

2.1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4 (КОМПЬЮТЕРИЗИРОВАННАЯ)

Тема: Изучение свободных прямолинейных колебаний материальной точки.

Введение. В инженерной деятельности специалиста (инженера) возникает необходимость решений вопросов, связанных с колебательными процессами. Теория колебаний относится к наиболее сложным вопросам теоретической механики. В связи с этим выполнение лабораторных работ по изучению свободных, затухающих и вынужденных прямолинейных колебаний материальной точки является важным фактором, способствующим пониманию и закреплению основных положений теории.

1. Цель и задачи выполнения работы

1.1. Цель выполнения работы. Освоение метода теоретической механики описания, теоретического и экспериментального исследования механического движения, изучение закономерностей колебательного движения точек.

1.2. Задачи выполнения работы: 1) понять и усвоить алгоритм теоретического описания и исследования механического движения точки; 2) повторить математический аппарат от математической постановки задачи до получения и анализа уравнения движения; 3) теоретически и экспериментально установить влияние массы точки и жесткости пружины на характеристики ее колебательного движения; 4) понять и освоить логику расчета эквивалентной жесткости систем пружин; 5) найти развернутые ответы на контрольные вопросы.

2. Краткая теория свободных колебаний материальной точки

В данном разделе содержатся основные понятия и теоретические зависимости между их количественными мерами по теме «Колебания материальной точки». Для более глубокого изучения темы необходимо воспользоваться материалами, изложенными в лекционном курсе, в учебниках и учебных пособиях по теоретической механике. Рекомендуемая литература приведена в конце данной лабораторной работы.

Моделью колеблющегося тела является материальная точка. Исследование механического движения начинается с разработки механической модели движения (расчетной схемы). Необходимое для возникновения механических колебаний (периодического движения в ограниченной области пространства) условие устойчивого равновесия точки моделируется установкой тела 1 массой M на гладкую плоскую поверхность 2 и присоединения его посредством цилиндрической пружины 3 к стене 4 (рис. 2.1). Силы сопротивления здесь не учитываются. Точка O – положение устойчивого равновесия, около которого происходит колебательное движение.

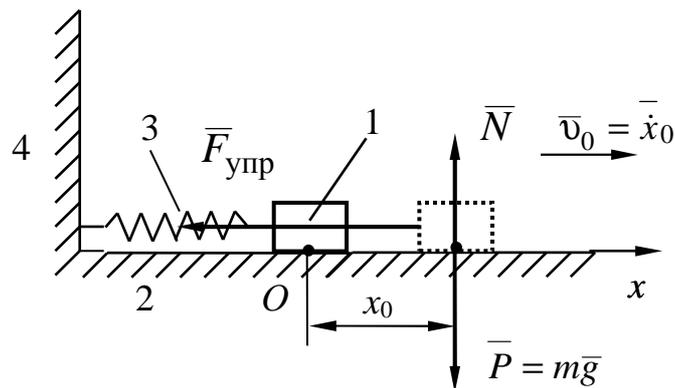


Рис. 2.1. Механическая модель свободных прямолинейных колебаний материальной точки

Математическая постановка задачи осуществляется на основе механической модели и включает дифференциальное уравнение движения:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i \quad (i = 1, 2, 3 \dots n) \quad (2.1)$$

и начальные условия:

$$\text{при } t = t_0 = 0, \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0. \quad (2.2)$$

Масса считается известной. Точка может двигаться только по оси x .

Далее необходимо поработать с уравнениями (2.1) и (2.2) в основном тождественными математическими преобразованиями, чтобы получить удобную для интегрирования скалярную форму уравнения (2.1), которая получается его проецированием на ось x и имеет вид

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n X_i, \quad (2.3)$$

где m – масса точки; \ddot{x} – проекция ускорения точки на ось Ox , $\sum_{i=1}^n X_i$ – сумма проекций на ось Ox всех сил, действующих на точку.

Свободные колебания происходят при наличии только восстанавливающей силы, проекция которой на ось $F_x = -c \cdot x$, где c – жесткость пружины. Подставляя это уравнение в (2.3) и деля его на массу точки, получаем каноническую форму дифференциального уравнения свободных колебаний точки в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (2.4)$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – круговая частота собственных колебаний точки.

Время одного полного колебания называется периодом колебаний и равно

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (2.5)$$

Решением дифференциального уравнения (2.4) является уравнение движения точки, имеющее вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (2.6)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования; t – время.

Для определения постоянных интегрирования и нахождения, тем самым, частного решения дифференциального уравнения (2.4) используются начальные условия (2.2). Для нахождения двух постоянных C_1 и C_2 второе уравнение получают дифференцированием (2.6) по времени

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 \cos kt. \quad (2.7)$$

Решая совместно систему (2.6) и (2.7), находим

$$C_1 = x_0 \text{ и } C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}. \quad (2.8)$$

Уравнения движения примут вид:

$$x(t) = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt, \quad (2.9)$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \sin kt + \dot{x}_0 \cos kt, \quad (2.10)$$

Уравнения движения точки (2.9) и (2.10) являются вершиной метода теоретической механики, потому что они позволяют решить две основные задачи описания механического движения: иметь способ определения местонахождения точки на траектории (координата x) в любой момент времени t и скорости ее движения (\dot{x}) в любой момент времени.

Для получения уравнения движения в амплитудной форме произведем замену произвольных постоянных C_1 и C_2 на новые постоянные A и α по уравнениям:

$$C_1 = A \sin \alpha \text{ и } C_2 = A \cos \alpha. \quad (2.10)$$

Подстановка (2.8) в (2.10) и в (2.6) и применение известного тригонометрического соотношения дает уравнение движения точки

$$x(t) = A \sin(kt + \alpha), \quad (2.11)$$

где A – амплитуда колебаний; α – начальная фаза колебаний.

Продифференцировав по времени (2.11), получим второе уравнение для определения A и α

$$\dot{x}(t) = A \cos(kt + \alpha). \quad (2.12)$$

Совместное решение (2.11) и (2.12) дает

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha = kx_0 / \dot{x}_0. \quad (2.13)$$

Уравнения (2.11) и (2.12) являются другой формой представления уравнений (2.9) и (2.10), т.е. они эквивалентны. Эти уравнения позволяют теоретически изучить все закономерности рассматриваемого механического движения точки. Например, по уравнениям движения можно исследовать влияние на характеристики

движения начальных условий, массы точки, жесткости упругого элемента и т.д.

Представляет интерес теоретически изучить влияние постоянной силы на характер колебаний. Для этого удобно построить механическую модель с вертикальным расположением пружины (рис. 2.2).

В положении статического равновесия (рис. 2.2, б) груз P_1 растягивает пружину на $\delta_{ст1}$ и сила тяжести \bar{P}_1 уравнивается силой упругости пружины \bar{F} . Это состояние описывается уравнением равновесия

$$m_1 g - c \delta_{ст1} = 0. \quad (2.14)$$

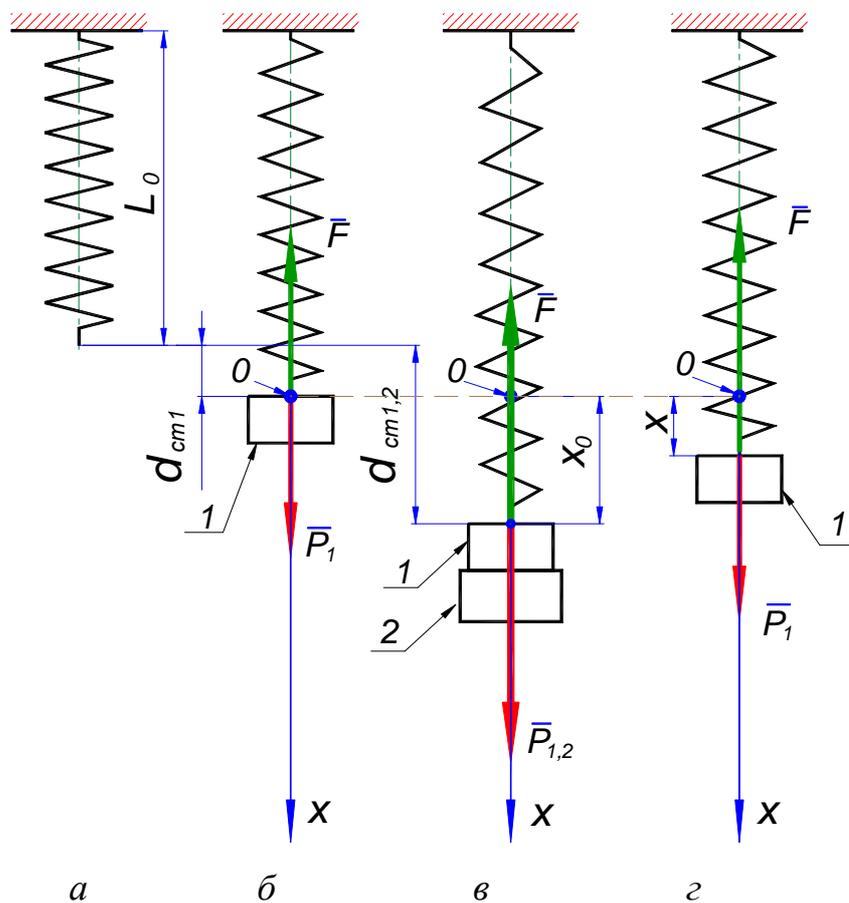


Рис. 2.2

Если к грузу P_1 добавить еще один груз P_2 , то состояние статического равновесия этих грузов на пружине (см. рис. 2.2, в) будет описываться уравнением

$$(m_1 - m_2)g - c \delta_{ст1,2} = 0, \quad (2.15)$$

где $\delta_{ст1,2} = \delta_{ст1} + \delta_{ст2}$, т.е. статическая деформация пружины от двух грузов складывается из ее статических деформаций от каждого из грузов в отдельности. Итак, два груза P_1 и P_2 растягивают пружину и покоятся. Если теперь аккуратно удалить груз P_2 , не сообщая оставшемуся грузу P_1 никакой скорости, то груз P_1 на пружине начнет совершать движение (см. рис. 2.2, з). Выбрав систему координат – вертикальную ось Ox , с началом, совпадающим с положением статического равновесия груза, это движение можно описать следующим дифференциальным уравнением:

$$m_1 \ddot{x} = \Sigma X_i = m_1 g - c(\delta_{см1} + x). \quad (2.16)$$

Используя (2.13) уравнение (2.15) приводится к виду (2.4). Получается, что наличие постоянной силы не оказывает влияния на характер колебания.

В рассмотренном примере груз P_2 был необходим для задания начального положения грузу P_1 . Начальные условия выглядят так:

$$t = 0; \quad x_0 = \delta_{ст2}; \quad \dot{x}_0 = 0.$$

Подстановка этих значений в (2.6) дает: $A = \delta_{см2}$; $\alpha = \pi/2$ и уравнение колебаний имеет вид

$$x = \delta_{см2} \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right) = \delta_{см2} \cos(kt). \quad (2.17)$$

Параллельное соединение пружин.

Рассмотрим параллельное соединение двух пружин с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 (рис. 2.3). Схема соединения пружин на рис. 2.3, а характерна тем, что на ней при движении груза обе пружины одновременно растягиваются, или одновременно сжимаются, в отличие от соединения, показанного на рис. 2.3, б, где при растяжении одной из пружин вторая сжимается, и наоборот.

Деформации же пружин на обеих схемах одинаковы: $\delta_{ст1} = \delta_{ст2} = \delta$. Для соединения по схеме (рис. 2.3, а) это означает, что штанга AB должна смещаться по вертикали, сохраняя горизонтальность. Для обеспечения этого условия груз P необходимо подвесить в точке D , в

которой приложена равнодействующая двух параллельных сил упругости:

$$F_1 = c_1 \delta \quad \text{и} \quad F_2 = c_2 \delta. \quad (2.18)$$

Эта точка определяется соотношением:

$$F_1 \cdot a = F_2 \cdot b, \quad \text{или} \quad c_1 \delta \cdot a = c_2 \delta \cdot b, \quad (2.19)$$

и окончательно

$$c_1 \cdot a = c_2 \cdot b. \quad (2.20)$$

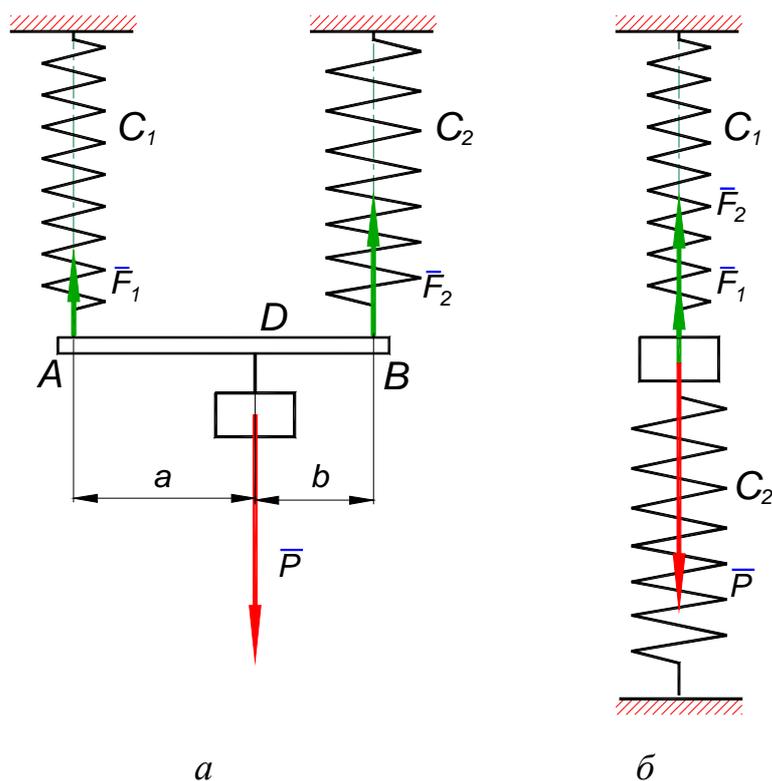


Рис. 2.3

Замечание: При выполнении лабораторной работы точка D подбирается экспериментально путем смещения груза по штанге AB и добиваясь ее горизонтальности.

Уравнения равновесия для обеих рассматриваемых схем выглядят одинаково:

$$P = (c_1 + c_2) \cdot \delta = c_{\text{ЭКВ}} \cdot \delta, \quad (2.21)$$

откуда жесткость эквивалентной пружины, заменяющей две параллельно соединенные, находится как

$$\boxed{c_{\text{ЭКВ}} = c_1 + c_2}. \quad (2.22)$$

Последовательное соединение пружин.

На рис. 2.4 показан груз P , подвешенный к двум последовательно соединенным пружинам. В положении статического равновесия каждая из пружин растягивается силой P . Статические удлинения пружин будут

$$\delta_{ст1} = \frac{P}{c_1} , \quad \delta_{ст2} = \frac{P}{c_2} . \quad (2.23)$$

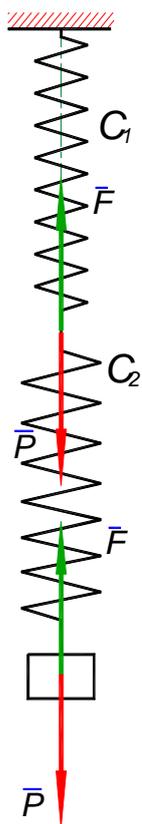


Рис. 2.4

Если представить пружину с коэффициентом жесткости $c_{эқв}$, эквивалентную двум данным пружинам, то в положении статического равновесия ее удлинение равно

$$\delta = \frac{P}{c_{эқв}} , \quad (2.24)$$

но учитывая, что $\delta = \delta_{ст1} + \delta_{ст2} , \quad (2.25)$

с использованием (2.23) и (2.24) получаем для последовательно соединенных пружин

$$c_{\text{ЭКВ}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}. \quad (2.26)$$

3. Оборудование

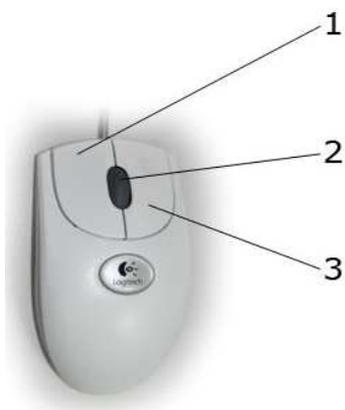
3.1. Активные клавиши

При выполнении лабораторной работы применяются следующие клавиши клавиатуры (рис. 3.1):

- *W, S, A, D* – для перемещения в пространстве;
- *F2, E* – аналог средней кнопки манипулятора (при первом нажатии берется объект, при последующем – ставится);
- *F10* – выход из программы.



Рис. 3.1



При работе с манипулятором (мышью) используются следующие клавиши (рис. 3.2):

- левая клавиша мыши (1) – при нажатии и удерживании обрабатывается (поворачивается, переключается) тот или иной объект;
- средняя клавиша (2) при первом нажатии (прокрутка не используется) берется объект, при последующем – ставится;

Рис. 3.2

- Правая клавиша (3) – при нажатии появляется курсор-указатель, при повторном – исчезает.

Примечание: при появившемся курсоре невозможно переводить взгляд вверх и в стороны.

3.2 Лабораторное оборудование

Комплектность лабораторной установки (рис. 3.3):

- шесть пружин разной длины, с разными коэффициентами жесткости;
- штанга для параллельного соединения пружин;
- комплект грузов;
- секундомер;
- линейка.



Рис. 3.3

4. Порядок выполнения работы

4.1. Определение коэффициента жесткости пружины

1. Закрепите исследуемую пружину.
2. Подвесьте к ней один из грузов P_0 и запишите в таблицу длину предварительно напряженной пружины L_0 .
3. Добавляя последовательно любой из n имеющихся грузов P_i , фиксируем соответствующие длины L_i пружины и вычисляем величины статических деформаций (удлинений):

$$\delta_{ст_i} = L_i - L_{i-1}. \quad (4.1)$$

4. Вычислите коэффициент жесткости пружины для каждого из случаев догрузки:

$$c_i = \frac{P_i}{\delta_{ст_i}}. \quad (4.2)$$

5. Вычислите среднеарифметическое значение коэффициента жесткости пружины

$$c = \frac{\sum c_i}{n}. \quad (4.3)$$

6. Вычислите погрешность измерения коэффициента жесткости

$$\Delta_{c_i} = \frac{|c - c_i|}{c} \cdot 100\%. \quad (4.4)$$

7. Занесите все результаты измерений и вычислений в таблицу 1 и повторите все для второй пружины. Коэффициенты жесткости обозначать c_m и c_b соответственно для пружины малого и большого диаметров.

4.2. Определение коэффициента жесткости пружин, эквивалентных параллельному и последовательному соединению пружин

Параллельное соединение.

1. Рассчитайте предварительно теоретическое значение коэффициента жесткости пружины, эквивалентной параллельному соединению двух пружин:

$$c_{пар}^m = c_m + c_b, \quad (4.5)$$

где c_m и c_b коэффициенты жесткости пружин меньшего и большего диаметров, взятые из табл. 1.

2. Соедините пружины параллельно (рис. 4.1), и сделайте все, что было выполнено для одной пружины в соответствии с п. 4.1, заполняя табл. 2. В результате будет получено среднее арифметическое значение экспериментального коэффициента жесткости $c_{\text{посл}}$ данной системы параллельно соединенных пружин.

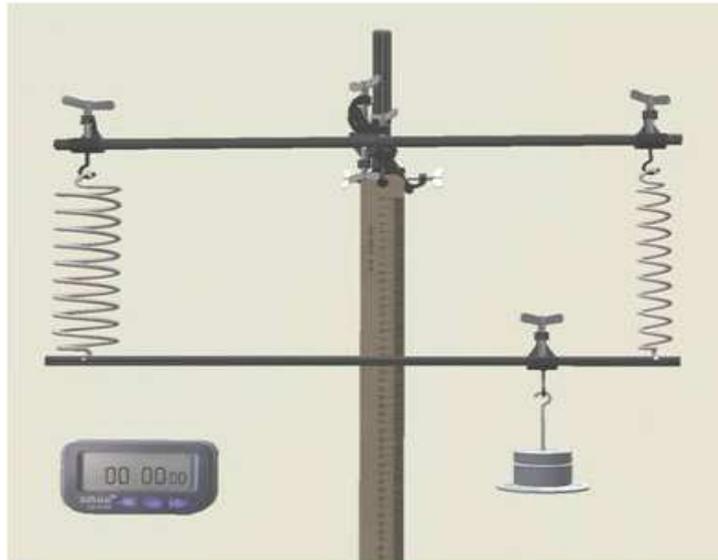


Рис. 4.1

3. Сравните значения $c_{\text{пар}}^m$ и $c_{\text{пар}}$ и оцените погрешность по формуле

$$\Delta_{c_{\text{пар}}} = \frac{|c_{\text{пар}}^m - c_{\text{пар}}|}{c_{\text{пар}}^m}. \quad (4.6)$$

Последовательное соединение.

1. Рассчитайте предварительно теоретическое значение коэффициента жесткости пружины, эквивалентной последовательному соединению двух пружин:

$$c_{\text{посл}}^m = \frac{c_m \cdot c_b}{c_m + c_b}. \quad (4.7)$$

2. Соедините пружины параллельно (рис. 4.2), и сделайте все, что было выполнено для одной пружины в соответствии с п. 4.1,

занося все результаты в соответствующую часть табл. 2. В результате будет получено среднеарифметическое значение экспериментального коэффициента жесткости $c_{\text{посл}}$ данной системы параллельно соединенных пружин.



Рис. 4.2

3. Сравните значения $c_{\text{посл}}^m$ и $c_{\text{посл}}$ и оцените погрешность по формуле

$$\Delta_{c_{\text{посл}}} = \frac{|c_{\text{посл}}^m - c_{\text{посл}}|}{c_{\text{посл}}} \quad (4.8)$$

4.3. Определение периода колебаний груза

1. Предскажите теоретически по формуле (2.5) какими будут периоды колебаний грузов на пружинах большего и меньшего диаметров, а также при параллельном и последовательном соединении этих пружин. При этом массы и коэффициенты жесткости брать из табл. 1 и 2.

2. Подвесив исследуемую пружину (или соединение) к раме, загрузите ее грузами в соответствии с таблицами.

3. В каждом из случаев загрузки, отклоняя груз от положения равновесия, измерьте при помощи секундомера время 10 полных колебаний.

4. После подсчета времени одного колебания $T_{\text{эксп}}$ вычислите погрешность по отношению к теоретически предсказанному $T_{\text{теор}}$.

$$\Delta_T = \frac{|T_{\text{эксп}} - T_{\text{теор}}|}{T_{\text{теор}}}. \quad (4.9)$$

Результаты занесите в табл. 3.

5. Контрольные вопросы

1. Основной отличительный признак свободных колебаний.
2. Под действием какой силы совершаются свободные колебания материальной точки?
3. Что значит описать механическое движение точки?
4. Алгоритм описания механического движения точки.
5. Что такое уравнение или закон движения материальной точки?
6. Какой вид имеет дифференциальное уравнение свободных колебаний?
7. От каких факторов зависят частота и период свободных колебаний?
8. От каких факторов зависят амплитуда и начальная фаза свободных колебаний?
9. Почему точность определения периода будет выше, если следить за прохождением груза его равновесного положения, а не крайнего?
10. Как вычисляется среднее арифметическое значение измеряемой величины?
11. Как подсчитать погрешность измерения?
12. Как связаны между собой период и круговая частота?
13. Как выглядит график свободных колебаний?
14. Что такое статическая деформация пружины?
15. Как влияет наличие постоянной силы на свободные колебания?
16. Как влияет увеличение силы тяжести на свободные колебания?

17. Как можно увеличить амплитуду свободных колебаний?
18. Как изменяется период колебаний с изменением коэффициента жесткости пружины?
19. Какой пружиной можно заменить систему пружин, соединенных параллельно?
20. Какой пружиной можно заменить систему пружин, соединенных последовательно?

6. Отчет

1. Изобразите схему установки с указанием координатной оси и начала на этой оси.
2. Покажите силы, действующие на груз, деформацию пружины в положении статического равновесия груза, координату x груза в произвольный момент колебаний.
3. Заполнить табл. 1–3.
4. Построить графики деформирования двух пружин по данным табл. 1.

Таблица 1

Определение коэффициентов жесткости пружин

Силы тяжести добавляемых грузов P_i					Средние значения жесткости
Пружина малого диаметра					
Длина нагруженной пружины L_i					
Статическая деформация пружины $\delta_{ст_i}$					
Жесткость $c_{м_i}$					
Погрешность измерения жесткости Δc_i					
Пружина большого диаметра					
Длина нагруженной пружины L_i					
Статическая деформация пружины $\delta_{ст_i}$					
Жесткость $c_{б_i}$					
Погрешность измерения жесткости Δc_i					

Таблица 2

Определение коэффициентов жесткости систем пружин

Силы тяжести добавляемых грузов P_i					Средние значения жесткости
Система двух параллельно соединенных пружин.					
Длина нагруженной системы L_i					
Статическая деформация системы $\delta_{ст_i}$					
Жесткость $c_{пар_i}$					
Расчетная жесткость $c_{пар}^m$ (по c_m и c_b из табл. 1)					
Погрешность $\Delta_{c_пар}$					
Система двух последовательно соединенных пружин.					
Длина нагруженной системы L_i					
Статическая деформация системы $\delta_{ст_i}$					
Жесткость $c_{посл_i}$					
Расчетная жесткость $c_{посл}^m$ (по c_m и c_b из табл. 1)					
Погрешность $\Delta_{c_посл}$					

Определение периода колебаний грузов

Таблица 3

	Коэффициент жесткости C , Н/м	Масса грузов m , кг	Теоретическое значение периода T , с	Экспериментальное значение 10 периодов t , с	Экспериментальное значение периода T , с	Относительная погрешность
Пружина малого диаметра						
Пружина большого диаметра						
Параллельно соединенные пружины						
Последовательно соединенные пружины						