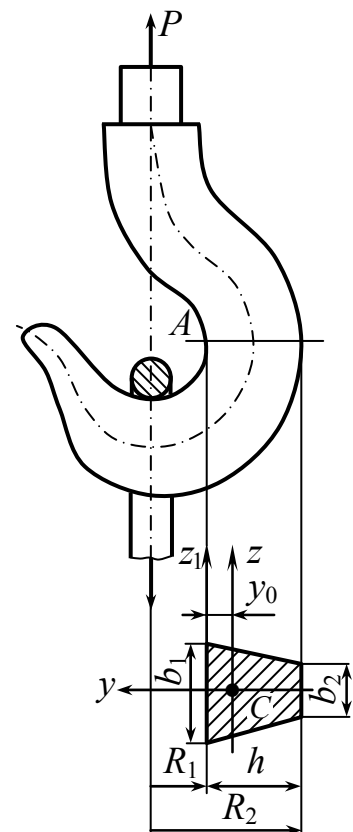


Рис. 10.10

Находим смещение  $e$  нейтральной линии относительно центра тяжести:  $e = R - r_H$ ,

где  $r_H = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}$ ;  $A = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h$ ;  $dA = b(r)dr$ .

Ширину сечения  $b(r)$  на произвольном расстоянии  $r$  находим из подобия треугольников

(рис. 10.11)  $\frac{b_1 - b(r)}{b_1 - b_2} = \frac{r - R_1}{h}$ ,

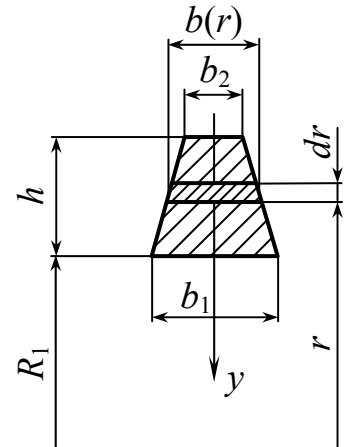


Рис. 10.11

откуда

$$b(r) = b_1 + \frac{(b_1 - b_2)}{h} \cdot R_1 - \frac{(b_1 - b_2)}{h} \cdot r.$$

Тогда

$$\int_A \frac{dA}{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{b(r)dr}{r} = \left( b_1 + \frac{b_1 - b_2}{h} R_1 \right) \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} - \frac{b_1 - b_2}{h} \int_{R_1}^{R_2} dr;$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \ln \cdot r \Big|_{R_1}^{R_2} = \ln \frac{R_2}{R_1};$$

$$\int_{R_1}^{R_2} dr = R_2 - R_1 = h.$$

Окончательно получаем

$$\int_A \frac{dA}{r} = \left( b_1 + \frac{b_1 - b_2}{h} \cdot R_1 \right) \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2).$$

Пользуясь формулой (10.14), находим

$$\begin{aligned} e &= R - \frac{A}{\left( b_1 + R_1 \frac{b_1 - b_2}{h} \right) \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2)} = \\ &= 5,8 - \frac{17,5}{\left( 4 + 3 \frac{4-1}{7} \right) \ln \frac{10}{3} - (4-1)} = 0,58 \text{ см.} \end{aligned}$$

Напряжение изгиба в точке  $A$  определяется по формуле (10.12), которая принимает для данного случая вид

$$\sigma = \frac{F \cdot R \cdot (y_0 - e)}{A \cdot e \cdot R_1} = \frac{2000 \cdot 5,8(2,8 - 0,58)}{17,5 \cdot 0,58 \cdot 3} = 84,5 \text{ МПа.}$$

К этому напряжению следует прибавить напряжение растяжения

$$\sigma_{\text{раст.}} = \frac{F}{A} = \frac{2000}{17,5} = 11,4 \text{ МПа.}$$

Таким образом,

$$\sigma_A = \sigma + \sigma_{\text{раст.}} = 84,5 + 11,4 = 95,9 \text{ МПа.}$$

#### 10.4. Определение деформаций кривого бруса

Определение деформаций кривого бруса в случае обычных расчетов, не требующих особой строгости, можно приближенно выполнить, пользуясь результатами, полученными выше для прямых брусьев. При этом интегрирование производится по длине дуги.

$$f_{(\theta)} = \sum \int_S \frac{M_F(S) \cdot M_1(S) dS}{E \cdot I} = \sum \int_{\varphi} \frac{M_F(\varphi) \cdot M_1(\varphi) d\varphi}{E \cdot I}.$$

Уточненный способ определения прогибов – см. [6].

#### Контрольные вопросы

1. В каких конструкциях встречаются брусья с криволинейной осью?
2. Чем отличаются брусья малой кривизны от брусьев большой кривизны?
3. Как влияет кривизна брусьев с криволинейной осью на распределение нормальных напряжений в поперечном сечении, а также на величину максимальных напряжений?
4. Какие силовые факторы возникают в поперечных сечениях плоского кривого бруса?
5. Какой метод используется для определения значений внутренних силовых факторов в поперечных сечениях плоского кривого бруса?



6. Для каких криволинейных стержней положение любого сечения удобно определять при помощи полярной системы координат?
7. Какая теорема применяется для вычисления внутренних силовых факторов в поперечных сечениях плоского кривого бруса при действии на него равномерно распределенной нагрузки?
8. По каким формулам вычисляются нормальные напряжения при изгибе криволинейных брусьев малой кривизны?
9. Какие гипотезы используются в основе вывода формулы для определения нормальных напряжений при чистом изгибе плоских брусьев большой кривизны?
10. Проходит ли нейтральная линия через центр тяжести поперечного сечения при чистом изгибе кривого стержня?
11. Как распределяются нормальные напряжения в поперечных сечениях плоского кривого стержня при чистом изгибе?
12. Как распределяются нормальные напряжения по ширине сечения плоского кривого бруса при чистом изгибе?
13. Какие точки являются опасными для кривых стержней, имеющих симметричное относительно центральной оси поперечное сечение?
14. Запишите выражение для расчета на прочность, если в сечении бруса действует момент и продольная сила  $N$  (сложное сопротивление)?
15. По какому закону распределяются нормальные напряжения по высоте сечения в кривом брусике от изгибающего момента?
16. Как определяется величина  $e$  (расстояние от нейтрального слоя до центра тяжести поперечного сечения кривого бруса) при изгибе?
17. Запишите формулу для определения радиуса нейтрального слоя в поперечном сечении сложной формы кривого бруса.
18. Можно определить положение нейтральной оси кривого бруса с помощью таблиц?
19. Как определяются деформации кривого бруса?

# Глава 11. Толстостенные трубы и быстровращающиеся диски

## 11.1. Расчет толстостенных сосудов

### Ключевые слова

Толстостенные сосуды, внутренние силы, нагружающее давление, быстровигающиеся диски, осесимметричные цилиндрические тела, перемещения произвольной точки, криволинейный шестигранник, обобщенный закон Гука, напряжения в цилиндре, задача Ламе.

### Основные уравнения для осесимметричного тела

Природа образования внутренних сил в толстостенной трубе, нагруженной давлением, и в быстровигающемся диске различна. Однако задача расчета этих деталей сводится к общей расчетной схеме тела вращения – обнаруживается полное соответствие дифференциальных уравнений для определения перемещений и напряжений.

В расчетных моделях диски турбомашин представляют в виде круглых пластин переменной толщины (рис. 11.1).

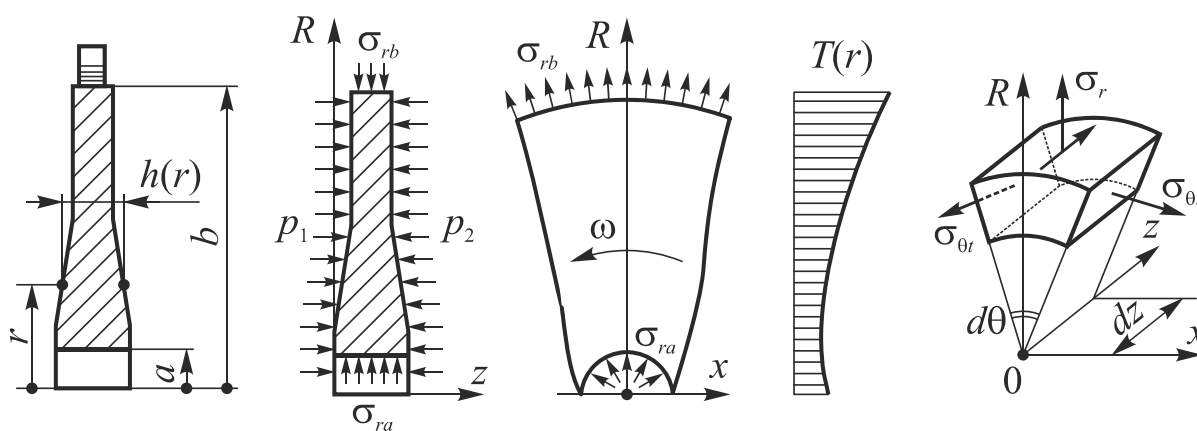


Рис. 11.1

Такие конструкции нагружаются: 1) центробежными силами от собственной массы диска; 2) радиальными нагрузками ( $\sigma_{rb}$ ) от центробежных сил пера лопаток и замковой части лопаток и дисков, приложенными по поверхности радиуса ( $b$ ); 3) радиальными нагрузками  $\sigma_{ra}$  в ступице диска при его запрессовке ( $\sigma_{ra} = -p$ , где  $p$  – давление запрессовки); 4) давлениями газа  $p_1$  и  $p_2$ . Температура диска в общем случае переменна по радиусу и толщине.

В таких условиях диск испытывает осесимметричное напряженное и деформированное состояние.

Выведем уравнения для осесимметричного цилиндрического тела (рис. 11.2).

Нагрузка считается осесимметричной и вдоль цилиндра не меняется. Размеры цилиндра могут быть произвольными. Каждая точка цилиндра при его деформации получит какие-то перемещения. Точка может перемещаться по направлению радиуса и вдоль соответствующей об образующей (рис. 11.3).

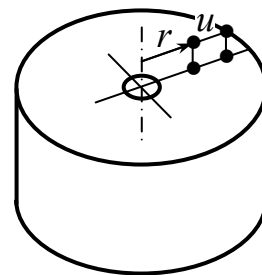


Рис. 11.2

Положительное перемещение принимается от оси.

$u$  – радиальное перемещение произвольно взятой точки  $u = f(r)$  и не изменяется по длине цилиндра;  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_t$  – относительные удлинения в цилиндре в радиальном и окружном направлениях.

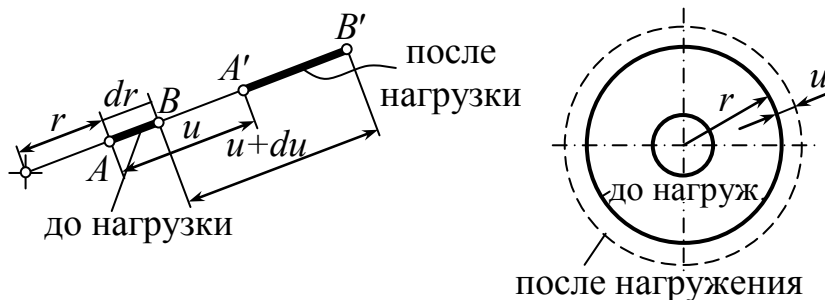


Рис. 11.3

## Геометрическая сторона задачи

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{du}{dr}(0). \\ \varepsilon_t = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}(0)'. \end{cases} \quad (11.1)$$

Выделим из цилиндра элемент в форме криволинейного шестигранника (рис. 11.4). Размеры этого элемента равны  $dr$ ,  $dz$  и  $r d\theta$ .

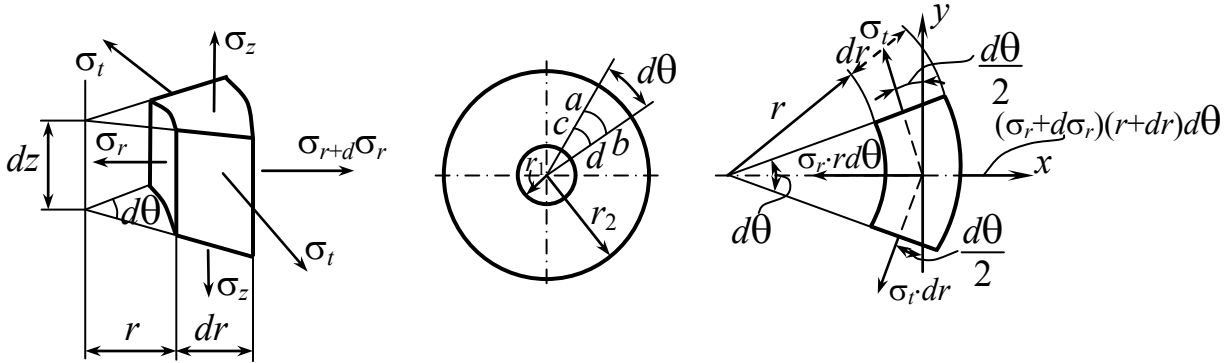


Рис. 11.4

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

$$\sum X = (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) \cdot d\theta - \sigma_r \cdot r d\theta - 2\sigma_t \cdot dr \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0.$$

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} \cdot r - \sigma_t = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dr}(\sigma_r \cdot r) - \sigma_t = 0. \quad (11.2)$$

## Физическая сторона задачи

Согласно обобщенному закону Гука, напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  и  $\sigma_z$  связаны с удлинениями  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_t$  следующими соотношениями:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}[\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)].$$

Будем считать, что напряжение  $\sigma_z$  нам известно из условий нагружения цилиндра осевыми силами по торцам; выразим напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  через  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_t$  и  $\sigma_z$ .

Из последних двух выражений получаем

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z, \quad (11.3)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z. \quad (11.4)$$

Подставляя (11.1) в выражения (11.3) и (11.4), получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z; \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z. \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

Теперь исключим при помощи (11.5)  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  из уравнения (11.2). Тогда получим уравнение с одним неизвестным  $u$ .

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0, \quad \frac{d}{dr} \left[ \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right] = 0 \quad (11.6)$$

или  $\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} + \frac{d}{dr}(ur) \right] = 0$  – интегрируя это уравнение по  $r$  дважды, найдем общее решение уравнения

$$u = Ar + B \cdot \frac{1}{r}. \quad (11.7)$$

Если цилиндр имеет днище (рис. 11.4), то в нем возникают осевые напряжения  $\sigma_z = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}$  (рис. 11.5). Длина предполагается достаточно большой.

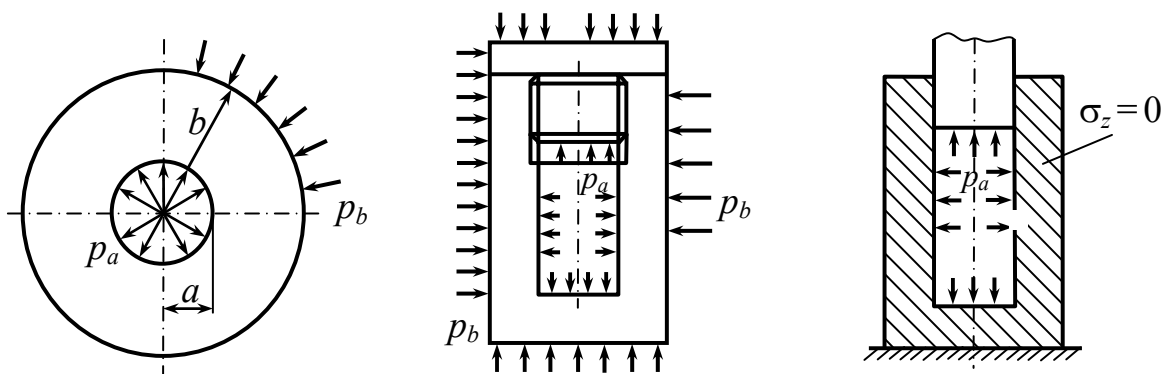


Рис. 11.5

Задача определения напряжений и перемещений в толстостенном цилиндре носит название Ламе.

Подставим (11.7) в (11.5), тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ A(1+\nu) - B(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z; \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ A(1+\nu) \pm B(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z. \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

Решая эти уравнения относительно  $A$  и  $B$ , найдем

$$A = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{\nu}{E} \sigma_z;$$

$$B = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p_a - p_b).$$

$$\left\{ \begin{aligned} -p_a &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ A(1+\nu) - B(1-\nu) \frac{1}{a^2} \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z; \\ -p_b &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ A(1+\nu) - B(1-\nu) \frac{1}{b^2} \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z. \end{aligned} \right.$$

После исключения постоянных выражения (11.7) и (11.8) принимают вид

$$u = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{a^2 b^2}{r} \cdot \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} - \frac{\nu}{E} \sigma_z \cdot r. \quad (11.9)$$

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \mp \frac{a^2 b^2}{r^2} \cdot \frac{(p_a - p_b)}{b^2 - a^2}. \quad (11.10)$$

В случае если цилиндр нагружен силами давления в осевом направлении, то получаем

$$u = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{a^2 b^2}{r} \cdot \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}.$$

Если осевая сила отсутствует, то

$$u = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{a^2 b^2}{r} \cdot \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}.$$

$$\sigma_r + \sigma_t = \text{const}.$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_t) = \text{const}.$$

1) Частный случай

$p_a = p, \quad p_b = 0$  (рис. 11.6)

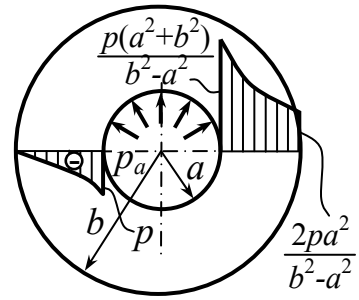


Рис. 11.6

$$\sigma_{r,t} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left( 1 \mp \frac{b^2}{r^2} \right), \quad (11.11)$$

$$r = a, \quad \sigma_r = -p, \quad \sigma_t = \frac{p(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2}.$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_r - \sigma_t = \sigma p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - (-p) = p \frac{2b^2}{b^2 - a^2}.$$

$$r = b, \quad \sigma_r = 0, \quad \sigma_t = \frac{2pa^2}{b^2 - a^2}.$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma].$$

Рассмотрим случай, когда  $b = a + \delta$  при малом значении  $\delta$

$$\sigma_{t(r=a)} \approx \sigma_{t(r=b)} \approx p \frac{a}{\delta}.$$

$\sigma_r$  – у внутренней поверхности равно  $p$ ,  $a$  – у внешней равно нулю независимо от толщины цилиндра.

Таким образом, для цилиндра с малой толщиной стенки окружные напряжения распределены по толщине почти равномерно, а радиальные малы по сравнению с окружными!

$$\text{Если } b \rightarrow \infty, \text{ тогда } \sigma_r = \mp p \frac{a^2}{r^2}.$$

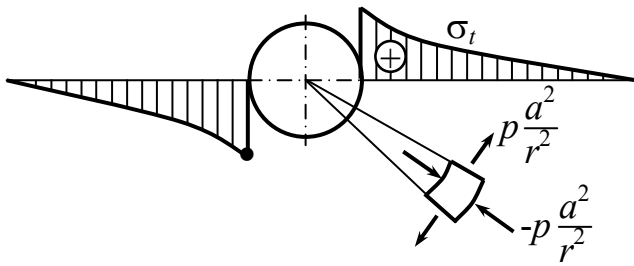


Рис. 11.7

Для цилиндра с бесконечно большой толщиной стенки радиальное напряжение в любой точке равно окружному и при отсутствии осевых напряжений все точки находятся в состоянии чистого сдвига (рис. 11.7).

При  $\frac{b}{a} > 4$  цилиндр можно рассматривать, как имеющий бесконечно большую толщину стенки. Форма внешнего контура при этом может быть различной.

$$b \rightarrow \infty, \quad p \leq \frac{[\sigma]}{2}, \quad \sigma_{\text{экв}} = 2p.$$

2) Частный случай.

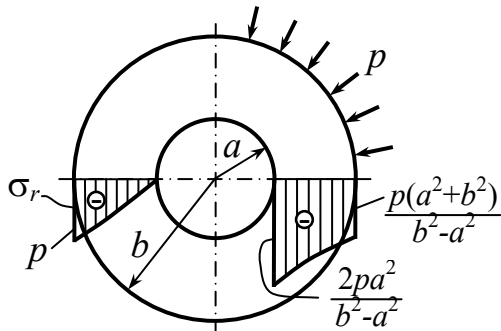


Рис. 11.8

$$p_a = 0, \quad p_b = p \text{ (рис. 11.8).}$$

$$\sigma_r = \frac{-pb^2}{b^2 - a^2} \left( 1 \mp \frac{a^2}{r^2} \right);$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - \frac{2pb^2}{b^2 - a^2} = p \frac{2pb^2}{b^2 - a^2}.$$

Если  $a = 0$ , то  $\sigma_r = \sigma_t = -p$ .



## 11.2. Определение напряжений в составных трубах

### Ключевые слова

*Составные трубы, сосуды высокого давления, соединения с натягом, распределение напряжений, натяг, условие равнопрочности, эквивалентное напряжение, условие Гадолина, автофретирование, пластические деформации, напряжения сжатия, напряжения от натяга, сила выпрессовки.*

Если в толстостенном сосуде надо удержать высокое давление, необходимо, чтобы предел текучести материала был бы по крайней мере в два раза большим, например, 15000 атм –  $\sigma_T = 3000$  МПа. Столь высокопрочных материалов в настоящее время не существует. Следовательно, необходимо искать какие-то новые конструктивные решения для повышения несущей способности толстостенных труб. Одним из таких решений является создание составных, соединенных с натягом цилиндров (рис. 11.9). Этот прием используется как в технике высоких давлений, так и в артиллерийской практике для упрочнения стволов мощных орудий.

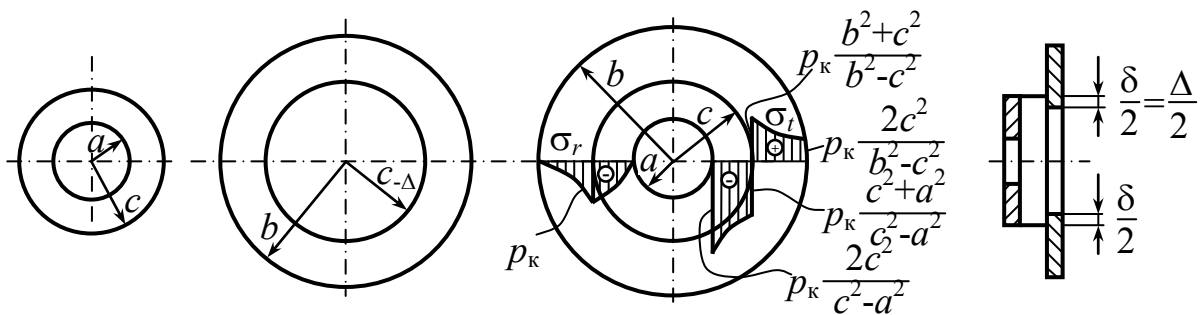


Рис. 11.9

При посадке внешний радиус внутреннего цилиндра сократится и точки цилиндра на контактной поверхности получат отрицательное смещение  $u_1$ . Внутренний радиус внешнего цилиндра увеличится, следовательно, возникает положительное смещение  $u_2$ . Величина

$$u_2 + (-u_1) = \Delta, \quad u_2 - u_1 = \Delta. \quad (11.12)$$

Перемещение  $u_1$  определяется по формуле (11.9), если положить в ней  $p_a = 0$ ,  $p_b = p_k$ , а  $b$  и  $r$  заменить на  $c$   $b = r = c$ , тогда получим

$$u_1 = -\frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} p_k - \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{a^2 c}{c^2 - a^2} p_k.$$

По той же формуле определяем и  $u_2$ . Для этого полагаем  $p_b = 0$ ,  $p_a = p_k$ ,  $a = r = c$

$$u_2 = -\frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{c^2}{b^2 - c^2} p_k + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{b^2 c}{b^2 - c^2} p_k.$$

$E$  и  $\nu$  предполагаются для обоих цилиндров одинаковыми.

Согласно выражению (11.12) определяем

$$p_k = \frac{E\Delta}{2c^3} \cdot \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{b^2 - a^2}. \quad (11.13)$$

Таким образом, в результате посадки внутренний цилиндр оказывается под действием внешнего давления  $p_k$ , а внешний под действием точно такого же внутреннего давления. Картина распределения напряжений показана на рис. 11.9.

Если теперь составной цилиндр нагрузить внутренним давлением, то обе его части будут работать как одно целое и в составном цилиндре возникнут напряжения, определяемые формулой (11.11). Эти напряжения должны быть алгебраически просуммированы с предварительными напряжениями натяга. Во внутренних, наиболее напряженных точках напряжения и напряжения натяга имеют разные знаки. Поэтому суммарное напряжение здесь снижается и составной цилиндр способен выдержать большее давление, чем обычный. Нужно однако помнить, что вследствие натяга увеличиваются напряжения в зоне контакта у внешнего цилиндра.

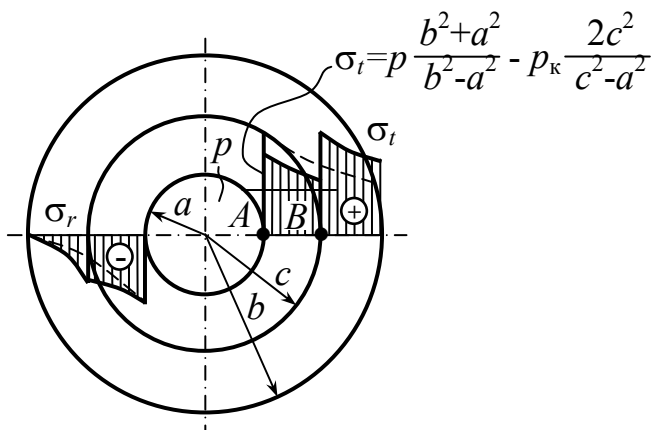


Рис. 11.10

Поэтому натяг  $\Delta$  должен подбираться для заданного рабочего давления  $p$  так, чтобы была обеспечена прочность не только внутреннего, но и внешнего цилиндра (рис. 11.9). Легко составить условие равнопрочности цилиндров

$$\sigma_{\text{ЭКВ}_A} = \sigma_{\text{ЭКВ}_B} \quad (\text{рис. 11.10}).$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}_A} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - \sigma_r = p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - p_k \frac{2c^2}{c^2 - a^2} - (-p); \quad (11.14)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}_B} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{c^2} \right) + p_k \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} - \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{c^2} \right) - (-p_k).$$

Приравняв эти выражения, получим

$$p \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{(c^2 - a^2)}{b^2 - a^2} = p_k \left( \frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right).$$

Если, наконец, выразим  $p_k$  через  $\Delta$ , то получим

$$\Delta = \frac{2p}{E} \cdot \frac{cb^2(c^2 - a^2)}{b^2(c^2 - a^2) + c^2(b^2 - c^2)}.$$

Если исключить из (11.14) —  $p_k$ , то получим

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = p \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \left[ 1 - \frac{1}{\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2}} \right].$$

Эта величина имеет минимум при  $c = \sqrt{ab}$ ,

$$\sigma_{\text{ЭКВ.}}^{\min} = p \frac{b}{b-a} \text{ — условие Гадолина.}$$

$$\frac{\sigma_{\text{ЭКВ.}}^{\min}}{\sigma_{\text{ЭКВ.}}} = \frac{b+a}{2b}.$$

Если  $a \rightarrow 0$ , то посадка труб по соотношениям Гадолина дает двукратное снижение эквивалентного напряжения. Для тонкостенных труб, т.е. при  $a \approx b$ , посадка труб не дает эффекта.

Автофретирование — предварительное нагружение цилиндра внутренним давлением, большим рабочего, с таким расчетом, чтобы во внутренних слоях цилиндра возникали пластические деформации. После снятия давления во внешних слоях цилиндра сохраняются упругие напряжения растяжения, а во внутренних слоях возникают напряжения сжатия (рис. 11.11).

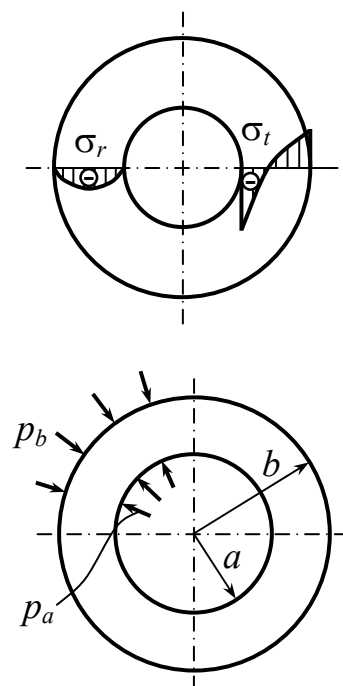


Рис. 11.11

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \mp \frac{a^2 b^2}{r^2} \cdot \frac{(p_a - p_b)}{b^2 - a^2};$$

$$\sigma_z = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}.$$

**Задача 1.** Произвести поверочный расчет на прочность толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением  $p$  в двух вариантах (рис. 11.12): 1) сплошная труба (рис. 11.13); 2) составная труба бесконечной длины (рис. 11.15).

$$p = 250 \text{ МПа}, \quad r_1 = 2 \text{ см}, \quad b = 3 \text{ см}, \quad r_2 = 4,5 \text{ см},$$

$$\Delta_{ред.} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \sigma_{тр} = \sigma_{тс} = 600 \text{ МПа}.$$

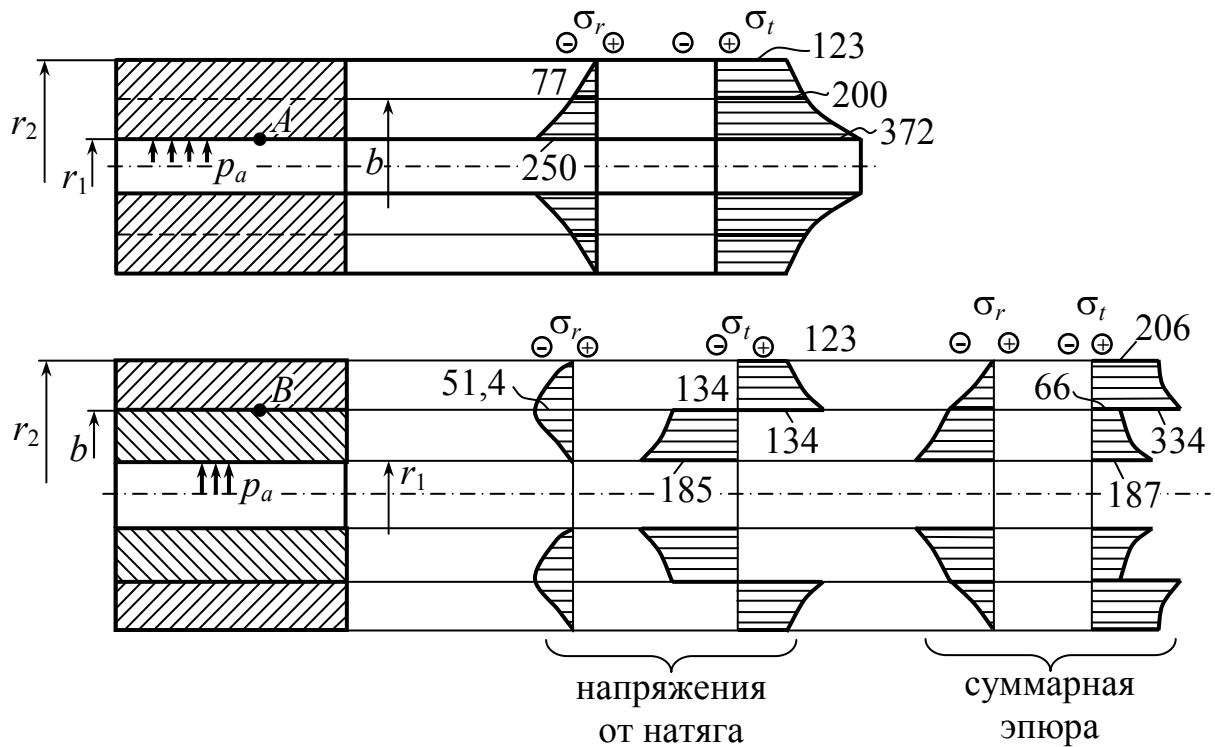


Рис. 11.12

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \mp \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)}.$$

1)

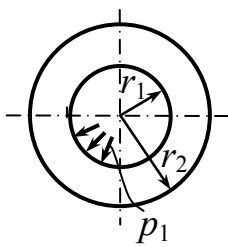


Рис. 11.13

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 \mp \frac{r_2^2}{r^2} \right) = \frac{250 \cdot 2^2}{4,5^2 - 2^2} \left( 1 \mp \frac{4,5^2}{r^2} \right);$$

$$r = r_1; \quad \begin{cases} \sigma_t = 372 \text{ МПа}; \\ \sigma_r = -250 \text{ МПа}; \end{cases} \quad r = b; \quad \begin{cases} \sigma_t = 200 \text{ МПа}; \\ \sigma_r = -77 \text{ МПа}; \end{cases}$$

$$r = r_2; \quad \begin{cases} \sigma_t = 123 \text{ МПа}; \\ \sigma_r = 0. \end{cases}$$

На рис. 11.14 представлено напряженное состояние в точке А.

Точка А:  $\sigma_1 = 372 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0;$

$\sigma_3 = 250 \text{ МПа}$  (рис. 11.13);

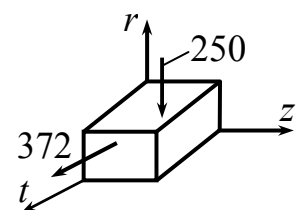


Рис. 11.14

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = 372 - (-250) = 622 \text{ МПа}; n_{\text{T}}^A = \frac{600}{622} = \frac{\sigma_{\text{ТР}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}} < 1.$$

Пластическая деформация.

2) Напряжение от натяга (рис. 11.15).

$$u_1 + u_2 = \Delta.$$

$$p_{\text{к}} = \frac{\Delta \cdot E (b^2 - r_1^2)(r_2^2 - b^2)}{2b^3(r_2^2 - r_1^2)} = 51,4 \text{ МПа}.$$

$$a) \quad \sigma_r = \frac{p_{\text{к}} b^2}{r_2^2 - b^2} \left( 1 \mp \frac{r_2^2}{r^2} \right) = \frac{51,4 \cdot 3^2}{4,5^2 - 3^2} \left( 1 \mp \frac{4,5^2}{r^2} \right);$$

$$r = r_2; \quad \begin{cases} \sigma_t = 82 \text{ МПа}; \\ \sigma_r = 0; \end{cases} \quad r = b; \quad \begin{cases} \sigma_t = 134 \text{ МПа}; \\ \sigma_r = -51,4 \text{ МПа}. \end{cases}$$

$$б) \quad \sigma_r = -\frac{p_{\text{к}} b^2}{b^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right);$$

$$r = b; \quad \begin{cases} \sigma_t = -134 \text{ МПа}; \\ \sigma_r = -51,4 \text{ МПа}; \end{cases} \quad r = r_1; \quad \begin{cases} \sigma_t = -185 \text{ МПа}; \\ \sigma_r = 0. \end{cases}$$

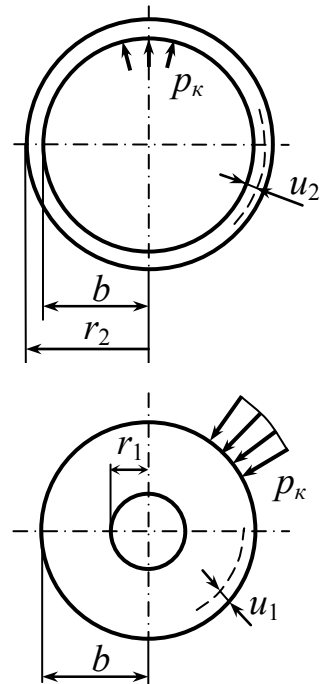


Рис. 11.15

### Сложение эпюр

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^A = 187 - (-250) = 437 \text{ МПа (рис. 11.16)}.$$

$$n_{\text{T}}^A = \frac{600}{437} = 1,38.$$

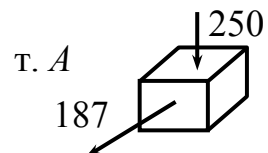


Рис. 11.16

$$\sigma_{\text{экв}}^B = 334 - (-128) = 462 \text{ МПа (рис. 11.17).}$$

$$n_T^B = \frac{600}{462} = 1,3.$$

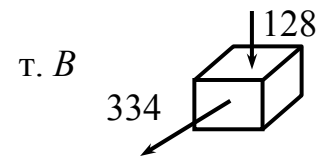


Рис. 11.17

**Задача 2.** Определить силу выпрессовки  $F$  и  $p$  (рис. 11.18).

Дано:  $\Delta_{\text{рад}} = 0,03 \text{ мм}$ ;  $D = 60 \text{ мм}$ ;  $h = 100 \text{ мм}$ ;  $f = 0,25$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Пренебрегая особенностями, связанными с неравномерным натягом по толщине плиты, примем, что искомая сила представляет собой силу трения

$$F = fp_k \pi D \cdot h,$$

где  $p_k$  — контактное давление.

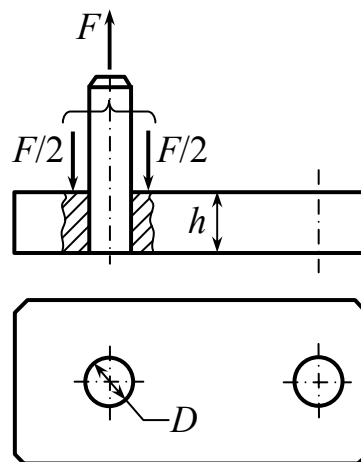


Рис. 11.18

Оно определяется при  $a = 0$ ;  $b = \infty$ ,  $c = \frac{D}{2}$ .

$$p_k = E \frac{\Delta}{D} = 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,03}{60} = 100 \text{ МПа.}$$

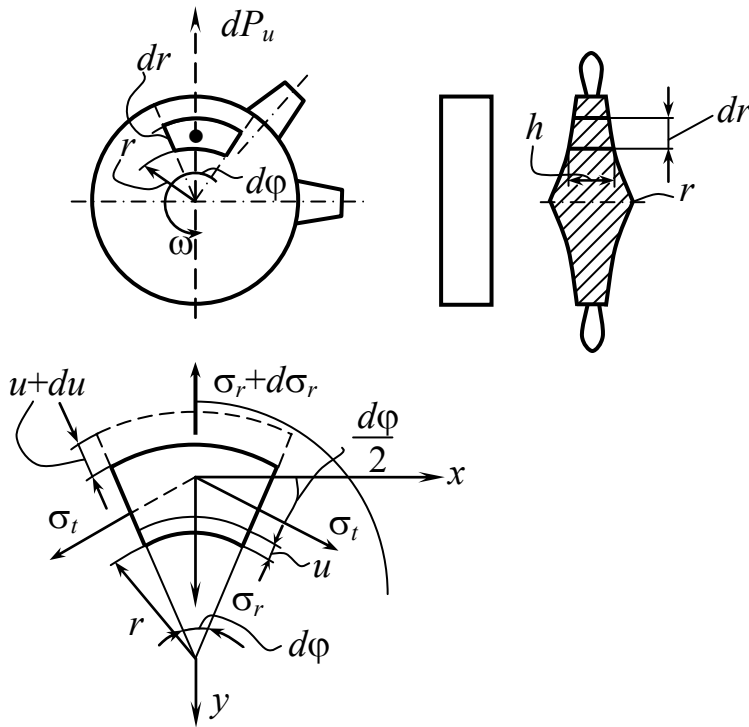
Искомая сила

$$p = 0,25 \cdot 100 \pi \cdot 0,06 \cdot 0,1 \cdot 10^6 = 471 \text{ кН.}$$

### 11.3. Расчет быстровращающихся дисков

*Ключевые слова:* быстровращающиеся диски, большие обороты, силы инерции, посадочные напряжения, обобщенный закон Гука, дифференциальные уравнения равновесия, переменная толщина диска, условие прочности.

При больших оборотах возможно разрушение диска.



Нагрузки (рис. 11.19): силы инерции лопатки, посадочные напряжения.

При вращении возникают нагрузки. Если выделим элемент, то возникнет взаимодействие элемента с другими частями диска

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \text{const}.$$

Рис. 11.19

На любом радиусе при вращении точка будет перемещаться в радиальном направлении

$$u = f(r); \quad u = u(r);$$

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{du}{dr}}; \quad \boxed{\varepsilon_t = \frac{u}{r}}. \quad (11.15)$$

Если имеем относительные деформации, то можем записать обобщенный закон Гука

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \quad (11.16)$$



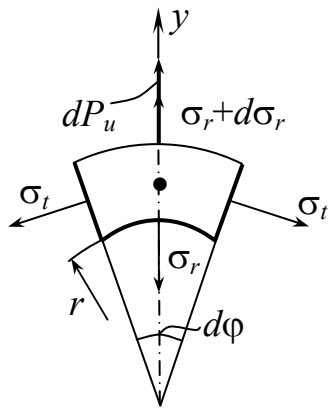


Рис. 11.20

Эти напряжения (рис. 11.20) подлежат определению

$$dP_u = \frac{\underbrace{\gamma r d\phi h \cdot dr}_m}{g} \omega^2 \cdot r = \frac{\gamma \omega^2}{g} h r^2 dr d\phi. \quad (11.17)$$

$$\sum Y = 0.$$

$$\begin{aligned} & -\sigma_r \cdot r d\phi \cdot h + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\phi \cdot (h + dh) - \\ & - 2\sigma_t \cdot dr \cdot h \frac{d\phi}{2} + \frac{\gamma \omega^2}{g} h r^2 dr d\phi = 0. \end{aligned}$$

Задачу динамики мы свели к задаче статики

$$\sigma_r \cdot dr \cdot h + d\sigma_r \cdot r \cdot h + \sigma_r \cdot rdh - \sigma_t drh = -\frac{\gamma \omega^2}{g} h r^2 dr.$$

Для удобства записи поделим на  $dr$  и запишем

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r h r) - \sigma_t h = -\frac{\gamma \omega^2}{g} h \cdot r^2 \quad (11.18)$$

– дифференциальное уравнение равновесия.

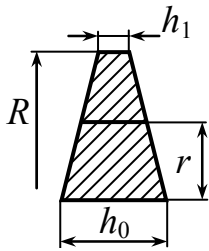
Для того чтобы найти разрешающее уравнение, необходимо задавать закон изменения площадей.

$$h = h(r) = \text{const}.$$

Если  $h = \text{const}$ , то

$$\boxed{\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = -\frac{\gamma \omega^2}{g} r.} \quad (11.19)$$

*Иногда толщина описывается экспоненциальным законом для дисков равного сопротивления.*



$$h = h_0 - \frac{h_0 - h_1}{R} \cdot r$$

Для самостоятельного решения найти деформацию и напряжение для переменной толщины диска (рис. 11.21).

Рис. 11.21

Задачу решаем в перемещениях, для этого подставим (11.16) в (11.19):

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = -\frac{1 - \mu^2}{E} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot r, \quad (11.20)$$

получим дифференциальное уравнение деформации, которое называется разрешающим уравнением.

Каким способом решаются такие уравнения?

1) Частное решение – однородное.

$$u = u_n + u_r.$$

2) Левую часть представляем в полных дифференциалах.

Решаем (11.15) способом

$$u_n = Ar + \frac{B}{r}; \quad u_r = ar^3, \quad a - \text{неизвестно};$$

$$6ar + 3ar - ar = -mr \quad (11.21)$$

– характерное уравнение.

$$m = \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g}; \quad (11.22)$$

$$a = \frac{m}{8}; \quad U = Ar + \frac{B}{r} - \frac{m}{8} r^3. \quad (11.23)$$

Полный интеграл дифференцированного уравнения диска.

Постоянные коэффициенты определяются из граничных условий (рис. 11.22), можно задавать или деформации, или нагрузки.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ A - \frac{B}{r^2} - \frac{3m}{\gamma} r^2 + \nu A + \nu \frac{B}{r^2} - \nu \frac{m}{8} r^2 \right] = \\ &= \frac{E}{1-\nu} A - \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{B}{r^2} - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{(3+\nu)mr^2}{8};\end{aligned}$$

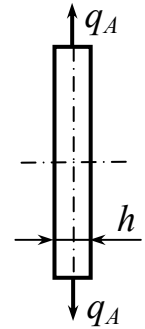


Рис. 11.22

$$\sigma_s = \sigma_t = \frac{E}{1-\nu} A + \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{B}{r^2} - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1+3\nu}{8} mr^2 \quad (11.24)$$

$$r = 0; \quad \sigma_r \pm \infty; \quad U \neq \infty; \quad B = 0.$$

$$r = R; \quad \sigma_r = q = \frac{E}{1-\nu} A - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{3+\nu}{8} R^2 m.$$

$$A = \frac{1-\nu}{E} q + \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{Em}{1-\nu^2} \cdot \frac{3+\nu}{8} R^2 = \frac{1-\nu}{E} q + \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3+\nu) R^2.$$

$$\sigma_r = q + \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3+\nu) R^2 - \frac{(3+\nu)\gamma\omega^2}{8g} r^2.$$

$$\sigma_r = q + \frac{(3+\nu)\gamma\omega^2}{8g} (R^2 - r^2). \quad (11.25)$$

$$\sigma_t = q + \frac{(3+\nu)\gamma\omega^2}{8g} \left( R^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right). \quad (11.26)$$

$$u = A_r - \frac{m}{8} r^3. \quad (11.27)$$

Необходимо найти далее **распределение напряжений по длине радиуса и условие прочности** (рис. 11.23):

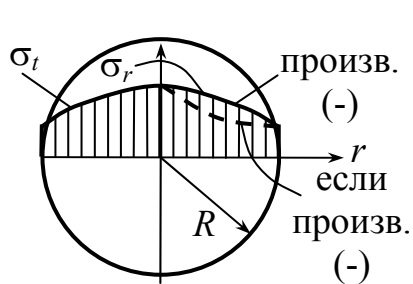


Рис. 11.23

$$r = 0; \quad \sigma_r = q + \frac{(3 + \nu)\gamma\omega^2 R^2}{8g};$$

$$r = R; \quad \sigma_r = q;$$

$$r = 0; \quad \sigma_t = \sigma_r = q + \frac{3 + \nu}{8g}\gamma\omega^2 R^2;$$

$$r = R; \quad \sigma_t = q + \frac{1 - \nu}{4g}\gamma\omega^2 R^2.$$

Наибольшие напряжения возникают в центре, поэтому диски делаются увеличенной толщины к центру.

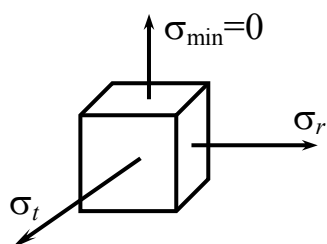


Рис. 11.24

Условие прочности (рис. 11.24)

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}} = \sigma_t \leq [\sigma]_{\text{II}}.$$

### Контрольные вопросы

1. Что является основой того, что задача расчета толстостенных труб и быстровращающихся дисков сводится к общей расчетной схеме тела вращения?
2. Что предусматривает задача Ламе?
3. Запишите уравнения для определения относительных удлинений в цилиндре в радиальном и окружном направлениях.
4. Элемент какой формы выделяется из толстостенного цилиндра для рассмотрения статической стороны задачи определения радиальных и тангенциальных напряжений?

5. Изложите последовательность действий для получения уравнения с одним неизвестным для определения перемещений в толстостенном цилиндре.
6. В каком случае в толстостенной трубе возникают осевые напряжения?
7. Какое давление (внутреннее или наружное) опаснее для толстостенной трубы?
8. Какой должна быть толщина стенки толстостенной трубы при нагружении: осевая сила отсутствует, внутреннее давление  $P_a = P$ , внешнее давление  $P_b = 0$ , чтобы все точки находились в состоянии чистого сдвига?
9. Может ли труба неограниченно большой толщины выдержать неограниченно большое давление?
10. Какие способы повышения несущей способности толстостенных труб вы знаете?
11. Как должен подбираться натяг  $\Delta$  для заданного рабочего давления, чтобы была прочность не только внутреннего, но и внешнего цилиндра?
12. Запишите условие Гадолина.
13. Что такое автофретирование?
14. Возможно ли повысить несущую способность тонкостенных труб, используя посадку труб?

## 12. Расчет тонкостенных оболочек.

### Безмоментная (мембранная) теория

*Ключевые слова*

*Тонкостенные оболочки, толщина, срединная поверхность, осесимметричные оболочки, поверхность вращения.*

Большинство элементов инженерных сооружений, подлежащих расчету на прочность, может быть сведено к расчетным схемам бруса или оболочки.

Под оболочкой понимается тело, одно из измерений которого (толщина) значительно меньше двух других. Геометрическое место точек, равноотстоящих от обеих поверхностей оболочки, носит название срединной поверхности. Если срединная поверхность образует часть сферы, конуса или цилиндра, оболочку соответственно называют сферической, конической или цилиндрической. Все встречающиеся на практике оболочки имеют, как правило, постоянную толщину.

Осесимметричные или просто симметричные оболочки такие, у которых срединная поверхность представляет собой поверхность вращения.

К схеме осесимметричной оболочки сводится расчет очень многих строительных сооружений, котлов и баков, деталей машин и приборов, начиная с таких мелких, как, например, упругая коробка вариометра – прибора для измерения скорости подъема самолета (40 мм диаметр и 0,2 мм толщина) и кончая куполом планетария. Понятно, что расчет стенки бака или гибкой коробки вариометра не может быть произведен при помощи тех приемов, которые были изложены применительно к схеме бруса.

Ограничимся рассмотрением тонкостенных оболочек, срединная поверхность которых представляет поверхность вращения.

Нагрузка – осесимметричная, распределенная по поверхности. Предполагается, что оболочка работает лишь на растяжение, не воспринимает изгибающих нагрузок.

Задача о расчете оболочек вращения наиболее просто решается в том случае, когда возможно принять, что напряжения, возникающие в оболочке, постоянны по толщине, и, следовательно, изгиб оболочки отсутствует и оболочка работает лишь на растяжение. Теория оболочек в этом предположении называется безмоментной теорией оболочек.

Если оболочка не имеет резких переходов и жестких защемлений и не нагружена сосредоточенными силами и моментами, то к ее расчету может быть применена безмоментная теория.

При наличии же перечисленных особенностей в местах крепления оболочки и в местах резких изменений формы возникают повышенные напряжения, обусловленные изгибным эффектом. Зона повышенных напряжений остается в большинстве случаев ограниченной и поэтому на достаточном расстоянии расчет можно производить по безмоментной теории.

Чем тоньше оболочка, тем более точный результат дает безмоментная теория.

## 12.1. Определение напряжений в оболочке

*Ключевые слова*

*Оболочка вращения, внутреннее давление, постоянная толщина, радиус кривизны нормального сечения, радиус кривизны меридиана, уравнение Лапласа, меридиональные и тангенциальные напряжения, двухосное напряженное состояние.*

Рассмотрим оболочку вращения (рис. 12.1, а) толщиной  $t$  (рис. 12.1, б), нагруженную внутренним давлением  $p$ .

Парой меридиональных сечений, которые образуют между собой угол  $d\varphi_m$ , и парой конических сечений, нормальных к срединной поверхности оболочки, выделим элемент  $dS_t$ ,  $dS_m$ , представленный на рис. 12.1, б.

В силу осевой симметрии дуга  $dS_t$  является элементом окружности, радиус  $\rho_t$  постоянен на длине  $dS_t$ .

$\rho_t$  – главный радиус, т.е. радиус кривизны нормального сечения, перпендикулярного к дуге меридиана. Он равен отрезку нормали, заключенному между срединной поверхностью и осью симметрии;

$\rho_m$  – радиус кривизны дуги меридиана срединной поверхности.

$t$  – толщина.

$p$  – внутреннее давление.

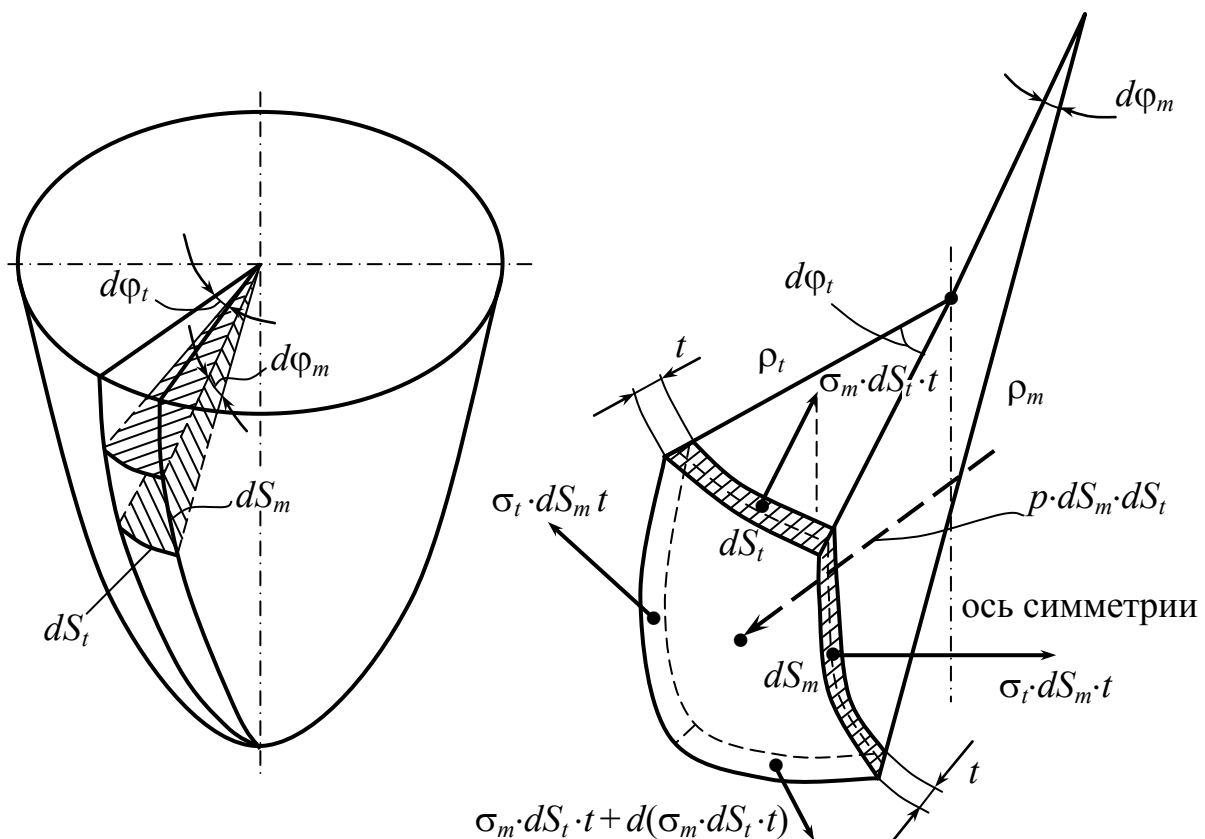


Рис. 12.1

По условиям нагружения касательные напряжения по граням выделенного элемента не возникают.

Составим условие равновесия выделенного элемента в виде суммы проекций всех сил на направление нормали:

$$2\sigma_m \cdot dS_t \cdot t \cdot \sin \frac{d\phi_m}{2} + 2\sigma_t \cdot dS_m \cdot t \cdot \sin \frac{d\phi_t}{2} = p \cdot dS_m \cdot dS_t.$$



$$\sin \frac{d\varphi_m}{2} \approx \frac{d\varphi_m}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dS_m}{\rho_m}; \quad \sin \frac{d\varphi_t}{2} \approx \frac{d\varphi_t}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dS_t}{\rho_t}.$$

$$\frac{\sigma_m \cdot dS_t \cdot dS_m \cdot t}{\rho_m} + \frac{\sigma_t \cdot dS_m \cdot dS_t \cdot t}{\rho_t} = p \cdot dS_m \cdot dS_t.$$

После преобразований в итоге получаем уравнение Лапласа

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{t}. \quad (12.1)$$

Однако в этом уравнении два неизвестных  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$ .

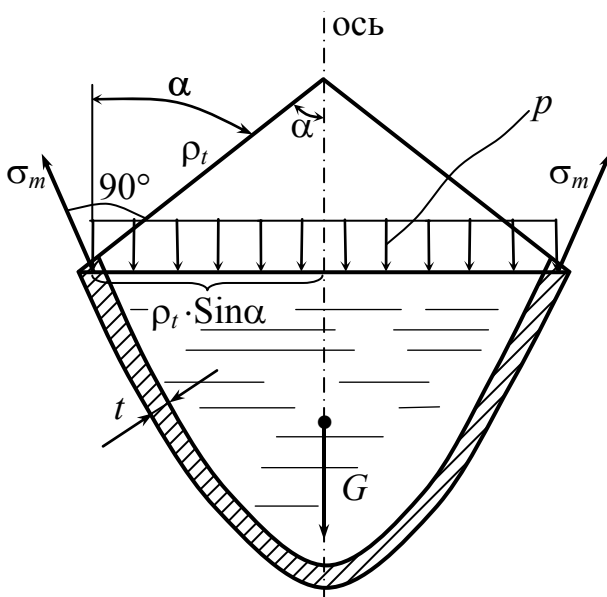


Рис. 12.2

Сформулируем еще одно условие равновесия для части сосуда, которая нами выделена коническим нормальным сечением (рис. 12.2). Отсюда определяется меридиональное напряжение  $\sigma_m$ .

$$\text{дл. окружности} \\ 2\pi(\rho_t \cdot \sin\alpha) \cdot \sigma_m.$$

Проектируем все силы на ось оболочки, получаем

$$t \cdot 2\pi(\rho_t \cdot \sin\alpha) \cdot \sigma_m \cdot \cos(90 - \alpha) - \pi(\rho_t \cdot \sin\alpha)^2 \cdot q - \underset{\text{вес жидк.}}{G} = 0. \quad (12.2)$$

Из этого уравнения определяется  $\sigma_m$ , после чего из уравнения Лапласа (12.1) определяется напряжение  $\sigma_t$ .

Радиальными напряжениями можно пренебречь и считать напряженное состояние двухосным.

При решении практических задач часто пользуются двумя теоремами, которые мы примем без доказательства.

**Теорема 1.** Если на какую-либо поверхность действует равномерно распределенное давление, то независимо от формы поверхности проекция равнодействующих сил давления на заданную

ось равна произведению давления на площадь проекции поверхности на плоскость, нормальную к заданной оси вращения.

**Теорема 2.** Если на какую-либо поверхность действует давление жидкости, то вертикальная составляющая сил давления жидкости равна весу жидкости в объеме  $G$ , расположенном над поверхностью.

**Пример 1.** Шаровой сосуд (рис. 12.3).

$\rho_m = \rho_t = r$ , так как это шар.

$$\sigma_m = \sigma_t = \sigma;$$

$$2 \frac{\sigma}{r} = \frac{p}{t};$$

$$\sigma = \frac{p \cdot r}{2 \cdot t};$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ.}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma \leq [\sigma];$$

$$\sigma_3 = 0, \text{ так как } p \ll \sigma.$$

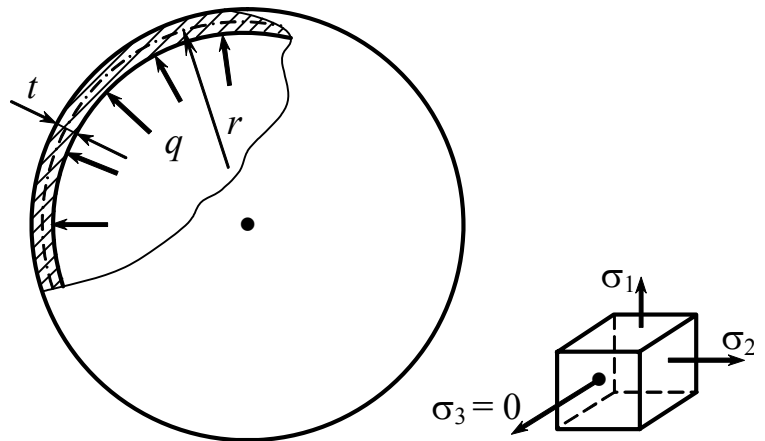


Рис. 12.3

**Пример 2.** Цилиндрический сосуд (рис. 12.4).

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{t};$$

$$\rho_m \rightarrow \infty; \quad \rho_t = r;$$

$$\sigma_t = \frac{p \cdot r}{t}.$$

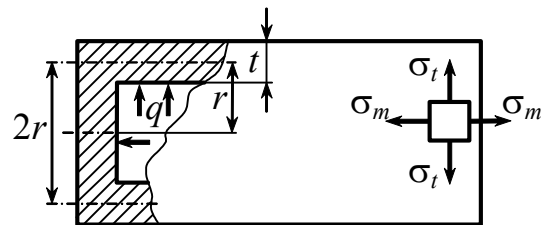


Рис. 12.4

Составим уравнение равновесия для части сосуда (рис. 12.5).

$$p \cdot \pi r^2 - 2\pi \cdot r \cdot t \cdot \sigma_m = 0; \quad \sigma_m = \frac{p \cdot r}{2t}.$$

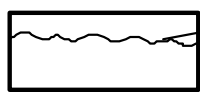


Рис. 12.6

разрушение происходит благодаря действию  $\sigma_t$  (рис. 12.6).

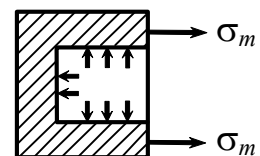


Рис. 12.5

**Пример 3.** Полусферический сосуд радиуса  $R$  и толщины  $t$  заполнен жидкостью с удельным весом  $\gamma$  (рис. 12.7). Определить напряжения в сосуде и построить эпюры  $\sigma_m$ ,  $\sigma_t$  и  $\sigma_{\text{экв}}$ .

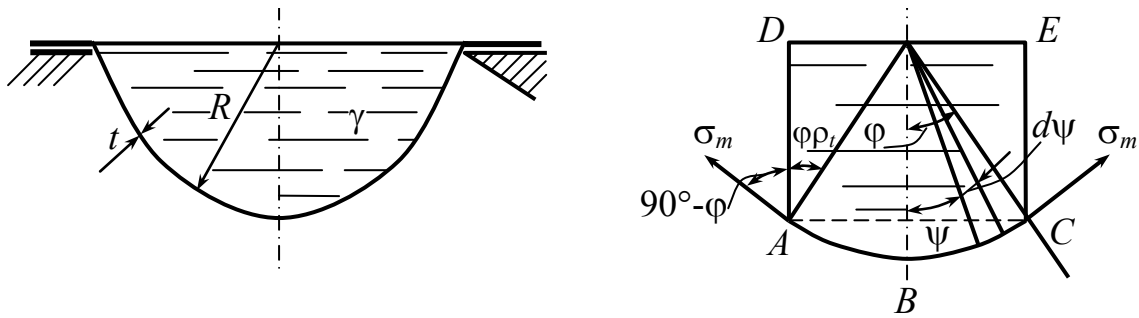


Рис. 12.7

Нормальным коническим сечением с углом  $2\phi$  при вершине отсекаем нижнюю часть сферической оболочки и составляем для нее условие равновесия, где  $F$  – равнодействующая сила давления жидкости, равная весу жидкости в объеме, расположенном выше отсеченной части оболочки.

Введем вспомогательный угол  $\psi$  и определим объем  $ABCED$

$$V = \int_0^{\phi} 2\pi R^3 \sin\psi \cdot \cos^2\psi d\psi,$$

или 
$$V = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos^3\phi),$$

тогда 
$$F = \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot \gamma (1 - \cos^3\phi),$$

$$\sigma_m = \frac{\gamma R^2 (1 - \cos^3\phi)}{3t \sin^2\phi}. \quad (12.3)$$

Обращаемся теперь к уравнению Лапласа (12.1):

$$\rho_m = \rho_t = R, \quad p = \gamma \cdot R \cdot \cos\phi,$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{3t} \left[ 3\cos\phi - \frac{1 - \cos^3\phi}{\sin^2\phi} \right]. \quad (12.4)$$

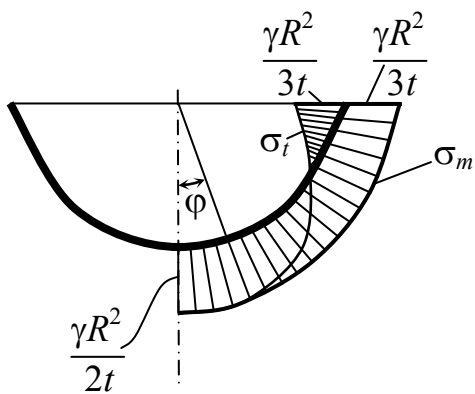


Рис. 12.8

Согласно выражениям (12.3) и (12.4), строим эпюры  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$ , представленные на рис. 12.8. Как видим, напряжения  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$  в нижней точке сферы равны. В верхней точке  $\sigma_t$  имеет отрицательное значение.

**Пример 4.** Определить из условия прочности необходимую толщину стенки сосуда (рис. 12.9).

Дано:  $[\sigma]_p = [\sigma_{сж}] = 100 \text{ МПа}$ ;

$p_0 = 10 \text{ ат} = 10 \text{ МПа}$  – избыточное давление;

$\gamma = 1,17 \text{ г/см}^3$  – удельный вес жидкости;

$R_{ш} = 3,5 \text{ м}$ ;  $h_1 = 1,5 \text{ м}$ ;  $D = 4 \text{ м}$ ;

$H = 3 \text{ м}$ ;  $h_3 = 1,5 \text{ м}$ .

**Решение.** Для решения поставленной задачи нужно знать напряженное состояние во всех точках конструкции с тем, чтобы для расчета выбрать наиболее опасную точку. С этой целью рассчитаем и построим эпюры главных напряжений  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$ .

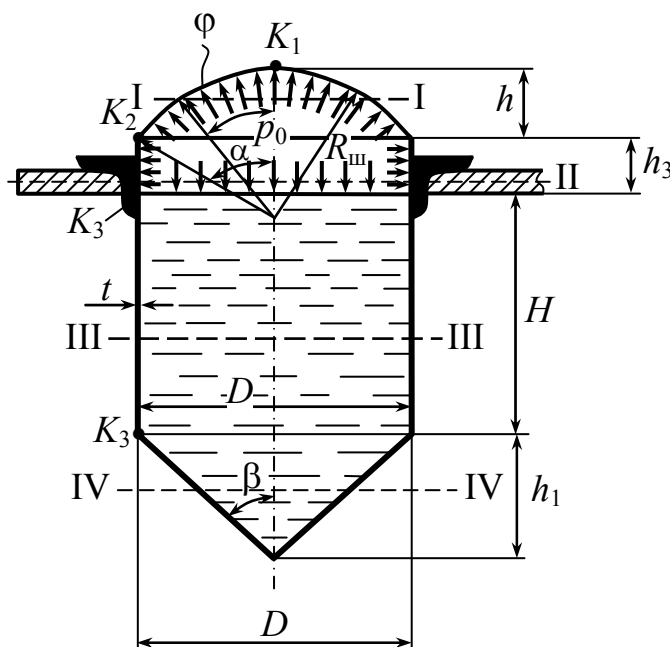


Рис. 12.9

**Крыша.** Сосуд перекрыт сферической оболочкой радиуса  $R_{ш} = 3,5$  м (рис. 12.10).

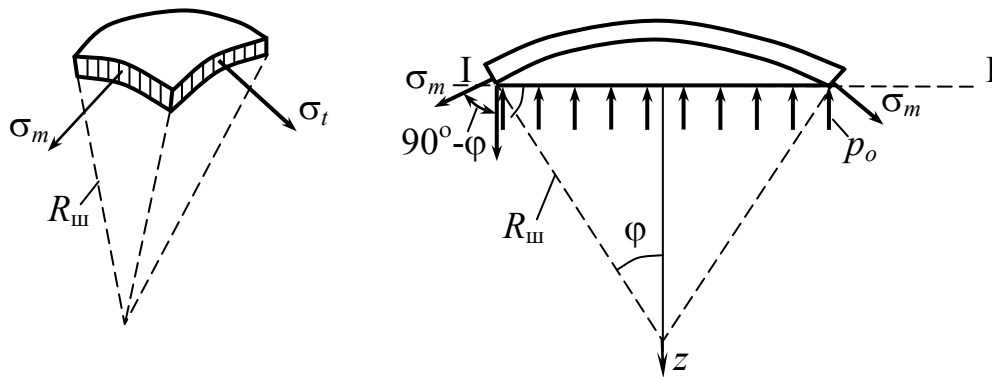


Рис. 12.10

Условие равновесия (уравнение Лапласа (12.1)) дает

$$\frac{\sigma_m}{R_{ш}} + \frac{\sigma_t}{R_{ш}} = \frac{p_0}{t_1},$$

т.е.

$$\sigma_m + \sigma_t = \frac{R_{ш} \cdot p_0}{t_1}, \quad (12.5)$$

$$\rho_m = \rho_t = R_{ш}.$$

Отсечем часть крыши на уровне I–I; для этого стенки разрежем конической поверхностью нормальной к меридиану, а нагрузку (газ) – плоскостью, перпендикулярной к оси вращения.

Составляем уравнение проекций всех сил на вертикаль (весом газа пренебрегаем):

$$\sum Z = \sigma_m \cdot 2\pi(R_{ш} \cdot \sin\phi)t_1 \cdot \cos(90^\circ - \phi) - p_0\pi(R_{ш} \cdot \sin\phi)^2 = 0,$$

откуда

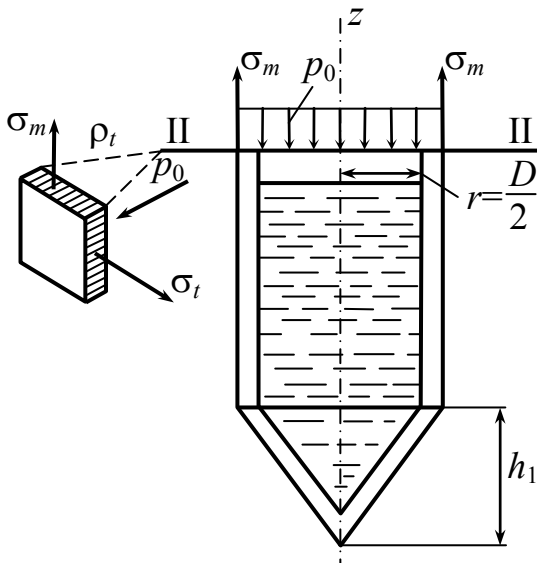
$$\sigma_m = \frac{R_{ш}p_0}{2t_1}. \quad (12.6)$$

Сопоставляя два уравнения (12.5) и (12.6), получаем

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{R_{ш}p_0}{2t_1} = \frac{350 \cdot 10}{2t_1} = \frac{1750}{t_1} = \text{const.}$$

Теперь рассматриваем две части: наджидкостную и поджидкостную на уровне II–II.

1. Для наджидкостной части (рис. 12.11) значение кольцевого



напряжения  $\sigma_t$  получаем из уравнения Лапласа

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p_0}{t_2},$$

$$\rho_m = \infty, \quad \rho_t = r = \frac{D}{2} = 2 \text{ м}, \quad p_0 = 1 \text{ МПа},$$

тогда

$$\sigma_t = \frac{p_0 \rho_t}{t_2} = \frac{10 \cdot 200}{t_2} = \frac{2000}{t_2}.$$

Рис. 12.11

Выражение для меридионального напряжения  $\sigma_m$  получим из равновесия отсеченной части. Подсчитаем вес жидкости.

В цилиндрической части сосуда

$$G_{\text{ц}} = \pi r^2 H \gamma_1 = 3,14 \cdot 2,0^2 \cdot 3,0 \cdot 1,17 = 41,04 \text{ т.}$$

В конической части сосуда

$$G_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 \cdot \gamma_1 = \frac{1}{3} 3,14 \cdot 2^2 \cdot 1,5 \cdot 1,17 = 7,1 \text{ т.}$$

Таким образом,

$$G = 41,04 + 7,1 = 48,14 \text{ т} - \text{вес всей жидкости.}$$

Теперь составляем сумму проекций всех сил на вертикальную ось

$$\sum z = \sigma_m \cdot 2\pi \cdot 200 t_2 - 10\pi \cdot 200^2 - 48,14 \cdot 10^3 = 0.$$

$$\sigma_m = \frac{10 \cdot 3,14 \cdot 4 + 48,14 \cdot 10^3}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^2 t_2} = \frac{1120}{t_2}.$$

2. Рассмотрим поджидкостную часть (рис. 12.12).

$$p_z = p_0 + \overset{\text{давление жидкости}}{(300 - z)\gamma_1}.$$

Кольцевые напряжения  $\sigma_t$  узнаем из уравнения Лапласа

$$\frac{\sigma_m}{\infty} + \frac{\sigma_t}{200} = \frac{p_0 + (300 - z)\gamma_1}{t_2},$$

где  $\rho_m = \infty$ ,

$$\text{откуда } \sigma_t = \frac{200[10 + (300 - z) \cdot 1,17 \cdot 10^{-3}]}{t_2};$$

$$\text{при } z = 300 \text{ см } \sigma_t = \frac{2000}{t_2}; \quad z = 0 \quad \sigma_t = \frac{2070,2}{t_2}.$$

Меридиональное напряжение  $\sigma_m$  определим из уравнения равновесия отсеченной части сосуда

$$\sum z = \sigma_m \cdot 2\pi \cdot 200 \cdot t_2 - p_z \pi \cdot 200^2 - G_1 = 0.$$

$$G_1 = \pi 200^2 \cdot z \cdot 1,17 \cdot 10^{-3} + G_k.$$

Подставляем в уравнение равновесия

$$\sum z = \sigma_m \cdot 2\pi \cdot 200 \cdot t_2 - p_z \pi \cdot 200^2 - \pi 200^2 \cdot z \cdot 1,17 \cdot 10^{-3} - G_k = 0;$$

$$\sum z = \sigma_m \cdot 2\pi \cdot 200 \cdot t_2 - [p_0 + (300 - z)\gamma_1] \cdot \pi \cdot 200^2 - \pi 200^2 \cdot z \cdot 1,17 \cdot 10^{-3} - G_k = 0;$$

$$\sum z = \sigma_m \cdot 2\pi \cdot 200 \cdot t_2 - p_0 \cdot \pi \cdot 200^2 - \overbrace{300 \cdot 1,17 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 200^2}^{G_u} + \\ + \pi \cdot 200^2 \cdot 1,17 \cdot 10^{-3} \cdot z - \pi \cdot 200^2 \cdot z \cdot 1,17 \cdot 10^{-3} - G_k = 0;$$

$$\sum z = \sigma_m \cdot 2\pi \cdot 200 \cdot t_2 - p_0 \pi \cdot 200^2 - G_u - G_k = 0;$$

$$\sigma_m = \frac{1120}{t_2}.$$

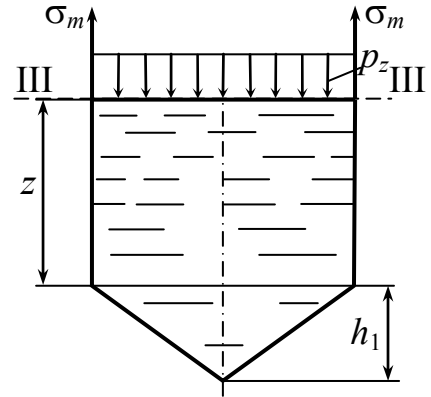


Рис. 12.12

Отсюда видно, что  $\sigma_m$  по всей высоте цилиндра имеет постоянное значение.

**Днище.** В случае конической оболочки  $\rho_m = \infty$  (образующая представляет прямую линию), а  $\rho_t$  – есть функция координаты  $z$ , меняющейся в пределах от 0 до 1,5 м (рис. 12.13).

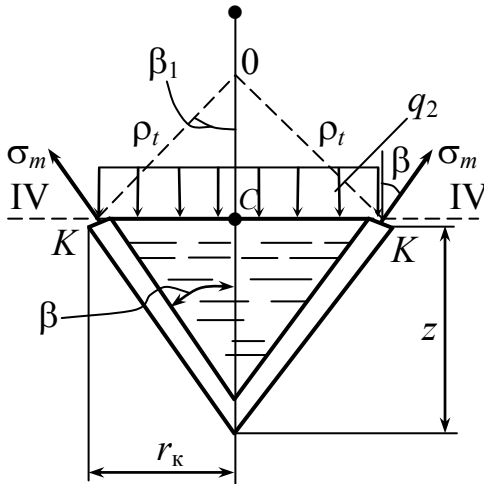


Рис. 12.13

$$tg\beta = \frac{2,0}{1,5} = 1,33, \text{ откуда } \beta = 53^\circ 3'.$$

Радиус широтного круга

$$r_k = KC = \frac{KK}{2} = z \cdot tg\beta = 1,33z.$$

Из треугольника OKC

$$\rho_t = \frac{r_k}{\sin\beta_1} = z \cdot \frac{tg\beta}{\cos\beta} = z \cdot \frac{1,33}{0,5871} = 2,26z.$$

Давление  $p_z$  также зависит от  $z$ :

$$p_z = 10 + (450 - z) \cdot 1,17 \cdot 10^{-3}.$$

$\sigma_t$  определяем из уравнения Лапласа

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{10 + (450 - z) \cdot 1,17 \cdot 10^{-3}}{t_3},$$

учитывая, что  $\rho_m = \infty$ , получаем

$$\sigma_t = \frac{\rho_t [10 + (450 - z) \cdot 1,17 \cdot 10^{-3}]}{t_3} = \frac{2,26 \cdot z [10 + (450 - z) \cdot 1,17 \cdot 10^{-3}]}{t_3}.$$

Отсюда видно, что  $\sigma_t$  меняется по параболическому закону. С помощью этого выражения получим, что при  $z = 0,75$  м  $\sigma_t \cdot t_3 = 176$  Н/м, при  $z = 1,5$  м  $\sigma_t \cdot t_3 = 350$  Н/м, при  $\sigma_t = 0$   $z = 0$ .

Меридиональное напряжение  $\sigma_m$  узнаем из уравнения равновесия отсеченной части

$$\sum z = \sigma_m \cdot 2\pi r_k t_3 \cdot \cos\beta - p_z \pi r_k^2 - G_2 = 0,$$

где  $G_2$  – вес жидкости в отсеченной части сосуда



$$G_2 = \frac{1}{3} \pi r_k^2 z \gamma_1 = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 1,33^2 z^3 \cdot 1,17 \cdot 10^{-3} = 2,16 z^3 \cdot 10^{-3}.$$

Подставляя это выражение, а также учитывая, что

$$\sum z = \sigma_m \cdot 2\pi \cdot r_k t_3 \cdot \cos\beta - p_z \pi r_k^2 - \frac{1}{3} \pi r_k^2 z \gamma = 0;$$

$$r_k = 1,33z;$$

$$\cos\beta = 0,5871;$$

$$p_z = 10 + (450 - z) \cdot 1,17 \cdot 10^{-3}.$$

Получаем следующее выражение для меридионального напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{0,39 \cdot 10^{-3} z^2 + [10 + (450 - z) \cdot 1,17 \cdot 10^{-3}] \cdot 1,33z}{2 \cdot 0,5871 t_3} = \\ &= \frac{0,33 \cdot 10^{-3} z^2 + [10 + (450 - z) \cdot 1,17 \cdot 10^{-3}] \cdot 1,13z}{t_3}. \end{aligned}$$

С помощью этого выражения получено, что:

$$\sigma_m \cdot t_3 = 87,78 \text{ Н/м при } z = 0,75 \text{ м;}$$

$$\sigma_m \cdot t_3 = 175,7 \text{ Н/м при } z = 1,5 \text{ м;}$$

$$\sigma_m \cdot t_3 = 0 \text{ при } z = 0.$$

$$\begin{aligned} \sigma_m \cdot t_3 &= 0,33 \cdot 75^2 \cdot 10^{-3} + [10 + (450 - 75) \cdot 1,17 \cdot 10^{-3}] \cdot 1,13 \cdot 75 = \\ \text{при } z=0,75 & \\ &= 1,85 + 876 = 87,78 \text{ Н/м.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_m \cdot t_3 &= 0,33 \cdot 150^2 \cdot 10^{-3} + [10 + (450 - 150) \cdot 1,17 \cdot 10^{-3}] \cdot 1,13 \cdot 150 = \\ \text{при } z=1,5 & \\ &= 7,4 + 1750 = 175,7 \text{ Н/м.} \end{aligned}$$

**Определение толщины стенки.** Ограничимся расчетом толщины стенки для конического днища (рис. 12.14).

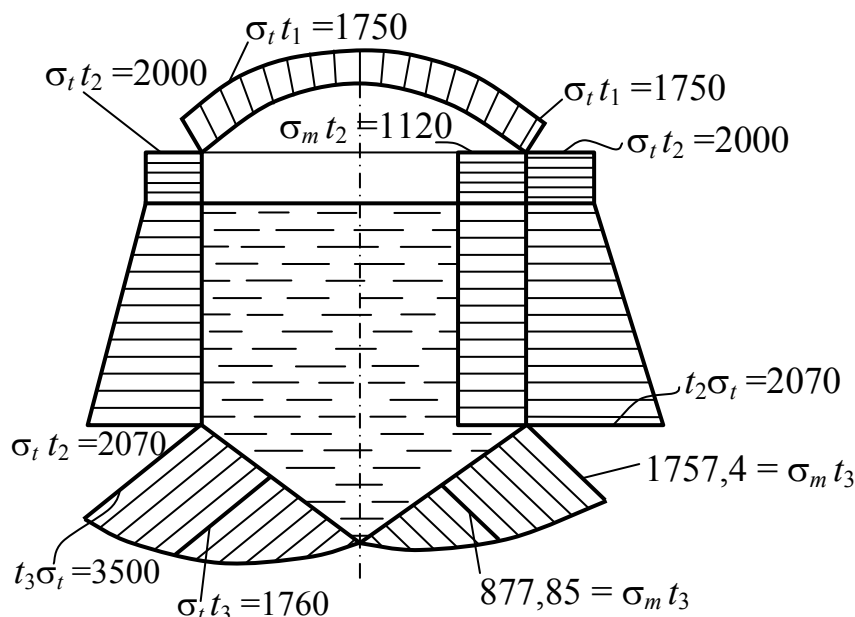


Рис. 12.14

Так как опасная точка находится в условиях сложного напряженного состояния, то нужно воспользоваться той или иной теорией прочности.

$$\sigma_t > \sigma_m > 0, \quad \sigma_{\text{ЭКВ}} = [\sigma], \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{I}} = \sigma_1 = \sigma_t,$$

получаем  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t \leq [\sigma],$

$$t_3 \geq \frac{3500}{1000} = 3,5 \text{ см} = 35 \text{ мм}.$$

### Контрольные вопросы

1. Какие окружающие нас тела относятся к оболочкам?
2. Какие оболочки называют осесимметричными?
3. Назовите элементы конструкций и сооружений, расчет которых сводится к схеме осесимметричной оболочки.
4. Какая теория оболочек называется безмоментной теорией оболочек?

5. На каких допущениях базируется расчет сосудов по безмоментной теории оболочек?
6. Как влияет толщина оболочки на результаты расчета по безмоментной теории?
7. Что представляет собой уравнение Лапласа?
8. Почему при расчете тонкостенных сосудов не учитываются радиальные напряжения?
9. Какие уравнения используются для определения главных напряжений в тонкостенных сосудах?
10. Для какого сосуда можно определить главные напряжения непосредственно из уравнения Лапласа?
11. Какие напряжения являются более опасными для замкнутого цилиндрического тонкостенного сосуда, нагруженного внутренним давлением?
12. Какие две теоремы используют при решении практических задач расчета тонкостенных оболочек?
13. При каком соотношении диаметров сферического и цилиндрического сосудов, нагруженных одинаковым внутренним давлением, они будут равнопрочны?
14. Как записывается условие прочности при расчете тонкостенных оболочек?
15. Почему тонкостенные трубы, под действием внутреннего давления, разрушаются по длине трубы?

## 13. Устойчивость сжатых стержней

### 13.1. Устойчивое и неустойчивое упругое равновесие

*Ключевые слова*

*Устойчивое, неустойчивое упругое равновесие, критическое состояние, критическая нагрузка, потеря устойчивости, запас устойчивости, коэффициент запаса устойчивости, условие устойчивости.*

Упругое равновесие будет устойчивым, если деформированное тело при любом малом отклонении от состояния равновесия стремится возвратиться к первоначальному состоянию и возвращается к нему после удаления внешнего воздействия, нарушившего первоначальное равновесное состояние. Упругое равновесие будет неустойчивым, если деформированное тело, будучи выведенным из него каким-либо воздействием, приобретает стремление продолжать деформироваться в направлении данного ему отклонения и после удаления воздействия в исходное состояние не возвращается. Между этими двумя состояниями равновесия существует переходное состояние, называемое критическим, при котором деформированное тело находится в безразличном равновесии: оно может сохранить первоначально приданную ему форму, но может и потерять ее от самого незначительного воздействия.

Устойчивость формы равновесия деформированного тела зависит от величины приложенных к нему нагрузок. Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы тела, называется критической и обозначается через  $F_{кр}$ .

1) Если  $F < F_{кр.}$ , то стержень работает как на простое сжатие. Деформации по величине весьма незначительны и нарастание их происходит почти незаметно на глаз (рис. 13.1).

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}; \quad \sigma^0 = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{в} = \sigma_{пч.} \\ \sigma_{т} \end{array} \right\}.$$

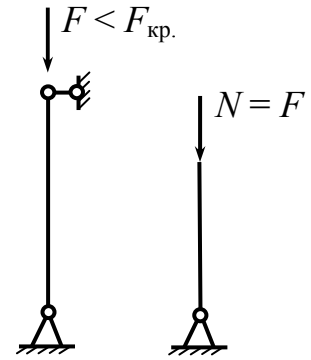


Рис. 13.1

Особая опасность разрушения вследствие потери устойчивости (рис. 13.2) заключается в том, что она происходит внезапно и при низких значениях напряжений, когда прочность элемента еще далеко не исчерпана. Для обеспечения определенного запаса устойчивости, необходимо к условию прочности  $\sigma = F/A \leq [\sigma]$  добавить еще условие устойчивости  $\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_y]$ , где  $[\sigma_y]$  – допускаемое напряжение на устойчивость, равное критическому, деленному на коэффициент запаса устойчивости, т.е.  $[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр.}}{n_y}$ .

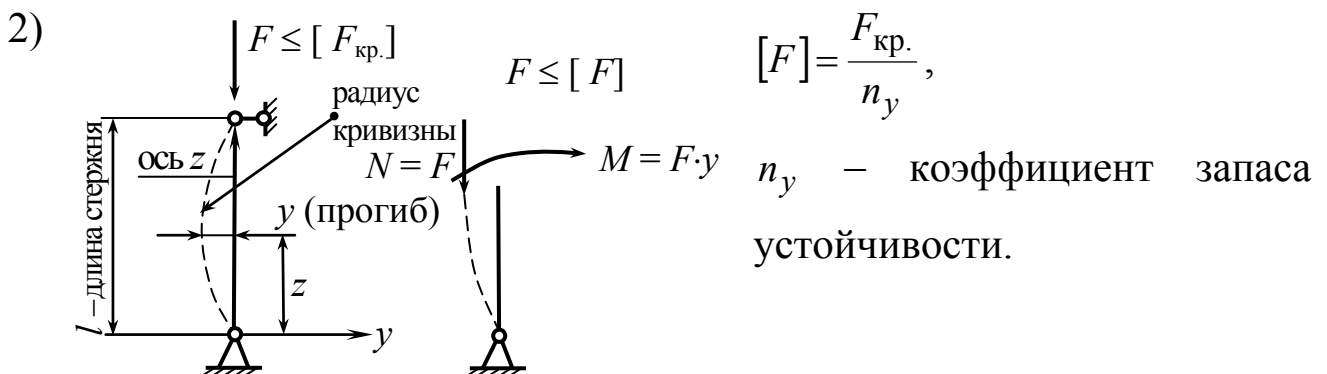


Рис. 13.2

В этом случае расчет стержня на простое сжатие не достаточен, так как стержень работает на сжатие и изгиб, а от их совокупности действия стержень может разрушиться.

### 13.2. Формула Эйлера для определения $F_{кр.}$ (Задача Эйлера)

*Ключевые слова*

*Стержень, шарнирное закрепление, продольный изгиб, критическая сила, предел пропорциональности, дифференциальное уравнение, упругая линия, число полуволн, формула Эйлера, наименьшая жесткость.*

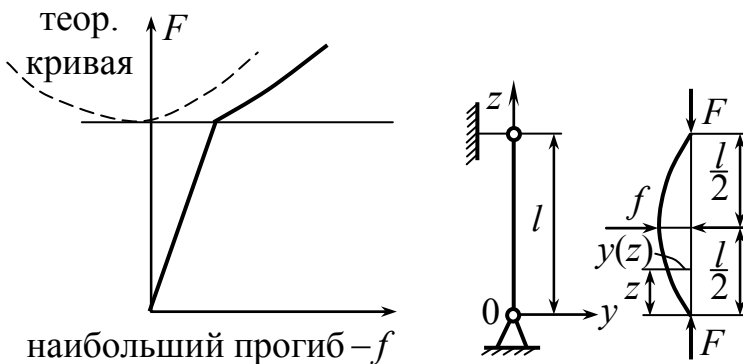


Рис. 13.3

Предположим, что под действием силы  $F$ , величина которой несколько превышает  $F_{кр.}$ , стержень с шарнирно закрепленными концами слегка изогнулся (рис. 13.3).

Рассмотрим только продольный изгиб. Предположим, что критическая сила  $F_{кр.}$  не вызывает в стержне напряжений, превышающих предел пропорциональности, и что рассматриваются только малые отклонения от прямолинейной формы. Тогда для определения критической силы можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением упругой линии:

$$E \cdot I \frac{d^2 y}{dz^2} = M(z); \quad E \cdot I_{\min} \cdot \ddot{y} = -F \cdot y.$$

Знак ( - )  $\begin{cases} \text{прогиб отрицательный, кривизна положительная.} \\ \text{прогиб положительный, кривизна отрицательная.} \end{cases}$

$$\ddot{y} + \frac{F}{E \cdot I} \cdot y = 0.$$

$$\ddot{y} + k^2 y = 0. \quad (13.1)$$

$$k = \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}}. \quad (13.2)$$

Мы получим однородное линейное дифференциальное уравнение, общий интеграл которого, как известно, представляется гармонической функцией

$$y = a \cdot \sin kz + b \cdot \cos kz.$$

Постоянные  $a$  и  $b$  должны быть подобраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия

$$y_{z=0} = 0. \quad b = 0,$$

тогда  $y = a \cdot \sin kz$  – в конкретном случае.

$$y_{z=l} = 0; \quad a \cdot \sin kl = 0; \quad a \neq 0; \quad \sin kl = 0,$$

$kl = 0, \pi, 2\pi \dots, n\pi$ , где  $n$  – целое число,

$$\text{т.е. } kl = n \cdot \pi; \quad k = \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} = \frac{\pi}{l} \cdot n; \quad F = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot n^2;$$

здесь  $n$  – представляет собой число полуволен синусоиды, располагающихся на длине изогнутого стержня,  $F$  – критическое значение силы.

$$F_{\min}^{(n=1)} = F_{\text{кр.}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (13.3)$$

$$F_{\text{кр.}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad - \quad \text{формула Эйлера для определения } F_{\text{кр.}}$$

при потере устойчивости прямолинейной формы равновесия сжимаемого стержня, шарнирно закрепленного.

Выпучивание происходит в плоскости наименьшей жесткости. Поэтому в формуле (13.3) нужно использовать  $I_{\min}$ , меньший из главных моментов инерции поперечного сечения стержня. Стержень всегда изогнется по наименьшему числу полуволен, допускаемому его опорными устройствами.

Обобщим эту формулу для различных способов закрепления.

### 13.3. Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы

*Ключевые слова*

*Стержень сжатый, различные способы закрепления, приведенная длина, коэффициент приведения длины.*

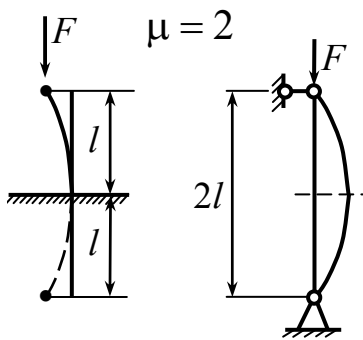


Рис. 13.4

1) Стержень длиной  $l$ , у которого один конец жестко заделан (рис. 13.4), зеркально продлим стержень,

$$F_{\text{кр.}} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}.$$

После потери устойчивости стержень ведет себя подобно двум с шарнирным закреплением.

Ось стержня имеет вид полуволны синусоиды.

2) Стержень длиной  $l$ , у которого оба конца жестко заделаны (рис. 13.5),

$$F_{\text{кр.}} = \frac{\pi^2 EI}{(0,5l)^2}.$$

После потери устойчивости стержня, вследствие симметрии, средняя часть его длиной  $l/2$  будет работать в тех же условиях, что и стержень при шарнирно опертых концах.

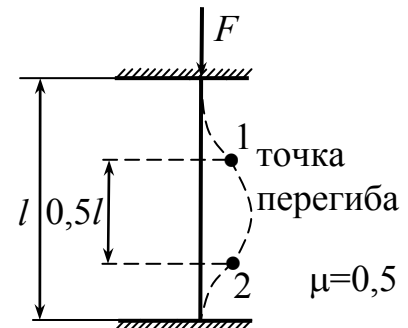


Рис. 13.5

3) Стержень длиной  $l$ , у которого один конец жестко заделан, другой шарнирно закреплен (рис. 13.6),

$$F_{\text{кр.}} = \frac{\pi^2 EI}{(0,7l)^2}.$$

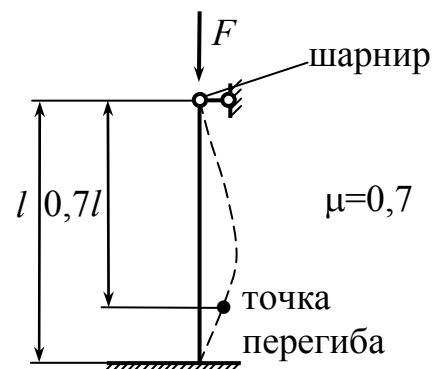


Рис. 13.6



Объединяя эти три случая,

$$F_{\text{кр.}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2},$$

где  $l \cdot \mu$  – приведенная длина;  $\mu$  – коэффициент приведения длины;  $l$  – фактическая длина.

$l_{\text{пр.}} = \mu l$  – это понятие впервые было введено Ф. С. Ясинским.

### 13.4. Пределы применимости формулы Эйлера

*Ключевые слова*

*Закон Гука, предел пропорциональности, критические напряжения, радиус инерции, гибкость стержня, предельная гибкость.*

Вывод формулы Эйлера основан на применении дифференциального уравнения упругой линии. Поэтому воспользоваться этой формулой можно лишь в том случае, если справедлив закон Гука, т.е. пока

$$\sigma_{\text{кр.}} = \frac{F_{\text{кр.}}}{A} \leq \sigma_{\text{пц.}},$$

где  $A$  – брутто-площадь.

Местные ослабления в виде отверстий, выточек, канавок и т.п. (рис. 13.7) на общую деформацию не влияют. Поэтому при определении  $F_{\text{кр.}}$  не учитывают площади местных ослаблений.

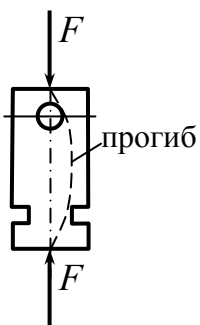


Рис. 13.7

$$\sigma_{\text{кр.}} = \frac{F_{\text{кр.}}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E \cdot \frac{I_{\text{min}}}{A}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E i_{\text{min}}^2}{(\mu \cdot l)^2},$$

где  $i_{\text{min}}$  – радиус инерции  $i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{I_{\text{min}}}{A}}$ .

$$\sigma_{\text{кр.}} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i_{\text{min}}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad \boxed{\sigma_{\text{кр.}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}, \quad (13.4)$$

где  $\lambda$  – гибкость стержня,  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}}$ .

Предел применимости формулы Эйлера (13.4). Формула Эйлера применима в пределах пропорциональности, т.е.

$$\sigma_{\text{кр.}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц.}}, \quad \lambda_{\text{пред.}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц.}}}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц.}}}}.$$

Формула Эйлера относительно применима для тонких и длинных стержней, а также когда гибкость стержня  $\lambda$  должна быть больше  $\lambda_{\text{пред.}}$ .

**Пример.** Определить из расчета на устойчивость требуемый диаметр трапецеидальной резьбы винта домкрата грузоподъемностью  $F = 5 \cdot 10^4$  Н (рис. 13.8).

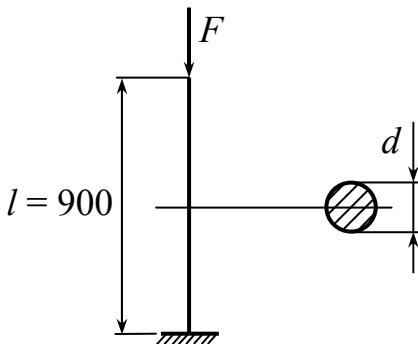


Рис. 13.8

Максимальная высота подъема груза  $l = 0,9$  м. Требуемый коэффициент запаса устойчивости  $[n_y] = 4,0$ . Материал винта сталь 30,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_{\text{пц.}} = 250$  МПа.

Решение.

$$I_{\text{min}} = I \geq \frac{F [n_y] (\mu l)^2}{\pi^2 E}, \quad \mu = 2.$$

$$I \geq \frac{5 \cdot 10^4 \cdot 4,0 (2 \cdot 0,9)^2}{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 0,312 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4 = 31,2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Определяем диаметр винта  $d_1$  из формулы  $I = \frac{\pi d_1^4}{64}$ ,

$$d_1 = \sqrt[4]{\frac{64I}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 31,2 \cdot 10^{-8}}{3,14}} = 5,04 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Округляем полученный внутренний диаметр резьбы до ближайшего стандартного значения по таблице ГОСТ 9484-60 и принимаем  $d_1 = 52$  мм.

Вычисляем радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d_1^4}{64 \cdot \frac{\pi d_1^2}{4}}} = \sqrt{\frac{d_1^2}{16}} = \frac{d_1}{4} = 1,3 \text{ см.}$$

Отсюда гибкость стержня домкрата

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 90}{1,3} = 138,$$
$$\lambda_{\text{пред.}} = 3,14 \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{250}} = 91.$$

Так как  $\lambda > \lambda_{\text{пред.}}$ , то формула Эйлера была использована в области ее применения.

### **13.5. Понятие о потере устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности**

*Ключевые слова*

*Формула Эйлера, предел пропорциональности, напряжение текучести, предельная гибкость, критическое напряжение, зависимости Ясинского, коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения, запас устойчивости, гибкость стержня, допускаемое напряжение простого сжатия, допускаемое напряжение устойчивости.*

За пределами применимости формулы Эйлера применяют зависимости Тетмайера – Ясинского (рис. 13.9), полученные им

в результате проведения и обработки большого количества экспериментальных исследований ( $a, b, c, d$  – экспериментальные коэффициенты, которые зависят от материала стержня,  $\sigma_T$  – напряжение текучести).

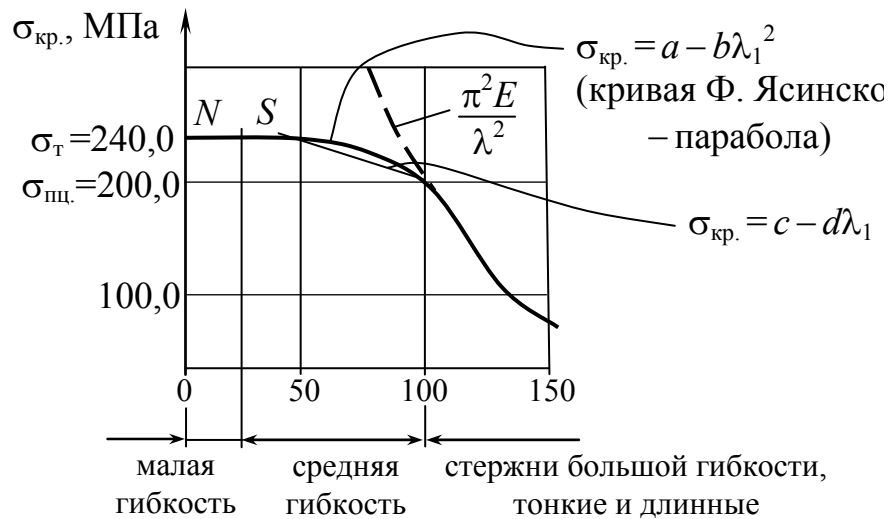


Рис. 13.9

График показывает, что по мере возрастания гибкости  $\sigma_{кр.} \rightarrow 0$ , при уменьшении гибкости  $\sigma_{кр.} \rightarrow \infty$ . Значит, формула Эйлера становится непригодной при гибкости стержня, меньшей предельного значения,  $\sigma_{кр.} \rightarrow \infty$ , зависящего только от свойств материала.

$$\lambda < \lambda_{пред.} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{шц.}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Таким образом, при  $\lambda < \lambda_{пред.}$  формула Эйлера дает завышенные значения критической силы, т.е. всегда переоценивают действительную устойчивость стержня. Поэтому использование формулы Эйлера для стержней, теряющих устойчивость за пределами упругости, не только принципиально неправильно, но и крайне опасно по своим последствиям.

$$\sigma_{кр.} = a - b\lambda_1 + c\lambda_1^2 = \sigma_{пред.},$$

где  $\sigma_{пред.}$  – предельное для данного материала напряжение, равное пределу прочности  $\sigma_{пч}$  для упругих материалов или пределу текучести  $\sigma_T$  для пластичных материалов.

Значения  $\lambda_{пред.}$ , коэффициентов  $a, b, c, d$  берутся из таблиц. Предельная гибкость устанавливает предел применимости формулы Тетмайера – Ясинского.

**Проверка стержней на устойчивость при помощи  
коэффициентов продольного изгиба,  
уменьшения основного допускаемого напряжения**

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр.}}{n_y};$$

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\frac{\sigma_{кр.}}{n_y}}{\frac{\sigma^0}{n}} = \frac{\sigma_{кр.}}{n_y} \cdot \frac{n}{\sigma^0} = \varphi;$$

$$[\sigma_y] = [\sigma] \cdot \varphi; \quad \varphi \leq 1,$$

где  $n_y$  – запас устойчивости;  $[\sigma_y]$  – допускаемое напряжение устойчивости;  $\sigma^0$  – опасное напряжение;  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение простого сжатия;  $\varphi$  – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения при расчете на устойчивость.

$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq [\sigma] \cdot \varphi$  – проверка устойчивости как при простом сжатии, но еще умножается на  $\varphi$ .

Этот коэффициент  $\varphi$  для каждого материала можно вычислить при помощи коэффициента  $\lambda$ :  $\varphi = \varphi(E \text{ и } \lambda)$ , и представить в виде таблиц,  $\varphi$  берется из таблиц. С увеличением гибкости величина  $\varphi$  уменьшается.

Коэффициент запаса на устойчивость выбирают выше коэффициента запаса на прочность и  $n_y$  принимается для стали от 1,8 до 3,5, для чугуна от 5,0 до 5,5, для дерева от 2,8 до 3,2 и т.д.

Особо важна проверка на устойчивость в авиационной технике.

На рис. 13.10 представлена потеря устойчивости оболочки под действием внутреннего давления.

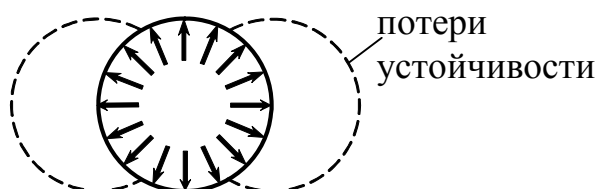


Рис. 13.10

**Пример 1.** Подобрать сечение шарнирно-опертой по концам чугунной трубчатой колонны, несущей сжимающую нагрузку  $F = 85 \cdot 10^4$  Н при отношении внутреннего диаметра к наружному  $d/D = 0,6$ . Длина колонны  $l = 4,8$  м. Основное допускаемое напряжение на сжатие чугуна принято  $[\sigma] = 120$  МПа.

Для выполнения расчета по подбору сечения выразим площадь  $A$  и радиус инерции  $i$  через диаметр  $D$ :

$$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi}{4}(D^2 - 0,36D^2) = 0,503D^2, \quad (13.5)$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64 \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)}} = \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{16}} = 0,291D. \quad (13.6)$$

В условии устойчивости

$$\sigma_y = \frac{F}{\varphi A_{\text{бр}}} \leq [\sigma]. \quad (13.7)$$

Нам не известны ни площадь  $A_{\text{бр}}$ , ни коэффициент снижения допускаемых напряжений  $\varphi$ . Поэтому одной из этих величин необходимо предварительно задаться. Для первого приближения зададимся коэффициентом  $\varphi = 0,5$ , тогда

$$A_{\text{бр}} \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]} = \frac{85 \cdot 10^4}{0,5 \cdot 120 \cdot 10^6} = 142 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Диаметр по первому приближению из (13.5)

$$D_1 = \sqrt{\frac{142 \cdot 10^{-4}}{0,503}} = 19 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Радиус инерции из (13.6)

$$i_1 = 0,291 \cdot D_1 = 0,291 \cdot 19 \cdot 10^{-2} = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

$$\text{Гибкость } \lambda_1 = \frac{\mu l}{i_1} = \frac{4,8}{5,5 \cdot 10^{-2}} = 87,5.$$

По таблице путем интерполяции между  $\lambda = 80$  и  $\lambda = 90$  вычисляем  $\varphi_1 = 0,215$ . Расчетные напряжения по формуле (13.7) будут

$$\sigma_y = \frac{F}{\varphi_1 A_{\text{бр}}} = \frac{85 \cdot 10^4}{0,215 \cdot 142 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 280 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Сечение условию устойчивости не удовлетворяет. Поэтому для второго приближения примем диаметр  $D_2 = 25 \cdot 10^{-2}$  м.

Площадь сечения

$$A_2 = 0,503 D_2^2 = 0,503 (25 \cdot 10^{-2})^2 = 314 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Радиус инерции  $i_2 = 0,291 \cdot 25 = 10,2 \cdot 10^{-2}$  м.

$$\text{Гибкость } \lambda_2 = \frac{\mu l}{i_2} = \frac{4,8}{10,2 \cdot 10^{-2}} = 47 \text{ и } \varphi = 0,654.$$

Напряжения

$$\sigma_y = \frac{F}{\varphi A_{\text{бр}}} = \frac{85 \cdot 10^4}{0,654 \cdot 314 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 41 \text{ МПа} \ll 120 \text{ МПа.}$$

При диаметре  $D_1 = 19 \cdot 10^{-2}$  м напряжения значительно выше допускаемых, а при  $D_2 = 25 \cdot 10^{-2}$  м – значительно ниже. Попробуем

для третьего приближения с диаметром  $D = 22 \cdot 10^{-2}$  м. В этом случае  $A = 0,503(22 \cdot 10^{-2})^2 = 245 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>;  $i = 0,291 \cdot 22 \cdot 10^{-2} = 6,4 \cdot 10^{-2}$  м;

$$\lambda = \frac{4,8}{6,4 \cdot 10^{-2}} = 75; \quad \varphi = 0,30 \text{ и расчетные напряжения}$$

$$\sigma_y = \frac{85 \cdot 10^4}{0,30 \cdot 245 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 115 \text{ МПа} < 120 \text{ МПа.}$$

На этом и остановимся, недонапряжение менее 5 %.

**Пример 2.** Определить допускаемую сжимающую силу для шарнирно закрепленного стержня. Длина стержня  $l = 2$  м. Поперечное сечение двутавр № 30а, для которого  $i_{\min} = 2,95$  см,  $A = 49,9$  см<sup>2</sup>, материал – Сталь 2. Допускаемое напряжение на сжатие  $[\sigma]_c = 200$  МПа.

Производим подсчет гибкости

$$\frac{\mu l}{i} = \frac{200}{2,95} = 67,8.$$

Из таблицы находим  $\varphi = 0,82$ . Далее определяем допускаемую нагрузку

$$\frac{F}{A} = [\sigma]_c \cdot \varphi, \quad F = A \cdot [\sigma]_c \cdot \varphi = 49,9 \cdot 10^{-4} \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,82 = 820 \text{ кН.}$$

**Пример 3.** Подобрать размеры поперечного сечения стойки, заземленной одним концом, а на другом свободном конце нагруженной силой  $F = 20$  кН. Дано: длина 1 м, материал – дерево, допускаемое напряжение  $[\sigma]_c = 20$  МПа. Поперечное сечение – квадратное со стороной  $a$ .

Задача решается путем последовательных проб, поскольку гибкость стержня неизвестна. Если бы стержень был совсем коротким, размер  $a$  определялся бы из обычного соотношения



$$\frac{F}{a^2} = [\sigma]_c, \quad a^2 = \frac{20000}{20 \cdot 10^6}, \quad a = 3,16 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Теперь, задаваясь несколькими значениями  $a$ , большими  $3,16 \cdot 10^{-2}$  м, подсчитываем гибкость  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{\sqrt{I/A}} = \frac{2l\sqrt{12}}{a}.$$

Затем, как в предыдущей задаче, для нескольких  $a$  находим допускаемую нагрузку  $F$ . То значение  $a$ , при котором эта нагрузка окажется равной заданной (20 кН), и будет искомым. В рассматриваемой задаче оказывается  $a = 6,3 \cdot 10^{-2}$  м.

### 13.6. Энергетический метод определения критических нагрузок

*Ключевые слова*

*Энергетический метод, потенциальная энергия изгиба, стержня, работа поперечной силы, работа продольной силы, малые прогибы, малые перемещения, форма изогнутой оси стержня, граничные условия, критическая сила.*

Метод определения критических нагрузок путем решения дифференциальных уравнений упругой линии балки далеко не всегда удобен, а в ряде случаев приводит к непреодолимым трудностям вычислительного характера. Поэтому при решении многих задач более предпочтительными оказываются приближенные способы определения критических нагрузок, менее точные, но более простые. Среди этих способов наибольшее распространение получил энергетический метод.

Положим, стержень сжат силой  $F < F_{кр.}$  (рис. 13.11), тогда он находится в устойчивом положении равновесия. Его можно изогнуть, прикладывая к нему поперечную нагрузку ( $F_1$  – сила).

При переходе стержня от прямолинейной формы равновесия к криволинейной силы  $F$  и  $F_1$  совершат работу, в результате чего увеличится потенциальная энергия изгиба стержня.

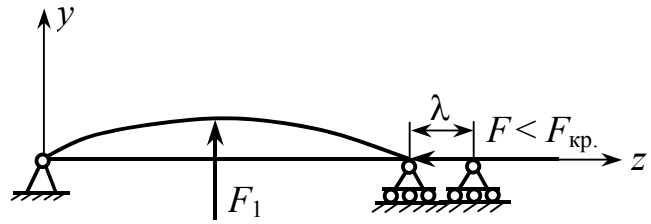


Рис. 13.11

Энергетический баланс системы можно выразить в следующем виде:

$$U_{\text{изг.}} = F \cdot \lambda + W(F_1), \quad (13.8)$$

где  $W(F_1)$  – работа поперечной силы  $F_1$ ;  $\lambda$  – перемещение точки приложения продольной силы. Сила  $F$  постоянная, поэтому множителя  $\frac{1}{2}$  нет.

Одна и та же энергия может быть получена при различных соотношениях  $F$  и  $F_1$ . Из соотношения (13.8) видно, что при  $U = \text{const}$  большей силе  $F$  соответствует меньшее значение поперечной силы  $F_1$ . Возможен случай, когда переход от прямолинейной формы равновесия к криволинейной произойдет без приложения добавочных поперечных сил. Это имеет место, как мы знаем, при критическом значении продольной силы. Уравнение (13.8) примет вид

$$U_{\text{изг.}} = F_{\text{кр.}} \cdot \lambda. \quad (13.9)$$

В обычных системах, например при изгибе балок, поперечные нагрузки производят работу на прогибах, являющихся перемещениями первого порядка малости. Полученное выражение имеет своей отличительной особенностью то, что в нем учитывается работа внешних сил на перемещениях второго порядка малости  $\lambda$ . Именно это обстоятельство и характерно для задач, связанных с явлениями потери устойчивости.

Выразим  $U_{\text{изг.}}$  и  $\lambda$  через поперечные перемещения стержня  $y$  (рис. 13.12).

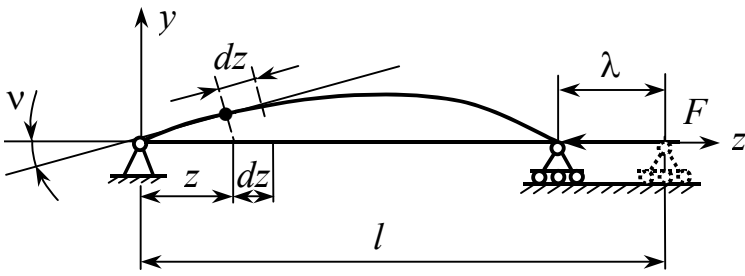


Рис. 13.12.

Энергия изгиба выражается через изгибающий момент следующим образом:

$$U_{\text{изг.}} = \int_0^l \frac{M_{\text{изг.}}^2 dz}{2EI}.$$

Учитывая, что  $M_{\text{изг.}} = EIy''$ , получим

$$U_{\text{изг.}} = \frac{1}{2} \int_0^l EIy''^2 dz.$$

Перемещение  $\lambda$  может быть определено как разность между длиной  $l$  и проекцией изогнутой оси упругой линии на прямую, соединяющую опоры.

$$d\lambda = dz - dz \cos v = dz(1 - \cos v) = dz 2 \cdot \sin^2 \frac{v}{2} = \frac{v^2}{2} dz.$$

Но при малых прогибах  $v = y'$ , поэтому

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dz;$$

$$F_{\text{кр.}} = \frac{\int_0^l EIy''^2 dz}{\int_0^l y'^2 dz}. \quad (13.10)$$

Если функция  $y$  известна, то  $F_{\text{кр.}}$  определяется без труда. Например, для шарнирно закрепленного стержня, как мы знаем,

$$y = C \cdot \sin \frac{\pi z}{l};$$

$$y' = C \frac{\pi}{l} \cdot \cos \frac{\pi z}{l};$$

$$y'' = -C \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sin \frac{\pi z}{l};$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{\pi z}{2l} - \frac{\sin \frac{\pi z}{l} \cdot \cos \frac{\pi z}{l}}{2};$$

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{\pi z}{2l} + \frac{\sin \frac{\pi z}{l} \cdot \cos \frac{\pi z}{l}}{2};$$

$$F_{\text{кр.}} = \frac{\int_0^l \left( C \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l} \right)^2 EI dz}{\int_0^l \left( C \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l} \right)^2 dz} = \frac{C^2 \frac{\pi^4}{l^4} EI \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz}{C^2 \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Таким образом, при энергетическом методе определения  $F_{\text{кр.}}$  нужна форма изогнутой оси стержня  $y = f(z)$ .

Существует три способа выбора  $y = f(z)$ :

- 1) подбирают произвольно,
- 2) задаются полиномом

$$y = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

3) используют кривую, полученную из подходящей задачи, при подходящей нагрузке.

Хорошая или плохая кривая определяется по тому, как удовлетворяются граничные условия. Кривая считается хорошей, если граничные условия удовлетворяются с точностью до второй производной.

В действительности функция “ $y$ ” остается неизвестной до тех пор, пока не решено дифференциальное уравнение упругой линии. Однако функция “ $y$ ” может быть задана приближенно. При этом погрешности в форме упругой линии мало сказываются на величине критической силы.

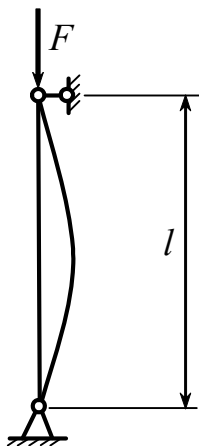


Рис. 13.13

Пусть стержень (рис. 13.13) изгибается по дуге параболы  $y = Cz(l - z)$ .

Граничные условия:  $z = 0; \quad y = 0;$

$z = l; \quad y = 0.$

Выбранная функция не очень удачна, поскольку  $y'' = \text{const}$ . Это означает, что кривизна при потере устойчивости постоянна, в то время как на самом деле она будет наибольшая посередине и равная нулю по концам стержня.

$$y' = C(l - z - z) = C(l - 2z); \quad y'' = -C \cdot 2.$$

$$F_{\text{кр.}} = \frac{\int_0^l EI \cdot 4 \cdot C^2 dz}{\int_0^l C^2 (l - 2z)^2 dz} = \frac{4EI}{l^2 \cdot l - \int_0^l 4lzdz + \int_0^l 4z^2 dz} = \frac{4EI}{l^3 - 2l^3 + \frac{4l^3}{3}} = \frac{12EI}{l^2}.$$

Погрешность 12 %.

**Точность** может быть увеличена, если учесть характер изменения изгибающего момента по длине стержня. Можно, например, принять, что по закону квадратичной параболы изменяется не прогиб, а кривизна.

Тогда  $y'' = Cz(l - z);$

$$y' = C \left( \frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} + a \right).$$

Постоянную  $a$  подбираем так, чтобы  $y'$  обратилась в нуль посередине стержня. Тогда

$$y' = \frac{1}{12} C(6lz^2 - 4z^3 - l^3).$$

$$y' = C \left( \frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} + a \right) = 0 \quad \text{при} \quad z = \frac{l}{2},$$

отсюда  $\frac{l^3}{8} - \frac{l^3}{24} + a = 0,$   $a = -\frac{l^3}{12}$ ,

и 
$$F_{\text{кр.}} = \frac{\int_0^l Ely''^2 dz}{\int_0^l y'^2 dz} = \frac{\int_0^l (Cz(l-z))^2 dz}{\int_0^l \left[ \frac{C}{12} (6lz^2 - 4z^3 - l^3) \right]^2 dz} = \frac{168}{17} \cdot \frac{EI}{l^2}.$$

**Ошибка в третьем знаке.**

**Пример 1.**

Определить  $F_{\text{кр}}$  для балки на рис. 13.14.

$$Ely'' = +\frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2};$$

$$y' = \frac{1}{EI} \cdot \overbrace{\frac{ql}{2}}^k \left( \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3l}z^3 + a \right);$$

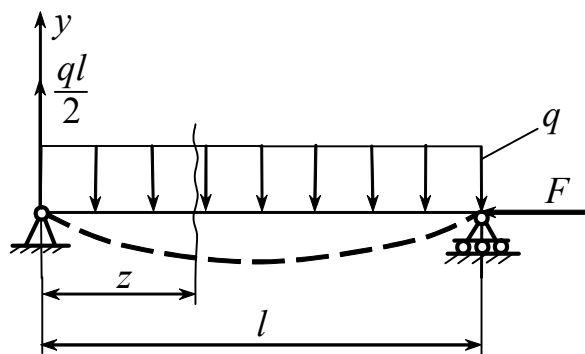


Рис. 13.14

$$z = \frac{l}{2}; \quad y' = 0; \quad a = -!$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{1 \cdot l^2}{24} + a = 0; \quad a = -\frac{l^2}{12};$$

$$y' = \frac{\overbrace{1}^k \cdot ql}{EI} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3l} z^3 - \frac{l^2}{12} \right); \quad y'' = k \left( z - \frac{1}{l} z^2 \right);$$

$$\begin{aligned}
 F_{\text{кр.}} &= \frac{\int_0^l EI \left[ k \left( z - \frac{1}{l} z^2 \right) \right]^2 dz}{\int_0^l \left[ k \left( \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3l} z^3 - \frac{l^2}{12} \right) \right]^2 dz} = \\
 &= \frac{EI k^2 \int_0^l z^2 dz - \int_0^l \frac{2}{l} z^3 dz + \int_0^l \frac{1}{l^2} z^4 dz}{k^2 \int_0^l \left( \frac{1}{4} z^4 + \frac{1}{9l^2} z^6 + \frac{l^4}{144} - 2 \frac{1}{2} z^2 \cdot \frac{1}{3l} z^3 - 2 \frac{1}{2} z^2 \cdot \frac{l^2}{12} + 2 \frac{1}{3l} z^3 \frac{l^2}{12} \right) dz} = \\
 &= \frac{EI \left( \frac{l^3}{3} - \frac{2}{l} \cdot \frac{l^4}{4} + \frac{1}{l^2} \cdot \frac{l^5}{5} \right)}{\frac{l^5}{4 \cdot 5} + \frac{1}{9l^2} \cdot \frac{l^7}{7} + \frac{l^5}{144} - \frac{1}{3l} \cdot \frac{l^6}{6} - \frac{l^2}{12} \cdot \frac{l^3}{3} + \frac{1l^2}{18l} \cdot \frac{l^4}{4}} = \\
 &= \frac{EI l^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right)}{l^5 \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{63} + \frac{1}{144} - \frac{1}{18} - \frac{1}{36} + \frac{1}{72} \right)} = \\
 &= \frac{EI l^3 \left( \frac{10 - 15 + 6}{30} \right)}{l^5 \left( \frac{252 + 80 + 35 - 280 - 140 + 70}{50 \cdot 40} \right)} = \frac{168EI}{17l^2}.
 \end{aligned}$$

**Пример 2.** Определить  $F_{кр}$  для балки на рис. 13.15.

Поскольку сила приложена посередине, интегрирование величины  $\lambda$  следует вести

от  $\frac{l}{2}$  до  $l$

$$F_{кр.} = \frac{\int_0^l EI y''^2 dz}{\int_{\frac{l}{2}}^l y'^2 dz};$$

$$y = C \sin \frac{\pi z}{l},$$

тогда  $y' = C \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l}; \quad y'' = -C \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l};$

$$F_{кр.} = \frac{\int_0^l \left( -C \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l} \right)^2 EI dz}{\int_{\frac{l}{2}}^l \left( C \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l} \right)^2 dz} = \frac{\int_0^l C^2 \frac{\pi^4}{l^4} EI \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz}{\int_{\frac{l}{2}}^l C^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz} =$$

$$= \frac{C^2 \frac{\pi^4}{l^4} EI \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz}{C^2 \frac{\pi^2}{l^2} \int_{\frac{l}{2}}^l \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{\frac{\pi z}{2l} \Big|_0^l - \frac{\sin \frac{\pi z}{l} \cdot \cos \frac{\pi z}{l}}{2} \Big|_0^l}{\frac{\pi z}{2l} \Big|_{\frac{l}{2}}^l + \frac{\sin \frac{\pi z}{l} \cdot \cos \frac{\pi z}{l}}{2} \Big|_{\frac{l}{2}}^l} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}.$$

Итак,  $F_{кр} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}.$

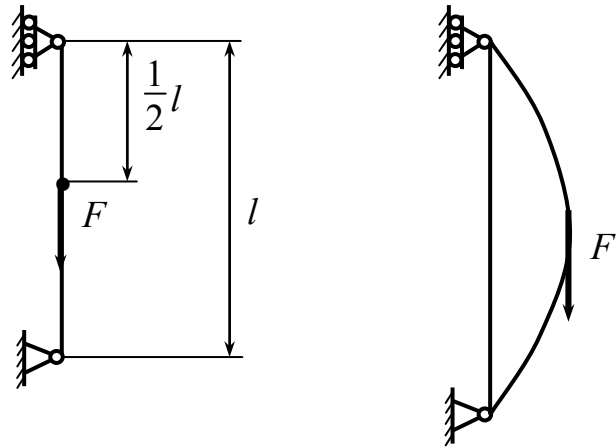


Рис. 13.15



Точное решение 
$$F_{кр.} = \frac{18,7EI}{l^2}.$$

Характерной особенностью энергетического метода является то, что ошибка в определении критических нагрузок всегда имеет один знак. Приближенное значение критической силы оказывается завышенным по сравнению с точным. Объясняется это тем, что, задаваясь приближенно формой упругой линии, мы как бы накладываем на систему лишние связи, заставляем ее деформироваться несвойственным ей образом и тем самым увеличиваем в среднем ее жесткость.

### Контрольные вопросы

1. Какая форма равновесия конструкции называется устойчивой? Что такое критическая сила?
2. Что такое продольный изгиб?
3. Какова опасность разрушения при потере устойчивости?
4. Как определяется критическая сила?
5. Какое влияние на величину критической силы оказывают условия закрепления концов стержня при продольном изгибе?
6. Что такое гибкость стержня?
7. От чего зависит коэффициент приведения длины?
8. Влияют ли местные ослабления площади поперечных сечений на величину критической силы?
9. Можно ли пользоваться формулой Эйлера за пределом пропорциональности материала?
10. Как классифицируются стержни по их гибкости?
11. При каких напряжениях теряют устойчивость стержни большой гибкости? По какой формуле определяется для них критическая сила?

12. При каких напряжениях теряют устойчивость стержни средней гибкости? По какой формуле определяется для них критическая сила?
13. Как записывается условие устойчивости сжатого стержня и какие задачи оно позволяет решать?
14. Какой физический смысл коэффициента продольного изгиба?
15. Как производится оценка надежности стержней, испытывающих продольно-поперечный изгиб?
16. Как изменяется величина коэффициента продольного изгиба при увеличении гибкости стержня?
17. На чем основан энергетический метод определения критических нагрузок?
18. Запишите формулу для определения критической силы, полученную на основе энергетического метода?
19. Какие существуют способы выбора формы изогнутой оси стержня при энергетическом методе определения критической силы?
20. Почему приближенное значение критической силы, полученное при использовании энергетического метода, оказывается завышенным по сравнению с точным?

## Список литературы

1. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов: учебник для вузов. – М.: Наука, 2001. – 512 с.
2. *Биргер И. А., Мавлютов Р. Р.* Сопротивление материалов: учебник для вузов. – М.: Изд-во МАИ, 1994. – 512 с.
3. *Гафаров Р. Х., Жернаков В. С.* Что нужно знать о сопротивлении материалов: учеб. пособие / под ред. В. С. Жернакова. – М.: Машиностроение, 2001. – 276 с.
4. *Тимошенко С. П., Гере Дж.* Механика материалов. – М.: Мир, 1976. – 669 с.
5. *Жернаков В. С., Якупов Р. Г., Газизов Х. Ш.* Термоупругие напряжения в соединениях и элементах конструкций: учеб. пособие. – изд. 2-е, доп. – М.: Машиностроение, 2008. – 235 с.
6. *Беляев Н. М.* Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1975. – 608 с.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ СИМВОЛЫ

### (Стандарт ИСО 3898)

На основе сложившихся в мировой практике традиций стандартом 3898 для обозначения отдельных понятий расчета конструкций предусматривается использование латинских и греческих букв, цифр и некоторых специальных обозначений. В табл. П1.1–1.3 приведены основные символы, а в табл. П1.4–1.5 – индексы.

Таблица П1.1

Буква	Значение
<i>A</i>	Площадь
<i>D</i>	Жесткость пластинок и оболочек при изгибе (цилиндрическая жесткость)
<i>E</i>	Модуль продольной упругости (модуль Юнга)
<i>F</i>	Сосредоточенная сила; воздействие вообще
<i>G</i>	Модуль упругости при сдвиге; постоянная нагрузка (вес)
<i>H</i>	Горизонтальная составляющая силы
<i>I</i>	Момент инерции плоской фигуры
<i>L</i>	Может быть использована для обозначения пролета, длины элемента и т.п.
<i>M</i>	Момент вообще; изгибающий момент
<i>N</i>	Нормальное усилие
<i>P</i>	Мощность
<i>Q</i>	Поперечная сила
<i>R</i>	Результирующая сила; реакция опоры
<i>S</i>	Статический момент плоской фигуры
<i>T</i>	Крутящий момент; температура
<i>V</i>	Объем; вертикальная составляющая силы
<i>W</i>	Момент сопротивления
<i>X, Y, Z</i>	Составляющие силы, параллельные осям $x, y, z$

Таблица П1.2

Буква	Значение
$a$	Расстояние; ускорение
$b$	Ширина
$d$	Диаметр
$e$	Эксцентриситет
$f$	Сопротивление
$g$	Ускорение силы тяжести
$h$	Высота, толщина
$i$	Радиус инерции
$k$	Коэффициент
$l$	Пролет, длина элемента
$m$	Масса; среднее значение
$n$	Количество чего-либо
$q$	Интенсивность погонной нагрузки
$r$	Радиус
$s$	Расстояние, шаг; стандартное отклонение
$t$	Время вообще; толщина тонкостенных элементов
$x, y, z$	Координаты

Таблица П1.3

Буква	Значение
альфа $\alpha$	Угол; отклонение
бэта $\beta$	Угол; отношение
гамма $\gamma$	Объемный вес; относительный сдвиг
дельта $\delta$	Коэффициент изменчивости
эпсилон $\varepsilon$	Относительная деформация
кси $\xi$	Относительная координата $x/l$
эта $\eta$	Относительная координата $y/l$
дзета $\zeta$	Относительная координата $z/l$
тэта $\theta$	Поворот, вращение
лямбда $\lambda$	Гибкость
мю $\mu$	Коэффициент трения; коэффициент приведения
ню $\nu$	Коэффициент Пуассона
ро $\rho$	Плотность
сигма $\sigma$	Нормальное напряжение
тау $\tau$	Касательное напряжение

Таблица П1.4

Буква	Значение
<i>c</i>	Сжатие вообще (англ. и франц. <i>compression</i> )
<i>d</i>	Расчетное (англ. <i>design</i> )
<i>e (el)</i>	Упругий (англ. <i>elastic</i> )
<i>f</i>	Трение (англ. <i>friction</i> , франц. <i>frottement</i> )
<i>h</i>	Горизонтальное (англ. <i>horizontal</i> )
<i>i</i>	Начальное (англ. и франц. <i>initial</i> )
<i>k</i>	Характеристическое (нормативное)
<i>l</i>	Продольное (англ. и франц. <i>longitudinal</i> )
<i>m</i>	Среднее значение (англ. <i>mean</i> , франц. <i>moyen</i> )
<i>n</i>	Нетто ( <i>net</i> в случае опасности путаницы)
<i>o</i>	Нулевое, начальное
<i>t</i>	Растяжение вообще (англ. <i>tension</i> , франц. <i>tractin</i> ) Поперечное (англ. и франц. <i>transversal</i> )
<i>u</i>	Предельное (англ. <i>ultimate</i> )
<i>v</i>	Вертикальное (англ. <i>vertical</i> )
<i>y</i>	Текучесть (англ. <i>yield</i> )

Таблица П1.5

Сокращение	Значение
<i>abc</i>	Абсолютное (англ. <i>absolute</i> )
<i>adm</i>	Допускаемое (англ. <i>admissible</i> )
<i>cal</i>	Вычисленное (англ. <i>calculated</i> )
<i>crit (cr)</i>	Критическое (англ. <i>critical</i> )
<i>ef</i>	Эффективное (англ. <i>effective</i> )
<i>el (e)</i>	Упругое (англ. <i>elastic</i> )
<i>est</i>	Оцениваемое, ожидаемое (англ. <i>estimated</i> )
<i>exs</i>	Особое, исключительное (англ. <i>exeptional</i> )
<i>ext</i>	Внешнее, наружное (англ. <i>external</i> )
<i>inf</i>	Нижнее (франц. <i>inferieur</i> )
<i>int</i>	Внутреннее (англ. <i>internal</i> )
<i>lat</i>	Боковое, из плоскости (англ. <i>lateral</i> )
<i>lim</i>	Предельное (англ. <i>limit</i> )
<i>max</i>	Максимальное (англ. <i>maximum</i> )
<i>min</i>	Минимальное (англ. <i>minimal</i> )

Окончание табл. П1.5

Сокращение	Значение
<i>nom</i>	Номинальное (англ. <i>nominal</i> )
<i>obs</i>	Наблюдаемое, экспериментальное (англ. <i>observed</i> )
<i>pl</i>	Пластическое (англ. <i>plastic</i> )
<i>red</i>	Приведенное (англ. <i>reduced</i> )
<i>rel</i>	Относительное (англ. <i>relative</i> )
<i>ser</i>	Пригодность к эксплуатации (англ. <i>service</i> )
<i>sup</i>	Верхнее (франц. <i>superieur</i> )
<i>tot</i>	Полное, суммарное, общее (англ. <i>total</i> )
<i>var</i>	Переменное (англ. <i>variable</i> )

**Изменения обозначений основных величин,  
применяемых в курсе сопротивления материалов,  
в соответствии с рекомендациями ИСО**

Величина			Примечание
Обозначение		Наименование	
старое	новое		
A	<i>W</i>	Работа	<i>work</i> – работа
<i>F</i>	<i>A</i>	Площадь	<i>area</i> – площадь
<i>N</i>	<i>P</i>	Мощность	<i>power</i> – мощность
<i>P</i>	<i>F</i>	Сила	<i>force</i> – сила
$M_K = M_Z$	$T(M_t)$	Крутящий момент	<i>torque</i> – крутящий момент
$q_z(q)$	$n_e$	Внешняя распределенная продольная нагрузка	<i>external</i> – внешний
$\mu$	$\nu$	Коэффициент Пуассона	–
$\delta$	$t$	Толщина тонкостенных элементов	–

Остальные символы не изменились, однако вместо русских индексов используются латинские, соответствующие первым нескольким буквам аналогичного по смыслу английского слова.

### 1. Прочностные характеристики материала:

– предел пропорциональности	$\sigma_{\text{пц}} - \sigma_{pr}$	( <i>proportionality</i> – пропорциональность)
– предел упругости	$\sigma_y - \sigma_e$	( <i>elasticity</i> – упругость)
– предел текучести	$\sigma_T - \sigma_y$	( <i>yield</i> – текучесть)
– предел прочности	$\sigma_B = \sigma_{\text{пч}} - \sigma_u$	( <i>ultimate</i> – предельный)
а) при растяжении	$\sigma_{\text{вр}} = \sigma_{\text{пчр}} - \sigma_{ut}$	( <i>tension</i> – растяжение)
б) при сжатии	$\sigma_{\text{вс}} = \sigma_{\text{пчс}} - \sigma_{uc}$	( <i>compression</i> – сжатие)

### 2. Характерные напряжения:

– статическое	$\sigma_{\text{ст}} - \sigma_{st}$	( <i>static</i> – статический)
– динамическое	$\sigma_d - \sigma_d$	( <i>dynamic</i> – динамический)
– контактное	$\sigma_k - \sigma_{con}$	( <i>contact</i> – контакт)
– критическое	$\sigma_{кр} - \sigma_{cr}$	( <i>critical</i> – критический)
– приведенное (эквивалентное)	$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_{\text{экв}} - \sigma_{red}$	( <i>reduced</i> – приведенный)

### 3. Характерные деформации:

– поперечная	$\varepsilon_{\text{поп}} = \varepsilon' - \varepsilon_t$	( <i>transverse</i> – поперечный)
– упругая	$\varepsilon_{\text{упр}} - \varepsilon_{el}$	( <i>elastic</i> – упругий)
– остаточная	$\varepsilon_{\text{ост}} - \varepsilon_r$	( <i>residual</i> – остаточный)

4. Допускаемое значение данной величины обозначается не с помощью квадратных скобок [...], а индексом *adm* (*admissible* – допускаемое):

– допускаемое напряжение	$[\sigma] - \sigma_{adm}$ ;
– допускаемая нагрузка	$[F] - F_{adm}$ ;
– допускаемый прогиб	$[f] - v_{adm}$ ;
– нормативный коэффициент запаса прочности	$[n] - n_{adm}$



## НОРМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ РАЗМЕРЫ

в диапазоне от 1 до 250 мм  
(по ГОСТ 6636-86)

**Ra5:** 1; 1,16; 2,5; 4; 6; 10; 16; 25; 40; 60; 100; 160; 250.

**Ra10:** 1; 1,2; 1,6; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 16; 20; 25; 32; 40; 50; 60; 80; 100; 120; 160; 200; 250.

**Ra20:** 1; 1,1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2; 2,2; 2,5; 2,8; 3; 3,6; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 55; 60; 70; 80; 90; 100; 110; 120; 140; 160; 180; 200; 220; 250.

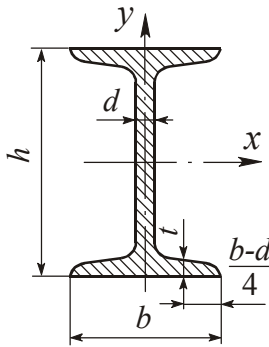
**Ra40:** 1; 1,05; 1,1; 1,15; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2; 2,1; 2,2; 2,4; 2,5; 2,6; 2,8; 3; 3,2; 3,4; 3,6; 3,8; 4; 4,2; 4,5; 4,8; 5; 5,2; 5,5; 6; 6,3; 6,5; 7; 7,5; 8; 8,5; 9; 9,5; 10; 10,5; 11; 11,5; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 52; 55; 55; 60; 63; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 115; 120; 130; 140; 150; 160; 170; 180; 190; 200; 210; 220; 230; 240; 250.

## Кратные и дольные единицы системы СИ

Приставка	Обозначение	Множитель	Приставка	Обозначение	Множитель
Тера	Т	$10^{12}$	Деци	д	$10^{-1}$
Гига	Г	$10^9$	Санتي	с	$10^{-2}$
Мега	М	$10^6$	Милли	м	$10^{-3}$
Кило	к	$10^3$	Микро	мк	$10^{-6}$
Гекто	Г	$10^2$	Нано	н	$10^{-9}$

**СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ**

**Табл. П4.1**



**Двутавры стальные горячекатаные  
(по ГОСТ 8239-89)**

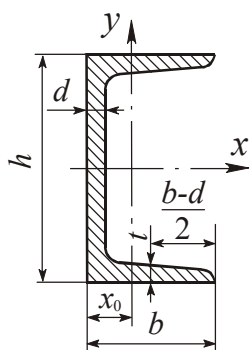
*A* – площадь поперечного сечения;  
*W* – момент сопротивления;  
*I* – момент инерции;  
*i* – радиус инерции;  
*t* – масса одного погонного метра.

*S* – статический момент полусечения;

№	<i>h</i> , мм	<i>b</i> , мм	<i>d</i> , мм	<i>t</i> , мм	<i>A</i> , см <sup>2</sup>	<i>m</i> , кг	<i>I<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>x</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>x</sub></i> , см	<i>S<sub>x</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>I<sub>y</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,5	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

Таблица П4. 2

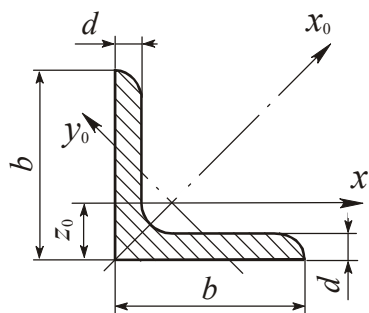
### Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240-89)



$A$  – площадь поперечного сечения;  
 $I$  – момент инерции;  
 $i$  – радиус инерции;  
 $W$  – момент сопротивления;  
 $S$  – статический момент полусечения;  
 $t$  – масса одного погонного метра.

№	$h$ , мм	$b$ , мм	$d$ , мм	$t$ , мм	$A$ , см <sup>2</sup>	$m$ , кг	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$z_0$ , см
5	50	32	4,4	7,0	6,16	4,84	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,945	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	13,3	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18o	180	74	5,1	9,3	22,3	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	19,8	1670	167	8,15	95,9	139	21,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21,0	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22o	220	87	5,4	10,2	28,8	22,6	2330	212	8,90	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	24,0	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24o	240	95	5,6	10,7	32,9	25,8	3180	265	9,84	151	245	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	31,8	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10200	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Таблица П4.3



### Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509-86)

$A$  – площадь поперечного сечения;  
 $I$  – момент инерции;  $i$  – радиус инерции;  
 $m$  – масса одного погонного метра.

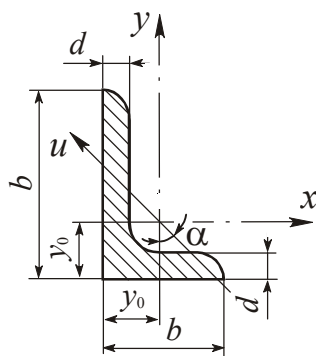
№	$h$ , мм	$b$ , мм	$A$ , см <sup>2</sup>	$m$ , кг	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$I_{x_0}$ max, см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ min, см	$I_{y_0 \text{ min}}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_0 \text{ min}}$ , см	$z_0$ , см
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	2,97	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	1,17
4,5	45	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
5,6	56	4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	7,93	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,49	2,02
7,5	75	5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	2,18
8	80	5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55

Окончание табл. П4.3

№	$h$ , мм	$b$ , мм	$A$ , см <sup>2</sup>	$m$ , кг	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$I_{x0 \max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x0 \min}$ , см <sup>4</sup>	$I_{y0 \min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y0 \min}$ , см <sup>4</sup>	$z_0$ , см
10	100	6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,3	1,98	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
		16	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	3,06
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	15,5	294	3,87	486	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
		6	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
14	140	9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
16	160	10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
		24	60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	4,70
18	180	11	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89
20	200	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,73
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	761	3,97	5,46
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
		30	111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	6,07
22	220	14	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93
		16	68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
24	240	16	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
		20	97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
25	250	22	106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00
		25	119,7	94,0	7006	7,65	1112	9,54	2887	4,91	7,11
		28	133,1	104,5	7717	7,61	1224	9,59	3190	4,89	7,23
		30	142,0	11,4	8177	7,59	1296	9,56	3389	4,89	7,31

Таблица П4.4

### Уголки стальные горячекатаные неравнополочные ( по ГОСТ 8510-86)



$A$  – площадь поперечного сечения;

$I$  – момент инерции;

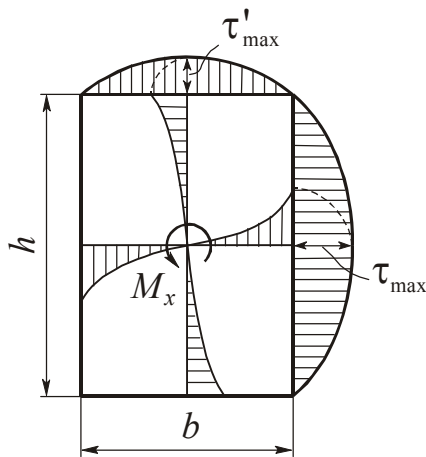
$i$  – радиус инерции;  $\alpha$  – угол наклона главной оси.

№	$B$ , мм	$b$ , мм	$d$ , мм	$A$ , см <sup>2</sup>	$m$ , кг	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$i_y$ , см	$y_0$ , см	$x_0$ , см	$I_u$ min, см <sup>4</sup>	$i_u$ min, см	$\text{tg}\alpha$
7,5 / 5	75	50	5	6,11	7,79	34,8	2,30	12,5	1,43	2,39	1,17	7,24	1,09	0,436
			6	7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	2,44	1,21	8,48	1,08	0,435
			8	9,47	7,43	52,4	2,35	18,3	1,40	2,52	1,29	10,9	1,07	0,430
9 / 5,6	90	56	5	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	2,92	1,26	11,8	1,22	0,384
			6	8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	2,95	1,28	12,7	1,22	0,384
			8	11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	3,04	1,36	16,3	1,21	0,380
10 / 6,3	100	63	6	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	3,23	1,42	18,2	1,38	0,393
			7	11,1	8,70	113,0	3,19	35,0	1,78	3,28	1,46	20,8	1,37	0,392
			8	12,6	9,87	127,0	3,18	39,2	1,77	3,32	1,50	23,4	1,36	0,392
			10	15,5	12,1	154,0	3,15	47,1	1,75	3,40	1,58	28,3	1,35	0,387
11 / 7	110	70	6	11,4	8,98	112,0	3,53	45,6	2,00	3,55	1,58	26,9	1,53	0,402
			8	13,9	10,9	172,0	3,51	54,6	1,98	3,61	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5 / 8	125	80	7	14,1	11,0	227,0	4,01	73,7	2,29	4,01	1,80	43,4	1,76	0,407
			8	16,0	12,5	256,0	4,00	83,0	2,28	4,05	1,84	48,8	1,75	0,406
			10	19,7	15,5	312,0	3,98	100,0	2,26	4,14	1,92	59,3	1,74	0,404
			12	23,4	18,3	365,0	3,95	117,0	2,24	4,22	2,00	69,5	1,72	0,400
14 / 9	140	90	8	18	14,1	364,0	4,49	120,0	2,58	4,49	2,03	70,3	1,98	0,411
			10	22,2	17,5	444,0	4,70	146,0	2,56	4,58	2,12	85,5	1,96	0,409
16 / 10	160	100	9	22,9	18,0	606,0	5,15	186,0	2,85	5,19	2,23	110	2,20	0,391
			10	25,3	19,8	667,0	5,13	204,0	2,84	5,23	2,28	121	2,19	0,390
			12	30,0	23,6	784,0	5,11	239,0	2,82	5,32	2,36	142	2,18	0,388
			14	34,7	27,3	897,0	5,00	272,0	2,80	5,40	2,43	162	2,16	0,385
18 / 11	180	110	10	28,3	22,2	952	5,80	276,0	3,12	5,88	2,44	165	2,42	0,375
			12	33,7	26,4	1123	5,77	324,0	3,10	5,97	2,52	194	2,52	0,374
20 / 12,5	200	125	11	34,9	27,4	1449	6,45	446,0	3,58	6,50	2,79	264	2,75	0,392
			12	37,9	29,7	1568	6,43	482,0	3,57	6,54	2,83	286	2,74	0,392
			14	43,9	34,4	1801	6,41	551,0	3,54	6,62	2,91	327	2,73	0,390
			16	49,8	39,1	2026	6,38	617,0	3,52	6,71	2,99	367	2,72	0,388
25 / 16	250	160	12	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	7,97	3,53	604	3,54	0,410
			16	63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8,14	3,69	781	3,50	0,408
			18	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	8,23	3,77	806	3,49	0,407
			20	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	8,31	3,85	949	3,48	0,405

**Основные расчетные характеристики наиболее употребительных материалов**

Материал	Модули упругости, ГПа		Температурный коэффициент, $\alpha_t \cdot 10^6$	Коэффициент Пуассона $\nu$	Плотность, $\rho$ , кг / м <sup>3</sup>
	$E$	$G$			
Сталь	200	80	12,5	0,3	7850
Чугун	120	45	10,0	0,25	7200
Медь	100	40	16,5	0,32	8500
Титан	100	40	8,5	0,3	4500
Алюминий и дюраль	70	27	26,0	0,3	2700
Бетон	20	–	0,1	0,16	2500
Дерево (сосна)	10	–	–	–	550

**Данные по расчету на кручение стержней прямоугольного сечения**



- Момент инерции  $I_K = \alpha b^4$   
 Момент сопротивления  $W_K = \beta b^3$   
 Наибольшие касательные напряжения возникающие посередине:  
 – длинных сторон  $\tau_{\max} = M_K / W_K$  ;  
 – коротких сторон  $\tau'_{\max} = \gamma \tau_{\max}$  .

Значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  зависят от отношения  $m = h/b$  и приведены в следующей таблице.

$m$	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	10,0
$\alpha$	0,140	0,294	0,457	0,790	1,123	1,789	3,123
$\beta$	0,208	0,346	0,493	0,801	1,128	1,789	3,123
$\gamma$	1,000	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742

ПРОЧНОСТЬ НА РАЗРЫВ РАЗЛИЧНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

МАТЕРИАЛ	Предел прочности $\sigma_{пчр}$ , МПа
<b>МЕТАЛЛЫ</b>	
Стали:	
– малоуглеродистая	400
– специально для сосудов высокого давления	2500
– рояльная проволока	3000
Чугуны:	
– серый	100–400
– специальный	300–600
Алюминиевые сплавы	100–600
Магниеые сплавы	100–300
Латунь	200–700
Бронза	100–800
Титановые сплавы	600–1500
<b>НЕ МЕТАЛЛЫ</b>	
Мышечная ткань	0,1
Цемент и бетон	4
Обычный кирпич	5,5
Дерево (сухое)	
– вдоль волокон	100
– поперек волокон	3,5
Кость	110
Обыкновенное стекло	35–175
Человеческий волос	190
Паутина	240
Хорошая керамика	35–350
Шелк, хлопковое волокно	350
Льняное полотно	700
Нейлоновая ткань	1050
Пластики, армированные стекловолокном или углеволокном	350–1050
Искусственно выращенные кристаллы:	
– усы железа	13000
– графитовые нити	24000



Механические характеристики конструкционных материалов

МАТЕРИАЛ	Напряжения, МПа				$\delta$ , %
	$\sigma_{Пч}$	$\sigma_T$	$\sigma_{-1}$	$\tau_{-1}$	
<b>1. КОНСТРУКЦИОННЫЕ СТАЛИ</b>					
1.1. Углеродистые стали					
20 .....	420	250	170	100	25
30 .....	480	280	200	110	21
35 .....	540	320	220	130	20
40 .....	580	340	230	140	19
45 .....	610	360	250	150	16
50 .....	640	380	270	160	14
60 .....	690	410	310	180	12
1.2. Легированные стали					
20Х (40Х), отжиг .....	700	400	310	170	25
12ХН3А, закалка .....	950	700	390	220	9
40Х (40ХН), закалка, отпуск 600 °С .....	1000	800	400	240	9
12Х2МВ8ФБ (ЭИ503) .....	1050	600	420	250	15
40ХНМА, закалка, отпуск 560 °С .....	1100	940	500	270	10
18ХГТ (18ХГМ), закалка .....	1150	950	520	280	9
40Х (40ХН), закалка, отпуск 500 °С .....	1200	1100	460	230	6
18Х2Н4МА (18ХНВА), закалка .....	1300	1000	580	320	10
30ХГСН, изотермическая закалка 330 °С .....	1600	720	600	360	8
30ХГСА, закалка .....	1700	1500	700	400	8
<b>2. АЛЮМИНИЕВЫЕ СПЛАВЫ</b>					
АК4, закалка, искусственное старение ..	400	200	130	80	15
Д16Т, закалка, естественное старение ..	500	340	140	120	8
В95, закалка, искусственное старение ..	650	550	260	160	7
<b>3. ТИТАНОВЫЕ СПЛАВЫ (термообработанные)</b>					
BT3-1 .....	950	850	480	300	18
BT6 .....	1050	950	500	310	14
BT8 .....	1200	1100	600	360	12
BT14 .....	1400	1200	700	420	10

УДЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Материал		Удельный вес	Модуль упругости	Предел текучести	Предел прочности	Удельная прочность
		$\gamma$	$E$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{пч}$	$\sigma_{пч} / \gamma$
		кН/м <sup>3</sup>	ГПа	МПа		кМ
Стали	углеродистые	78,5	200	210–480	350–800	10
	легированные			800–1450	1000–1800	23
	сверхпрочные			2250–3150	2500–3500	45
Чугуны	серые	72	80	150–250	200–350	5
	высокопрочные	74	150	320–560	450–800	11
Алюминиевые сплавы	литые	28	70	130–175	180–250	9
	деформируемые			280–420	400–600	21,5
Магниеые сплавы	литые	18	45	80–130	120–200	11
	деформируемые			160–200	250–300	16,5
Конструкционные бронзы		88	110	320–480	400–600	7
Титановые сплавы		45	110	700–1350	800–1500	33
Конструкционные пластики	дельта-древесина	14	50	–	150–200 (вдоль слоев)	13
	стекловолокниты	16	50	–	250–300	37
	СВАМ	19	60	–	400–700 (вдоль волокон)	37
Ситаллы		30	150	450–720	500–800	27

**Механические свойства и допускаемые напряжения  
конструкционных сталей**

**Таблица П10.1**

**Качественные углеродистые стали**

Марка стали ГОСТ 1050-74	Термо-обработка*	Предел прочности при растяжении $\sigma_{пч}$	Предел текучести $\sigma_T$	Предел выносливости при			Допускаемые напряжения**, МПа при													
				рас-тяже-жени $\sigma_{-1p}$	из-гибе $\sigma_{-1}$	кру-че-нии $\tau_{-1}$	растяжении $[\sigma_p]$			изгибе $[\sigma_{из}]$			кручения $[\tau_{кр}]$			срезе $[\tau_{ср}]$			смятии $[\sigma_{см}]$	
							И	II	III	И	II	III	И	II	III	И	II	III	И	II
8	Н	330	200	120	150	90	110	80	60	130	95	75	80	60	45	60	45	35	165	120
10	Н Ц-В59	340 400	210 250	125 145	155 180	95 110	110 130	80 90	60 70	145 155	100 115	75 90	80 100	60 65	45 55	65 70	45 50	35 40	165 195	120 135
15	Н Ц-В59	380 450	230 250	135 160	170 200	100 120	125 145	85 50	65 80	150 175	110 125	85 100	95 110	65 80	50 60	75 85	50 60	40 45	185 210	125 75
20	Н Ц-В58	420 500	250 300	150 180	190 225	115 135	140 165	115 115	95 90	170 200	120 140	95 110	105 125	70 75	55 55	85 100	60 60	45 45	210 240	175 175
25	Н У	460 550	280 350	170 200	210 250	125 150	150 180	110 130	85 100	180 210	130 160	105 125	110 135	80 95	60 75	90 110	65 80	50 60	220 270	165 195
30	Н У	500 600	300 350	180 215	225 270	135 160	165 200	115 140	90 105	200 240	140 175	110 135	125 150	90 105	70 80	100 120	65 85	55 65	240 300	175 210
35	Н У В35	540 650 1000	320 380 650	190 230 360	240 290 450	145 175 270	180 210 330	125 150 230	95 115 180	210 260 400	155 185 290	120 145 220	135 160 250	90 110 165	70 85 135	110 130 200	75 90 140	55 70 110	270 520 500	190 220 350
40	Н У В35	580 700 1000	340 400 650	210 250 360	260 315 450	155 190 270	190 230 340	130 160 230	105 125 180	230 270 400	165 200 290	130 155 220	140 170 250	100 120 175	75 95 135	115 140 200	80 100 140	60 80 110	280 340 500	200 240 350
45	Н У М35 В42 В48 ТВЧ56	610 750 900 900-1200 1200 750	360 450 650 700 950 450	220 270 325 325 430 270	275 340 405 405 540 340	165 190 270 245 325 205	200 240 300 300 400 240	140 170 210 210 280 170	110 135 160 160 210 135	240 290 360 360 480 290	175 215 260 260 340 210	135 170 200 200 270 170	150 185 230 230 300 185	105 130 165 160 210 130	80 100 120 120 160 100	125 145 185 185 240 145	85 105 125 125 170 105	65 80 95 95 130 80	300 360 450 450 600 360	210 260 310 310 420 260
50	Н У	640 900	380 700	230 325	290 405	175 245	210 300	140 210	115 160	250 360	185 260	145 200	160 230	110 180	85 120	125 185	85 125	65 95	310 450	220 310
20Г	Н В	460 570	280 420	165 205	205 255	125 150	150 195	100 130	80 100	180 230	130 165	100 125	110 145	80 100	60 75	90 115	65 80	50 60	220 290	160 190
30Г	Н В	550 680	320 560	200 245	250 305	150 180	180 230	130 160	100 120	210 270	160 195	125 150	135 170	95 120	75 90	110 140	80 100	60 75	270 340	190 240

**Окончание табл. П10.1**

Марка стали ГОСТ 1050-74	Термо-обработка*	Предел прочности при растяжении $\sigma_{пч}$	Предел текучести $\sigma_{т}$	Предел выносливости при			Допускаемые напряжения**, МПа при													
				растяжении $\sigma_{-1p}$	изгибе $\sigma_{-1}$	кручении $\tau_{-1}$	растяжении $[\sigma_p]$			изгибе $[\sigma_{из}]$			кручении $[\tau_{кр}]$			срезе $[\tau_{ср}]$			смятии $[\sigma_{см}]$	
							I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II
							МПа													
40Г	Н	600	360	220	270	160	200	140	110	240	175	135	150	105	80	120	85	65	300	210
	В45	840	590	350	380	230	280	190	150	330	240	190	210	150	115	170	120	95	420	290
50Г	Н	660	400	235	295	175	210	150	115	260	185	145	160	110	75	130	90	70	320	220
	В	820	560	300	370	220	270	190	150	330	250	185	250	155	110	165	105	75	410	290
65Г	Н	750	440	270	340	200	240	175	135	290	210	170	185	130	100	145	105	80	360	260
	У	900	700	325	405	245	300	210	160	360	260	200	230	160	120	185	125	95	450	310
	М45	1500	125	530	670	400	500	350	260	600	430	330	380	260	200	300	210	160	760	520

\* - Условные обозначения термической обработки в табл. 1 и 2:

0 – отжиг;

Н – нормализация;

У – улучшение;

Ц – цементация;

ТВЧ – закалка с нагревом токами высокой частоты;

В – закалка с охлаждением в воде;

М – закалка с охлаждением в масле;

НВ – твердость по Бринеллю.

Число после М, В, Н или ТВЧ – среднее значение твердости по НРС.

\*\* – Римскими цифрами обозначен вид нагрузки:

I – статическая;

II – переменная, действующая от нуля до максимума и от максимума до нуля (пульсационная);

III – знакопеременная.

Таблица П10.2

## Легированные стали

Марка стали ГОСТ 1050-74	Термообработка*	Предел прочности при растяжении $\sigma_{пч}$	Предел текучести $\sigma_T$	Предел выносливости при			Допускаемые напряжения**, МПа при													
				$\sigma_{-1p}$	$\sigma_{-1}$	$\tau_{-1}$	растяжении [ $\sigma_p$ ]			изгибе [ $\sigma_{из}$ ]			кручении [ $\tau_{кр}$ ]			срезе [ $\tau_{ср}$ ]			смятии [ $\sigma_{см}$ ]	
							I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II
10Г2	Н	430	250	175	220	125	140	110	90	170	135	110	105	75	60	85	65	50	210	165
09Г2С	—	500	350	190	240	140	170	120	95	200	150	120	125	90	70	100	70	55	250	180
10ХСД	—	540	400	215	270	155	185	140	110	220	160	135	140	100	80	ПО	80	65	280	210
20Х	Н	600	300	210	260	150	190	135	105	230	165	130	140	100	75	115	85	60	280	200
	У	700	500	280	350	200	240	175	140	290	220	175	180	130	100	145	105	80	360	260
	М59	850	630	340	420	240	290	210	170	350	145	210	220	155	120	175	125	95	430	320
40Х	Н	630	330	250	310	180	200	355	125	240	190	155	150	115	90	120	95	75	300	230
	У	800	650	320	400	230	270	200	160	320	250	200	200	150	115	160	115	90	400	300
	М39	1100	900	440	550	320	380	280	220	450	340	280	280	200	160	230	165	130	560	420
	М48	1300	1100	520	650	380	440	330	260	530	410	320	330	240	190	270	195	150	670	490
45Х	Н	650	350	260	320	185	210	160	130	250	195	160	155	115	90	125	950	750	310	240
	У	950	750	380	470	270	320	240	190	380	290	230	240	175	135	190	135	105	480	360
	М48	1400	1200	560	700	400	480	350	280	570	430	350	360	260	200	290	200	160	720	520
50Х	Н	650	350	260	325	185	210	160	130	250	200	160	160	120	90	125	90	70	310	240
	М48	1500	1300	600	750	430	500	370	300	600	460	370	370	270	210	300	220	170	750	550
35Г2	Н	630	370	250	315	180	200	155	125	240	190	160	150	П5	90	120	95	75	330	230
	В, HB249	800	650	320	400	230	270	200	160	320	250	200	200	145	115	160	115	90	400	300
40Г2	Н	670	390	270	335	195	220	170	135	260	210	170	165	120	950	130	95	75	330	250
	М, HB331	1120	950	540	660	380	380	310	270	460	380	330	290	230	190	230	180	150	580	460
45Г2	Н	700	410	280	350	200	230	175	140	270	210	175	175	125	100	140	100	80	340	260
	М, HB295	850	700	340	425	245	290	210	170	350	145	210	220	155	120	175	125	95	440	330
33ХС	Н	600	300	210	260	150	190	135	105	230	165	130	140	100	75	115	65	65	280	200
	М	900	700	360	450	260	300	220	180	360	280	220	230	165	130	180	135	105	450	330
38ХС	У	950	750	370	470	280	320	230	185	390	290	230	240	175	140	190	140	110	480	350
18ХГТ	Н	700	430	280	350	200	230	175	140	270	210	175	175	125	100	140	100	80	340	260
	Ц-М59	1000	800	400	500	290	330	250	200	400	310	250	250	185	145	200	145	115	490	380

Окончание табл. П10.2

Марка стали ГОСТ 1050-74	Термообработка*	Предел прочности при растяжении $\sigma_{Пч}$	Предел текучести $\sigma_T$	Предел выносливости при			Допускаемые напряжения**, МПа при													
				растяжения $\sigma_{-1p}$	изгибе $\sigma_{-1}$	кручении $\tau_{-1}$	растяжении $[\sigma_p]$			изгибе $[\sigma_{из}]$			кручении $[\tau_{кр}]$			срезе $[\tau_{ср}]$			смятии $[\sigma_{см}]$	
							I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II
30ХГТ	M43	1250	1050	500	620	360	430	310	250	510	390	310	320	230	180	260	185	140	640	460
	Ц-М59	1100	800	440	550	320	370	270	220	440	340	270	280	200	160	220	160	125	550	410
20ХГНР	M40	1300	1200	520	650	375	450	330	260	540	410	320	340	230	170	270	180	135	680	500
	M50	1450	1400	580	725	420	500	360	290	600	450	360	380	270	210	300	215	170	750	540
40ФХА	M30	900	750	360	450	260	320	230	180	380	280	220	240	170	130	190	135	105	480	340
	M50	1600	3130	640	800	480	550	410	320	660	500	400	410	310	240	330	240	195	820	610
30ХМ	M	950	750	380	475	230	320	240	190	390	300	240	240	155	115	190	125	90	480	360
35ХМ	M,HB270	1000	850	400	500	290	340	250	200	410	310	250	260	185	145	200	130	950	520	380
	M	1600	140	640	800	480	550	410	320	660	500	400	420	310	240	330	250	200	820	610
40ХН	H	780	460	310	390	225	260	195	160	310	240	195	190	140	110	155	115	90	390	290
	M43	1200	100	480	600	345	410	310	240	490	370	300	310	220	170	250	175	135	620	460
12ХН2	M	800	600	320	400	230	270	200	160	320	250	200	200	145	115	160	115	90	400	300
	Ц-М59	800	600	320	400	230	270	200	160	320	250	200	700	145	115	160	115	90	400	300
12ХН3А	У	950	700	380	470	270	320	240	190	380	280	230	240	175	140	190	140	110	480	300
	ТВ459	1000	850	400	500	300	340	260	200	410	310	250	250	190	150	200	150	120	510	380
20Х2Н4А	ТВ459	680	450	270	340	200	230	170	135	270	210	170	170	125	100	140	100	80	340	260
	Ц-М59	1100	850	440	550	320	370	270	220	440	340	270	210	200	160	220	160	125	550	410
	M	1300	1100	520	650	375	440	330	260	530	400	320	330	240	190	260	190	150	660	500
20ХГСА	M	800	650	320	400	230	270	200	160	330	250	200	200	145	115	160	115	90	410	300
30ХГС	О	600	360	240	300	170	200	150	120	240	185	150	150	110	85	120	90	70	300	220
30ХГСА	У	1100	850	440	550	320	370	270	220	440	340	270	210	200	160	220	160	125	550	410
	M46	1500	300	600	750	430	510	380	300	620	470	380	390	270	210	310	220	170	760	570
38Х210	M	800	700	320	400	230	280	200	160	330	250	200	200	150	115	170	120	95	410	300
	M	900	750	360	450	260	310	240	190	370	290	240	230	170	135	185	140	110	460	360
50ХФА	M	1300	100	520	650	340	440	330	260	540	400	320	340	220	170	260	180	135	660	500
	M46	1500	300	600	750	360	520	380	300	620	470	380	390	240	180	310	200	145	770	570
60С2	M,HB269	1300	1200	520	650	340	440	330	260	540	400	320	340	220	170	260	180	135	670	550
	M,HB269	1600	1600	640	800	465	550	400	320	660	500	400	410	300	230	330	240	185	820	600
ШХ15	0	600	3800	240	300	180	200	150	120	240	180	150	150	110	90	120	90	75	300	220
	M62	2200	1700	460	660	330	740	350	230	890	480	330	550	250	165	440	200	130	100	520

\*\* Римскими цифрами обозначен вид нагрузки, см. табл. П10.1.

**Данные к расчетам на устойчивость**

**Таблица П11.1**

Коэффициенты продольного изгиба  $\varphi$  (увеличенные в 1000 раз)

Материалы	Гибкость $\lambda$														
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
Амг	973	945	917	870	770	685	603	530	465	415	365	327	296	265	235
Амгб	973	946	890	770	640	542	458	387	322	280	243	213	183	162	148
АВТІ	996	992	900	780	660	557	463	387	312	252	210	175	150	129	113
Д16Т	999	998	835	700	568	455	353	269	212	172	142	119	101	87	76
Ст2, 3, 4	990	970	950	920	890	860	810	750	690	600	520	450	400	360	320
Ст5	980	950	930	900	840	800	740	660	590	500	430	380	320	280	270
НЛ-2 15ХСНД	980	950	930	900	830	780	710	630	540	450	390	330	290	260	230
СЧ12, 15 СЧ18, 21	970	910	810	690	570	440	340	260	200	160	–	–	–	–	–
СЧ24, 28	950	870	750	600	430	320	230	180	140	120	–	–	–	–	–
Сосна	990	970	930	870	800	710	610	490	380	310	250	220	180	160	140

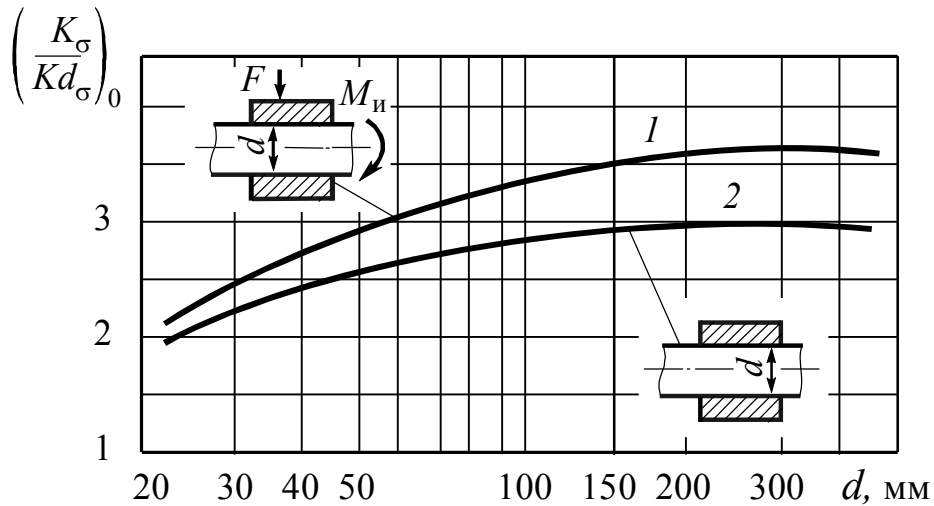
**Таблица П11.2**

Значения коэффициентов, входящих в эмпирическую формулу Тетмайера – Ясинского для критической силы, и пределы применимости этой формулы

№ п/п	Материал	$E$ , ГПа	$a$	$b$	$c$	$\lambda_{\text{пц}}$ ( $\lambda_1$ )	$\lambda_{\text{пред}}$ ( $\lambda_2$ )
			МПа				
1	Сосна	10	40	0,203	–	60	–
2	Сталь Ст3	200	310	1,14	–	100	61
3	Ст5, сталь 30	200	464	3,26	–	90	60
4	15ХСНД (НЛ2)	200	589	3,82	–	100	60
5	Авиаль АВТІ	70	320	1,70	–	55	22
6	Дюралюминий Д16Т	70	380	2,19	–	50	20
7	Чугун	120	776	12	0,053	80	–

### Данные к расчету характеристик сопротивления усталости

Валы с напрессованными деталями при изгибе



Для случая, когда  $\sigma_{пч} = 500$  МПа, давление  $p \geq 30$  МПа:

1 – через напрессованную деталь передается сила или момент;

2 – через напрессованную деталь не передается усилие

Поправочный коэффициент  $\xi'$   
на предел прочности  $\sigma_{пч}$

Поправочный коэффициент  $\xi''$   
на давление напресовки  $p$

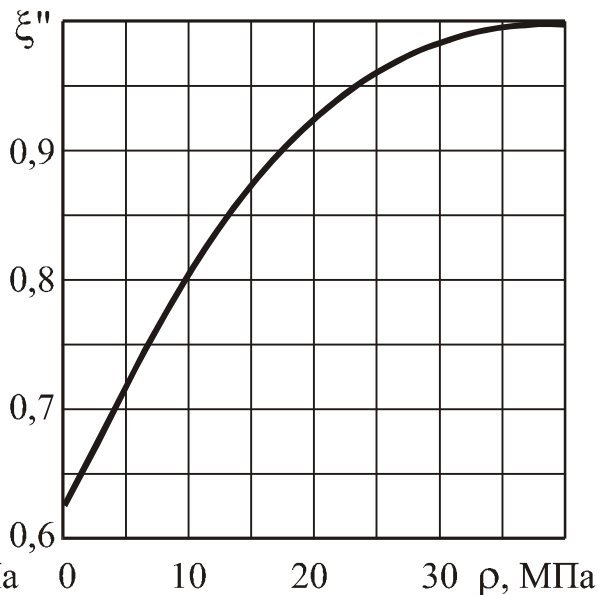
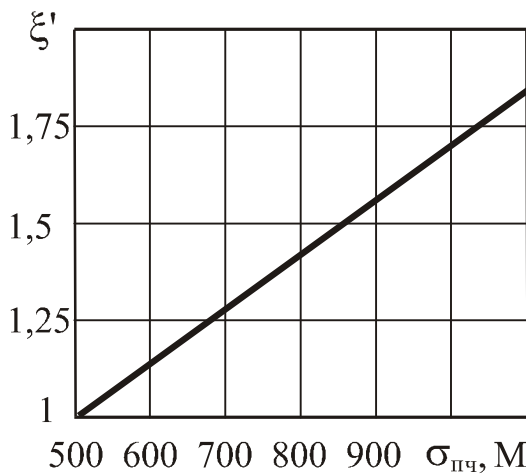


Рис. П.12.1



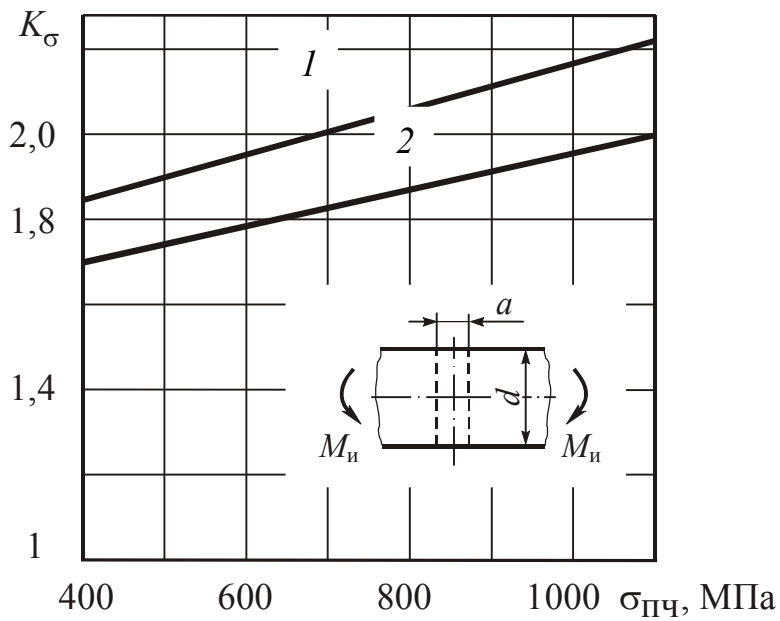
Таблица П.12.1

**Линейная протяженность очага концентрации  
и относительный градиент напряжений**

Деталь	L, мм	Вид деформации		
		изгиб	растяжение и сжатие	кручение $\bar{G}_\tau$ , мм <sup>-1</sup>
		$\bar{G}$ , мм <sup>-1</sup>		
	2b	$H/h \geq 1,5$		—
		$2/r + 2/h$	$2/r$	
		$H/h < 1,5$		
		$\frac{2(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{h}$	$\frac{2(1+\varphi)}{r}$	
	$\pi d$	$D/d \geq 1,5$		$\frac{1}{r} + \frac{2}{d}$
		$2/r + d$	$2/r$	
		$D/d < 1,5$		
		$\frac{2(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{d}$	$\frac{2(1+\varphi)}{r}$	
	2b	$H/h \geq 1,5$		—
		$2,3/r + 2/h$	$2,3/r$	
		$H/h < 1,5$		
		$\frac{2,3(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{h}$	$\frac{2,3(1+\varphi)}{r}$	
	$\pi d$	$D/d \geq 1,5$		$\frac{1,15}{r} + \frac{2}{d}$
		$2,3/r + 2/d$	$2,3/r$	
		$D/d < 1,5$		
		$\frac{2,3(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{d}$	$\frac{2,3(1+\varphi)}{r}$	
	2b	—	$\frac{2,3}{r}$	—

Примечание. Для случаев, указанных в таблице

$$\varphi = \frac{1}{2 + 4\sqrt{t/r}}, \text{ где } t = \frac{H-h}{2} \text{ или } t = \frac{D-d}{2}$$

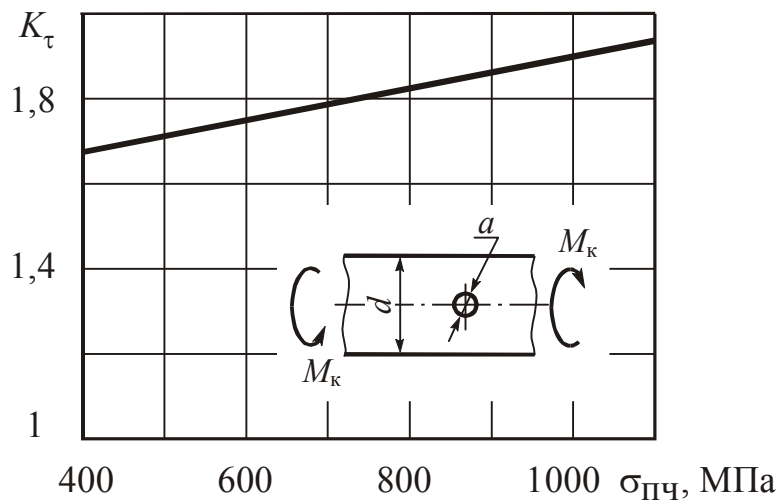


$$1 - a/d = 0,05 - 0,10$$

$$2 - a/d = 0,15 - 0,25$$

$$\sigma_H = \frac{M_{и}}{W_{\text{нетто}}}$$

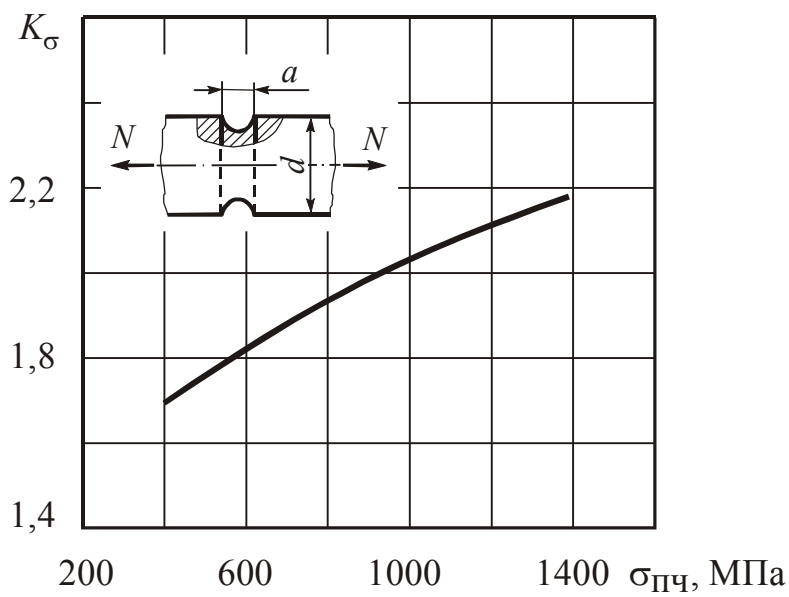
при  $d = 30-50$  мм



$$a/d = 0,15 - 0,25$$

$$\tau_H = \frac{M_{к}}{W_{\text{нетто}}}$$

при  $d = 30-50$  мм

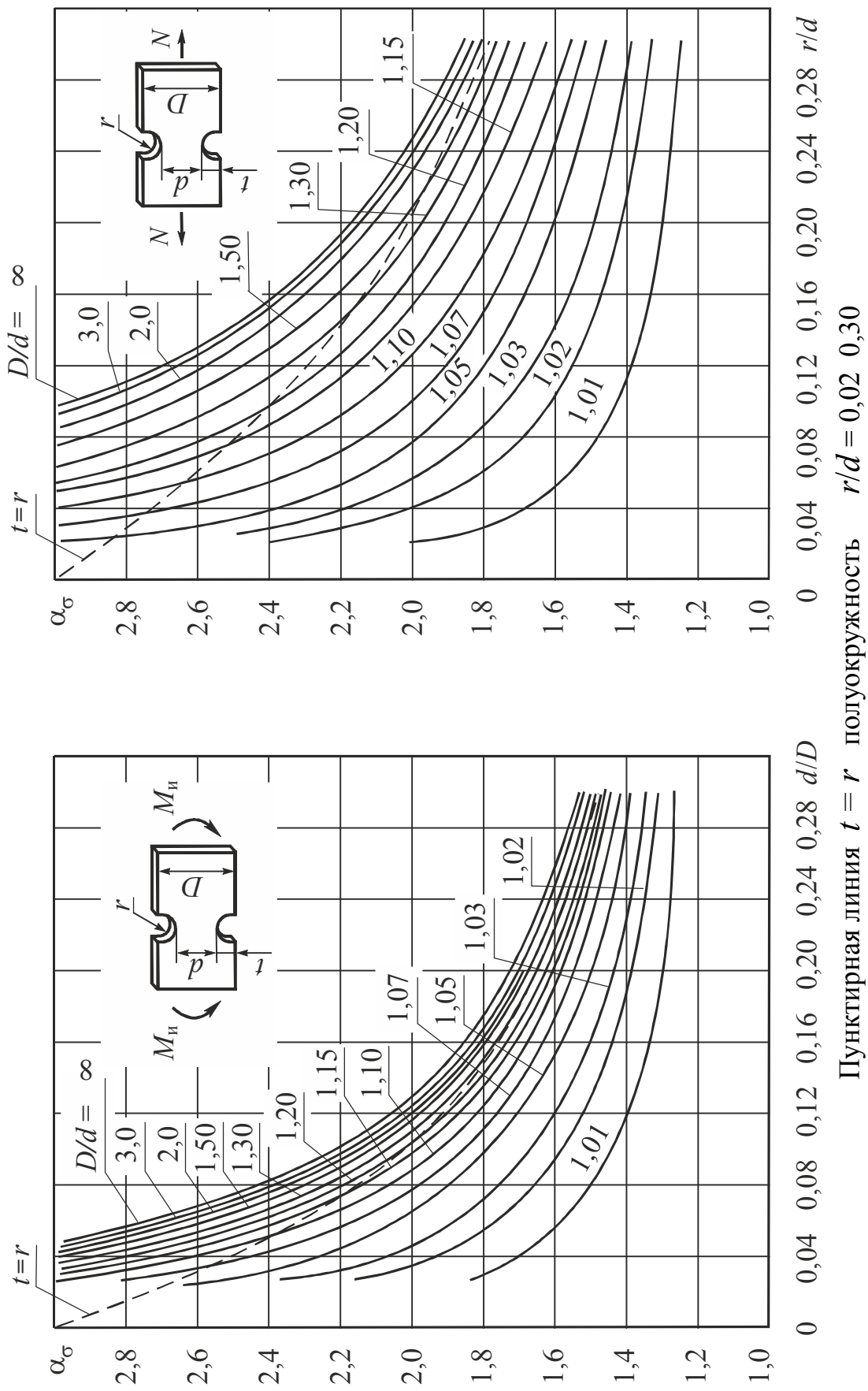


$$a/d = 0,20 - 0,45$$

$$\sigma_H = \frac{N}{\frac{\pi d^2}{4} - ad}$$

$d = 15$  мм

Рис. П.12.2



Пунктирная линия  $t = r$  полуокружность  $r/d = 0,02$   $0,30$

Рис. П.12.3

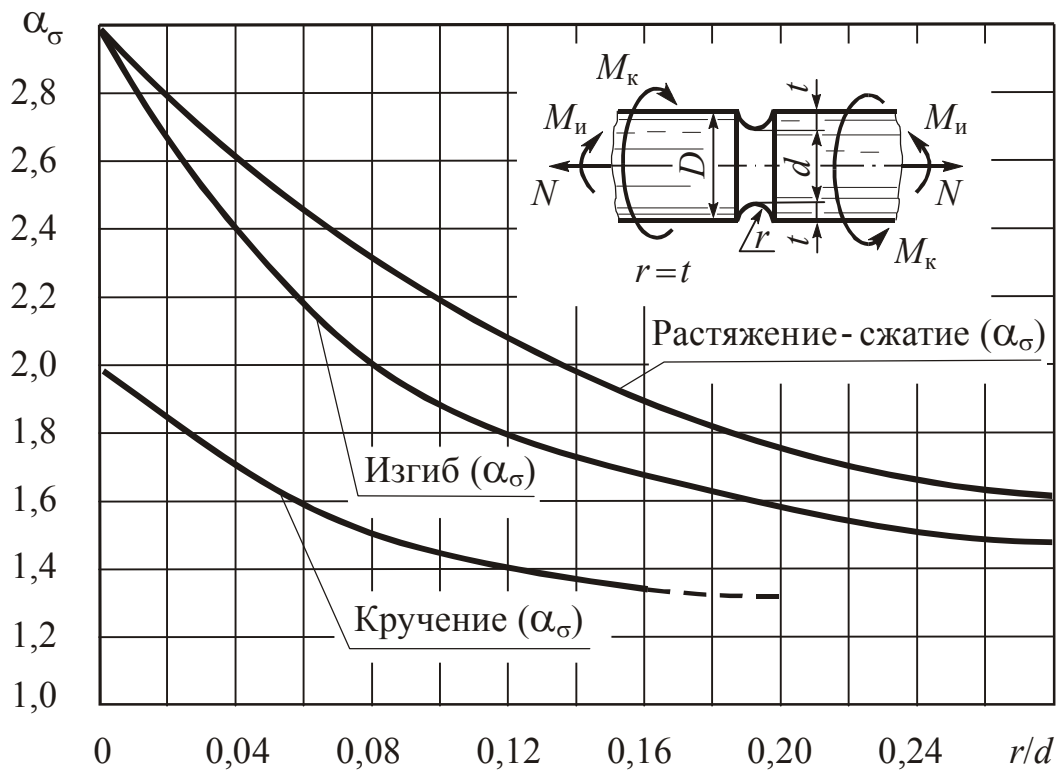


Рис. П12.4

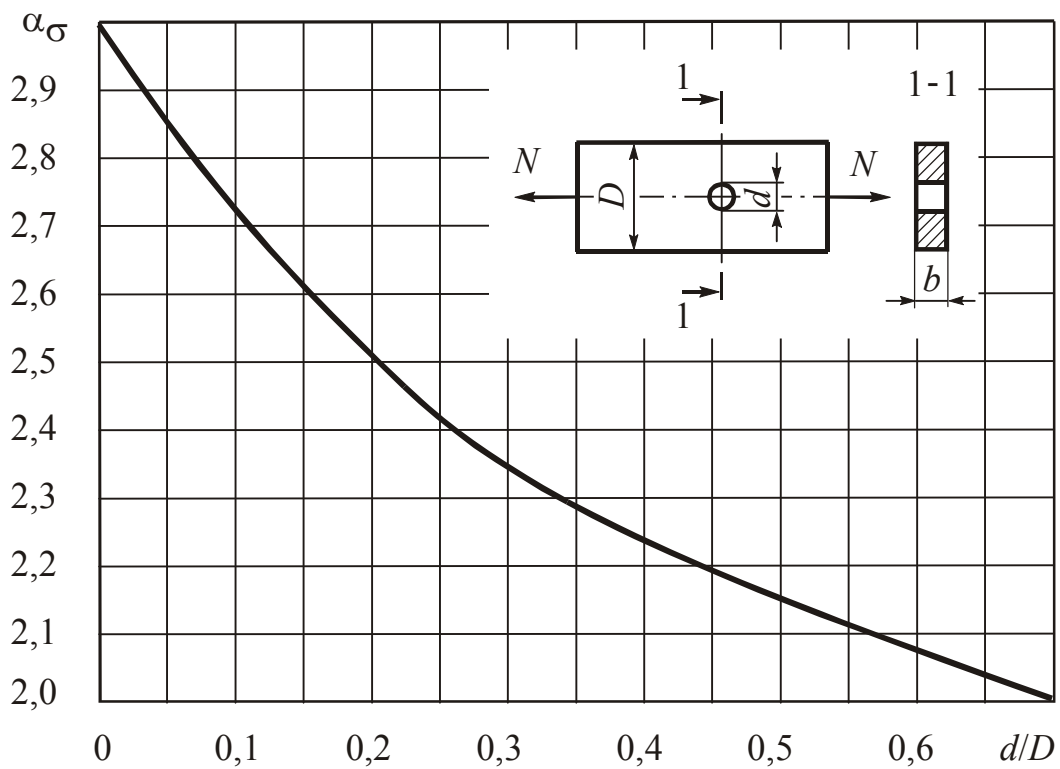


Рис. П12.5

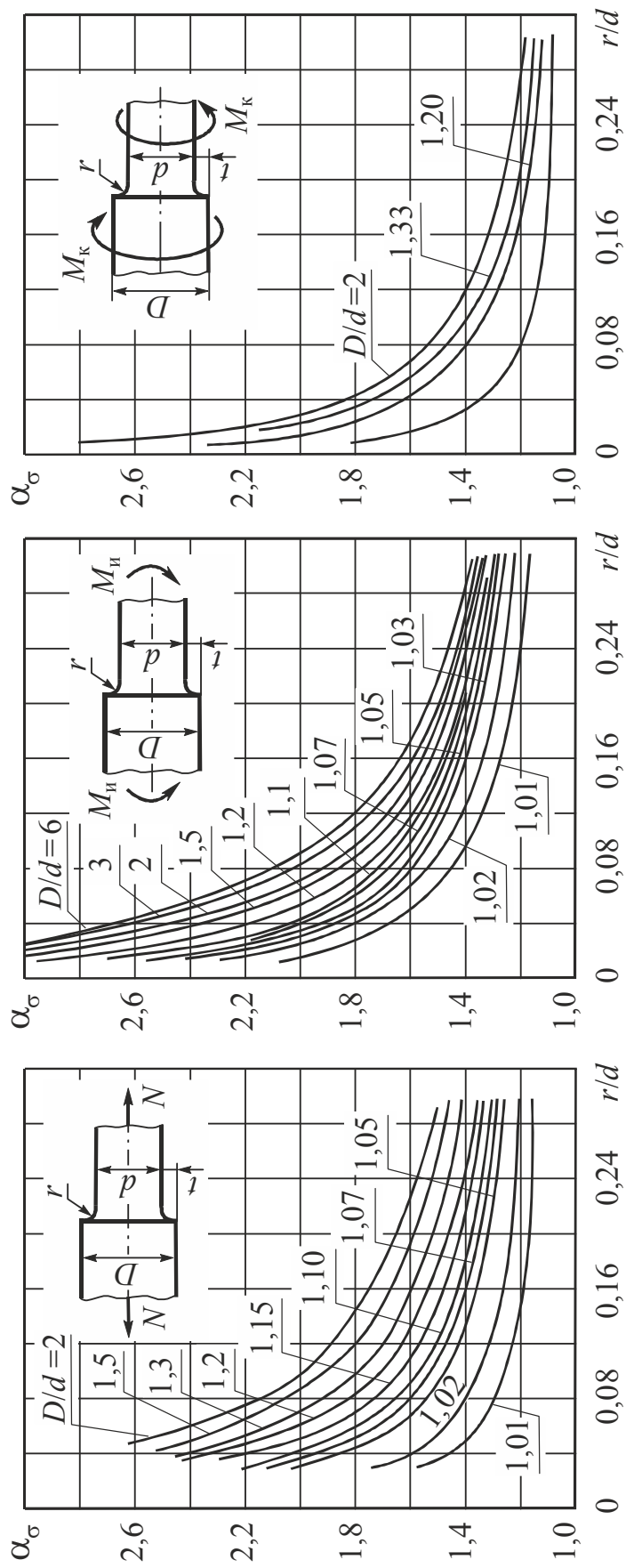


Рис. П.12.6

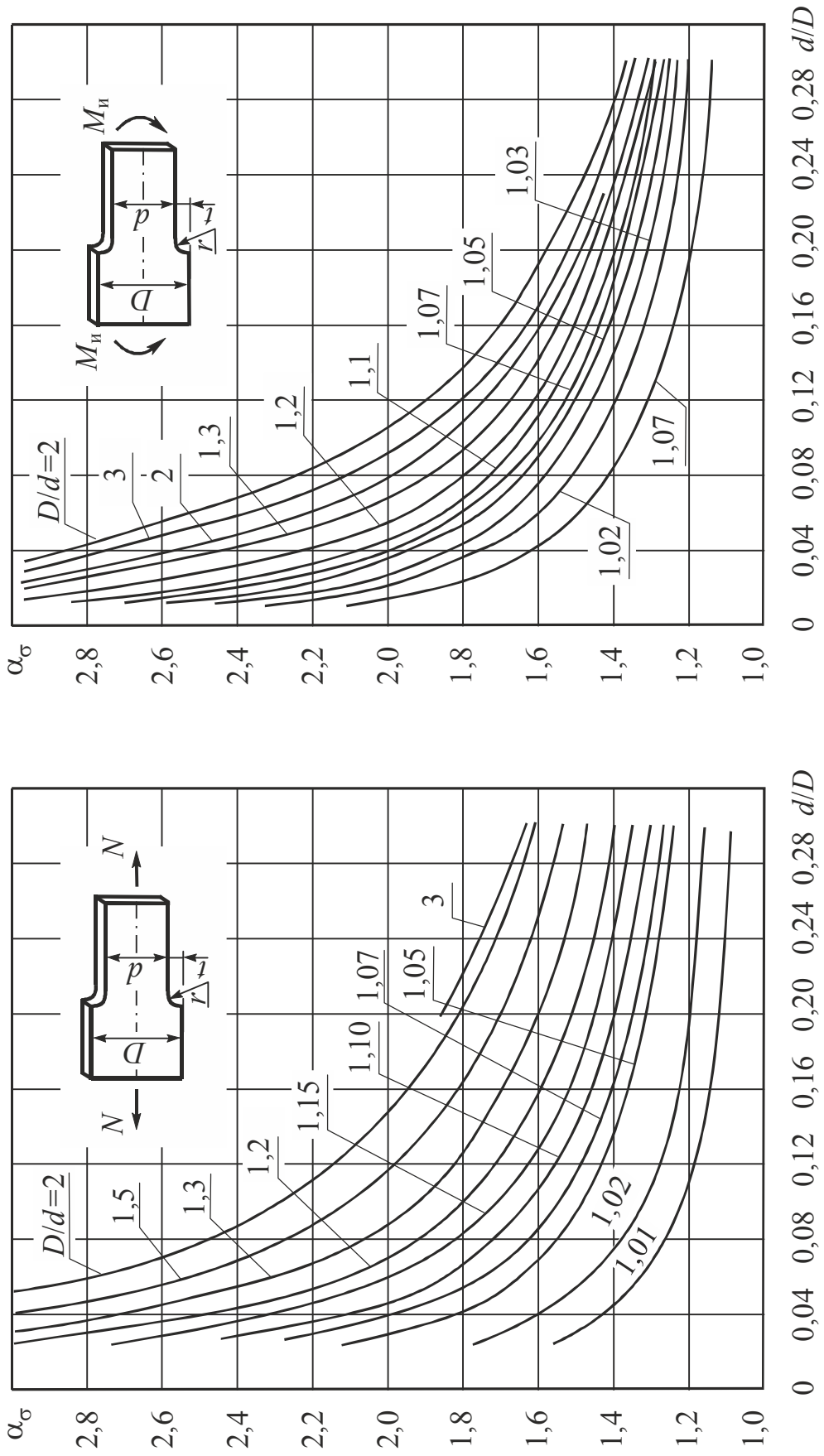


Рис. П.12.7

## Оглавление

<b>Введение</b> .....	3
<b>Глава 1. Основные предпосылки, понятия и определения, используемые в курсе сопротивления материалов – механике материалов и конструкций</b> .....	4
1.1. Модель материала. Основные гипотезы о деформируемом теле .....	8
1.2. Модель формы. Классификация тел (элементов конструкций) по геометрическому признаку.....	9
1.3. Модель нагружения. Классификация внешних силовых воздействий .....	10
1.4. Внешние и внутренние силы. Напряжения как мера интенсивности внутренних сил.....	13
1.5. Понятие о напряженном состоянии .....	16
1.6. Деформации и перемещения. Принцип начальных размеров .....	17
1.7. Простейшие виды напряженного и деформируемого состояния. Растяжение – сжатие. Гипотеза Я. Бернулли. Коэффициент Пуассона .....	19
1.8. Сдвиг .....	21
1.9. Связь между напряжениями и деформациями. Закон Гука. Принцип независимости действия сил .....	22
1.10. Принцип Сен-Венана. Схемы простейших расчетов на растяжение и сжатие .....	25
1.11. Схемы расчетов на прочность и жесткость при растяжении и сжатии. Допускаемые напряжения и коэффициенты запаса прочности.....	25
1.12. Определение потенциальной энергии деформации .....	28
1.13. Напряжения в наклонных сечениях бруса при растяжении, сжатии .....	30
1.14. Построение эпюры нормальной силы при растяжении или сжатии бруса .....	31
1.15. Брус равного сопротивления растяжению и сжатию .....	41
1.16. Деформация бруса равного сопротивления .....	42

1.17. Статически неопределимые задачи на растяжение и сжатие .....	42
1.18. Учет влияния температуры .....	49
1.19. Учет влияния монтажных зазоров .....	52
<b>Глава 2. Основы общей теории напряженного и деформируемого состояний .....</b>	<b>58</b>
2.1. Исследование напряженного состояния в точке тела. Тензор напряжений. Закон парности касательных напряжений .....	58
2.2. Напряжения на наклонных площадках .....	60
2.3. Главные напряжения и главные площадки .....	62
2.4. Определение положения главных площадок .....	66
2.5. Определение напряжений на произвольных наклонных площадках по заданным главным напряжениям .....	68
2.6. Эллипсоид напряжений (элемент Ляме) .....	69
2.7. Определение наибольших касательных напряжений .....	69
2.8. Напряжения на октаэдрических площадках .....	72
2.9. Общие выводы по теории напряженного состояния .....	73
2.10. Случай плоского напряженного состояния .....	75
2.11. Определение напряжений на произвольных площадках по заданным данным главным напряжениям .....	77
2.12. Графический способ исследования плоского напряженного состояния. Круговые диаграммы Мора .....	78
2.13. Применение графического способа к исследованию объемного напряженного состояния .....	80
2.14. Исследование деформируемого состояния в точке тела. Зависимости Коши. Тензор деформаций .....	81
2.15. Связь между напряжениями и деформациями. Обобщенный закон Гука .....	85
2.16. Изменение объема при упругой деформации .....	90
2.17. Определение потенциальной энергии деформации .....	92
2.18. Потенциальная энергия изменения объема и формы .....	94
2.19. Гипотезы прочности. Гипотезы пластичности и разрушения .....	101



<b>Глава 3. Геометрические характеристики плоских сечений ...</b>	<b>116</b>
3.1. Статические моменты площадей сечений .....	116
3.2. Моменты инерции плоских фигур .....	119
3.3. Моменты инерции сложных сечений и стандартных профилей .....	122
3.4. Формулы перехода. Зависимость между моментом инерции плоской фигуры при повороте и плоском параллельном переносе осей .....	123
3.5. Формулы перехода при повороте осей .....	124
3.6. Главные оси и главные моменты инерции плоской фигуры .....	125
3.7. Формулы перехода при параллельном переносе осей .....	126
3.8. Определение положения главных осей и величины главных моментов инерции сложной фигуры .....	126
3.9. Понятие о радиусе и эллипсе инерции .....	128
<b>Глава 4. Сдвиг и кручение .....</b>	<b>131</b>
4.1. Деформация сдвига (срез) .....	131
4.2. Чистый сдвиг .....	132
4.3. Проверка прочности при чистом сдвиге .....	133
4.4. Связь между напряжениями и деформациями при чистом сдвиге .....	134
4.5. Кручение .....	135
4.6. Кручение стержней круглого поперечного сечения. Внутренние силовые факторы при кручении .....	136
4.7. Характер разрушения и расчет на прочность стержней при кручении .....	141
4.8. Определение перемещений (деформаций) при кручении и расчет на жесткость .....	142
4.9. Определение потенциальной энергии деформации при кручении .....	144
4.10. Статически неопределимые задачи .....	146
4.11. Кручение валов некруглого сечения .....	149

4.12. Использование методов аналогии. Метод пленочной (мембранной) аналогии .....	151
4.13. Кручение тонкостенных стержней .....	153
<b>Глава 5. Плоский прямой изгиб .....</b>	<b>166</b>
5.1. Типы опор балок и определение опорных реакций .....	166
5.2. Виды нагрузок .....	169
5.3. Внутренние силовые факторы в сечении бруса при изгибе. Изгибающий момент, поперечная сила, нормальная сила. Правило знаков. Эпюры $M$ , $Q$ , $N$ .....	171
5.4. Правило знаков для поперечной или перерезывающей силы $Q$ .....	172
5.5. Правило знаков изгибающего момента .....	173
5.6. Правило знаков для нормальной силы .....	173
5.7. Дифференциальные зависимости между $q$ , $Q$ , $M$ .....	177
5.8. Определение нормальных напряжений при изгибе .....	178
5.9. Проверка прочности при изгибе по нормальным напряжениям .....	182
5.10. Рациональные сечения балок из пластичных материалов при изгибе .....	183
5.11. Потенциальная энергия деформации при чистом изгибе ..	184
5.12. Напряжения при поперечном изгибе .....	185
5.13. Определение касательных напряжений при изгибе. Формула Д. И. Журавского .....	187
5.14. Проверка прочности по касательным напряжениям при изгибе балок .....	190
5.15. Распределение касательных напряжений при изгибе балок тонкостенного сечения (случай сечений с двумя осями симметрии) .....	191
5.16. Полная проверка прочности балки при изгибе по главным напряжениям .....	193
5.17. Траектории главных напряжений .....	196
5.18. Случай изгиба балок нагрузками, приложенными в главной плоскости, не являющейся плоскостью симметрии балки .....	197

5.19. Поперечный изгиб балок тонкостенного сечения нагрузками, приложенными в главной плоскости, не являющейся плоскостью симметрии балки. Центр изгиба балок тонкостенного сечения .....	198
5.20. Определение деформации при изгибе .....	199
5.21. Аналитический способ определения упругой линии балки. Дифференциальное уравнение изогнутой линии оси балки Эйлера–Бернулли .....	200
5.22. Определение деформации в случае балок с несколькими участками .....	204
5.23. Вывод обобщенного уравнения упругой линии балки. Метод уравнивания произвольных постоянных интегрирования для балки с несколькими участками (метод начальных параметров). Универсальные уравнения углов поворота и прогибов .....	207
5.24. Случай треугольной нагрузки .....	210
5.25. Универсальные уравнения углов поворотов и прогибов балок .....	211
<b>Глава 6. Сложное сопротивление</b> .....	219
6.1. Совокупное действие нескольких видов деформаций .....	219
6.2. Косой изгиб .....	221
6.3. Проверка прочности при косом изгибе .....	223
6.4. Определение деформаций при косом изгибе .....	225
6.5. Внецентренное растяжение и сжатие прямых стержней....	225
6.6. Ядро сечения .....	227
6.7. Совместное действие изгиба с кручением .....	228
6.8. Совместное действие изгиба с кручением для стержней некруглого сечения .....	230
<b>Глава 7. Методы потенциальной энергии</b> .....	244
7.1. Единичная сила. Единичное перемещение. Представление полного перемещения как суммы перемещений, вызванных отдельными силами (система обозначений) ...	245
7.2. Работа внешних сил при упругой деформации .....	246

7.3.	Работа внутренних сил при упругой деформации (плоская стержневая система) .....	247
7.4.	Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений	253
7.5.	Теорема Кастильяно .....	255
7.6.	Общий метод определения перемещений в упругих системах (Метод Мора) .....	258
7.7.	Способ Верещагина .....	266
7.8.	Формула Симпсона .....	267
7.9.	Расчет статически неопределимых плоских стержневых систем на основе метода потенциальной энергии .....	272
7.10.	Метод сил. Канонические уравнения метода сил .....	274
7.11.	Расчет многопролетных неразрезных балок .....	283
7.12.	Определение значений реакций в опорах .....	286
7.13.	Вычисление перерезывающих сил .....	287
7.14.	Определение изгибающих моментов .....	287
7.15.	О методе перемещений .....	296
7.16.	Расчет винтовых цилиндрических пружин .....	299
<b>Глава 8.</b>	<b>Динамическое действие сил</b> .....	<b>306</b>
8.1.	Определение напряжений и деформаций с учетом сил инерции .....	307
8.2.	Случай тонкого вращающегося колеса .....	308
8.3.	Ударное действие сил .....	309
8.4.	Расчеты на прочность и жесткость при колебаниях .....	313
8.5.	Крутильные колебания (собственные) .....	320
8.6.	Собственные колебания систем с одной степенью свободы с учетом силы сопротивления .....	321
8.7.	Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы (при наличии сопротивления, пропорционального скорости) .....	322
8.8.	Колебания систем с большим числом степеней свободы ...	328
8.9.	Крутильные колебания валов .....	330
8.10.	Расчеты на прочность при напряжениях переменных во времени .....	333

8.11. Экспериментальное определение характеристик сопротивления усталости .....	336
8.12. Установление предела выносливости .....	338
8.13. Диаграмма предельных напряжений .....	341
8.14. Влияние конструктивно-технологических факторов на предел выносливости .....	346
8.15. Проверка прочности при переменных напряжениях .....	354
8.16. Сложное напряженное состояние .....	356
8.17. Расчеты при нестационарных режимах .....	358
<b>Глава 9. Расчет конструкций по предельным нагрузкам.</b>	
<b>Основные понятия о предельном состоянии</b> .....	366
9.1. Расчеты при растяжении и сжатии .....	369
9.2. Расчеты при кручении .....	371
9.3. Расчеты при изгибе .....	374
9.4. Пластические шарниры .....	377
9.5. Пластический анализ балок .....	379
<b>Глава 10. Расчет кривых брусьев</b> .....	386
10.1. Вывод формулы для определения нормальных напряжений при чистом изгибе бруса большой кривизны	389
10.2. Определение положения нейтральной оси .....	394
10.3. Определение положения нейтральной оси с помощью таблицы .....	397
10.4. Определение деформаций кривого бруса .....	400
<b>Глава 11. Толстостенные трубы и быстровращающиеся диски</b>	402
11.1. Расчет толстостенных сосудов .....	402
11.2. Определение напряжений в составных трубах .....	409
11.3. Расчет быстровращающихся дисков .....	416
<b>Глава 12. Расчет тонкостенных оболочек. Безмоментная (мембранная) теория</b> .....	422
12.1. Определение напряжений в оболочке .....	423

<b>Глава 13. Устойчивость сжатых стержней</b> .....	436
13.1. Устойчивое и неустойчивое упругое равновесие .....	436
13.2. Формула Эйлера для определения $F_{кр.}$ (Задача Эйлера) ....	438
13.3. Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы .....	440
13.4. Пределы применимости формулы Эйлера .....	441
13.5. Понятие о потере устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности .....	443
13.6. Энергетический метод определения критических нагрузок	449
<b>Список литературы</b> .....	459
Приложение 1. Обозначения и основные символы (Стандарт ИСО 3898).....	460
Приложение 2. Нормальные линейные размеры .....	465
Приложение 3. Кратные и дольные единицы системы СИ.....	465
Приложение 4. Сортамент прокатной стали .....	466
Приложение 5. Основные расчетные характеристики наиболее употребительных материалов .....	471
Приложение 6. Данные по расчету на кручение стержней прямоугольного сечения .....	471
Приложение 7. Прочность на разрыв различных твердых тел	472
Приложение 8. Механические характеристики конструкционных материалов .....	473
Приложение 9. Удельные характеристики прочности конструкционных материалов .....	474
Приложение 10. Механические свойства и допускаемые напряжения конструкционных сталей .....	475
Приложение 11. Данные к расчетам на устойчивость .....	479
Приложение 12. Данные к расчету характеристик сопротивления усталости .....	480

*Учебник*

ЖЕРНАКОВ Владимир Сергеевич

# Сопротивление материалов – механика материалов и конструкций

*Редактор Волосатова Е. В.*

Подписано в печать .04.2012. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Times New Roman Суг.

Усл. печ. л. 31,8. Уч.-изд. л. 31,7. Тираж 300 экз. Заказ № .

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет»

Редакционно-издательский комплекс УГАТУ

450000, Уфа-центр, ул. К.Маркса, 12