

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

*Х.С. Хазанов*

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ  
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Самара 2002

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

*Х.С. Хазанов*

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ  
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

*Учебное пособие*

Самара 2002

УДК 534.1:629.7.015.4

**Хазанов Х.С. Механические колебания систем с распределенными параметрами:** Учеб. Пособие. Самар. госуд. аэрокосмич. ун-т. Самара, 2002. 80 с.

ISBN

Рассматриваются собственные и вынужденные колебания стержней постоянного сечения. Излагается вариационный принцип Гамильтона, методика определения частот и форм собственных колебаний стержней переменного сечения, стержней с присоединенным жестким грузом с использованием методов Рэлея-Ритца и Бубнова-Галеркина. Рассматриваются совместные изгибно-крутильные колебания крыла, приближенная качественная математическая модель изгибно-крутильного флаттера крыла в дозвуковом потоке.

Пособие предназначено для студентов специальности 071100 - Динамика и прочность машин, изучающих курс «Аналитическая динамика и теория колебаний». Разработано на кафедре прочности летательных аппаратов.

Табл. 4. Ил. 43. Библиогр: 9 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им. акад. С.П. Королева.

Рецензенты: д-р технич. наук, профессор Ю.Э. Сеницкий,  
д-р технич. наук, профессор Н.Н. Столяров.

ISBN

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2002.



## 1. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

### 1.1. Продольные и крутильные колебания стержней

1.1.1. Дифференциальные уравнения движения. Рассмотрим стержень, совершающий колебания вдоль его оси (рис. 1.1). Совместим начало координат с левым торцом. Пусть вдоль оси стержня действует погонная возмущающая сила  $q_x = q_x(x, t)$ . Обозначим через  $u_x = u_x(x, t)$  перемещение произвольного сечения стержня в процессе колебаний, через  $N = N(x, t)$  - продольную силу упругости в рассматриваемом сечении, а через  $m_0$  - погонную массу стержня. Выделим, далее, двумя сечениями бесконечно малый элемент стержня длиной  $dx$ .

На рис. 1.1 показаны силы, действующие на выделенный элемент при положительных перемещениях  $u_x$ . Здесь и в дальнейшем диссипативными силами будем пренебрегать. Добавив к приведенным на рисунке силам силы инерции

$\left(-m_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} dx\right)$ , можно, в соответствии с принципом Д'Аламбера, рассматривать

выделенный элемент как находящийся в состоянии статического равновесия:

$$-m_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} dx + q_x dx + \left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx\right) - N = 0 .$$

Отсюда имеем

$$m_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{\partial N}{\partial x} = q_x . \quad (1.1)$$

Продольная сила упругости  $N = A\sigma_{xx} = EA\varepsilon_{xx}$ , где  $\sigma_{xx}, \varepsilon_{xx}$  - нормальное напряжение и линейная деформация, которые полагаем по сечению стержня постоянными;  $E, A$  - модуль упругости материала и площадь поперечного сечения стержня. В соответствии с геометрическими соотношениями Коши  $\varepsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x$ . Тогда, после подстановки  $N$  в (1.1), получим

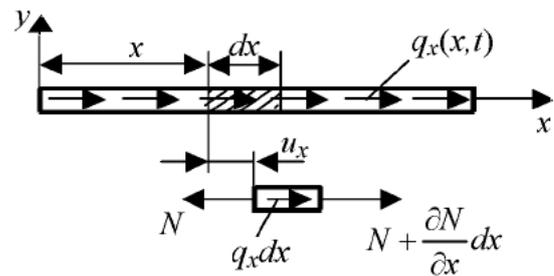


Рис. 1.1

$$m_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = q_x. \quad (1.2)$$

Для однородного стержня постоянного сечения  $EA = \text{const}$ ,  $m_0 = \text{const}$ , и последнее уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - a_{\text{п}}^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{q_x}{m_0}, \quad (1.3)$$

где

$$a_{\text{п}}^2 = EA/m_0 = E/\rho, \quad (1.4)$$

$\rho$  - плотность материала.

Рассмотрим теперь крутильные колебания круглого стержня (рис. 1.2). Через  $m_x = m_x(x, t)$  на рисунке обозначен возмущающий погонный крутящий момент. Обозначим через  $\vartheta_x = \vartheta_x(x, t)$  угол закручивания сечения стержня.

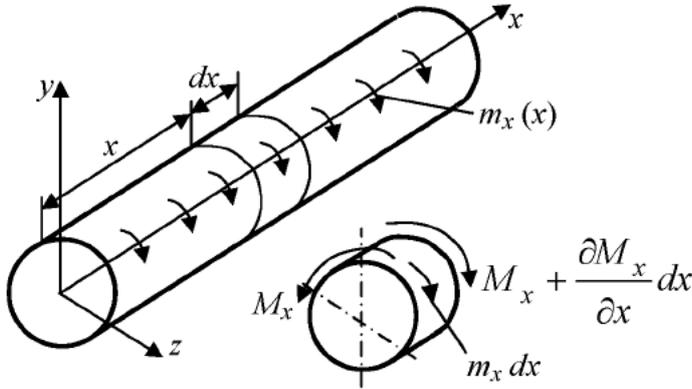


Рис. 1.2

Выделим, как и ранее, двумя сечениями бесконечно малый элемент стержня длиной  $dx$ . Если к внешним моментам, действующим на элемент и показанным на рисунке, добавить момент от инерционных сил  $\left( -I_{m_0} \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial t^2} dx \right)$ , где  $I_{m_0}$  - погонный массовый момент инерции стержня, то в соответствии с

принципом Д'Аламбера можно записать

$$-I_{m_0} \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial t^2} dx + m_x dx + \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) - M_x = 0,$$

откуда

$$I_{m_0} \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial t^2} - \frac{\partial M_x}{\partial x} = m_x.$$

Крутящий момент  $M_x$  связан с углом закручивания  $\vartheta_x$  зависимостью

$M_x = GI_p \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}$ , где  $I_p$  - полярный момент инерции поперечного сечения,  $G$  - модуль сдвига. Подстановка  $M_x$  в последнее равенство дает

$$I_{m_0} \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( GI_p \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \right) = m_x. \quad (1.5)$$

Для однородного стержня постоянного сечения получим

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}_x}{\partial t^2} - a_k^2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_x}{\partial x^2} = \frac{m_x}{I_{m0}}, \quad (1.6)$$

где  $a_k^2 = GI_p / I_{m0}$ .

Дифференциальные уравнения (1.5), (1.6) получены для стержня круглого поперечного сечения, для которого при кручении справедлива гипотеза плоских сечений. Если стержень имеет иную форму сечения, то при кручении имеет место деформация поперечного сечения, т.е. точки поперечного сечения выходят из своей плоскости. При строгой постановке динамической задачи здесь следует учесть инерцию поступательного перемещения точек стержня в направлении его оси. Однако в инженерных расчетах, как правило, этим пренебрегают, и для исследования крутильных колебаний используют уравнения типа (1.5), (1.6), где вместо полярного момента инерции  $I_p$  подставляют геометрическую жесткость на кручение  $I_{кр}$ , зависящую от формы поперечного сечения. Для прямоугольного сечения, например,  $I_{кр} = kab^3$ , где коэффициент  $k$  зависит от отношения сторон прямоугольника  $a/b$  ( $b$  - размер меньшей стороны); для стержня эллиптического сечения  $I_{кр} = \pi a^3 b^3 / (a^2 + b^2)$ , где  $a, b$  - полуоси эллипса; для однозамкнутой тонкостенной конструкции

$$I_{кр} = \Omega^2 / \oint \frac{ds}{h}, \quad (1.7)$$

где  $h$  - толщина оболочки,  $\Omega$  - удвоенная площадь фигуры, ограниченной средней линией контура поперечного сечения, а интегрирование ведется по этой средней линии.

1.1.2 Решение дифференциальных уравнений свободных продольных и крутильных колебаний стержня постоянного сечения. При отсутствии возмущающих сил дифференциальные уравнения (1.3) и (1.6) принимают вид

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - a_{\Pi}^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}_x}{\partial t^2} - a_k^2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_x}{\partial x^2} = 0. \quad (1.9)$$

Следуя методу Фурье, представим частное решение уравнения (1.8) в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координаты  $x$ , а вторая - от времени  $t$ :

$$u_{xr}(x, t) = v_r(x) T_r(t).$$

Подставив это решение в (1.8) и обозначив производные по координате  $x$  штрихами, а производные по времени  $t$  - точками сверху, запишем

$$v_r(x) \ddot{T}_r(t) - a_{\Pi}^2 v_r''(x) T_r(t) = 0$$

или

$$\frac{a_{\Pi}^2 v_r''(x)}{v_r(x)} = \frac{\ddot{T}_r(t)}{T_r(t)}$$

Здесь левая дробь зависит только от  $x$ , а правая - только от  $t$ . Это возможно лишь в том случае, когда обе дроби не зависят ни от  $x$ , ни от  $t$ , т.е. представляют собой некоторую константу. Обозначим ее через  $(-\omega_r^2)^1$ . Тогда,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{T}_r(t) + \omega_r^2 T_r(t) &= 0; \\ v_r''(x) + \alpha_r^2 v_r(x) &= 0, \quad \alpha_r = \omega_r / a_{\Pi}. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

С учетом равенства (1.4) имеем

$$\omega_r = \alpha_r \sqrt{EA/m_0}. \quad (1.11)$$

Решения уравнений (1.10) при  $\alpha_r \neq 0$ ,  $\omega_r \neq 0$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} T_r(t) &= C_{1r} \sin \omega_r t + C_{2r} \cos \omega_r t; \\ v_r(x) &= A_r \sin \alpha_r x + B_r \cos \alpha_r x. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Положим  $C_{1r} = C_r \cos \varphi_r$ ,  $C_{2r} = C_r \sin \varphi_r$  и получим

$$T_r(t) = C_r \sin(\omega_r t + \varphi_r).$$

Включив константу  $C_r$  в  $A_r$  и  $B_r$ , можно записать

$$u_{xr}(x, t) = (A_r \sin \alpha_r x + B_r \cos \alpha_r x) \sin(\omega_r t + \varphi_r) = v_r(x) \sin(\omega_r t + \varphi_r).$$

Суммируя частные решения, получим общее решение дифференциального уравнения (1.8):

$$u_x(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) \sin(\omega_r t + \varphi_r). \quad (1.13)$$

Параметр  $\omega_r$  представляет собой круговую частоту свободных (собственных) колебаний стержня и равен числу колебаний в  $2\pi$  секунд. В дальнейшем мы для краткости изложения будем этот параметр называть просто частотой свободных колебаний не оговаривая, что это круговая частота.

Упругая сила в сечениях стержня может быть также представлена в виде ряда

$$N(x, t) = EA \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial x} = \sum_{r=1}^{\infty} N_r(x) \sin(\omega_r t + \varphi_r), \quad (1.14)$$

<sup>1</sup> Положительная константа не соответствует колебательному движению стержня.

где 
$$N_r(x) = EA\alpha_r(A_r \cos\alpha_r x - B_r \sin\alpha_r x). \quad (1.15)$$

Положим в равенствах (1.12), (1.15)  $x = 0$  и получим

$$A_r = N_r(0)/(\alpha_r EA), \quad B_r = v_r(0), \quad (1.16)$$

что позволяет записать

$$\left. \begin{aligned} v_r(x) &= \frac{N_r(0)}{\alpha_r EA} \sin\alpha_r x + v_r(0) \cos\alpha_r x; \\ N_r(x) &= N_r(0) \cos\alpha_r x - EA\alpha_r v_r(0) \sin\alpha_r x. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Решая аналогично дифференциальное уравнение (1.9), получим для крутильных колебаний

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_x(x, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) \sin(\omega_r t + \varphi_r), \quad \omega_r = \alpha_r \sqrt{GI_{\text{кр}}/I_{\text{мо}}}; \\ M_x(x, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} M_r(x) \sin(\omega_r t + \varphi_r), \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} v_r(x) &= A_r \sin\alpha_r x + B_r \cos\alpha_r x; \\ M_r(x) &= GI_{\text{кр}}\alpha_r (A_r \cos\alpha_r x - B_r \sin\alpha_r x) \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

или

$$\left. \begin{aligned} v_r(x) &= \frac{M_r(0)}{\alpha_r GI_{\text{кр}}} \sin\alpha_r x + v_r(0) \cos\alpha_r x; \\ M_r(x) &= M_r(0) \cos\alpha_r x - GI_{\text{кр}}\alpha_r v_r(0) \sin\alpha_r x. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

1.1.3. Определение частот и форм собственных колебаний при различных условиях закрепления стержня. Решение задач будем рассматривать на примере продольных собственных колебаний стержня постоянного сечения, а затем обобщим на случай крутильных колебаний.

Стержень закреплен по торцам (рис. 1.3). Поскольку при  $x = 0$  и  $x = l$  перемещения  $u_x(x, t) = 0$  в любой момент времени, то на основании (1.13) получим граничные условия в форме

$$1. v_r(0) = 0, \quad 2. v_r(l) = 0.$$

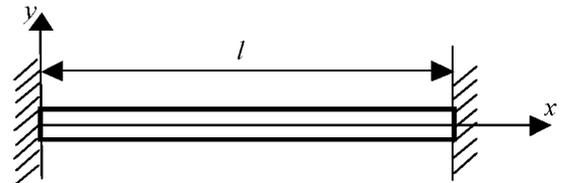


Рис. 1.3

Воспользуемся теперь выражением (1.12). Из первого граничного условия вытекает, что  $B_r = 0$ . Таким образом

$$v_r(x) = A_r \sin \alpha_r x. \quad (1.21)$$

Из второго граничного условия, обозначив  $\alpha_r l = \beta_r$ , имеем

$$A_r \sin \beta_r = 0.$$

Если  $A_r = 0$ , то колебания отсутствуют. Следовательно,  $\sin \beta_r = 0$ , откуда  $\beta_r = \pi r$  ( $r = \overline{1, \infty}$ ). Дело в том, что при  $r = 0$  в соответствии с (1.10)  $v_0''(x) = 0$ , значит

$$v_0(x) = A_0 + B_0 x. \quad (1.22)$$

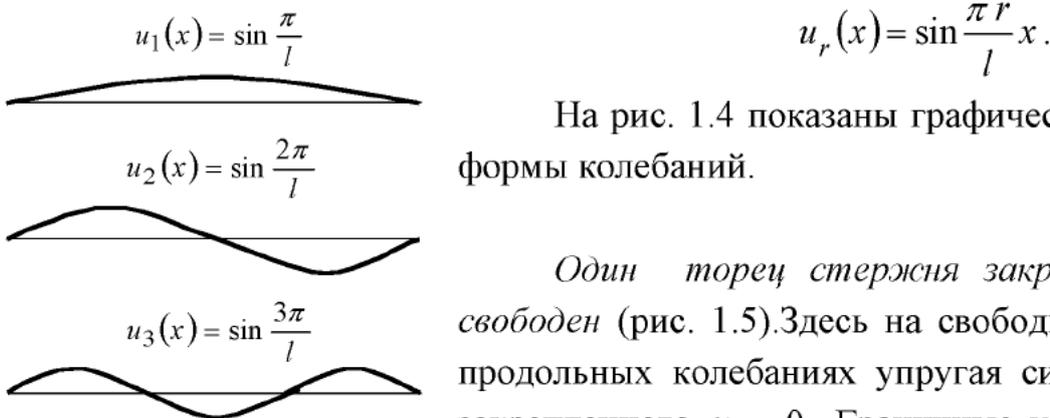
Нетрудно убедиться в том, что это решение не удовлетворяет граничным условиям задачи при  $A_0 \neq 0$  или  $B_0 \neq 0$ , следовательно  $r \neq 0$ . Тогда, имея в виду, что  $\alpha_r = \beta_r / l$ , из выражения (1.11) получим частоты колебаний

$$\omega_r = \beta_r \sqrt{EA / (m_0 l^2)}. \quad (1.23)$$

В рассматриваемом случае

$$\omega_r = \pi r \sqrt{EA / (m_0 l^2)} \approx \pi r \sqrt{E / (\rho l^2)}, \quad (r = 1 \dots \infty). \quad (1.24)$$

Опустим в (1.21) постоянную  $A_1$  и получим закон изменения по длине стержня амплитуд перемещений, соответствующих частотам колебаний  $\omega_r$  - формы колебаний  $u_r(x)$ :



На рис. 1.4 показаны графически первые три формы колебаний.

Один торец стержня закреплен, второй свободен (рис. 1.5). Здесь на свободном торце при продольных колебаниях упругая сила  $N = 0$ , а у закрепленного  $u_x = 0$ . Граничные условия примут вид

$$1. v_r(0) = 0; \quad 2. N_r(l) = 0.$$

Как и в предыдущей задаче, постоянная  $B_r = v_r(0) = 0$ , и имеет место выражение (1.21), а согласно равенству (1.17)  $N_r(x) = N_r(0) \cos \alpha_r x$ . Из второго

граничного условия получим  $N_r(0) \cos \beta_r = 0$ , откуда

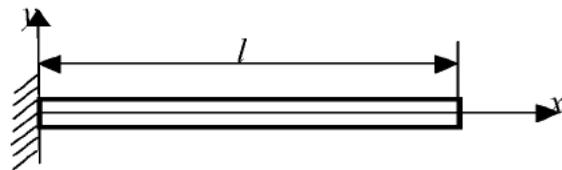


Рис. 1.5

$$\beta_r = (2r - 1)\pi/2, \quad (r = \overline{1, \infty}). \quad (1.25)$$

Частоты собственных колебаний определяются по (1.23). Для форм колебаний имеет место зависимость

$$u_r(x) = \sin \frac{(2r - 1)\pi r}{2l} x. \quad (1.26)$$

Первые 3 формы колебаний представлены графически на рис.1.6.

*Свободный стержень* (рис.1.7) Граничные условия запишутся как

$$1. N_r(0) = 0; \quad 2. N_r(l) = 0.$$

Согласно (1.16) постоянные  $A_r = 0$ , и на основании (1.12), (1.15) имеем

$$\left. \begin{aligned} v_r(x) &= B_r \cos \alpha_r x, \\ N_r(x) &= -EA \alpha_r B_r \sin \alpha_r x. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Имея в виду, что  $B_r \neq 0$ , из второго граничного условия получим  $\beta_r \sin \beta_r = 0$ , откуда:

$$\beta_r = \pi r \quad (r = \overline{0, \infty}).$$

Частоты собственных колебаний определяются по (1.23). Покажем, что нулевая частота колебаний в рассматриваемом случае не противоречит граничным условиям. С учетом (1.22) можно записать

$$N_0(x) = EA v_0'(x) = EAB_0.$$

Из граничных условий задачи вытекает, что  $B_0 = 0$ . Тогда из (1.22) получим  $v_0(x) = A_0 = const$ . Таким образом, нулевой частоте колебаний соответствует, как и следовало ожидать, перемещение стержня как жесткого тела.

Формы колебаний в соответствии с (1.27) имеют вид

$$u_r(x) = \frac{\pi r}{l} x.$$

Их графическая интерпретация приведена на рис. 1.8.

В случае крутильных колебаний стержня

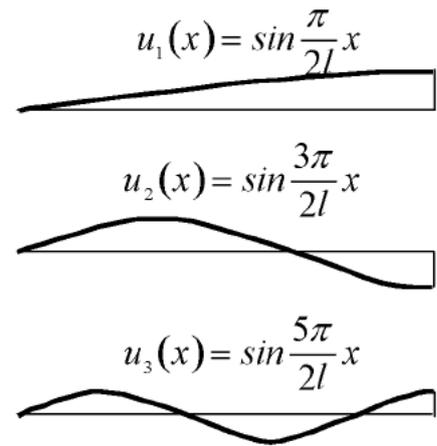


Рис. 1.6

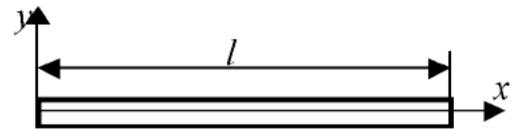


Рис. 1.7

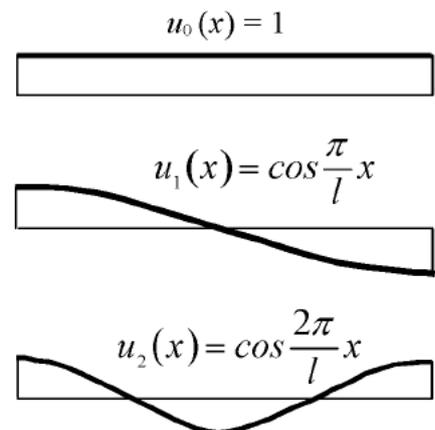


Рис. 1.8

частота колебаний определяется по формуле

$$\omega_r = \beta_r \sqrt{GI_{кр} / (I_{m0} l^2)} .$$

При аналогичных с продольными колебаниями условиями закрепления по торцам значения параметров  $\beta_r$  будут здесь такими же, как и при продольных колебаниях. Такими же будут и формы колебаний.

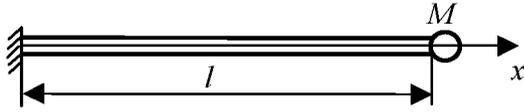


Рис. 1.9

Стержень с грузом на конце (рис.1.9). Поскольку у левого торца стержень закреплен, то при  $x = 0$  перемещение

$u_x = 0$ , вследствие чего постоянная  $B_r = 0$ . Поэтому

$$\left. \begin{aligned} v_r(x) &= A_r \sin \alpha_r x, \\ N_r(x) &= EA \alpha_r A_r \cos \alpha_r x. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

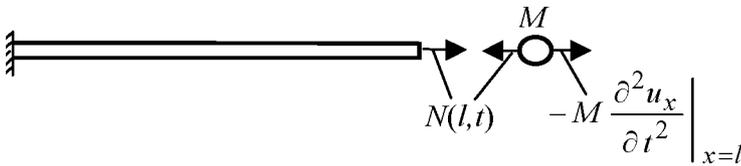


Рис. 1.10

Чтобы сформулировать второе граничное условие, расчленим систему, как показано на рис. 1.10. Если кроме силы  $N(l, t)$  к грузу приложить силу

инерции  $\left( -M \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \Big|_{x=l} \right)$ , то в соответствии с принципом Д'Аламбера имеет место равенство  $N(l, t) + M \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = 0$  или

$$N(l, t) + M \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = 0 \quad \text{или}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} N_r(l) \sin(\omega_r t + \varphi_r) = M \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r^2 v_r(l) \sin(\omega_r t + \varphi_r).$$

Приравняем коэффициенты при  $\sin(\omega_r t + \varphi_r)$  и с учетом (1.28) получим

$$EA \alpha_r \cos \alpha_r l = M \omega_r^2 \sin \alpha_r l .$$

Поскольку  $\omega_r^2 = \alpha_r EA / m_0$ , то последнее равенство можно привести к виду

$$\cos \alpha_r l = \frac{M}{m_0} \alpha_r \sin \alpha_r l .$$

Обозначим  $\alpha_r l = \beta_r$ ,  $M / (m_0 l) = \kappa$  и получим трансцендентное уравнение для определения параметра  $\beta_r$ :

$$\operatorname{tg} \beta_r = 1 / (\kappa \beta_r). \quad (1.29)$$

Это уравнение можно решить графически, как показано на рис.1.11, а затем итерационным уточнением определить значения параметров  $\beta_r$  [1].

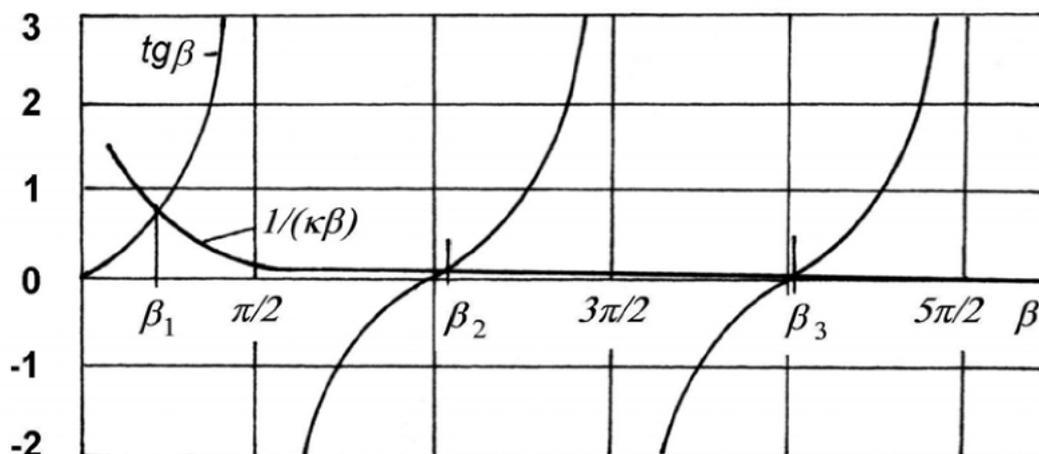


Рис. 1.11

При  $\kappa = 2$ , например,  $\beta_1 = 0,6533$ ,  $\beta_2 = 3,292$ ,  $\beta_3 = 6,361$  и т.д., а частоты колебаний, согласно (1.11), равны  $\omega_1 = 0,6533\sqrt{EA/(m_0 l^2)}$ ,  $\omega_2 = 3,292\sqrt{EA/(m_0 l^2)}$ ,  $\omega_3 = 6,361\sqrt{EA/(m_0 l^2)}$ .

При  $\kappa = 1$  имеем  $\beta_1 = 0,8603$ , а при  $\kappa = 0,5$  -  $\beta_1 = 1,0769$ . Для определения частот колебаний следует воспользоваться выражением (1.23).

Определенный интерес представляет сопоставление низшей частоты колебаний с частотой, подсчитанной как для системы с одной степенью свободы при приближенном учете по методу Рэлея влияния собственной массы упругой связи. В рассматриваемом случае к массе груза  $M$  следует добавить  $1/3$  массы стержня [8,9]. Учитывая, что коэффициент жесткости стержня  $k = EA/l$ , получим.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{1}{3}m_0 l}} = \sqrt{\frac{EA}{\left(\kappa + \frac{1}{3}\right) m_0 l^2}} = \sqrt{\frac{1}{\kappa + \frac{1}{3}}} \sqrt{\frac{EA}{m_0 l^2}} = \tilde{\beta}_1 \sqrt{\frac{EA}{m_0 l^2}}. \quad (1.30)$$

При  $\kappa = 2$  получим  $\tilde{\beta}_1 = 0,6547$ , при  $\kappa = 1$  -  $\tilde{\beta}_1 = 0,8660$ , при  $\kappa = 0,5$  -  $\tilde{\beta}_1 = 1,0954$ . Погрешность по сравнению с точным решением составляет соответственно 0,21%, 0,67% и 1,7%.

## 1.2. Поперечные колебания балки

### 1.2.1 Дифференциальное уравнение движения.

Пусть балка, показанная на рис. 1.12, совершает поперечные (изгибные) колебания. Полагаем, что центр изгиба поперечного сечения совпадает с его центром тяжести, а одна из главных центральных осей инерции сечения лежит в плоскости

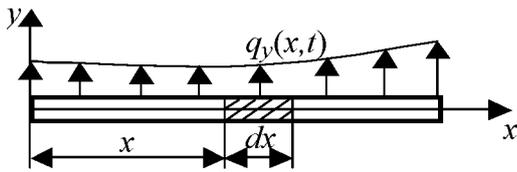


Рис. 1.12

изгиба  $xu$ . Обозначим через  $q_y = q_y(x,t)$  распределенную возмущающую нагрузку, через  $u_y = u_y(x,t)$  - поперечные перемещения точек оси балки.

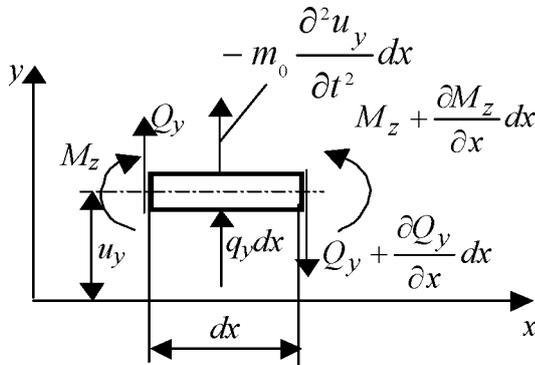


Рис. 1.13

Выделим на расстоянии  $x$  от начала координат бесконечно малый элемент балки длиной  $dx$  и покажем на рис. 1.13 силы, действующие на него в процессе колебаний. Здесь  $Q_y = Q_y(x,t)$ - перерезывающая сила,  $M_z = M_z(x,t)$ - изгибающий момент. Правило знаков для  $Q_y$  и  $M_z$  соответствует принятому в сопротивлении материалов.

Воспользуемся принципом Д'Аламбера и спроектируем все силы на ось  $y$ :

$$-m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} dx + q_y dx + Q_y - \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial x} dx \right) = 0,$$

откуда

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} = q_y.$$

Если пренебречь инерцией вращения выделенного элемента, то из уравнения моментов относительно оси  $z$  получится известное соотношение  $Q_y = \frac{\partial M_z}{\partial x}$ . Перемещение  $u_y$  обусловлено изгибом балки и сдвигом. При построении приближенной теории поперечных колебаний обычно сдвигом пренебрегают. В этом случае при малых колебаниях можно воспользоваться дифференциальным уравнением изогнутой оси балки  $M_z = EI_z \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$ , где  $I_z$  - момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси. Подстановка приведенных соотношений в последнее равенство дает дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки переменного сечения в виде

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_z \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) = q_y. \quad (1.31)$$

Для однородной балки постоянного сечения получим

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} = q_y. \quad (1.32)$$

1.2.2. Решение дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний балки постоянного сечения. При отсутствии возмущающих сил дифференциальное уравнение (1.32) имеет вид

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} = 0. \quad (1.33)$$

Имея в виду, что свободные или собственные колебания носят гармонический характер, частное решение уравнения (1.33) будем отыскивать в форме

$$u_{yr}(x, t) = v_r(x) \sin(\omega_r t + \varphi_r). \quad (1.34)$$

Подстановка (1.34) в (1.33) приводит к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению

$$-m_0 \omega_r^2 v_r(x) + EI_z v_r^{IV}(x) = 0$$

Введем обозначение

$$\alpha_r^4 = m_0 \omega_r^2 / (EI_z) \quad (1.35)$$

и приведем последнее уравнение к виду

$$v_r^{IV}(x) - \alpha_r^4 v_r(x) = 0. \quad (1.36)$$

Этому дифференциальному уравнению при  $\alpha_r \neq 0$  ( $\omega_r \neq 0$ ) соответствует характеристическое уравнение  $k^4 - \alpha_r^4 = 0$  или  $(k^2 - \alpha_r^2)(k^2 + \alpha_r^2) = 0$ , корни которого равны  $k_{1,2} = \pm \alpha_r$ ,  $k_{3,4} = \pm i \alpha_r$ . Следовательно, частными решениями дифференциального уравнения (1.36) являются функции  $\text{ch } \alpha_r x$ ,  $\text{sh } \alpha_r x$ ,  $\text{cos } \alpha_r x$ ,  $\text{sin } \alpha_r x$ . Известно, что любая линейная комбинация частных решений дифференциального уравнения дает также частное решение. При исследовании поперечных колебаний балки удобно за частные решения уравнения (1.36) принять так называемые функции Крылова:

$$\left. \begin{aligned} K_1(\alpha_r x) &= \frac{1}{2}(\text{ch } \alpha_r x + \text{cos } \alpha_r x); \\ K_2(\alpha_r x) &= \frac{1}{2}(\text{sh } \alpha_r x + \text{sin } \alpha_r x); \\ K_3(\alpha_r x) &= \frac{1}{2}(\text{ch } \alpha_r x - \text{cos } \alpha_r x); \\ K_4(\alpha_r x) &= \frac{1}{2}(\text{sh } \alpha_r x - \text{sin } \alpha_r x). \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

Функции Крылова обладают некоторыми замечательными свойствами. Дифференцирование их по  $x$  дает

$$\left. \begin{aligned} K_1'(\alpha_r x) &= \alpha_r K_4(\alpha_r x), & K_1''(\alpha_r x) &= \alpha_r^2 K_3(\alpha_r x), & K_1'''(\alpha_r x) &= \alpha_r^3 K_2(\alpha_r x); \\ K_2'(\alpha_r x) &= \alpha_r K_1(\alpha_r x), & K_2''(\alpha_r x) &= \alpha_r^2 K_4(\alpha_r x), & K_2'''(\alpha_r x) &= \alpha_r^3 K_3(\alpha_r x); \\ K_3'(\alpha_r x) &= \alpha_r K_2(\alpha_r x), & K_3''(\alpha_r x) &= \alpha_r^2 K_1(\alpha_r x), & K_3'''(\alpha_r x) &= \alpha_r^3 K_4(\alpha_r x); \\ K_4'(\alpha_r x) &= \alpha_r K_3(\alpha_r x), & K_4''(\alpha_r x) &= \alpha_r^2 K_2(\alpha_r x), & K_4'''(\alpha_r x) &= \alpha_r^3 K_1(\alpha_r x). \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Нетрудно убедиться в том, что при  $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} K_1(0) &= 1, & K_2(0) &= K_3(0) = K_4(0) = 0; & K_2'(0) &= \alpha_r, & K_1'(0) &= K_3'(0) = K_4'(0) = 0; \\ K_3''(0) &= \alpha_r^2, & K_1''(0) &= K_2''(0) = K_4''(0) = 0; & K_4'''(0) &= \alpha_r^3, & K_1'''(0) &= K_2'''(0) = K_3'''(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

Запишем теперь общее решение дифференциального уравнения (1.36):

$$v_r(x) = c_{1r} K_1(\alpha_r x) + c_{2r} K_2(\alpha_r x) + c_{3r} K_3(\alpha_r x) + c_{4r} K_4(\alpha_r x). \quad (1.40)$$

Суммируя (1.34), получим общее решение дифференциального уравнения в частных производных (1.33):

$$u_y(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) \sin(\omega_r t + \varphi_r) \quad (1.41)$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуются выражения для угла поворота поперечных сечений  $\mathcal{G}_z(x, t) = \partial u_y(x, t) / \partial x$ , изгибающего момента  $M_z(x, t) = EI_z \partial^2 u_y(x, t) / \partial x^2$  и перерезывающей силы  $Q_y(x, t) = EI_z \partial^3 u_y(x, t) / \partial x^3$ . Подставим в эти соотношения выражения (1.41), (1.40) и получим

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}_z(x, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{G}_r(x) \sin(\omega_r t + \varphi_r); \\ M_z(x, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} M_r(x) \sin(\omega_r t + \varphi_r); \\ Q_y(x, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} Q_r(x) \sin(\omega_r t + \varphi_r), \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}_r(x) &= \alpha_r [c_{1r} K_4(\alpha_r x) + c_{2r} K_1(\alpha_r x) + c_{3r} K_2(\alpha_r x) + c_{4r} K_3(\alpha_r x)]; \\ M_r(x) &= EI_z \alpha_r^2 [c_{1r} K_3(\alpha_r x) + c_{2r} K_4(\alpha_r x) + c_{3r} K_1(\alpha_r x) + c_{4r} K_2(\alpha_r x)]; \\ Q_r(x) &= EI_z \alpha_r^3 [c_{1r} K_2(\alpha_r x) + c_{2r} K_3(\alpha_r x) + c_{3r} K_4(\alpha_r x) + c_{4r} K_1(\alpha_r x)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Для  $x = 0$ , учитывая (1.39), запишем

$$v_r(0) = c_{1r}, \quad \mathcal{G}_r(0) = \alpha_r c_{2r}, \quad M_r(0) = EI_z \alpha_r^2 c_{3r}, \quad Q_r(0) = EI_z \alpha_r^3 c_{4r}$$

или

$$c_{1r} = v_r(0), \quad c_{2r} = \frac{\mathcal{G}_r(0)}{\alpha_r}, \quad c_{3r} = \frac{M_r(0)}{\alpha_r^2 EI_z}, \quad c_{4r} = \frac{Q_r(0)}{\alpha_r^3 EI_z}. \quad (1.44)$$

При  $\alpha_r = 0$  ( $\omega_r = 0$ ) дифференциальное уравнение (1.36) принимает вид  $v_0^{IV}(x) = 0$ . Его решением будет функция

$$v_0(x) = c_{10} + c_{20}x + c_{30}x^2 + c_{40}x^3. \quad (1.45)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}_0(x) &= v_0'(x) = c_{20} + 2c_{30}x + 3c_{40}x^2; \\ M_0(x) &= EI_z v_0''(x) = EI_z(2c_{30} + 6c_{40}x); \\ Q_0(x) &= EI_z v_0'''(x) = 6EI_z c_{40}. \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

1.2.3. Определение частот и форм собственных поперечных колебаний при различных условиях закрепления балки.

Балка шарнирно закреплена по концам (рис. 1.14). В этом случае на концах балки перемещение  $u_y(x, t)$  и изгибающий момент  $M_z(x, t)$  в каждый момент времени равны нулю. Отсюда следуют граничные условия:

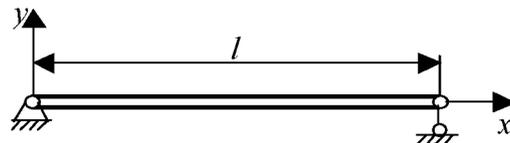


Рис. 1.14

$$1. v_r(0) = 0, \quad 2. M_r(0) = 0, \quad 3. v_r(l) = 0, \quad 4. M_r(l) = 0.$$

Из первых двух условий с учетом (1.44) вытекает, что  $c_{1r} = c_{3r} = 0$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} v_r(x) &= c_{2r}K_2(\alpha_r x) + c_{4r}K_4(\alpha_r x); \\ M_r(x) &= EI_z \alpha_r^2 [c_{2r}K_4(\alpha_r x) + c_{4r}K_2(\alpha_r x)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

Положим здесь  $x = l$  и в соответствии с граничными условиями 3 и 4 запишем систему уравнений относительно постоянных  $c_{2r}$  и  $c_{4r}$ :

$$\left. \begin{aligned} c_{2r}K_2(\beta_r) + c_{4r}K_4(\beta_r) &= 0, \quad (\beta_r = \alpha_r l); \\ EI_z \alpha_r^2 [c_{2r}K_4(\beta_r) + c_{4r}K_2(\beta_r)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

Поскольку система уравнений однородная, то при  $\alpha_r \neq 0$  нетривиальное решение будет иметь место, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} K_2(\beta_r) & K_4(\beta_r) \\ K_4(\beta_r) & K_2(\beta_r) \end{vmatrix} = 0$$

Развернув определитель, получим  $K_2^2(\beta_r) - K_4^2(\beta_r) = 0$  или

$$[K_2(\beta_r) + K_4(\beta_r)][K_2(\beta_r) - K_4(\beta_r)] = 0. \quad (1.49)$$

С учетом (1.37) имеем  $K_2(\beta_r) + K_4(\beta_r) = \text{sh}\beta_r$ . Если  $\text{sh}\beta_r = 0$ , то  $\beta_r = 0$  ( $\alpha_r = 0$ ). Можно показать, что это противоречит граничным условиям задачи. В самом деле, подставив (1.45), (1.46) в граничные условия, получим

$$\begin{aligned} 1. v_0(0) = c_{10} = 0, & \quad 3. v_0(l) = c_{10} + c_{20}l + c_{30}l^2 + c_{40}l^3 = 0, \\ 2. M_0(0) = 2EI_z c_{30} = 0, & \quad 4. M_0(l) = EI_z(2c_{30} + 6c_{40}l). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что все постоянные интегрирования оказываются равными нулю, т.е.  $v_0(x) = 0$ . Таким образом, перемещения, соответствующие  $\beta_r = 0$ , при рассматриваемых условиях закрепления невозможны, и первый сомножитель в (1.49) не может быть равным нулю. Следовательно, нулю равен второй сомножитель:

$$K_2(\beta_r) - K_4(\beta_r) = \sin\beta_r = 0. \quad (1.50)$$

Отсюда

$$\beta_r = \pi r \left( r = \overline{1, \infty} \right), \quad \alpha_r = \pi r / l.$$

На основании (1.35) частоты собственных колебаний будут равны

$$\omega_r = \alpha_r^2 \sqrt{EI_z / m_0} = \beta_r^2 \sqrt{EI_z / (m_0 l^4)}. \quad (1.51)$$

Найдем теперь формы колебаний. Из (1.50) вытекает, что  $K_2(\beta_r) = K_4(\beta_r)$ . Подстановка в (1.48) дает  $c_{4r} = -c_{2r}$ . Тогда первое равенство (1.47) приведет к виду

$$v_r(x) = c_{2r} [K_2(\alpha_r x) - K_4(\alpha_r x)] = c_{2r} \sin \alpha_r x.$$

Формы колебаний  $u_r(x)$ , характеризующие закон изменения амплитуд перемещений с точностью до постоянного множителя, определяются функциями

$$u_r(x) = \sin \frac{\pi r}{l} x, \quad (1.52)$$

а графическое их представление показано на рис. 1.4.

*Консольная балка* (рис. 1.5). Здесь у заделки равны нулю перемещение  $u_y$  и угол поворота сечения  $\vartheta_z$ , а на свободном конце - изгибающий момент  $M_z$  и перерезывающая сила  $Q_y$ . Граничные условия имеют вид

$$1. v_r(0) = 0, \quad 2. \vartheta_r(0) = 0, \quad 3. M_r(l) = 0, \quad 4. Q_r(l) = 0.$$

Из условий 1 и 2 в соответствии с (1.44) имеем  $c_{1r} = c_{2r} = 0$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} v_r(x) &= c_{3r} K_3(\alpha_r x) + c_{4r} K_4(\alpha_r x); \\ M_r(x) &= EI_z \alpha_r^2 [c_{3r} K_1(\alpha_r x) + c_{4r} K_2(\alpha_r x)]; \\ Q_r(x) &= EI_z \alpha_r^3 [c_{3r} K_4(\alpha_r x) + c_{4r} K_1(\alpha_r x)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Граничные условия 3 и 4 приводят к системе однородных уравнений относительно постоянных  $c_{3r}, c_{4r}$ :

$$\left. \begin{aligned} EI_z \alpha_r^2 [c_{3r} K_1(\beta_r) + c_{4r} K_2(\beta_r)] &= 0; \\ EI_z \alpha_r^3 [c_{3r} K_4(\beta_r) + c_{4r} K_1(\beta_r)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

Можно показать, что, как и в предыдущей задаче,  $\alpha_r \neq 0$ . Тогда должен быть равен нулю определитель

$$\begin{vmatrix} K_1(\beta_r) & K_2(\beta_r) \\ K_4(\beta_r) & K_1(\beta_r) \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } K_1^2(\beta_r) - K_2(\beta_r)K_4(\beta_r) = 0$$

или с учетом (1.37)  $(\operatorname{ch}\beta_r + \cos\beta_r)^2 - (\operatorname{sh}^2\beta_r - \sin^2\beta_r) = 0$ . Имея в виду, что  $\operatorname{sh}^2\beta_r - \operatorname{ch}^2\beta_r = 1$ , после тождественных преобразований получим трансцендентное уравнение

$$\cos\beta_r = -1/\operatorname{ch}\beta_r. \quad (1.55)$$

Приближенное решение этого уравнения можно получить графически, как показано на рис. 1.15. Итерационное уточнение [1] дает для первых трех корней значения  $\beta_1 = 1,87510$ ,  $\beta_2 = 4,69409$ ,  $\beta_3 = 7,85476$ . Для  $r > 3$   $\beta_r = (2r - 1)\pi/2$ . Частоты колебаний определяются по формуле (1.51).

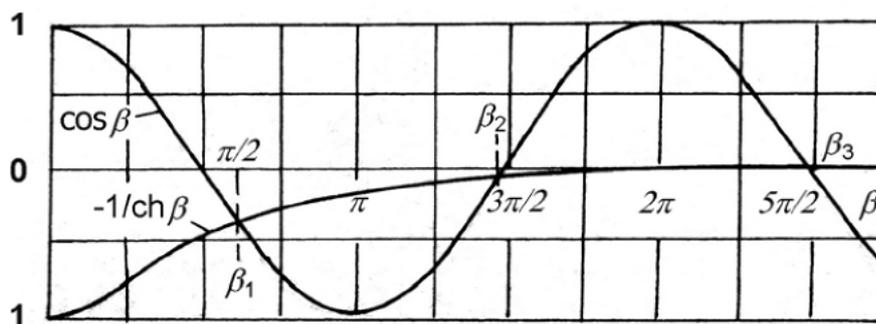


Рис. 1.15

Из первого равенства (1.54) имеем  $c_{4r} = -c_{3r} K_1(\beta_r)/K_2(\beta_r)$ . Подстановка

в первое равенство (1.53) дает 
$$v_r(x) = c_{3r} \left[ K_3(\alpha_r x) - \frac{K_1(\beta_r)}{K_2(\beta_r)} K_4(\alpha_r x) \right]$$

Следовательно, формы колебаний определяются функциями

$$u_r(x) = K_3\left(\beta_r \frac{x}{l}\right) - \frac{K_1(\beta_r)}{K_2(\beta_r)} K_4\left(\beta_r \frac{x}{l}\right), \quad (1.56)$$

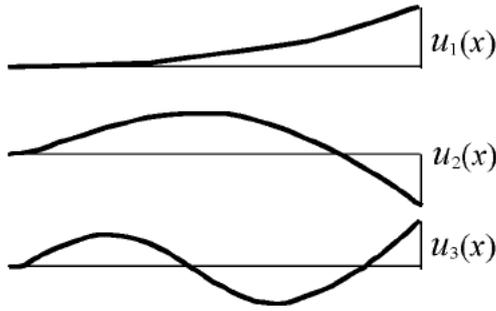


Рис. 1.16

которые представляют собой линейные комбинации частных решений дифференциального уравнения (1.36). Графики первых трех форм колебаний приведены на рис. 1.16.

*Свободная балка* (рис.1.7). Здесь на концах балки изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю. Граничные условия задачи:

$$1. M_r(0)=0; \quad 2. Q_r(0)=0; \quad 3. M_r(l)=0; \quad 4. Q_r(l)=0.$$

Из условий 1 и 2 с учетом (1.44) вытекает, что  $c_{3r} = c_{4r} = 0$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} v_r(x) &= c_{1r}K_1(\alpha_r x) + c_{2r}K_2(\alpha_r x); \\ M_r(x) &= EI_z \alpha_r^2 [c_{1r}K_3(\alpha_r x) + c_{2r}K_4(\alpha_r x)]; \\ Q_r(x) &= EI_z \alpha_r^3 [c_{1r}K_2(\alpha_r x) + c_{2r}K_3(\alpha_r x)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

Граничные условия 3 и 4 приводят к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} EI_z \alpha_r^2 [c_{1r}K_3(\beta_r) + c_{2r}K_4(\beta_r)] &= 0; \\ EI_z \alpha_r^3 [c_{1r}K_2(\beta_r) + c_{2r}K_3(\beta_r)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

При  $\alpha_r \neq 0$  нетривиальное решение для  $c_{1r}$  и  $c_{2r}$  имеет место при равенстве нулю определителя

$$\begin{vmatrix} K_3(\beta_r) & K_4(\beta_r) \\ K_2(\beta_r) & K_3(\beta_r) \end{vmatrix} = 0.$$

Развернем определитель и после тождественных преобразований получим трансцендентное уравнение

$$\cos \beta_r = 1/\operatorname{ch} \beta_r, \quad (1.59)$$

графическое решение которого показано на рис. 1.17, а итерационное

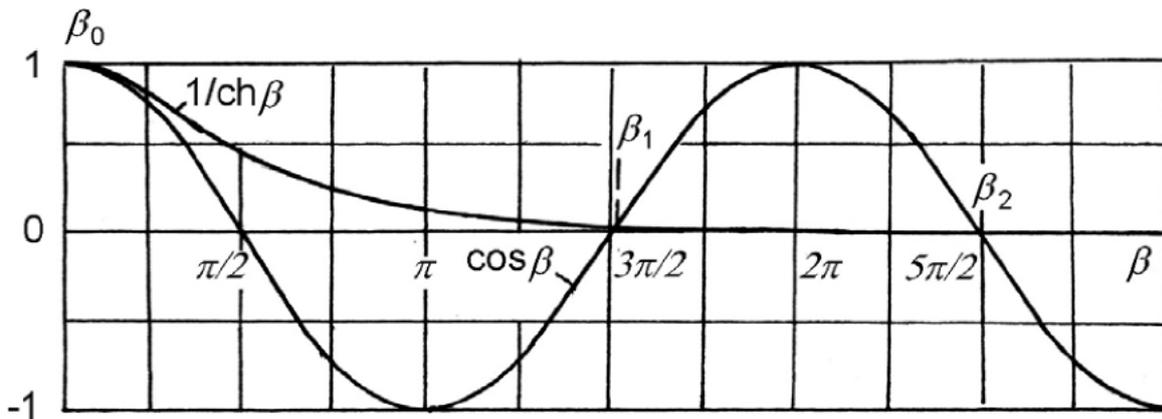


Рис. 1.17

уточнение [1] дает  $\beta_1 = 4,73004$   $\beta_2 = 7,85320$ . При  $r \geq 3$   $\beta_r = (2r + 1)\pi/2$ . Частоты колебаний определяются по (1.51)

Из первого равенства (1.58) получаем  $c_{2r} = -c_{1r} K_3(\beta_r)/K_4(\beta_r)$ .

Подстановка в первое из соотношений (1.57) дает

$$v_r(x) = c_{1r} \left[ K_1(\alpha_r x) - \frac{K_3(\beta_r)}{K_4(\beta_r)} K_2(\alpha_r x) \right]. \quad (1.60)$$

Формы колебаний балки, соответствующие отличным от нуля частотам, определяются функцией

$$u_r(x) = K_1\left(\beta_r \frac{x}{l}\right) - \frac{K_3(\beta_r)}{K_4(\beta_r)} K_2\left(\beta_r \frac{x}{l}\right). \quad (1.61)$$

Уравнению (1.59) удовлетворяет также очевидное решение  $\beta_0 = 0$  ( $\alpha_0 = 0$ ). Выясним, возможны ли для рассматриваемого случая перемещения с частотой  $\omega_0 = 0$ . Значению  $\alpha_0 = 0$  соответствуют выражения (1.45), (1.46). Подстановка (1.46) в граничные условия дает

$$\begin{aligned} 1. \quad M_0(0) = 2EI_z c_{30} = 0; & \quad 3. \quad M_0(l) = EI_z (2c_{30} + 6c_{40}l) = 0; \\ 2. \quad Q_0(0) = 6EI_z c_{40} = 0; & \quad 4. \quad Q_0(l) = 6EI_z c_{40} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $c_{30} = c_{40} = 0$ , с учетом чего выражение (1.45) принимает вид

$$v_0(x) = c_{10} + c_{20}x = c_{10} + \bar{c}_{20}x/l,$$

т.е. нулевой частоте собственных колебаний соответствуют перемещение балки в направлении оси  $y$  и ее поворот как жесткого тела. Соответствующие формы колебаний имеют вид

$$u_{01}(x) = 1, \quad u_{02}(x) = x/l. \quad (1.62)$$

Графическое представление некоторых форм колебаний свободной балки приведено на рис. 1.18.

Для балки, заземленной на концах (рис. 1.3), граничные условия имеют вид

$$1. v_r(0) = 0, \quad 2. \vartheta_r(0) = 0, \quad 3. v_r(l) = 0, \quad 4. \vartheta_r(l) = 0.$$

Приведем здесь результаты исследования частот и форм колебаний без вывода. Для определения параметров  $\beta_r$  получается такое же трансцендентное уравнение  $\cos \beta_r = 1/\text{ch } \beta_r$

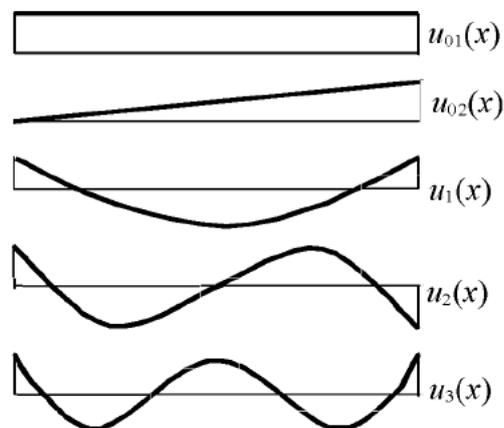


Рис. 1.18

(1.59), как и в предыдущей задаче. Однако перемещения, соответствующие  $\beta_0 = 0$ , не удовлетворяют граничным условиям задачи. Что же касается отличных от нуля частот колебаний, то они получаются здесь такими же, как и при колебаниях свободной балки, а соответствующие им формы колебаний определяются выражением

$$u_r(x) = K_3\left(\beta_r \frac{x}{l}\right) - \frac{K_3(\beta_r)}{K_4(\beta_r)} K_4\left(\beta_r \frac{x}{l}\right). \quad (1.63)$$

Представление о характере первых трех форм колебаний можно получить из рис. 1.19.

Рис. 1.19

*Консольная балка с грузом на конце.*

Расчетная модель приведена на рис. 1.9.

Инерцией вращения груза будем пренебрегать, полагая его массу сосредоточенной в одной точке. Из условий  $u_y(0,t) = 0$ ,  $\vartheta_r(0,t) = 0$  получаем, что  $c_{1r} = c_{2r} = 0$ . В этом случае для  $v_r(x)$ ,  $M_r(x)$  и  $Q_r(x)$  справедливы зависимости (1.53).

При  $x = l$  изгибающий момент  $M_z(l,t) = 0$ , вследствие чего с учетом (1.53) имеем

$$M_r(l) = EI_z \alpha_r^2 [c_{3r} K_1(\beta_r) + c_{4r} K_2(\beta_r)] = 0. \quad (1.64)$$

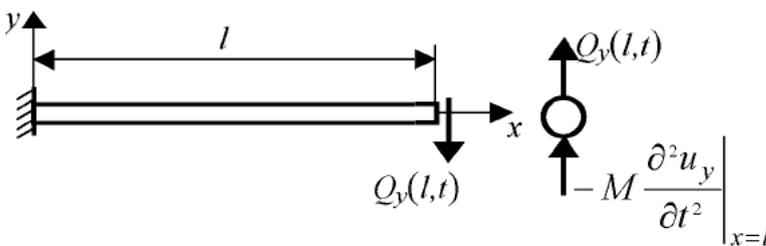


Рис. 1.20

Чтобы сформулировать четвертое граничное условие, мысленно отделим груз от балки, как показано на рис.1.20. При  $x = l$  в сечении балки действует перерезывающая сила  $Q_y(l, t)$ . Такая же сила, но направленная в противоположную сторону, действует со стороны балки на массу  $M$ . Если к ней добавить силу инерции  $(-M \partial^2 u_y / \partial t^2 |_{x=l})$ , то можно рассматривать груз как находящийся в состоянии равновесия, т.е.

$$Q_y(l, t) - M \partial^2 u_y / \partial t^2 |_{x=l} = 0.$$

Подставим в это равенство ряды (1.41), (1.42):

$$\sum_{r=1}^{\infty} Q_r(l) \sin(\omega_r t + \varphi_r) + M \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r^2 v_r(l) \sin(\omega_r t + \varphi_r) = 0.$$

Отсюда с учетом (1.53) получим

$$EI_z \alpha_r^3 [c_{3r} K_4(\beta_r) + c_{4r} K_1(\beta_r)] + M \omega_r^2 [c_{3r} K_3(\beta_r) + c_{4r} K_4(\beta_r)] = 0.$$

Напомним, что  $\omega_r^2 = \alpha_r^4 EI_z / m_0$ . Введем теперь, как и ранее, обозначение  $\kappa = M / (m_0 l)$  и приведем последнее равенство к виду

$$c_{3r} [K_4(\beta_r) + \kappa \beta_r K_3(\beta_r)] + c_{4r} [K_1(\beta_r) + \kappa \beta_r K_4(\beta_r)] = 0.$$

Выразим функции Крылова через гиперболические и тригонометрические функции по (1.37) и получим для определения  $\beta_r$  трансцендентное уравнение

$$\cos \beta_r = \kappa \beta_r (\sin \beta_r - \text{th } \beta_r \cos \beta_r) - 1 / \text{ch } \beta_r. \quad (1.65)$$

Графическое определение первых трех корней этого уравнения для  $\kappa = 1$  приведено на рис. 1.21. Здесь  $f(\beta) = \kappa \beta (\sin \beta - \text{th } \beta \cos \beta) - 1 / \text{ch } \beta$ .

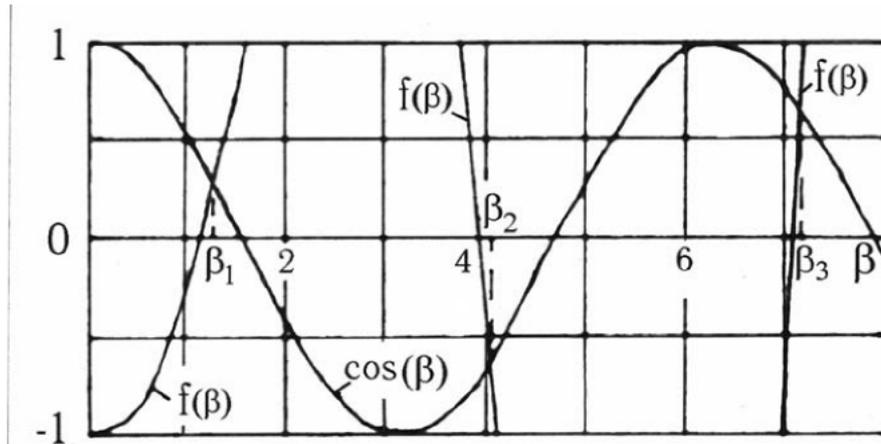


Рис. 1.21

Итерационное уточнение по формуле (1.65) дает следующие значения:

$$\beta_1 = 1,24792, \beta_2 = 4,03114, \beta_3 = 7,13413, \beta_4 = 10,2566.$$

В соответствии с (1.51) низшая частота колебаний равна  $\omega_1 = \beta_1^2 \sqrt{EI_z / (m_0 l^4)} = 1,5573 \sqrt{EI_z / (m_0 l^4)}$ . Если рассматривать расчетную модель, представленную на рис. 1.9, как систему с одной степенью свободы и приближенно учесть по методу Рэлея собственную массу балки, то частота поперечных колебаний  $\omega_1$  будет равна

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M + \gamma m_0 l}} = \sqrt{\frac{k}{m_0 l (\kappa + \gamma)}}.$$

Для консольной балки  $k = 3EI_z / l^3$ , а коэффициент  $\gamma = 33/140$  [8, 9]. При  $\kappa = 1$  получим  $\omega_1 = 1,5581 \sqrt{EI_z / (m_0 l^4)}$ , т.е. погрешность по сравнению с точным значением низшей частоты составляет всего лишь 0,05%. Отметим, что

метод Рэлея дает для консольной балки даже при  $\kappa = 0$  ( $M = 0$ ) погрешность в величине частоты основного тона поперечных колебаний только 1,47%.

### 1.3. Условия ортогональности форм собственных колебаний.

#### Обобщенная масса стержня.

Условия ортогональности форм собственных колебаний стержней с распределенной массой можно получить непосредственно [8], но проще это сделать предельным переходом от систем с конечным числом степеней свободы. Пусть стержень длиной  $l$  совершает свободные поперечные (рис. 1.22,а), продольные (1.22,б) или крутильные колебания. Разобьем его на  $n$  малых участков, имеющих длину  $\Delta x = l/n$ . Массу каждого участка  $M_i = m_0(x)\Delta x$  ( $i = \overline{1, n}$ ) сосредоточим на его конце и придем к системе с  $n$  степенями свободы: невесомой балке с сосредоточенными массами - при поперечных колебаниях, цепной системе, состоящей из невесомых пружин и жестких грузов, - при продольных и крутильных колебаниях.

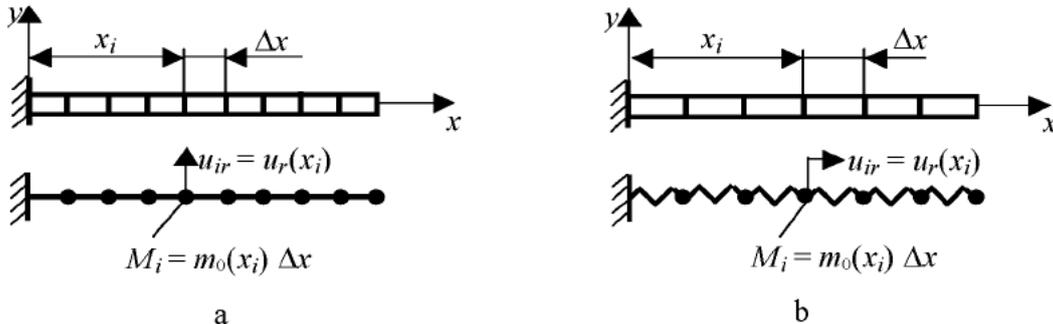


Рис. 1.22

Условие ортогональности форм собственных колебаний системы с конечным числом степеней свободы имеет вид [1,9]

$$[u_r]^T [M] [u_s] = 0, \quad (1.66)$$

где  $[u_r]$ ,  $[u_s]$  - формы колебаний, соответствующие частотам колебаний  $\omega_r$  и  $\omega_s$  ( $\omega_s \neq \omega_r$ );  $[M]$  - матрица масс, которая является в нашем случае диагональной.

Запишем условие ортогональности (1.66) для поперечных и продольных колебаний в развернутой форме

$$\begin{bmatrix} u_{1r} & u_{2r} & \dots & u_{ir} & \dots & u_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & & & & & 0 \\ & M_2 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & M_i & & \\ & & & & \dots & \\ 0 & & & & & M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1s} \\ u_{2s} \\ \vdots \\ u_{is} \\ \vdots \\ u_{ns} \end{bmatrix} = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^n M_i u_{ir} u_{is} = 0 .$$

В соответствии с рис. 1.22  $u_{ir} = u_r(x_i)$ ,  $u_{is} = u_s(x_i)$ ,  $M_i = m_0(x_i)\Delta x$ , и мы получим

$$\sum_{i=1}^n m_0(x_i) u_r(x_i) u_s(x_i) \Delta x = 0 .$$

В пределе, при  $\Delta x \rightarrow 0$ , имеем

$$\int_0^l m_0(x) u_r(x) u_s(x) dx = 0 . \quad (1.67)$$

Это и есть интересующее нас условие ортогональности форм собственных продольных и поперечных колебаний. Аналогичные рассуждения для случая крутильных колебаний дают

$$\int_0^l I_{m_0}(x) u_r(x) u_s(x) dx = 0 .$$

Для стержней постоянного сечения, при  $m_0(x) = \text{const}$ ,  $I_{m_0}(x) = \text{const}$ , условие ортогональности форм собственных колебаний принимает вид

$$\int_0^l u_r(x) u_s(x) dx = 0 . \quad (1.68)$$

Если в сечениях  $x = x_j$  стержня расположены сосредоточенные массы  $M_j$  ( $j = \overline{1, q}$ ), то для продольных и поперечных колебаний можно записать

$$\sum_{i=1}^n m_0(x_i) u_r(x_i) u_s(x_i) \Delta x + \sum_{j=1}^q M_j u_r(x_j) u_s(x_j) = 0 ,$$

что при  $\Delta x \rightarrow 0$  дает условие ортогональности

$$\int_0^l m_0(x) u_r(x) u_s(x) dx + \sum_{j=1}^q M_j u_r(x_j) u_s(x_j) = 0 . \quad (1.69)$$

При исследовании поперечных колебаний свободной балки постоянного сечения мы установили, что частоте колебаний  $\omega_0 = 0$  соответствуют согласно

(1.62) две формы колебаний:  $u_{01} = 1$  и  $u_{02} = x/l$  (перемещения балки как жесткого тела). Каждая из них ортогональна всем прочим формам колебаний балки, но между собой они не являются ортогональными. Известно, что любая линейная комбинация форм колебаний, соответствующих одной частоте, является также формой колебаний. Положим  $\bar{u}_{02}(x) = u_{02}(x) + a u_{01}(x)$ . Параметр  $a$  определим из условия, чтобы форма колебаний  $\bar{u}_{02}(x)$  была ортогональна  $u_{01}(x)$ , т.е. чтобы удовлетворялось условие (1.68):

$$\int_0^l [u_{02}(x) + a u_{01}(x)] u_{01}(x) dx = 0$$

или

$$\int_0^l u_{02}(x) u_{01}(x) dx + a \int_0^l u_{01}^2(x) dx = 0.$$

После подстановки в последнее равенство  $u_{02}(x)$ ,  $u_{01}(x)$  и интегрирования получим  $a = -1/2$ . Таким образом,  $\bar{u}_{20}(x) = x/l - 1/2$ , что соответствует повороту балки относительно центра масс.

При разложении движения системы с конечным числом степеней свободы по формам собственных колебаний обобщенная масса  $M_r$ , соответствующая частоте колебаний  $\omega_r$ , определяется по формуле [1,8]

$$M_r = [u_r]^T [M] [u_r].$$

Представление стержня с распределенной массой, как показано выше, в виде системы с  $n$  степенями свободы приводит в случае поперечных и продольных колебаний к следующему выражению для обобщенной массы:

$$M_r = \sum_{i=1}^n m_0(x_i) u_r^2(x_i) \Delta x.$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  получим

$$M_r = \int_0^l m_0(x_i) u_r^2(x_i) dx. \quad (1.70)$$

Если в сечениях стержня  $x = x_j$  расположены сосредоточенные массы  $M_j$  ( $j = \overline{1, q}$ ), то

$$M_r = \int_0^l m_0(x_i) u_r^2(x_i) dx + \sum_{j=1}^q M_j u_r^2(x_j). \quad (1.71)$$

Для крутильных колебаний стержня аналогичные рассуждения дают

$$M_r = \int_0^l I_{m_0} u_r^2(x_i) dx + \sum_{j=1}^q I_{Mj} u_r^2(x_j), \quad (1.72)$$

где  $I_{Mj}$  - массовый момент инерции груза, расположенного в сечении  $x = x_j$ , относительно оси стержня.

#### 1.4. Влияние постоянной осевой силы на частоту собственных поперечных колебаний балки

Рассмотрим случай, когда на конце балки постоянного сечения, совершающей поперечные колебания, приложена постоянная осевая сила  $F$  (рис. 1.23). Для составления уравнения движения воспользуемся принципом Д'Аламбера. Выделим, как и ранее, на расстоянии  $x$  от начала координат бесконечно малый элемент длиной  $dx$ . На рис.1.24 показаны силы, действующие на него в процессе колебаний.

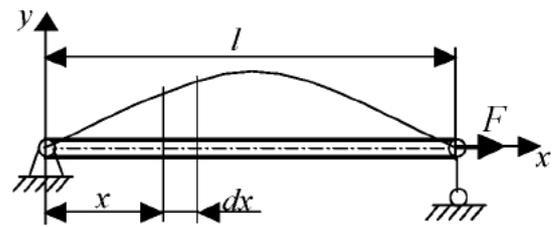


Рис. 1.23

При малых колебаниях нормальную силу  $N$  можно считать постоянной и равной внешней силе  $F$ , но угол между этими силами и осью  $x$  при переходе от сечения  $x$  к сечению  $x + dx$  получает приращение, как показано на рисунке.

Приравняем нулю сумму проекций на ось  $y$  всех сил, действующих на выделенный элемент, положив  $\cos\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = 1$ ,

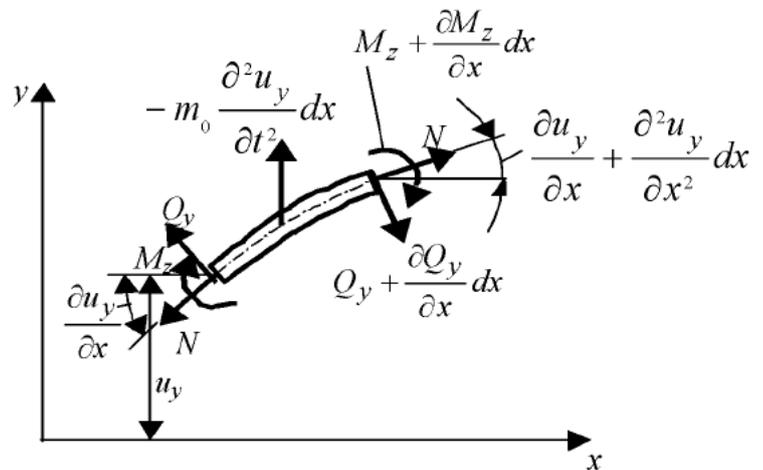


Рис. 1.24

$$\sin\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{\partial u_y}{\partial x}:$$

$$-m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} dx + Q_y - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial x} dx\right) + F \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} dx\right) - F \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$$

или

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} - F \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0. \quad (1.73)$$

Можно показать, что в условии равенства нулю момента всех сил, приложенных к выделенному элементу, нормальные силы дают члены высшего порядка малости, вследствие чего мы приходим к известному соотношению  $Q_y = \partial M_z / \partial x$ . Воспользуемся дифференциальным уравнением упругой линии балки  $M_z = EI_z \partial^2 u_y / \partial x^2$  и приведем (1.73) к виду

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} - F \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0. \quad (1.74)$$

Считаем, что балка совершает гармонические колебания, и будем отыскивать частные решения уравнения (1.74) в форме

$$u_{yr}(x, t) = v_r(x) \sin(\omega_r t + \varphi_r). \quad (1.75)$$

при этом относительно функции  $v_r(x)$  получим линейное дифференциальное уравнение

$$EI_z v_r^{IV}(x) - F v_r''(x) - m_0 \omega_r^2 v_r(x) = 0.$$

Полагая, что для шарнирно закрепленной балки формы колебаний имеют здесь такой же вид, как и при поперечных колебаниях балки без осевой силы  $F$ , получим формулу для определения ее частот собственных колебаний. В соответствии с (1.52)  $v_r(x) = c_{2r} \sin(\pi r x / l)$ . Подстановка в последнее дифференциальное уравнение дает

$$EI_z (\pi r / l)^4 + F (\pi r / l)^2 - m_0 \omega_r^2 = 0.$$

Отсюда

$$\omega_r^2 = \frac{EI_z}{m_0} \left( \frac{\pi r}{l} \right)^4 + \frac{F}{m_0} \left( \frac{\pi r}{l} \right)^2 \quad (1.76)$$

или

$$\omega_r^2 = \frac{\pi^4 r^4 EI_z}{m_0 l^4} \left( 1 + \frac{Fl^2}{\pi^2 r^2 EI_z} \right).$$

Обозначим выражение перед скобкой последнего равенства через  $\omega_{r_0}^2$ . Сопоставление с (1.51) показывает, что  $\omega_{r_0}$  представляет собой частоту собственных колебаний шарнирно закрепленной балки без осевой силы. Выражение  $\pi^2 r^2 EI_z / l^2$  численно равно критической силе  $F_{кр}$  при различных формах потери устойчивости шарнирно закрепленного сжатого стержня. В итоге имеем

$$\omega_r = \omega_{r_0} \sqrt{1 + F / F_{кр}}. \quad (1.77)$$

Если к балке приложена сжимающая сила, абсолютная величина которой равна  $F$ , то

$$\omega_r = \omega_{r0} \sqrt{1 - F/F_{кр}}. \quad (1.78)$$

Из формул (1.77) и (1.78) видно, что с ростом растягивающей осевой силы частоты поперечных колебаний увеличиваются, а с ростом сжимающей силы - уменьшаются. Если сжимающая сила равна критической, то частота колебаний равна нулю.

Сделаем еще одно отступление и рассмотрим колебания натянутой струны. Изгибная жесткость струны  $EI_z$  весьма невелика, вследствие чего первое слагаемое в правой части (1.76) пренебрежимо мало по сравнению со вторым. Тогда частоты колебаний струны будут равны

$$\omega_r = \pi r \sqrt{F/(m_0 l^2)}.$$

При  $r = 1$  имеем частоту основного тона колебаний, а при  $r \geq 2$  получаем ряд последовательных обертонов. Напомним, что формы колебаний определяются зависимостью  $u_r(x) = \sin(\pi r x/l)$ . Колебания струны реализуются в виде совокупности стоячих волн. Звук, издаваемый струной, складывается из отдельных тонов или гармоник. Амплитуды высших гармоник обычно быстро убывают с ростом их номера, и все их действие сводится к созданию тембра звука, различного для разных музыкальных инструментов и определяемого способом извлечения звука и типом резонатора.

### 1.5. Колебания балки на упругом основании.

Полагаем, что балка постоянного сечения, лежащая на упругом основании (рис. 1.25), в процессе колебаний не может от него оторваться.

Упругое основание считаем линейным (основанием Винклера). Это значит, что со стороны основания на колеблющуюся балку действует реакция

$$q_y(x,t) = -ku_y(x,t), \quad (1.79)$$

пропорциональная перемещению и направленная в противоположную ему сторону. Здесь  $k$  - так называемый коэффициент постели упругого основания. Для исследования свободных колебаний балки вос-

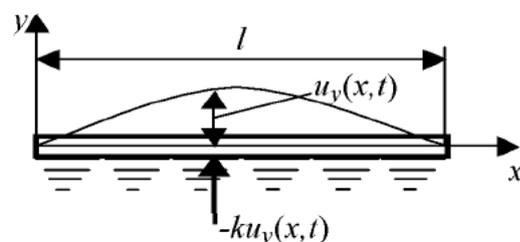


Рис. 1.25

пользуемся дифференциальным уравнением (1.32), в правой части которого запишем  $q_y(x, t)$  в соответствии с (1.79):

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} = -ku_y$$

или

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} + ku_y = 0. \quad (1.80)$$

Будем отыскивать частное решение дифференциального уравнения (1.80) в форме (1.75) и после подстановки получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$EI_z v_r^{IV}(x) - (m_0 \omega_r^2 - k) v_r(x) = 0.$$

Введем обозначение

$$\alpha_r^4 = (m_0 \omega_r^2 - k) / EI_z \quad (1.81)$$

и приведем последнее уравнение к виду

$$v_r^{IV}(x) - \alpha_r^4 v_r(x) = 0,$$

совпадающему с (1.36). Решение его записывается через функции Крылова:

$$v_r(x) = c_{1r} K_1(\alpha_r x) + c_{2r} K_2(\alpha_r x) + c_{3r} K_3(\alpha_r x) + c_{4r} K_4(\alpha_r x).$$

Остаются справедливыми соотношения (1.41)...(1.46), а также параметры  $\beta_r = \alpha_r l$  и формы колебаний  $u_r(x)$  для различных условий закрепления балки, полученные в п. 1.2.3. При этом в соответствии с (1.81) частоты колебаний будут равны

$$\omega_r = \sqrt{\beta_r^4 \frac{EI_z}{m_0 l^4} + \frac{k}{m_0}} = \sqrt{\omega_{r0}^2 + \frac{k}{m_0}}. \quad (1.82)$$

Через  $\omega_{r0}$  здесь обозначены частоты колебаний обычной балки при таких же условиях закрепления на концах, что и балка на упругом основании. Если к концам балки на упругом основании приложены растягивающие силы  $F$ , то на основании (1.74), (1.80) дифференциальное уравнение ее свободных колебаний будет иметь вид

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} - F \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + ku_y = 0.$$

Отыскивая частное решение этого уравнения в форме (1.75), получим

$$EI_z v_r^{IV}(x) - F v_r''(x) - (m_0 \omega_r^2 - k) v_r(x) = 0. \quad (1.83)$$

Ограничимся рассмотрением случая шарнирного закрепления балки на концах и положим в соответствии с (1.52)  $v_r(x) = c_{2r} \sin \frac{\pi r}{l} x$ . Подстановка в дифференциальное уравнение (1.83) дает

$$\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4 EI_z + \left(\frac{\pi r}{l}\right)^2 F - m_0 \omega_r^2 + k = 0.$$

Отсюда

$$\omega_r^2 = \frac{\pi^4 r^4 EI_z}{m_0 l^4} + \frac{\pi^2 r^2 F}{m_0 l^2} + \frac{k}{m_0}. \quad (1.84)$$

Выражение для  $\omega_r$  можно привести к виду

$$\omega_r = \sqrt{\omega_{r_0}^2 \left(1 + F/F_{\text{кр}}\right) + k/m_0}.$$

Здесь, как и ранее, через  $F_{\text{кр}} = \pi^2 r^2 EI_z / l^2$  обозначена критическая сила при различных формах потери устойчивости шарнирно закрепленного сжатого стержня, а через  $\omega_{r_0}$  - частоты поперечных колебаний шарнирно закрепленной балки, определяемые формулой (1.51).

## 1.6. Вынужденные колебания стержней

Рассмотрим здесь два подхода - когда при установившихся гармонических колебаниях возмущающая нагрузка приложена на конце стержня и когда для произвольной возмущающей нагрузки решение представляется разложением в ряд по формам собственных колебаний (решение в главных координатах). Методику будем иллюстрировать на примере поперечных колебаний балки.

1.6.1. Установившиеся вынужденные колебания балки, нагруженной гармонической возмущающей силой на конце. Примеры соответствующих расчетных моделей приведены на рис. 1.26.

Здесь отсутствует распределенная вдоль оси балки возмущающая нагрузка, вследствие чего дифференциальное уравнение движения будет однородным:

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} = 0. \quad (1.85)$$

Что же касается возмущающей нагрузки, то она учитывается в граничных условиях. Установившиеся вынужденные колебания будут совершаться с частотой возмущающей силы. Поэтому решение уравнения движения будем отыскивать в виде

$$u_y(x,t) = v(x)\cos pt. \quad (1.86)$$

Подстановка в (1.85) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$v^{IV}(x) - \alpha^4 v(x) = 0, \quad \alpha^4 = p^2 m_0 / EI_z, \quad (1.87)$$

решение которого записывается через функции Крылова:

$$v(x) = c_1 K_1(\alpha x) + c_2 K_2(\alpha x) + c_3 K_3(\alpha x) + c_4 K_4(\alpha x). \quad (1.88)$$

В рассматриваемом случае справедливы зависимости

$$\vartheta_z(x,t) = \vartheta(x)\cos pt, \quad M_z(x,t) = M(x)\cos pt, \quad Q_y(x,t) = Q(x)\cos pt,$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= \alpha(c_1 K_4(\alpha x) + c_2 K_1(\alpha x) + c_3 K_2(\alpha x) + c_4 K_3(\alpha x)), \\ M(x) &= EI_z \alpha^2 (c_1 K_3(\alpha x) + c_2 K_4(\alpha x) + c_3 K_1(\alpha x) + c_4 K_2(\alpha x)), \\ Q(x) &= EI_z \alpha^3 (c_1 K_2(\alpha x) + c_2 K_3(\alpha x) + c_3 K_4(\alpha x) + c_4 K_1(\alpha x)). \end{aligned}$$

Остановимся теперь на более детальном рассмотрении расчетной модели,

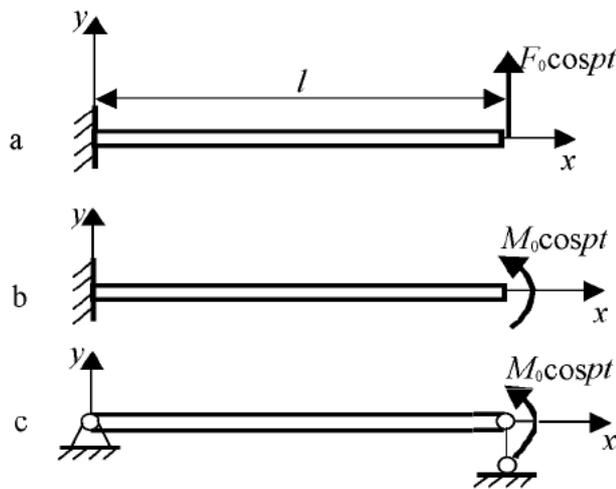


Рис.1.26

приведенной на рис. 1.26,а. Для отыскания постоянных  $c_1 \dots c_4$  мы располагаем следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} 1. v(0) &= 0; & 2. \vartheta(0) &= 0; \\ 3. M(l) &= 0; & 4. Q(l) &= -F_0. \end{aligned}$$

Из условий 1 и 2 получаем, что  $c_1 = c_2 = 0$ . Условия 3 и 4 приводят к системе уравнений относительно постоянных  $c_3$  и  $c_4$ :

$$\begin{aligned} c_3 K_1(\beta) + c_4 K_2(\beta) &= 0 \\ c_3 K_4(\beta) + c_4 K_1(\beta) &= -F_0 l^3 / (\beta^3 EI_z) \end{aligned}$$

Здесь принято обозначение  $\beta = \alpha l$ . Решение системы уравнений дает

$$c_3 = \frac{F_0 l^3}{\beta^3 EI_z} \frac{K_2(\beta)}{K_1^2(\beta) - K_2(\beta)K_4(\beta)}, \quad c_4 = -\frac{F_0 l^3}{\beta^3 EI_z} \frac{K_1(\beta)}{K_1^2(\beta) - K_2(\beta)K_4(\beta)}.$$

Тогда

$$v(x) = \frac{F_0 l^3}{\beta^3 EI_z} \frac{K_2(\beta)K_3(\beta x/l) - K_1(\beta)K_4(\beta x/l)}{K_1^2(\beta) - K_2(\beta)K_4(\beta)},$$

$$M(x) = \frac{F_0 l}{\beta} \frac{K_2(\beta)K_1(\beta x/l) - K_1(\beta)K_2(\beta x/l)}{K_1^2(\beta) - K_2(\beta)K_4(\beta)}.$$

Амплитуда перемещений точки приложения возмущающей силы после тождественных преобразований оказывается равной

$$v(l) = \frac{F_0 l^3}{\beta^3 EI_z} \frac{\operatorname{ch} \beta \sin \beta - \operatorname{sh} \beta \cos \beta}{1 + \operatorname{ch} \beta \cos \beta}. \quad (1.89)$$

Запишем выражение для амплитудного значения изгибающего момента у заделки, имея в виду, что  $K_1(0) = 1$ ,  $K_2(0) = 0$ :

$$M(0) = \frac{F_0 l (\operatorname{sh} \beta + \sin \beta)}{\beta (1 + \operatorname{ch} \beta \cos \beta)}$$

Как показано ранее, из условия  $K_1^2(\beta_r) - K_2(\beta_r)K_4(\beta_r) = 0$  или, что то же самое, из равенства  $1 + \operatorname{ch} \beta_r \cos \beta_r = 0$  (1.55) определяется параметр  $\beta_r$ , соответствующий частотам собственных колебаний консольной балки. Сопоставление (1.35) и (1.87) показывает, что при частоте возмущающей силы  $p$ , равной одной из частот собственных колебаний балки  $\omega_r$ , знаменатель в выражении для  $v(x)$  обращается в нуль, т.е. имеет место резонанс.

1.6.2 Решение задачи о вынужденных колебаниях балки в главных координатах. Пусть к балке приложена произвольная возмущающая нагрузка  $q_y(x, t)$ , и дифференциальное уравнение движения имеет вид (1.32)

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} = q_y(x, t).$$

Представим решение уравнения в виде разложения по формам собственных колебаний балки [1], соответствующих условиям ее закрепления,

$$u_y(x, t) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(x) q_r(t), \quad (1.90)$$

и подставим это решение в дифференциальное уравнение

$$\sum_{r=0}^{\infty} [m_0 u_r(x) \ddot{q}_r(t) + EI_z u_r^{IV}(x) q_r(t)] = q_y(x, t). \quad (1.91)$$

Следует учесть, что при колебаниях свободной балки частоте  $\omega_r = 0$  соответствуют две формы колебаний, которые, как показано в 1.3, можно привести к взаимно ортогональному виду. Поэтому будем в дальнейшем считать, что все формы колебаний взаимно ортогональны. Формы колебаний  $u_r(x)$  представляют собой линейные комбинации частных решений дифференциального уравнения  $EI_z u_r^{IV}(x) - m_0 \omega_r^2 u_r(x) = 0$ , следовательно, они удовлетворяют этому уравнению. Поэтому можно записать  $EI_z u_r^{IV}(x) = m_0 \omega_r^2 u_r(x)$ . Подстановка в (1.91) дает

$$\sum_{r=0}^{\infty} [\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t)] m_0 u_r(x) = q_y(x, t).$$

Умножим здесь правую и левую части на  $u_s(x)$  и проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $l$ :

$$\sum_{r=0}^{\infty} [\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t)] m_0 \int_0^l u_r(x) u_s(x) dx = \int_0^l q_y(x, t) u_s(x) dx.$$

Учтем условие ортогональности форм собственных колебаний (1.68)

$$\int_0^l u_r(x) u_s(x) dx = 0 \text{ при } s \neq r$$

и получим

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{1}{M_r} \int_0^l q_y(x, t) u_r(x) dx, \quad (1.92)$$

где согласно (1.70)  $M_r = m_0 \int_0^l u_r^2(x) dx$  - обобщенная масса, соответствующая свободным колебаниям балки с частотой  $\omega_r$ .

Определенный интерес представляет случай, когда можно положить  $q_y(x, t) = f(x)T(t)$ . Тогда

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{T(t)}{M_r} \int_0^l f(x) u_r(x) dx. \quad (1.93)$$

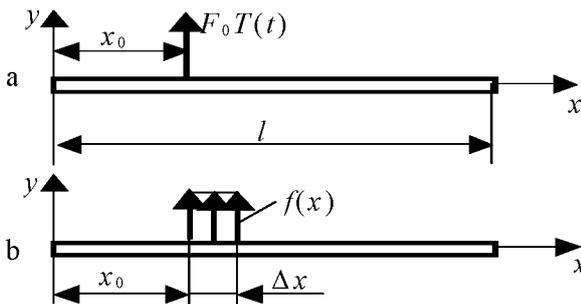


Рис. 1.27

Если к балке в сечении  $x = x_0$  приложена сосредоточенная возмущающая сила  $F_0 T(t)$ , то можно поступить следующим образом. Силу  $F_0$  (рис. 1.27,а) представим сначала в виде распределен-

ной на интервале  $\Delta x$  нагрузки  $f(x)$  (рис. 1.27, б) так, чтобы  $f(x)\Delta x = F_0$ . При этом

$$\int_0^l f(x)u_r(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)u_r(x)dx$$

По теореме о среднем имеем

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)u_r(x)dx = f(\xi)u_r(\xi)\Delta x, \quad x_0 \leq \xi \leq x_0 + \Delta x.$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  получим

$$\int_0^l f(x)u_r(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(\xi)u_r(\xi)\Delta x] = F_0u_r(x_0).$$

В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение (1.93) примет вид

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = F_0u_r(x_0)T(t)/M_r. \quad (1.94)$$

С использованием (1.90), (1.94) решим задачу о вынужденных колебаниях шарнирно опертой балки [1], нагруженной посередине гармонической возмущающей силой  $F_0 \cos pt$  (рис. 1.28), т.е. когда  $T(t) = \cos pt$ .

Частное решение неоднородного уравнения (1.94) будем отыскивать в виде  $q_r^*(t) = C_r \cos pt$ . Подстановка в (1.94) дает

$$C_r = F_0u_r(x_0) / [M_r(\omega_r^2 - p^2)].$$

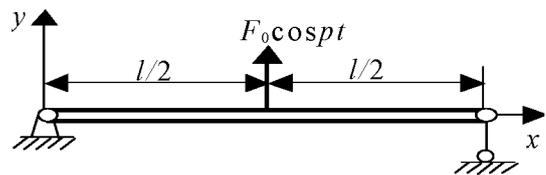


Рис. 1.28

Общее решение уравнения (1.94) запишется как

$$q_r(t) = A_r \sin \omega_r t + B_r \cos \omega_r t + \frac{F_0u_r(x_0)}{M_r(\omega_r^2 - p^2)} \cos pt. \quad (1.95)$$

Первые два слагаемых здесь соответствуют собственным колебаниям системы. При установившихся вынужденных колебаниях они за счет сил трения с течением времени затухают, и можно положить

$$q_r(t) = q_r^*(t) = \frac{F_0u_r(x_0)}{M_r(\omega_r^2 - p^2)} \cos pt. \quad (1.96)$$

Для шарнирно опертой балки  $u_r(x) = \sin \frac{\pi r}{l} x$ . Тогда

$$u_r(x_0) = u_r\left(\frac{l}{2}\right) = \sin \frac{\pi r}{2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{r-1}{2}} & \text{при нечетных } r, \\ 0 & \text{при четных } r, \end{cases}$$

$$M_r = m_0 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi r}{l} x dx = \frac{m_0 l}{2},$$

$$q_r(t) = \frac{2(-1)^{\frac{r-1}{2}} F_0 \cos pt}{m_0 l \omega_r^2 (1 - p^2/\omega_r^2)}.$$

Подстановка в (1.90) с учетом выражения (1.51) для  $\omega_r$  дает

$$u_y(x, t) = \frac{2F_0 l^3 \cos pt}{\pi^4 EI_z} \sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}} \sin(\pi r x/l)}{r^4 (1 - p^2/\omega_r^2)}. \quad (1.97)$$

Ряд в (1.97) сходится быстро, и достаточно удержать 2...3 его члена. Изгибающий момент равен

$$M_z(x, t) = EI_z \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = -\frac{2F_0 l \cos pt}{\pi^2} \sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}} \sin(\pi r x/l)}{r^2 (1 - p^2/\omega_r^2)}.$$

Здесь ряд сходится несколько хуже, и для обеспечения инженерной точности решения нужно удержать 5...6 его членов. Если рассматривается переходный процесс, т.е. вынужденные колебания при начальных условиях

$u_y|_{t=0} = \varphi(x)$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x)$ , то нужно в (1.90) подставить (1.95), и мы получим<sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned} u_y(x, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x) (A_r \sin \omega_r t + B_r \cos \omega_r t + C_r \cos pt); \\ \frac{\partial u_y(x, t)}{\partial t} &= \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x) (\omega_r A_r \cos \omega_r t - \omega_r B_r \sin \omega_r t - p C_r \sin pt). \end{aligned} \right\} \quad (1.98)$$

$$\text{При } t=0 \quad \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x) (B_r + C_r) = \varphi(x), \quad \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x) \omega_r A_r = \psi(x). \quad (1.99)$$

Чтобы найти постоянные  $A_r$  и  $B_r$ , следует функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  разложить в ряд по формам собственных колебаний балки. Если до начала нагружения система находится в покое, т.е.  $\varphi(x) = 0$ ,  $\psi(x) = 0$ , то из (1.99) имеем  $A_r = 0$ ,  $B_r = -C_r$ .

На основании (1.97), (1.98) в этом случае окончательное решение будет иметь вид

<sup>1</sup> В рассматриваемом примере перемещение балки как жесткого тела отсутствует, и суммирование начинается с  $r=1$ . При четных  $r$  коэффициент  $C_r = 0$ .

$$u_y(x, t) = \frac{2F_0 l^3}{\pi^4 EI_z} \sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}} \sin(\pi r x/l)}{r^4 (1 - p^2/\omega_r^2)} (\cos pt - \cos \omega_r t).$$

### 1.7. Приближенный учет диссипативных сил при вынужденных колебаниях

В [1, 9] показано, что при вязком трении решение уравнений движения системы с конечным числом степеней свободы может быть записано в виде разложения по формам собственных колебаний системы без трения, если матрицу демпфирования представить как линейную комбинацию матрицы масс и матрицы жесткости. Первое из этих слагаемых позволяет моделировать внешнее трение, а второе - внутреннее трение. Подобный подход может быть использован и для стержней с распределенной массой [1].

Если масса балки равномерно распределена по длине, то и внешнее вязкое сопротивление будем считать также равномерно распределенным по длине, т.е. на балку действует погонная сила трения  $q_{\text{тр}} = -2am_0 \frac{\partial u_y}{\partial t}$ .

Выделим из балки двумя сечениями бесконечно малый элемент длиной  $dx$  и приложим действующие на него силовые факторы, включая силы инерции (рис. 1.29). Из условия равенства нулю суммы проекций всех сил на ось  $y$  получим соотношение

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + 2am_0 \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} = q_y. \quad (1.100)$$

Равенство нулю суммы моментов относительно оси  $z$  приводит, как и ранее, к зависимости  $Q_y = \frac{\partial M_z}{\partial x}$ .

До сих пор мы исходили из элементарной теории изгиба балки, основанной на гипотезе плоских сечений и законе Гука  $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$ . Вязкое внутреннее трение введем, полагая, что нормальные напряжения зависят не только от деформаций, но и от скорости деформаций [1], заменив закон Гука выражением

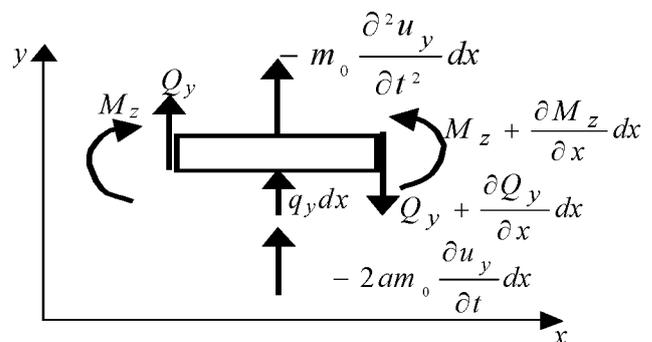


Рис. 1.29

$$\sigma_{xx} = E \left( \varepsilon_{xx} + 2b \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} \right). \quad (1.101)$$

Из гипотезы плоских сечений вытекает, что перемещение в направлении оси  $x$  точки поперечного сечения, отстоящей на  $y$  от нейтральной оси, равно

$u_x = -y \frac{\partial u_y}{\partial x}$ . Тогда  $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$ . Подстановка в (1.101) дает

$$\sigma_{xx} = -E \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial t} \right). \quad (1.102)$$

Используя правило знаков, принятое в сопротивлении материалов, запишем с учетом (1.102) выражение для изгибающего момента:

$$M_z = - \int_A y \sigma_{xx} dA = E \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial t} \right) \int_A y^2 dA$$

или

$$M_z = EI_z \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial t} \right).$$

Тогда

$$\frac{\partial Q_y}{\partial x} = EI_z \left( \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} + 2b \frac{\partial^5 u_y}{\partial x^4 \partial t} \right). \quad (1.103)$$

что после подстановки в (1.100) приводит к дифференциальному уравнению

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + 2am_0 \frac{\partial u_y}{\partial t} + EI_z \left( \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} + 2b \frac{\partial^5 u_y}{\partial x^4 \partial t} \right) = q_y. \quad (1.104)$$

Представим  $u_y(x, t)$  разложением по формам собственных колебаний системы без трения  $u_y(x, t) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(x) q_r(t)$  и подставим в (1.104):

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left\{ m_0 u_r(x) [\ddot{q}_r(t) + 2a\dot{q}_r(t)] + EI_z u_r^{IV}(x) [q_r(t) + 2b\dot{q}_r(t)] \right\} = q_y(x, t).$$

Далее будем следовать рассуждениям предыдущего параграфа. С учетом равенства  $EI_z u_r^{IV}(x) = m_0 \omega_r^2 u_r(x)$  получим

$$\sum_{r=0}^{\infty} [\ddot{q}_r(t) + 2(a + \omega_r^2 b)\dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t)] m_0 u_r(x) = q_y(x, t).$$

Умножим теперь правую и левую части этого равенства на  $u_s(x)$  и проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $l$ . Воспользовавшись ортогональностью форм собственных колебаний  $\int_0^l u_s(x)u_r(x)dx = 0$  при  $s \neq r$ , в итоге имеем

$$\ddot{q}_r(t) + 2h_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{1}{M_r} \int_0^l q_y(x,t) u_r(x) dx, \quad (1.105)$$

где  $h_r = a + \omega_r^2 b$ .

После вычисления интеграла в правой части она будет представлять собой некоторую функцию времени. Следовательно, уравнение (1.105) совпадает по виду с дифференциальным уравнением вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы.

Коэффициенты  $a$  и  $b$  определяются из эксперимента. Для этого нужно с помощью вибратора возбудить колебания балки поочередно на двух резонансных частотах и после отключения вибратора по записи затухающих колебаний определить логарифмические декременты  $\delta_1$  и  $\delta_2$  как для системы с одной степенью свободы [1, 9] из соотношения  $\delta_r = \ln(C_{r,n}/C_{r,n+1})$  ( $r=1,2$ ). Здесь  $C_{r,n}$ ,  $C_{r,n+1}$  - значения соседних амплитуд колебаний. Учитывая, что  $h_r \approx \delta_r \omega_r / (2\pi)$ , запишем

$$a + \omega_1^2 b = \frac{\delta_1 \omega_1}{2\pi}, \quad a + \omega_2^2 b = \frac{\delta_2 \omega_2}{2\pi}.$$

Из решения этой системы уравнений определяются параметры  $a$  и  $b$ :

$$a = \frac{\omega_1 \omega_2 (\delta_1 \omega_2 - \delta_2 \omega_1)}{2\pi(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \quad b = \frac{\delta_2 \omega_2 - \delta_1 \omega_1}{2\pi(\omega_2^2 - \omega_1^2)}. \quad (1.106)$$

После определения  $a$  и  $b$  и решения уравнений вида (1.105) определяются перемещения  $u_y(x,t)$  по формуле

$$u_y(x,t) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(x) q_r(t).$$

## 2. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

### 2.1. Вариационный принцип Гамильтона

Рассмотрим произвольное упругое тело объемом  $\tau$ , ограниченное поверхностью  $\omega$ . При решении статических задач его напряженно-деформированное состояние может быть исследовано с использованием вариационного принципа Лагранжа: из всех перемещений, допускаемых наложенными на тело связями, в состоянии равновесия в действительности имеют место такие, при которых полная потенциальная энергия системы  $V = U + \Pi$  минимальна (вариация  $\delta V = \delta U + \delta \Pi = 0$ ) Через  $U$  обозначена потенциальная энергия деформации, а через  $\Pi$  - потенциал внешних сил, вариация которого равна [6]

$$\delta \Pi = - \left( \int_{\tau} [\delta u]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p} [\delta u]^T [p] d\omega \right). \quad (2.1)$$

Здесь  $[\delta u] = \{\delta u_x \delta u_y \delta u_z\}$  - матрица-столбец<sup>1</sup> вариаций перемещений,  $[R] = \{R_x R_y R_z\}$  - матрица-столбец объемных сил,  $[p] = \{p_x p_y p_z\}$  - матрица-столбец поверхностных сил,  $\omega_p$  - часть поверхности тела, на которой заданы поверхностные силы. На части поверхности тела  $\omega_u$ , на которой заданы перемещения, последние не варьируются. Перемещения, объемные и поверхностные силы являются функциями координат  $x, y, z$ . Внешние силы при варьировании  $\Pi$  считаются неизменными.

Перейдем теперь к задачам динамики упругого тела. Здесь объемные  $[R]$  и поверхностные  $[p]$  силы, а также перемещения  $[u]$  будут зависеть не только от координат  $x, y, z$ , но и от времени  $t$ . Воспользуемся принципом Д'Аламбера: если к внешним силам добавить силы инерции, то тело можно рассматривать как находящееся в состоянии равновесия. Следуя работе [5] потенциал  $\Pi$  разобьем на две части  $\Pi = \Pi_{\text{вн}} + \Pi_{\text{ин}}$ , где  $\Pi_{\text{вн}}$  - потенциал внешних сил, а  $\Pi_{\text{ин}}$  - потенциал сил инерции. Силы инерции суть силы объемные. Поэтому

<sup>1</sup> Для удобства записи будем матрицы столбцы в случае необходимости выписывать в строку, заключив их в фигурные скобки.

$$\delta \Pi_{\text{ин}} = - \int_{\tau} [\delta u]^T [R_{\text{ин}}] d\tau. \quad (2.2)$$

Рассмотрим бесконечно малый элемент тела  $d\tau$ . В пределах этого элемента вдоль осей  $x, y, z$  действуют соответственно силы инерции  $-\rho \frac{\partial^2 u_x}{dt^2} d\tau$ ,  $-\rho \frac{\partial^2 u_y}{dt^2} d\tau$ ,  $-\rho \frac{\partial^2 u_z}{dt^2} d\tau$ , где  $\rho$  - плотность материала. Для сокращения записи будем в пределах настоящего параграфа частные производные по времени обозначать точками сверху ( $\frac{\partial^2 u_x}{dt^2} = \ddot{u}_x$  и т. д.), так что вектор сил инерции, приходящихся на единицу объема, равен

$$[R_{\text{ин}}] = -\rho \{\ddot{u}_x \ddot{u}_y \ddot{u}_z\} = -\rho [\ddot{u}]$$

Подстановка в (2.2) дает

$$\delta \Pi_{\text{ин}} = \rho \int_{\tau} [\delta u]^T [\ddot{u}] d\tau. \quad (2.3)$$

Воспользуемся тождественным соотношением

$$\frac{\partial}{\partial t} ([\delta u]^T [\dot{u}]) = [\delta \dot{u}]^T [\dot{u}] + [\delta u]^T [\ddot{u}],$$

где

$$[\dot{u}] = \{\dot{u}_x \dot{u}_y \dot{u}_z\}, \quad [\delta \dot{u}] = \{\delta \dot{u}_x \delta \dot{u}_y \delta \dot{u}_z\}.$$

Тогда

$$\delta \Pi_{\text{ин}} = -\rho \int_{\tau} [\delta \dot{u}]^T [\dot{u}] d\tau + \rho \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} ([\delta u]^T [\dot{u}]) d\tau. \quad (2.4)$$

Определим теперь кинетическую энергию  $T$ . В пределах бесконечно малого объема  $d\tau$  имеем

$$dT = \frac{\rho}{2} (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2) d\tau.$$

Для всего упругого тела

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2) d\tau.$$

Вариация кинетической энергии равна

$$\delta T = \rho \int_{\tau} (\dot{u}_x \delta \dot{u}_x + \dot{u}_y \delta \dot{u}_y + \dot{u}_z \delta \dot{u}_z) d\tau = \rho \int_{\tau} \begin{bmatrix} \delta \dot{u}_x & \delta \dot{u}_y & \delta \dot{u}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \end{bmatrix} d\tau$$

или

$$\delta T = \rho \int_{\tau} [\delta \dot{u}]^T [\dot{u}] d\tau.$$

Подстановка этого выражения в (2.4) дает

$$\delta\Pi_{\text{ин}} = -\delta T + \rho \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left( [\delta u]^T [\dot{u}] \right) d\tau.$$

В итоге имеем

$$\delta V = \delta U + \delta\Pi_{\text{вн}} - \delta T + \rho \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left( [\delta u]^T [\dot{u}] \right) d\tau = 0.$$

Проинтегрируем теперь последнее равенство по времени от  $t_1$  до  $t_2$ :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + \Pi_{\text{вн}} - T) dt + \rho \int_{\tau t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( [\delta u]^T [\dot{u}] \right) dt d\tau = 0. \quad (2.5)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( [\delta u]^T [\dot{u}] \right) dt = \left( [\delta u]^T [\dot{u}] \right) \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (2.6)$$

В соответствии с процедурой рассматриваемого метода введем ограничения на характер вариаций  $[\delta u]$ . Потребуем, чтобы вариации  $[\delta u]$  были равны нулю на концах интервала интегрирования, т.е. при  $t = t_1$  и  $t = t_2$  [5]. Тогда интеграл в (2.5) будет равен нулю, и мы получим

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + \Pi_{\text{вн}} - T) dt = 0. \quad (2.7)$$

Интеграл  $\int_{t_1}^{t_2} (U + \Pi_{\text{вн}} - T) dt$  Гамильтон назвал «действием». Можно теперь

сформулировать вариационный принцип Гамильтона или «принцип действия» Гамильтона: в процессе колебаний из всех перемещений, согласующихся со связями системы, в действительности имеют место такие, при которых «действие» имеет стационарное значение.

## 2.2. Определение приближенного значения низшей частоты собственных колебаний стержней методом Рэлея

Известно [1,9], что приближенное значение низшей частоты собственных колебаний системы с конечным числом степеней свободы может быть определено по формуле Рэлея

$$\omega_1^2 = 2\bar{U}_1 / M_1, \quad (2.8)$$

где  $\bar{U}_1$  - потенциальная энергия системы при деформациях, соответствующих форме колебаний при низшей частоте  $[u_1]$ , а  $M_1$  - обобщенная масса при той же

форме колебаний. Приближенным видом  $[u_1]$  задаются и определяют частоту колебаний  $\omega_1$ .

В параграфе 1.3 показана возможность предельного перехода от колебаний с конечным числом степеней свободы к колебаниям стержней с распределенной массой. Так что формула Рэлея справедлива и для приближенного определения низшей частоты колебаний стержней.

Выражение для  $\bar{U}_1$  зависит от типа колебаний. Для поперечных колебаний

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z(x) (u_1''(x))^2 dx, \quad (2.9)$$

для продольных колебаний

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EA(x) (u_1'(x))^2 dx \quad (2.10)$$

и для крутильных колебаний

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{2} \int_0^l GI_{кр}(x) (u_1'(x))^2 dx. \quad (2.11)$$

Обобщенная масса  $M_1$  для поперечных и продольных колебаний в соответствии с (1.70) равна

$$M_1 = \int_0^l m_0(x) u_1^2(x) dx, \quad (2.12)$$

а для крутильных колебаний согласно (1.72) имеем

$$M_1 = \int_0^l I_{m_0}(x) u_1^2(x) dx.$$

В (2.9) ... (2.12) через  $u_1(x)$  обозначена форма колебаний при частоте  $\omega_1$ , которой следует задаться.

Проиллюстрируем применение формулы Рэлея на примере поперечных колебаний консольной балки. Рассмотрим сначала однородную балку постоянного сечения. Характер изогнутой оси балки при низшей частоте колебаний (рис. 2.1) напоминает параболу. Поэтому примем сначала  $u_1(x) = (x/l)^2$ ,  $u_1''(x) = 2/l^2$ . Обратим внимание на то, что функция удовлетворяет геометрическим граничным условиям  $u_1(0) = 0$ ,  $u_1'(0) = 0$ .

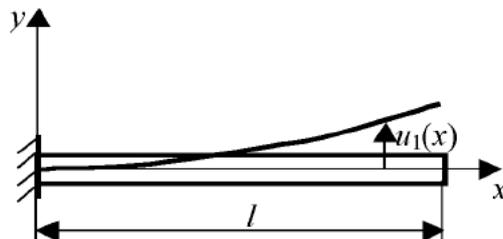


Рис. 2.1

Подстановка в формулы (2.9) и (2.12) дает

$$2\bar{U}_1 = 4EI_z/l^3, \quad M_1 = m_0 l/5.$$

Отсюда

$$\omega_1^2 = 20EI_z/(m_0 l^4), \quad \omega_1 = 4,472\sqrt{EI_z/(m_0 l^4)}.$$

Точное значение низшей частоты колебаний консольной балки постоянного сечения  $\omega_1 = 1,875^2\sqrt{EI_z/(m_0 l^4)} = 3,516\sqrt{EI_z/(m_0 l^4)}$ .

Погрешность приближенного решения составляет 27%. Постараемся выяснить причину столь высокой погрешности. Выбранная функция  $u_1(x)$  неплохо представляет характер изогнутой оси балки при колебаниях. Но в формуле для потенциальной энергии деформации фигурирует вторая производная этой функции, которая здесь постоянна по длине балки, а ведь на свободном конце балки вторая производная должна быть равна нулю, так как равен нулю изгибающий момент.

Примем теперь за  $u_1(x)$  удовлетворяющую геометрическим граничным условиям степенную функцию

$$u_1(x) = (x/l)^2 - (x/l)^3/3, \quad (2.13)$$

у которой вторая производная  $u_1''(x) = 2(1 - x/l)/l^2$  обращается в нуль при  $x = l$ . Подставим  $u_1(x)$  и  $u_1''(x)$  в формулы (2.9) и (2.12) и получим

$$2\bar{U}_1 = \frac{4EI_z}{l^4} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{4EI_z}{3l^3},$$

$$M_1 = m_0 \int_0^l \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3}\right)^2 dx = \frac{11m_0 l}{105}.$$

Тогда по формуле Рэлея

$$\omega_1^2 = 140EI_z/(11m_0 l^4), \quad \omega_1 = 3,568\sqrt{EI_z/(m_0 l^4)}.$$

Погрешность по сравнению с точным решением оказалась здесь равной 1,5%, т.е. получается вполне приемлемый для практических расчетов результат.

Пойдем, однако, дальше. При  $x = l$  должна быть равна нулю и перерезывающая сила, т.е.  $u_1'''(l) = 0$ . Всем геометрическим и статическим граничным условиям удовлетворяет функция

$$u_1(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^4, \quad u_1''(x) = \frac{2}{l^2}\left(1 - 2\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right). \quad (2.14)$$

Подстановка (2.14) в (2.9) и (2.12) дает

$$2\bar{U}_1 = 4EI_z/(5l^3), \quad M_1 = 26m_0 l/405.$$

По формуле Рэлея получим

$$\omega_1^2 = 162 EI_z / (13 m_0 l^4), \quad \omega_1 = 3,530 \sqrt{EI_z / (m_0 l^4)}.$$

Погрешность по сравнению с точным решением составляет здесь уже только 0,4%. Обратим внимание на то, что формула Рэлея дает завышенное по сравнению с точным значение частоты колебаний. Объясняется это тем, что, задавая форму колебаний, отличную от действительной, мы как бы накладываем дополнительные внутренние связи на стержень, система становится более жесткой, что и приводит к завышению частоты колебаний.

Рассмотрим теперь балку переменного сечения, приведенную на рис. 2.2.

Ширина балки на расстоянии  $x$  от заделки равна  $b(x) = b(1 - x/2l)$ . Погонная масса  $m_0(x)$  и момент инерции сечения будут величинами переменными и определяются зависимостями

$$m_0(x) = m_0^* [1 - x/(2l)], \quad I_z(x) = I_z^* [1 - x/(2l)],$$

где  $m_0^*$  и  $I_z^*$  - соответственно погонная масса и момент инерции при  $x = 0$ .

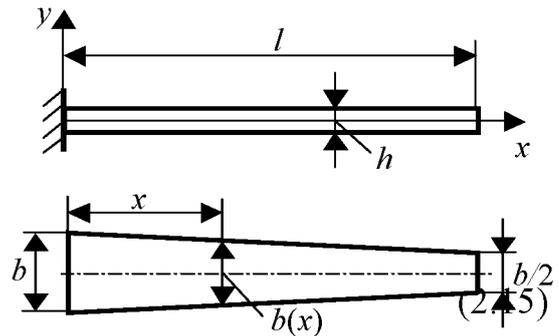


Рис. 2.2

Зададим форму колебаний  $u_1(x)$  в виде (2.13), которая дает для балки постоянного сечения удовлетворительные результаты. Подставим выражения для  $u_1(x)$ ,  $u_1''(x)$ ,  $m_0(x)$  и  $I_z(x)$  в формулы (2.9) и (2.12) и после интегрирования получим

$$2\bar{U}_1 = 7EI_z^* / (6l^3), \quad M_1 = 313m_0^*l / 5040.$$

Из формулы Рэлея имеем

$$\omega_1^2 = 18,786 EI_z^* / (m_0^* l^4), \quad \omega_1 = 4,334 \sqrt{EI_z^* / (m_0^* l^4)}.$$

Сопоставление последнего результата с частотой колебаний балки постоянного сечения шириной  $b$  показывает, что за счет сужения балки к свободному концу частота колебаний увеличивается на 22%.

Рассмотрим теперь продольные колебания стержня постоянного сечения ( $A = \text{const}$ ,  $m_0 = \text{const}$ ), закрепленного при  $x = 0$  (рис.1.5). Для приближенного определения частоты колебаний  $\omega_1$  зададимся формой колебаний  $u_1(x)$ , удовлетворяющей геометрическим  $u_1(0) = 0$  и статическим  $u_1'(l) = 0$  [ $N(l) = 0$ ] граничным условиям, в виде простейшей степенной функции

$$u_1(x) = x/l - x^2/(2l^2), \quad u_1'(x) = (1 - x/l)/l. \quad (2.16)$$

Подстановка в (2.10), (2.12) дает

$$2\bar{U}_1 = EA/(3l), \quad M_1 = 2m_0 l/15.$$

Тогда в соответствии с (2.2)

$$\omega_1^2 = 5EA/(2m_0 l^2), \quad \omega_1 = 1,581\sqrt{EA/(m_0 l^2)}.$$

Точное значение низшей частоты колебаний  $\omega_1 = 1,571\sqrt{EA/(m_0 l^2)}$ , так что погрешность приближенного решения составляет 0,65%.

При исследовании продольных колебаний стержня переменного сечения, представленного на рис. 2.2, положим  $A(x) = (1 - x/(2l))A^*$ , где  $A^*$  - поперечное сечение стержня при  $x = 0$ . В соответствии с (2.10), (2.12), (2.16) имеем

$$2\bar{U}_1 = 17EA^*/(48l), \quad M_1 = 7m_0^*l/80.$$

Тогда

$$\omega_1^2 = 85EA^*/(21m_0^*l^2), \quad \omega_1 = 2,012\sqrt{EA^*/(m_0^*l^2)}.$$

И здесь за счет сужения стержня к свободному краю частота основного тона колебаний существенно увеличилась, а именно - на 27%.

### 2.3. Определение частот и форм собственных колебаний стержней методом Рэлея-Ритца

2.3.1. *Основные расчетные формулы.* Воспользуемся вариационным уравнением Гамильтона, которое для случая свободных колебаний принимает вид

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0.$$

Представим перемещения  $u_x(x,t)$ ,  $u_y(x,t)$ ,  $\vartheta_x(x,t)$  разложениями по формам собственных колебаний:

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x,t) \\ u_y(x,t) \\ \vartheta_x(x,t) \end{array} \right\} = \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x) q_r(t). \quad (2.17)$$

Здесь  $u_r(x)$  - форма колебаний, соответствующая частоте  $\omega_r$ ,  $q_r(t)$  - главная координата. При этом справедливы зависимости  $U = \sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ,  $T = \sum_{r=1}^{\infty} T_r$ , где  $U_r$  и  $T_r$  представляют собой потенциальную и кинетическую энергии при колебаниях с частотой  $\omega_r$ .

Рассматривая движение по одной из форм колебаний, запишем вариационное уравнение Гамильтона в виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U_r - T_r) dt = 0. \quad (2.18)$$

В [1,9] показано, что для систем с конечным числом степеней свободы

$$T_r = \frac{1}{2} M_r \dot{q}_r^2(t), \quad U_r = \bar{U}_r q_r^2(t). \quad (2.19)$$

Здесь  $M_r$  - обобщенная масса при колебаниях с частотой  $\omega_r$ ,  $\bar{U}_r$  - потенциальная энергия при деформациях, соответствующих форме колебаний  $u_r$ . Поскольку, как уже отмечалось, для исследования колебаний стержней с распределенной массой можно воспользоваться предельным переходом от систем с конечным числом степеней свободы, то зависимости (2.19) справедливы и в рассматриваемом случае.

Подстановка (2.19) в (2.18) дает

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \bar{U}_r q_r^2(t) - \frac{1}{2} M_r \dot{q}_r^2(t) \right] dt = 0. \quad (2.20)$$

В дальнейшем для удобства изложения будем детально рассматривать поперечные колебания, а затем обобщим на случай продольных и крутильных колебаний стержней. Движение системы при колебаниях с частотой  $\omega_r$  определяется одним членом ряда (2.17)

$$u_{yr}(x,t) = u_r(x) q_r(t).$$

При свободных колебаниях  $q_r(t) = \sin(\omega_r t + \varphi_r)$ . Примем сдвиг фаз  $\varphi_r = 0$ , положив  $q_r(t) = \sin \omega_r t$ . Поскольку  $q_r(t)$  известная функция времени, то вариация перемещений

$$\delta u_{yr}(x,t) = \delta u_r \sin \omega_r t.$$

В соответствии с принципом Гамильтона вариации перемещений  $\delta u_{yr}(x,t)$  на концах интервала интегрирования при  $t = t_1$  и  $t = t_2$  должны быть равны нулю. В нашем случае это возможно, если  $\sin \omega_r t_1 = \sin \omega_r t_2 = 0$ . Положим поэтому  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \pi/\omega_r$  и подставим  $q_r(t)$  и  $\dot{q}_r(t)$  в (2.20):

$$\delta \int_0^{\pi/\omega_r} \left( \bar{U}_r \sin^2 \omega_r t - \frac{1}{2} \omega_r^2 M_r \cos^2 \omega_r t \right) dt = 0.$$

Заметим, что если  $\varphi_r \neq 0$ , то пределы интегрирования приняли бы другие значения, и только. Имея в виду, что

$$\int_0^{\pi/\omega_r} \sin^2 \omega_r t dt = \int_0^{\pi/\omega_r} \cos^2 \omega_r t dt = \pi/(2\omega_r),$$

представим вариационное уравнение в виде

$$\delta\left(\bar{U}_r - \frac{1}{2}\omega_r^2 M_r\right) = 0. \quad (2.21)$$

При изгибных колебаниях имеем

$$\bar{U}_r = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z(x) (u_r''(x))^2 dx, \quad (2.22)$$

$$M_r = \int_0^l m_0(x) u_r^2(x) dx. \quad (2.23)$$

Следуя методу Ритца, будем форму колебаний  $u_r(x)$  отыскивать в виде усеченного ряда

$$u_r(x) = \sum_{k=1}^m a_k v_k(x). \quad (2.24)$$

Здесь  $v_k(x)$  наперед выбираемые так называемые координатные (базисные) функции, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям,  $a_k$  - числовые параметры, подлежащие отысканию.

Представим (2.21) в виде

$$\delta\Phi = 0, \quad \Phi = \bar{U}_r - \frac{1}{2}\omega_r^2 M_r.$$

Подставим в  $\bar{U}_r$  и  $M_r$  приближенное решение (2.24) и получим функционал

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z(x) \left[ \sum_{k=1}^m a_k v_k''(x) \right]^2 dx - \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l m_0(x) \left[ \sum_{k=1}^m a_k v_k(x) \right]^2 dx. \quad (2.25)$$

Индекс  $r$  при  $\omega$  здесь и далее опускаем. Так как функции  $v_k(x)$  заранее выбираются, то после интегрирования получим  $\Phi = \Phi(a_1 a_2 \dots a_n \dots a_m)$ . Запишем выражение для вариации  $\delta\Phi$  и приравняем ее нулю:

$$\delta\Phi = \sum_{n=1}^m \frac{\partial\Phi}{\partial a_n} \delta a_n = 0.$$

Здесь  $\delta a_n$  - произвольные вариации. Поэтому должно иметь место  $\partial\Phi/\partial a_n = 0$  ( $n = \overline{1, m}$ ). Продифференцируем (2.25) по  $a_n$  и получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_n} = \int_0^l EI_z(x) v_n''(x) \sum_{k=1}^m a_k v_k''(x) dx - \omega^2 \int_0^l m_0(x) v_n(x) \sum_{k=1}^m a_k v_k(x) dx = 0.$$

Представим теперь интеграл от суммы в виде суммы интегралов

$$\sum_{k=1}^m a_k \int_0^l EI_z(x) v_n''(x) v_k''(x) dx - \omega^2 \sum_{k=1}^m a_k \int_0^l m_0(x) v_n(x) v_k(x) dx = 0, \quad (n = \overline{1, m}).$$

Обозначим через  $EI_z^*$  и  $m_0^*$  изгибную жесткость балки и ее погонную массу в некотором фиксированном сечении, умножим предыдущее равенство на  $l^3/(EI_z^*)$  и запишем

$$\sum_{k=1}^m a_k l^3 \int_0^l \frac{I_z(x)}{I_z^*} v_n''(x) v_k''(x) dx - \frac{\omega^2 m_0^* l^4}{EI_z^*} \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{l} \int_0^l \frac{m_0(x)}{m_0^*} v_n(x) v_k(x) dx = 0. \quad (2.26)$$

Введем обозначения

$$\lambda = \omega^2 m_0^* l^4 / (EI_z^*) \quad \text{или} \quad \omega^2 = EI_z^* \lambda / (m_0^* l^4), \quad (2.27)$$

$$A_{nk} = l^3 \int_0^l \frac{I_z(x)}{I_z^*} v_n''(x) v_k''(x) dx, \quad B_{nk} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{m_0(x)}{m_0^*} v_n(x) v_k(x) dx.$$

Причем, как нетрудно заметить,  $A_{nk} = A_{kn}$ ,  $B_{nk} = B_{kn}$ . Тогда равенство (2.26) представится в виде

$$\sum_{k=1}^m (A_{nk} - \lambda B_{nk}) a_k = 0, \quad n = \overline{1, m}. \quad (2.28)$$

Относительно параметров  $a_k$  мы получили систему линейных однородных алгебраических уравнений, которая имеет нетривиальное решение при равенстве нулю ее определителя. Из этого условия находятся значения  $\lambda$ , а затем по (2.27) - частоты собственных колебаний  $\omega$ .

Введем матрицу-столбец  $[a] = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  квадратные симметричные матрицы размером  $m \times m$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

и запишем систему уравнений (2.28) в матричной форме:

$$([A] - \lambda[B])[a] = [0]. \quad (2.29)$$

Из этой записи видно, что параметры  $\lambda_r$  ( $r = \overline{1, m}$ ) и соответствующие им векторы  $[a_r] = \{a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{mr}\}$  находятся из решения обобщенной проблемы собственных значений. По формуле (2.27) подсчитываются частоты собственных колебаний  $\omega_r$ , а форма колебаний  $u_r(x)$ , соответствующая частоте  $\omega_r$ , определится по формуле

$$u_r(x) = \sum_{k=1}^m a_{kr} v_k(x). \quad (2.30)$$

При вычислении коэффициентов  $A_{nk}$ ,  $B_{nk}$  целесообразно перейти к безразмерной координате  $\xi = x/l$ , что дает

$$A_{nk} = \int_0^1 \frac{I_z(\xi)}{I_z^*} v_n''(\xi) v_k''(\xi) d\xi, \quad B_{nk} = \int_0^1 \frac{m_0(\xi)}{m_0^*} v_n(\xi) v_k(\xi) d\xi. \quad (2.31)$$

где штрихами сверху обозначены производные по  $\xi$ .

Если с балкой связаны  $q$  - сосредоточенных грузов, то согласно (1.71) обобщенная масса будет равна

$$M_r = \int_0^l m_0(x) u_r^2(x) dx + \sum_{j=1}^q M_j u_r^2(x_j),$$

где  $M_j$  - масса груза, расположенного на расстоянии  $x_j$  от начала координат.

Повторив для этого случая предыдущие выкладки и введя обозначение  $\kappa_j = M_j / (m_0^* l)$ , в итоге получим

$$B_{nk} = \int_0^1 \frac{m_0(\xi)}{m_0^*} v_n(\xi) v_k(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^q \kappa_j v_n(\xi_j) v_k(\xi_j). \quad (2.32)$$

При исследовании продольных колебаний стержня переменного сечения аналогичные рассуждения дают

$$\left. \begin{aligned} A_{nk} &= \int_0^1 \frac{A(\xi)}{A^*} v_n'(\xi) v_k'(\xi) d\xi, \quad \omega^2 = \frac{EA^*}{m_0^* l^2} \lambda; \\ B_{nk} &= \int_0^1 \frac{m_0(\xi)}{m_0^*} v_n(\xi) v_k(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^q \kappa_j v_n(\xi_j) v_k(\xi_j). \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

а для крутильных колебаний имеем

$$\left. \begin{aligned} A_{nk} &= \int_0^1 \frac{I_{кр}(\xi)}{I_{кр}^*} v_n'(\xi) v_k'(\xi) d\xi, \quad \omega^2 = \frac{GI_{кр}^*}{I_{m0}^* l^2} \lambda; \\ B_{nk} &= \int_0^1 \frac{I_{m0}(\xi)}{I_{m0}^*} v_n(\xi) v_k(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^q \chi_j v_n(\xi_j) v_k(\xi_j). \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Здесь  $EA^*$ ,  $m_0^*$  - жесткость стержня на растяжение и его погонная масса,  $GI_{кр}^*$ ,  $I_{m0}^*$  - жесткость стержня на кручение и погонный массовый момент инерции в фиксированном сечении. При продольных колебаниях  $\kappa_j = M_j / (m_0^* l)$ , а при крутильных колебаниях  $\chi_j = I_{Mj} / (I_{m0}^* l)$ , где  $I_{Mj}$  - массовый момент инерции относительно оси  $x$  груза, расположенного в сечении  $x = x_j$ .

2.3.2. В качестве *первого примера на применение метода Рэлея-Ритца* рассмотрим определение частот собственных колебаний консольной балки постоянного сечения (рис. 2.1). При выводе вариационного принципа Гамильтона мы использовали принцип Лагранжа, из которого, как следствие, вытекают статические граничные условия [6]. При решении задач методом Ритца с достаточным числом членов ряда они удовлетворяются приближенно, в интегральном смысле. Поэтому не требуется, чтобы координатные функции  $v_k(x)$  в обязательном порядке удовлетворяли статическим граничным условиям; достаточно, чтобы они удовлетворяли геометрическим граничным условиям. Зададимся сначала в качестве координатных простейшими степенными функциями

$$v_k(\xi) = \xi^{k+1} \quad (k = \overline{1, m}). \quad (2.35)$$

При любых значениях  $k$  имеет место  $v_k(0) = 0$ ,  $v'_k(0) = 0$ , т.е. геометрические граничные условия удовлетворяются. Ограничимся представлением формы колебаний двумя членами ряда (2.24):

$$u_r(\xi) = a_1 v_1(\xi) + a_2 v_2(\xi)$$

В соответствии с (2.35) имеем

$$v_1(\xi) = \xi^2, \quad v_2(\xi) = \xi^3, \quad v_1''(\xi) = 2, \quad v_2''(\xi) = 6\xi \quad (2.36)$$

При двух членах ряда система уравнений (2.28) примет вид

$$\left. \begin{aligned} (A_{11} - \lambda B_{11})a_1 + (A_{12} - \lambda B_{12})a_2 &= 0; \\ (A_{21} - \lambda B_{21})a_1 + (A_{22} - \lambda B_{22})a_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Собственные значения  $\lambda$  отыскиваются из равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} (A_{11} - \lambda B_{11}) & (A_{12} - \lambda B_{12}) \\ (A_{21} - \lambda B_{21}) & (A_{22} - \lambda B_{22}) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.38)$$

Поскольку рассматривается балка постоянного сечения, положим  $m_0^* = m_0$ ,  $I_z^* = I_z$ , подсчитаем коэффициенты  $A_{nk}$  и  $B_{nk}$  по формулам (2.31) с учетом (2.36):

$$A_{11} = 4 \int_0^1 d\xi = 4, \quad B_{11} = \int_0^1 \xi^4 d\xi = 1/5,$$

$$A_{12} = A_{21} = 12 \int_0^1 \xi d\xi = 6, \quad B_{12} = B_{21} = \int_0^1 \xi^5 d\xi = 1/6,$$

$$A_{22} = 36 \int_0^1 \xi^2 d\xi = 12, \quad B_{22} = \int_0^1 \xi^6 d\xi = 1/7.$$

Подставим полученные значения коэффициентов в (2.38):

$$\begin{vmatrix} (4 - \lambda/5) & (6 - \lambda/6) \\ (6 - \lambda/6) & (12 - \lambda/7) \end{vmatrix} = 0.$$

Развернув определитель, приходим к квадратному уравнению

$$\lambda^2 - 1224\lambda + 15120 = 0,$$

из решения которого получаем  $\lambda_1 = 12,480$ ,  $\lambda_2 = 1211,5$ . В соответствии с (2.27) частоты колебаний равны

$$\omega_1 = 3,5338\sqrt{EI_z/(m_0 l^4)}, \quad \omega_2 = 34,807\sqrt{EI_z/(m_0 l^4)}.$$

Погрешность в значении  $\omega_1$  по сравнению с точным решением составляет 0,5%, а погрешность в  $\omega_2$  - 58%, поскольку точное решение дает  $\omega_2 = 22,035\sqrt{EI_z/(m_0 l^4)}$ . Чтобы получить более точное значение  $\omega_2$  при использованных координатных функциях, нужно взять не два, а больше членов ряда (2.24).

2.3.3. Перейдем теперь к *определению частот и форм собственных колебаний балки переменного сечения*. В дальнейшем функции (2.35) будем называть координатными функциями типа 1. Координатные функции типа 2 представим двучленом  $v_k(\xi) = \xi^{k+1} + \sigma_k \xi^{k+2}$ , причем коэффициент  $\sigma_k$  определим из условия, чтобы  $v_k''(1) = 0$ , что обеспечивает равенство нулю изгибающего момента на конце балки. В итоге имеем

$$v_k(\xi) = \xi^{k+1} + \frac{k}{k+2} \xi^{k+2}. \quad (2.39)$$

Координатными функциями типа 3 назовем формы собственных колебаний консольной балки постоянного сечения (1.56):

$$\left. \begin{aligned} v_k(\xi) &= K_3(\beta_k \xi) + \frac{K_1(\beta_k)}{K_2(\beta_k)} K_4(\beta_k \xi); \\ v_k''(\xi) &= \beta_k^2 \left[ K_1(\beta_k \xi) + \frac{K_1(\beta_k)}{K_2(\beta_k)} K_2(\beta_k \xi) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Изгибающий момент при перемещениях  $v_k(x)$  обозначим через  $M_k(x)$  и он равен  $M_k(x) = EI_z(x)v_k''(x)$ , в силу чего при использовании (2.39) для балки переменного сечения изгибающий момент  $M_k$  на конце балки равен нулю. Рассмотрим теперь перерезывающую силу, соответствующую перемещениям  $v_k(x)$ . Она определяется как  $Q_k(x) = [EI_z(x)v_k''(x)]'$  или

$$Q_k(x) = EI_z'(x)v_k''(x) + EI_z(x)v_k'''(x). \quad (2.41)$$

Значит, если  $v_k''(l) = 0$ , то на свободном конце балки переменного сечения перерезывающая сила  $Q_k(l)$  будет равна нулю при  $v_k'''(l) = 0$ . Таким требованиям по природе своей удовлетворяют функции типа 3 (2.40). Значения параметра  $\beta_k$  приведены в п. 1.2.3.

Определим частоты и формы колебаний балки переменного сечения, изображенную на рис. 2.2, представив форму колебаний двумя членами ряда и воспользовавшись координатными функциями типа 2 (2.39):

$$v_1(\xi) = \xi^2 - \xi^3/3, \quad v_2(\xi) = \xi^3 - \xi^4/2, \\ v_1''(\xi) = 2(1 - \xi^2), \quad v_2''(\xi) = 6(\xi - \xi^2).$$

В соответствии с (2.15) имеет место  $m_0(\xi)/m_0^* = I_z(\xi)/I_z^* = 1 - \xi/2$ , и коэффициенты  $A_{nk}$ ,  $B_{nk}$  (2.31) равны

$$A_{11} = 4 \int_0^1 (1 - \xi/2)(1 - \xi)^2 d\xi = 7/6, \\ A_{12} = 12 \int_0^1 (1 - \xi/2)(1 - \xi)(\xi - \xi^2) d\xi = 0,8, \\ A_{22} = 36 \int_0^1 (1 - \xi/2)(\xi - \xi^2)^2 d\xi = 0,9, \\ B_{11} = \int_0^1 (1 - \xi/2)(\xi^2 - \xi^3/3)^2 d\xi = 6,21032 \cdot 10^{-2}, \\ B_{12} = \int_0^1 (1 - \xi/2)(\xi^2 - \xi^3/3)(\xi^3 - \xi^4/2) d\xi = 3,98479 \cdot 10^{-2}, \\ B_{22} = \int_0^1 (1 - \xi/2)(\xi^3 - \xi^4/2)^2 d\xi = 2,61905 \cdot 10^{-2}.$$

Подстановка значений  $A_{nk}$  и  $B_{nk}$  в определитель (2.38) приводит к уравнению

$$\lambda^2 - 586,995\lambda + 10605,946 = 0,$$

решение которого дает собственные значения  $\lambda_1 = 18,6612$ ,  $\lambda_2 = 568,333$ . Согласно (2.27) частоты колебаний равны  $\omega_1 = 4,3199\sqrt{EI_z^*/(m_0^*l^4)}$ ,  $\omega_2 = 23,840\sqrt{EI_z^*/(m_0^*l^4)}$ .

Перейдем теперь к нахождению форм собственных колебаний. Собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определены из условия равенства нулю определителя системы уравнений (2.37). Следовательно, при  $\lambda = \lambda_r$  ( $r=1,2$ ) уравнения (2.37) будут линейно зависимы, и собственный вектор  $[\alpha_r] = \{\alpha_{1r}, \alpha_{2r}\}$  может быть найден лишь с точностью до постоянного множителя. Для этого положим  $a_{1r} = 1$  и одно из уравнений системы (например, второе) опустим, записав

$$(A_{11} - \lambda_r B_{11})\alpha_{1r} + (A_{12} - \lambda_r B_{12})\alpha_{2r} = 0.$$

Зададимся при  $\lambda_1 = 18,6612$  значением  $a_{11} = 1$ , а при  $\lambda_2 = 568,333$  положим  $a_{12} = 2$  и после подстановки в последнее равенство числовых значений получим  $a_{21} = -0,1371$ ,  $a_{22} = -3,1243$ . Таким образом, собственные векторы имеют вид  $[\alpha_1] = \{1 - 0,1371\}$ ,  $[\alpha_2] = \{2; -3,1243\}$ .

В соответствии с (2.30) для форм колебаний получим выражения

$$u_1(\xi) = a_{11}v_1(\xi) + a_{21}v_2(\xi) = \xi^2 - 0,196\xi^3 + 0,0685\xi^4,$$

$$u_2(\xi) = a_{12}v_1(\xi) + a_{22}v_2(\xi) = 2\xi^2 - 3,458\xi^3 + 1,562\xi^4.$$

Графическое изображение этих функций приведено на рис. 2.3.

Для оценки сходимости решения по мере увеличения числа членов ряда (2.24) с использованием координатных функций типа 2 и 3 были подсчитаны на ПЭВМ<sup>2</sup> коэффициенты  $A_{nk}$ ,  $B_{nk}$  Методом обратных итераций, реализованного Л.М.Савельевым в программе GENEVA, решена обобщенная проблема собственных значений для числа членов ряда  $m = 1, 2, 3$  и 4. При этом частота собственных колебаний представляется формулой

$$\omega_r = \gamma_r \sqrt{EI_z^*/(m_0^*l^4)}. \quad (2.42)$$

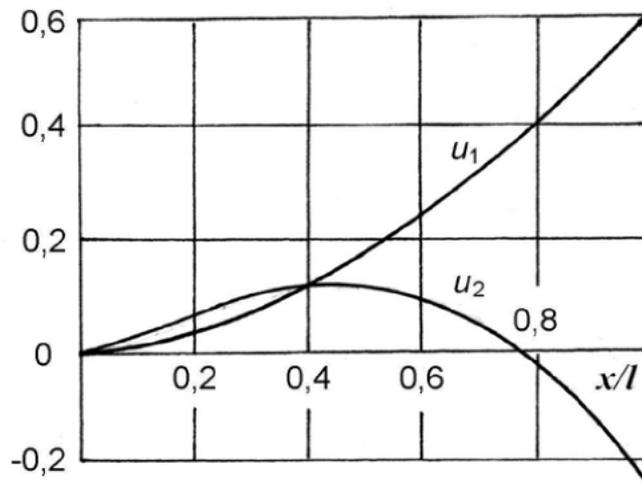


Рис. 2.3

Значения коэффициентов  $\gamma_r$  для консольной балки переменного сечения представлены в таблице 1. Через  $\varepsilon_r$  в таблице обозначена погрешность расчета в процентах. Поскольку точное решение задачи отсутствует, то в таблице приведены значения  $\gamma_r$  для первых четырех частот колебаний, полученных с использованием функций типа 3 при  $m = 5$  и  $m = 6$ . Процент погрешности  $\varepsilon$  указан по сравнению с результатами, приведенными в последней строке таблицы ( $m = 6$ ). Результаты, представленные в таблице для  $m = 1$  (один член ряда (2.24)), соответствуют расчету по методу Рэлея. Наряду с собственными значениями  $\lambda_r$  по программе GENEVA вычисляются и собственные векторы, которые в настоящем пособии не приводятся.

Из таблицы видно, что наилучшие результаты дает использование функций типа 3, соответствующих формам собственных колебаний консольной балки постоянного сечения. Да и координатные функции типа 2 дают, можно ска-

<sup>2</sup> Программирование и решение на ПЭВМ всех задач, приведенных в настоящем пособии, выполнено инженером Г.В.Кановой

зять, удовлетворительные результаты. Правда, при  $m = 4$  погрешность в значении частоты колебаний  $\omega_4$  великовата. Но зато сами координатные функции имеют более простой вид, и для обеспечения необходимой точности в определении интересующей на частоты колебаний можно увеличить число удерживаемых членов ряда (2.24).

Таблица 1

Число членов ряда $m$	Тип функций	$\gamma_1$	$\varepsilon_1, \%$	$\gamma_2$	$\varepsilon_2, \%$	$\gamma_3$	$\varepsilon_3, \%$	$\gamma_4$	$\varepsilon_4, \%$
1	2	4,3343	0,44	—	—	—	—	—	—
	3	4,3258	0,25	—	—	—	—	—	—
2	2	4,3199	0,11	23,840	1,36	—	—	—	—
	3	4,3153	0	23,591	0,31	—	—	—	—
3	2	4,3153	0	23,771	1,07	65,689	3,94	—	—
	3	4,3152	0	23,521	0,01	63,353	0,24	—	—
4	2	4,3152	0	23,523	0,02	64,561	2,15	132,80	8,45
	3	4,3152	0	23,520	0	63,203	0	122,68	0,19
5	3	4,3152	0	23,519	0	63,202	0	122,45	0
6	3	4,3152	—	23,519	—	63,200	—	122,45	—

На рис. 2.4 представлены расчетные модели, где на балке постоянного сечения расположен груз (сосредоточенная масса  $M_1 = m_0 l$ ) при  $\xi_1 = 1$  (рис. 2.4,а) и при  $\xi_1 = 0,5$  (рис. 2.4,б).

Положив  $m_0^* = m_0$ ,  $I_z^* = I_z$ , в соответствии с первой формулой (2.31) и формулой (2.32) имеем

$$\left. \begin{aligned} A_{nk} &= \int_0^1 v_n''(\xi) v_k''(\xi) d\xi; \\ B_{nk} &= \int_0^1 v_n(\xi) v_k(\xi) d\xi + \kappa_1 v_n(\xi_1) v_k(\xi_1), \quad \kappa_1 = M_1 / (m_0 l) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Расчеты на ЭВМ были выполнены с использованием координатных функций типа 2 и типа 3. Частоты колебаний определялись по формуле (2.42) при  $m_0^* = m_0$ ,  $I_z^* = I_z$ . Значения параметра  $\gamma_r$  для случая, когда масса  $M_1$  расположена на конце балки, приведены в таблице 2. Там же даны значения этого параметра при точном решении задачи, полученном в п.1.2.3 ( $\gamma_r = \beta_r^2$ ).

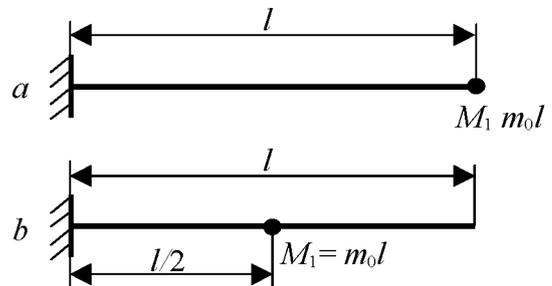


Рис. 2.4

Таблица 2

Число членов ряда $m$	Тип функций	$\gamma_1$	$\varepsilon_1, \%$	$\gamma_2$	$\varepsilon_2, \%$	$\gamma_3$	$\varepsilon_3, \%$	$\gamma_4$	$\varepsilon_4, \%$
1	2	1,5581	0,02	–	–	–	–	–	–
	3	1,5724	0,97	–	–	–	–	–	–
2	2	1,5573	0	16,285	0,22	–	–	–	–
	3	1,5596	0,15	16,558	1,90	–	–	–	–
3	2	1,5573	0	16,284	0,22	51,699	1,52	–	–
	3	1,5580	0,05	16,334	0,58	52,059	2,28	–	–
4	2	1,5573	0	16,251	0,01	51,597	1,37	110,01	4,57
	3	1,5576	0,02	16,290	0,25	51,367	0,93	107,53	2,21
Точное решение		1,5573		16,250		50,896		105,20	

При анализе таблицы следует иметь в виду, что из-за наличия на конце балки груза перерезывающая сила здесь не равна нулю. Координатные функции типа 2 не противоречат этому условию. Результаты расчета можно считать вполне удовлетворительными. Перерезывающая сила  $Q_k(1)$ , соответствующая функциям типа 3, на конце балки обращается в нуль. И тем не менее, погрешность в значениях  $\omega_r$  невелика, а в некоторых случаях она даже ниже, чем при использовании функций типа 2.

Таблица 3

Число членов ряда $m$	Тип функций	$\gamma_1$	$\varepsilon_1, \%$	$\gamma_2$	$\varepsilon_2, \%$	$\gamma_3$	$\varepsilon_3, \%$	$\gamma_4$	$\varepsilon_4, \%$
1	2	2,9998	3,75	–	–	–	–	–	–
	3	2,9088	0,61	–	–	–	–	–	–
2	2	2,8929	0,06	14,908	4,75	–	–	–	–
	3	2,8919	0,02	14,323	0,64	–	–	–	–
3	2	2,8927	0,05	14,607	2,63	64,675	4,86	–	–
	3	2,8919	0,02	14,323	0,64	61,625	0,01	–	–
4	2	2,8916	0,01	14,279	0,33	63,810	3,45	111,32	16,1
	3	2,8914	0	14,245	0,09	61,682	0	96,996	1,18
6	3	2,8913		14,232		61,681		95,858	

В таблице 3 приведены результаты расчета для случая, когда груз расположен в среднем сечении балки. В последней строке таблицы приведены значения  $\gamma_r$  для первых четырех частот колебаний, полученные с использованием

функций типа 3 при шести членах ряда (2.24). Относительно этих величин подсчитана погрешность  $\varepsilon_r$ <sup>1</sup>

Из таблицы видно, что в рассматриваемой задаче функции типа 3 (формы собственных колебаний консольной балки) «работают» значительно лучше. Это можно, по-видимому, объяснить тем, что эти функции обеспечивают равенство нулю перерезывающей силы на конце балки.

2.3.4. Изложим конспективно *определение частот крутильных колебаний тонкостенной конструкции переменного сечения*, представленной на рис. 2.5. Толщину оболочки  $h$  будем считать постоянной. Размеры панелей на расстоянии  $\xi = x/l$  от начала координат определяются соотношениями:

$$a(\xi) = a(1 - \xi/2), \quad b(\xi) = b(1 - \xi/2).$$

Погонный массовый момент инерции равен

$$I_{m0} = \rho I_p = \rho(I_x + I_y) = \rho h [a(\xi) + b(\xi)]^3 / 6,$$

где  $\rho$  - плотность материала, а геометрическая жесткость на кручение определяется как для тонкостенной конструкции с однозамкнутым сечением по формуле (1.7), что дает

$$I_{кр} = 2ha^2(\xi)b^2(\xi)/[a(\xi) + b(\xi)].$$

Обозначим через  $I_{m0}^*$  и  $I_{кр}^*$  значения соответствующих параметров при  $\xi = 0$  и запишем

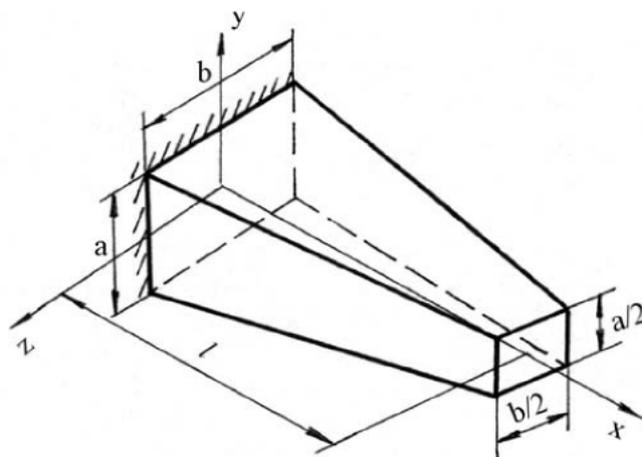


Рис. 2.5

$$I_{m0}(\xi)/I_{m0}^* = (1 - \xi/2)^3, \quad I_{кр}(\xi)/I_{кр}^* = (1 - \xi/2)^3.$$

Выражения для элементов матриц  $[A]$  и  $[B]$  обобщенной проблемы собственных значений (2.29) определялись в соответствии с (2.34).

Расчеты на ПЭВМ были выполнены с использованием координатных функций удовлетворяющих геометрическим и статическим граничным условиям. Это степенные функции  $v_k(\xi) = \xi^k - \frac{k}{k+1}\xi^{k+1}$  типа 4 и функции типа 5

<sup>1</sup> При точном решении задачи значение  $\gamma_1$  получено И.С. Ахмедьяновым и равно 2,8912

$v_k(\xi) = \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} \xi$ , представляющие собой формы собственных крутильных колебаний стержня постоянного сечения, закрепленного при  $\xi = 0$ .

Результаты расчета представлены в таблице 4, где через  $\gamma_r$  обозначен коэффициент формулы

$$\omega_r = \gamma_r \sqrt{GI_{кр}^* / (I_{m0}^* l^2)}. \quad (2.44)$$

Таблица 4

Число членов ряда $m$	Тип функций	$\gamma_1$	$\varepsilon_1, \%$	$\gamma_2$	$\varepsilon_2, \%$	$\gamma_3$	$\varepsilon_3, \%$	$\gamma_4$	$\varepsilon_4, \%$
1	4	2,3826	4,80	–	–	–	–	–	–
	5	2,3229	2,17	–	–	–	–	–	–
2	4	2,2747	0,05	5,5232	9,49	–	–	–	–
	5	2,2747	0,05	5,1246	1,59	–	–	–	–
3	4	2,2734	0	5,0459	0,03	9,1601	13,6	–	–
	5	2,2745	0,04	5,0468	0,05	8,1588	1,18	–	–
4	4	2,2734	0	5,0458	0,03	8,0961	0,41	13,243	30,4
	5	2,2646	0	5,0466	0,05	8,0671	0,05	11,252	0,90
5	5	2,2735	0	5,0445	0	8,0663	0,04	11,153	0,02
6	5	2,2734	–	0,0443	–	8,0633	–	11,151	–

Процент погрешности решения  $\varepsilon_r$  указан по сравнению с данными последней строки таблицы, полученными с использованием функций типа 5 при шести членах ряда (2.24).

Анализ таблицы показывает, что очень хорошие результаты получаются, когда в качестве координатных функций принимаются формы собственных крутильных колебаний стержня постоянного сечения (функции типа 5). Расчет по функциям типа 4 дает хорошие результаты для частот колебаний, номер которых меньше числа членов ряда, хотя при этом и удовлетворяются все граничные условия.

Приведенные примеры расчета показывают, что при определении частот собственных колебаний стержней переменного сечения методом Рэлея-Ритца, хотя, в принципе, и достаточно, чтобы координатные функции удовлетворяли только геометрическим граничным условиям, но наилучшие результаты получаются, если в качестве координатных функций (из всех рассмотренных) используются формы собственных изгибных или крутильных колебаний стержней постоянного сечения.

## 2.4. Определение частот и форм собственных колебаний стержней методом Бубнова-Галеркина

Дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний балки переменного сечения на основании (1.31) имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI_z(x) \frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial x^2} \right] + m_0(x) \frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Имея в виду, что собственные колебания носят гармонический характер, будем отыскивать частное решение этого уравнения в форме

$$u_{yr}(x, t) = u_r(x) \sin(\omega_r t + \varphi_r)$$

и получим относительно  $u_r(x)$  дифференциальное уравнение

$$[EI_z(x) u_r''(x)]'' - \omega_r^2 m_0(x) u_r(x) = 0. \quad (2.45)$$

Последнее равенство можно рассматривать как дифференциальное уравнение равновесия, записанное относительно амплитудных значений перемещений при колебаниях с собственной частотой  $\omega_r$ . Представим приближенное решение уравнения (2.45) в виде усеченного ряда

$$u_r(x) = \sum_{k=1}^m a_k v_k(x), \quad (2.46)$$

где  $a_k$  - подлежащие отысканию постоянные,  $v_k(x)$  - наперед выбираемые координатные функции, которые должны удовлетворять не только геометрическим, но в обязательном порядке и статическим граничным условиям. Подставим (2.46) в левую часть (2.45):

$$\left[ EI_z(x) \sum_{k=1}^m a_k v_k''(x) \right]'' - \omega_r^2 m_0(x) \sum_{k=1}^m a_k v_k(x).$$

Следуя теперь процедуре метода Бубнова-Галеркина, умножим последнее равенство на  $v_n(x)$  ( $n = \overline{1, m}$ ), проинтегрируем по длине балки и приравняем нулю:

$$\int_0^l v_n(x) \left[ EI_z(x) \sum_{k=1}^m a_k v_k''(x) \right]'' dx - \omega^2 \int_0^l m_0(x) v_n(x) \sum_{k=1}^m a_k v_k(x) dx = 0.$$

Индекс  $r$  при  $\omega^2$  в последнем равенстве опущен. Умножим его на  $l^3/EI_z^*$  и, заменив интеграл от суммы суммой интегралов, запишем

$$\sum_{k=1}^m a_k \frac{l^3}{EI_z^*} \int_0^l v_n(x) [I_z(x) v_k''(x)]'' dx - \frac{m_0^* l^4 \omega^2}{EI_z^*} \sum_{k=1}^m a_k \frac{1}{m_0^* l} \int_0^l m_0(x) v_n(x) v_k(x) dx = 0.$$

Здесь, как и ранее,  $EI_z^*$ ,  $m_0^*$  - изгибная жесткость и погонная масса в некотором фиксированном сечении балки. Перейдем в интегралах к безразмерным координатам  $\xi = x/l$  и введем обозначения

$$\lambda = \frac{m_0^* l^4 \omega^2}{EI_z^*}, \quad \omega^2 = \frac{EI_z^* \lambda}{m_0^* l^4}, \quad (2.47)$$

$$C_{nk} = \frac{1}{I_z^*} \int_0^1 v_n(\xi) [I_z(\xi) v_k''(\xi)]'' d\xi, \quad B_{nk} = \frac{1}{m_0^*} \int_0^1 m_0(\xi) v_n(\xi) v_k(\xi) d\xi. \quad (2.48)$$

где штрихами обозначены производные по  $\xi$ . В итоге приходим к системе однородных линейных уравнений относительно параметров  $a_k$ :

$$\sum_{k=1}^m (C_{nk} - \lambda B_{nk}) a_k = 0 \quad (n = \overline{1, m}). \quad (2.49)$$

Эту систему уравнений можно, как и в методе Рэлея-Ритца, привести к матричной формулировке обобщенной проблемы собственных значений

$$([C] - \lambda[B])[a] = 0, \quad (2.50)$$

где  $[a] = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , а матрицы  $[C]$  и  $[B]$  размером  $m \times m$  имеют вид

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots \\ C_{21} & C_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Матрица  $[B]$  симметричная, ее элементы имеют такую же структуру, как и в методе Рэлея-Ритца. Из записи (2.48) следует, что коэффициенты  $C_{nk}$  и  $C_{kn}$  подсчитываются по разным формулам, так что формально  $C_{nk} \neq C_{kn}$ , и матрица  $[C]$  не является симметричной. В действительности это не так. Для доказательства сказанного проинтегрируем выражение (2.48) для  $C_{nk}$  дважды по частям:

$$\begin{aligned} I_z^* C_{nk} &= \int_0^1 v_n(\xi) [I_z(\xi) v_k''(\xi)]'' d\xi = v_n(\xi) [I_z(\xi) v_k''(\xi)]' \Big|_0^1 - \int_0^1 v_n'(\xi) [I_z(\xi) v_k''(\xi)]' d\xi = \\ &= v_n(\xi) [I_z(\xi) v_k''(\xi)]' \Big|_0^1 - v_n'(\xi) I_z(\xi) v_k''(\xi) \Big|_0^1 + \int_0^1 I_z(\xi) v_n''(\xi) v_k''(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\mathcal{G}_k(\xi)$ ,  $M_k(\xi)$ ,  $Q_k(\xi)$  соответственно угол поворота сечения балки, изгибающий момент и перерезывающую силу при перемещении  $v_k(\xi)$ :

$$\mathcal{G}_k(\xi) = v_k'(\xi)/l, \quad M_k(\xi) = EI_z(\xi) v_k''(\xi)/l^2, \quad Q_k(\xi) = [EI_z(\xi) v_k''(\xi)]' / l^3.$$

Тогда можно записать:

$$I_z^* C_{nk} = \frac{l^3}{E} \left[ v_n(\xi) Q_k(\xi) \Big|_0^1 - \mathcal{G}_n(\xi) M_k(\xi) \Big|_0^1 \right] + \int_0^1 I_z(\xi) v_n''(\xi) v_k''(\xi) d\xi.$$

Если функция  $v_k(\xi)$  удовлетворяет геометрическим и статическим граничным условиям балки, то при любых условиях ее закрепления первые два слагаемых последнего равенства обращаются в нуль. Следовательно,

$$I_z^* C_{nk} = \int_0^1 I_z(\xi) v_n''(\xi) v_k''(\xi) d\xi = I_z^* A_{nk},$$

где  $A_{nk}$  - соответствующие элементы симметричной матрицы  $[A]$  метода Рэлея-Ритца.

Таким образом, мы доказали, что матрица  $[C]$  при решении задачи методом Бубнова-Галеркина - симметричная.

Рассмотрим теперь приложение метода Бубнова-Галеркина к определению частот и форм крутильных колебаний стержня переменного сечения. В соответствии с (1.5) дифференциальное уравнение собственных колебаний подобно стержня имеет вид

$$I_{m_0}(x) \frac{\partial^2 \mathcal{G}_x(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ GI_{кр}(x) \frac{\partial \mathcal{G}_x(x,t)}{\partial x} \right] = 0. \quad (2.52)$$

Представим частное решение дифференциального уравнения в виде

$$\mathcal{G}_{rx}(x,t) = \mathcal{G}_r(x) \sin(\omega_r t + \varphi)$$

и после подстановки в (2.52) получим

$$\left[ GI_{кр}(x) \mathcal{G}'(x) \right]' + \omega_r^2 I_{m_0}(x) \mathcal{G}(x) = 0.$$

Здесь  $\mathcal{G}_r(x)$  представляет собой амплитудные значения угла закручивания при колебаниях с частотой  $\omega_r$ . Будем отыскивать приближенное решение последнего уравнения, как и ранее, в виде усеченного ряда

$$\mathcal{G}_r(x) = \sum_{k=1}^m a_k v_k(x).$$

При этом координатные функции  $v_k(x)$  представляют собой опять же углы закручивания и должны удовлетворять геометрическим и статическим граничным условиям при кручении стержней. Применяя далее процедуру метода Бубнова-Галеркина аналогично случаю поперечных колебаний, придем к обобщенной проблеме собственных значений (2.50). Элементы  $C_{nk}$  и  $B_{nk}$  матриц (2.51) в безразмерных координатах  $\xi = x/l$ , а также параметр  $\lambda$  оказываются равными

$$C_{nk} = -\frac{1}{I_z^*} \int_0^1 v_n(\xi) \left[ I_{кр}(\xi) v_k'(\xi) \right]' d\xi, \quad B_{nk} = \frac{1}{I_z^*} \int_0^1 I_{m_0}(\xi) v_n(\xi) v_k(\xi) d\xi, \quad (2.53)$$

$$\lambda = I_{m_0}^* l^2 \omega^2 / (GI_{кр}^*), \quad \omega^2 = GI_{кр}^* \lambda / (I_{m_0}^* l^2). \quad (2.54)$$

Здесь по-прежнему  $GI_{кр}^*$ ,  $I_{m_0}^*$  - соответственно жесткость на кручение и погонный массовый момент инерции стержня в некотором фиксированном сечении. Коэффициенты  $B_{nk}$  имеют формально такой же вид (2.34), как и при решении задачи методом Рэлея-Ритца, и образуют симметричную матрицу  $[B]$ . Что же касается коэффициентов  $C_{nk}$ , то после интегрирования (2.53) по частям получим

$$I_{кр}^* C_{nk} = -v_n(\xi) I_{кр}(\xi) v_k(\xi) \Big|_0^1 + \int_0^1 I_{кр}(\xi) v_n'(\xi) v_k'(\xi) d\xi. \quad (2.55)$$

Имея в виду, что крутящий момент  $M_k$ , соответствующий углу закручивания  $v_k(\xi)$ , равен  $M_k(\xi) = GI_{кр} v_k'(\xi)/l$ , первое слагаемое правой части равенства (2.55) может быть приведено к виду  $[-lv_n(\xi) M_k(\xi)/G]_0^1$ . При любых усло-

виях закрепления стержня по торцам  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  это слагаемое обращается в нуль. Тогда

$$I_{\text{кр}}^* C_{nk} = \int_0^1 I_{\text{кр}}(\xi) v_n'(\xi) v_k'(\xi) d\xi = I_{\text{кр}}^* A_{nk}$$

где  $A_{nk}$  - элемент симметричной матрицы  $[A]$  (2.34) метода Рэлея-Ритца.

Следовательно, определение частот и форм собственных колебаний стержней методом Бубнова-Галеркина сводится к решению обобщенной проблемы собственных значений (2.50) с симметричными матрицами. После определения  $\lambda_r$  и соответствующих им векторов  $[a_r]$ , по формуле (2.54) находятся частоты, а по (2.30) формы собственных колебаний.

Что же касается результатов расчета по методу Бубнова-Галеркина, то они получаются такими же, как и по методу Рэлея-Ритца в случае использования при этом координатных функций, удовлетворяющих всем граничным условиям. Из рассмотренных в настоящем пособии - это функции типа 3, 4, и 5.

### 3. СОВМЕСТНЫЕ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРЫЛА

#### 3.1. Дифференциальные уравнения движения

Будем рассматривать колебания крыла большого удлинения, представив его расчетную модель в виде стержня переменного сечения.

Отнесем крыло к неподвижной системе координат  $x, y, z$ , причем ось  $x$  направим по главной центральной оси инерции редуцированного поперечного сечения (рис. 3.1). Ось  $y$  проходит через центр жесткости сечения, ось  $z$  направлена по размаху крыла. Изгибом крыла в направлении оси  $x$  будем пренебрегать ввиду того, что изгибная жесткость крыла относительно оси  $y$  намного больше, чем относительно оси  $x$ .

В предыдущих разделах при исследовании изгибных и крутильных колебаний мы неявно предполагали, что в каждом сечении центр масс и центр жесткости совпадают. У обычных же крыльев эти точки не совпадают, и в процессе колебаний будут иметь место одновременно деформации изгиба и деформации кручения, т.е. будут совершаться совместные изгибно-крутильные колебания.

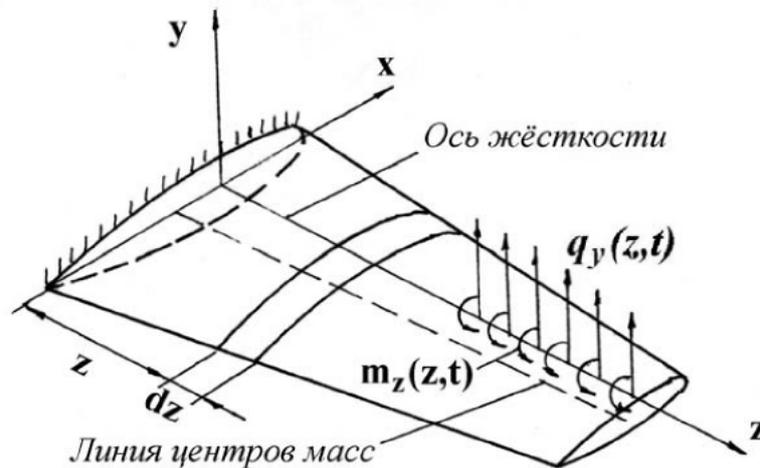


Рис. 3.1

Приращение внешней аэродинамической нагрузки, обусловленное колебаниями крыла, приведем к погонной нагрузке  $q_y(z,t)$ , распределенной вдоль оси жесткости, и погонному крутящему моменту  $m_z(z,t)$  относительно этой оси.

Для вывода дифференциальных уравнений движения выделим из крыла двумя сечениями, как показано на рис 3.1, бесконечно малый элемент длиной  $dz$ . Упругие и массовые силы, действующие на выделенный элемент, приведены на рис. 3.2.

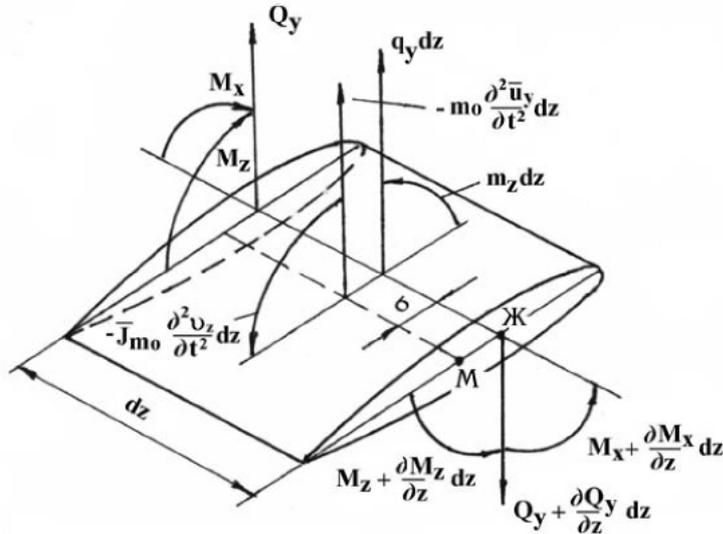


Рис. 3.2

Учтено, что перерезывающая сила  $Q_y$  проходит через центр жесткости Ж, а силы инерции проходят через центр масс М, вследствие чего в выражении для ускорения фигурирует перемещение этой точки  $\bar{u}_y$ . Через  $m_0 = m_0(z)$  обозначена по-прежнему погонная масса, а через  $\bar{I}_{m_0} = \bar{I}_{m_0}(z)$  - погонный массовый момент инерции относительно оси, проходящей через центры масс. За положительный угол закручивания крыла  $\vartheta_z = \vartheta_z(z, t)$  принят угол на кабрирование. Через  $\sigma = \sigma(z)$  обозначено расстояние между центром жесткости и центром масс. У реальных крыльев линия центров масс находится за осью жесткости, если отсчитывать от носка крыла.

В соответствии с принципом Д'Аламбера будем рассматривать выделенный отсек как находящийся в состоянии равновесия и приравняем нулю сумму проекций всех сил на ось  $y$  и сумму моментов относительно оси, проходящей через центры масс:

$$Q_y - \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial z} dz \right) + q_y dz - m_0 \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial t^2} dz = 0;$$

$$-M_z + \left( M_z + \frac{\partial M_z}{\partial z} dz \right) + m_z dz + \sigma \left( q_y - \frac{\partial Q_y}{\partial z} \right) dz - \bar{I}_{m_0} \frac{\partial^2 \vartheta_z}{\partial t^2} dz = 0.$$

Отсюда имеем

$$m_0 \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_y}{\partial z} = q_y, \quad (3.1)$$

$$\bar{I}_{m_0} \frac{\partial^2 \vartheta_z}{\partial t^2} - \frac{\partial M_z}{\partial z} - \sigma \left( q_y - \frac{\partial Q_y}{\partial z} \right) = m_z.$$

С учетом (3.1) последнее равенство приведем к виду

$$\bar{I}_{m_0} \frac{\partial^2 \vartheta_z}{\partial t^2} - m_0 \sigma \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial t^2} - \frac{\partial M_z}{\partial z} = m_z. \quad (3.2)$$

Крутящий момент равен  $M_z = GI_{\text{кр}}(z) \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z}$ , а для перерезывающей силы

справедлива зависимость  $Q_y = \frac{\partial}{\partial z} \left[ EI_x(z) \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right]$ , где  $u_y = u_y(z, t)$  - перемещение

центра жесткости. Подстановка этих выражений в (3.1), (3.2) приводит к зависимостям

$$m_0 \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI_x \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) = q_y,$$

$$\bar{I}_{m_0} \frac{\partial^2 \vartheta_z}{\partial t^2} - m_0 \sigma \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( GI_{\text{кр}} \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} \right) = m_z.$$

Здесь фигурируют перемещения как центра жесткости  $u_y$ , так и центра масс  $\bar{u}_y$ . Из рисунка 3.3 видно, что

$$\bar{u}_y = u_y - \sigma \vartheta_z. \quad (3.3)$$

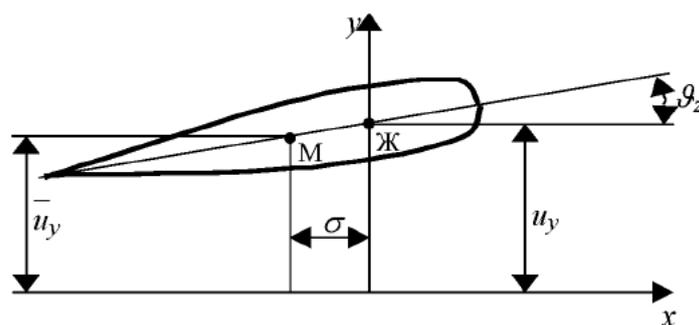


Рис. 3.3

Подставим (3.3) в последнее равенство и получим

$$\left. \begin{aligned} m_0 \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial t^2} - m_0 \sigma \frac{\partial^2 \vartheta_z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI_x \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) &= q_y; \\ \bar{I}_{m_0} \frac{\partial^2 \vartheta_z}{\partial t^2} - m_0 \sigma \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( GI_{\text{кр}} \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} \right) &= m_z, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

где  $I_{m_0} = \bar{I}_{m_0} + m_0 \sigma^2$  - погонный массовый момент инерции крыла относительно оси жесткости.

Мы получили систему дифференциальных уравнений совместных изгибно-крутильных колебаний крыла. Обратим внимание на то, что при  $\sigma = 0$  система распадается на два не связанных между собой дифференциальных уравнения, соответствующих изгибным и крутильным колебаниям.

### 3.2. Определение низших частот и форм собственных изгибно-крутильных колебаний крыла методом Бубнова-Галеркина

При отсутствии возмущающих сил система дифференциальных уравнений (3.4) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - m_0 \sigma \frac{\partial^2 \vartheta_z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI_x \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) &= 0; \\ I_{m_0} \frac{\partial^2 \vartheta_z}{\partial t^2} - m_0 \sigma \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( GI_{кр} \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Следуя работе [3] будем отыскивать приближенное решение этой системы уравнений в виде

$$\left. \begin{aligned} u_y(z, t) &= a \varphi(z) \sin(\omega t + \alpha); \\ \vartheta_z(z, t) &= b \psi(z) \sin(\omega t + \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

т.е. полагаем, что частоты изгибных и крутильных колебаний совпадают. К этому можно прийти из следующих соображений. Если совершаются изгибные колебания с частотой  $\omega$ , то, как видно из второго уравнения (3.5), момент от инерционных сил  $(-m_0 \sigma \partial^2 u_y / \partial t^2)$  будет возбуждать колебания кручения с той же частотой. Из первого же уравнения (3.5) следует, что при крутильных колебаниях с частотой  $\omega$  за счет силы инерции  $(-m_0 \sigma \partial^2 \vartheta_z / \partial t^2)$  будут возбуждаться изгибные колебания также с частотой  $\omega$ .

Функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , которыми задаемся, должны удовлетворять геометрическим и статическим граничным условиям задачи:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(l) = 0, \quad \varphi'''(l) = 0; \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(l) = 0. \quad (3.7)$$

где через  $l$  обозначена длина консоли крыла.

Подстановка (3.6) в левые части (3.5) дает

$$\left. \begin{aligned} -a \omega^2 m_0 \varphi(z) + b \omega^2 m_0 \sigma \psi(z) + a [EI_x \varphi''(z)]''; \\ -b \omega^2 I_{m_0} \psi(z) + a \omega^2 m_0 \sigma \varphi(z) - b [GI_{кр} \psi'(z)]' \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Следуя процедуре метода Бубнова-Галеркина, умножим первое из выражений (3.8) на  $\varphi(z)$ , второе – на  $\psi(z)$ , проинтегрируем от 0 до  $l$  и результат приравняем нулю

$$\left. \begin{aligned} -a\omega^2 \int_0^l m_0 \varphi^2(z) dz + b\omega^2 \int_0^l m_0 \sigma \varphi(z) \psi(z) dz + a \int_0^l \varphi(z) [EI_x \varphi''(z)]'' dz &= 0; \\ -b\omega^2 \int_0^l I_{m_0} \psi^2(z) dz + a\omega^2 \int_0^l m_0 \sigma \varphi(z) \psi(z) dz - b \int_0^l \psi(z) [GI_{кр} \psi'(z)]' dz &= 0. \end{aligned} \right\} (3.9)$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \int_0^l \varphi(z) [EI_x(z) \varphi''(z)]'' dz, \quad B_1 = \int_0^l m_0 \varphi^2(z) dz, \quad A_2 = - \int_0^l \psi(z) [GI_{кр}(z) \psi'(z)]' dz; \\ B_2 &= \int_0^l I_{m_0} \psi^2(z) dz, \quad C_{12} = \int_0^l m_0(z) \sigma(z) \varphi(z) \psi(z) dz. \end{aligned} \right\} (3.10)$$

Если выражения для  $A_1$  и  $A_2$  проинтегрировать по частям и учесть граничные условия (3.7), то, как это было показано для подобных зависимостей в п. 2.4, они могут быть приведены к более простому виду:

$$A_1 = \int_0^l EI_x(z) [\varphi''(z)]^2 dz, \quad A_2 = \int_0^l GI_{кр}(z) [\psi'(z)]^2 dz. \quad (3.11)$$

С учетом принятых обозначений равенства (3.9) запишутся как

$$\left. \begin{aligned} (A_1 - \omega^2 B_1)a + \omega^2 C_{12}b &= 0; \\ \omega^2 C_{12}a + (A_2 - \omega^2 B_2)b &= 0. \end{aligned} \right\} (3.12)$$

Мы получили относительно параметров  $a$  и  $b$  систему линейных алгебраических однородных уравнений, нетривиальное решение которой будет иметь место при равенстве нулю определителя системы, т.е.

$$(A_1 - \omega^2 B_1)(A_2 - \omega^2 B_2) - \omega^4 C_{12}^2 = 0. \quad (3.13)$$

Введем обозначения

$$P = B_1 B_2 - C_{12}^2, \quad Q = A_1 B_2 + A_2 B_1, \quad R = A_1 A_2. \quad (3.14)$$

и, представив (3.13) в виде

$$P\omega^4 - Q\omega^2 + R = 0,$$

получим два значения квадрата частоты колебаний

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{Q \mp \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}. \quad (3.15)$$

В дальнейшем будем считать  $\omega_1$  низшей частотой колебаний, а  $\omega_2$  - высшей частотой.

Если центры масс совпадают с осью жесткости ( $\sigma = 0$ ), то  $C_{12} = 0$ , и на основании (3.13) получим

$$A_1 - \omega^2 B_1 = 0, \quad A_2 - \omega^2 B_2 = 0.$$

Первое из этих равенств позволяет определить приближенное значение частоты чисто изгибных колебаний  $\omega_{\text{изг}}$ , второе - чисто крутильных колебаний  $\omega_{\text{кр}}$ :

$$\omega_{\text{изг}}^2 = A_1/B_1, \quad \omega_{\text{кр}}^2 = A_2/B_2. \quad (3.16)$$

Для реальных крыльев частота изгибных колебаний меньше частоты крутильных колебаний, т.е.  $\omega_{\text{изг}} < \omega_{\text{кр}}$ .

Представим теперь равенство (3.13) в виде

$$(A_1/B_1 - \omega^2)(A_2/B_2 - \omega^2) = C_{12}^2 \omega^4 / (B_1 B_2)$$

и с учетом (3.16) запишем

$$(\omega_{\text{изг}}^2 - \omega^2)(\omega_{\text{кр}}^2 - \omega^2) = C_{12}^2 \omega^4 / (B_1 B_2). \quad (3.17)$$

Из формул (3.10) следует, что  $B_1 > 0$  и  $B_2 > 0$ . Отсюда получим  $[C_{12}^2 \omega^4 / (B_1 B_2)] > 0$ . Тогда равенство (3.17) возможно при следующих условиях:

$$(\omega_{\text{изг}}^2 - \omega^2) > 0 \text{ и } (\omega_{\text{кр}}^2 - \omega^2) > 0 \quad (3.18)$$

или

$$(\omega_{\text{изг}}^2 - \omega^2) < 0 \text{ и } (\omega_{\text{кр}}^2 - \omega^2) < 0. \quad (3.19)$$

Положив в (3.18)  $\omega = \omega_1$ , приходим к выводу, что  $\omega_1 < \omega_{\text{изг}}$ , а положив в (3.19)  $\omega = \omega_2$ , получаем  $\omega_2 > \omega_{\text{кр}}$ . Таким образом, имеет место неравенство

$$\omega_1 < \omega_{\text{изг}} < \omega_{\text{кр}} < \omega_2 \quad (3.20)$$

т.е. низшая частота совместных изгибно-крутильных колебаний  $\omega_1$  меньше частоты чисто изгибных колебаний, а высшая частота  $\omega_2$  больше частоты чисто крутильных колебаний.

Положим в первом равенстве (3.12)  $\omega = \omega_1$ , а во втором равенстве  $\omega = \omega_2$  и преобразуем их к виду

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{\omega_1^2 B_1 - A_1}{C_{12} \omega_1^2}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{\omega_2^2 B_2 - A_2}{C_{12} \omega_2^2}. \quad (3.21)$$

Задавшись значениями  $a_1$  и  $b_2$ , можно подсчитать коэффициенты  $a_2$  и  $b_1$ .

Теперь на основании (3.6) запишем

$$\left. \begin{aligned} u_y(z, t) &= \varphi(z) [a_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)] ; \\ \vartheta_z(z, t) &= \psi(z) [b_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + b_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)] . \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

С учетом (3.16) соотношения (3.21) могут быть представлены в форме

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{B_1(\omega_1^2 - \omega_{\text{изг}}^2)}{C_{12}\omega_1^2}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{B_2(\omega_2^2 - \omega_{\text{кр}}^2)}{C_{12}\omega_2^2}.$$

Из (3.10) видно, что при положительных функциях  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  коэффициент  $C_{12} > 0$ . Тогда, имея в виду неравенство (3.20), приходим к выводу, что  $b_1/a_1 < 0$ ,  $a_2/b_2 > 0$ . Это значит, что при частоте  $\omega_1$  колебания изгиба и кручения происходят в противофазе (рис. 3.4,а), а при частоте  $\omega_2$  колебания изгиба и кручения синфазны (рис. 3.4,б).

Подчеркнем еще раз, что, задавшись функциями  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  и применив метод Бубнова-Галеркина, мы получаем приближенные значения частот колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Ре-

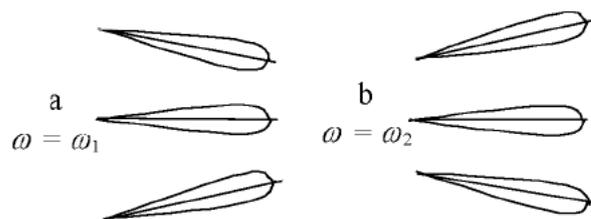


Рис. 3.4

зультаты можно уточнить, если одновременно воспользоваться мето-

дом последовательных приближений. Для этого выражения (3.8) приравняем нулю и представим их в виде

$$\left. \begin{aligned} [EI_x(z)\varphi_{k+1}''(z)]'' &= \omega_{1,k}^2 [m_0(z)\varphi_k(z) - (b_1/a_1)_k m_0(z)\sigma(z)\psi_k(z)]; \\ [GI_{\text{кр}}(z)\psi_{k+1}'(z)]' &= -\omega_{2,k}^2 [I_{m_0}(z)\psi_k(z) - (a_2/b_2)_k m_0(z)\sigma(z)\varphi_k(z)]. \end{aligned} \right\} (3.23)$$

Здесь  $k$  - номер приближения.

Пусть нам известно  $k$ -тое приближение функций  $\varphi_k(z)$ ,  $\psi_k(z)$ . Дальнейший расчет ведется в следующей последовательности.

1. Вычисляются численным интегрированием по (3.10), (3.11) коэффициенты  $A_{1,k}$ ,  $B_{1,k}$ ,  $A_{2,k}$ ,  $B_{2,k}$ ,  $C_{12,k}$ .

2. По формуле (3.15) с учетом (3.14) определяются частоты колебаний  $\omega_{1,k}$ ,  $\omega_{2,k}$ .

3. По (3.21) подсчитываются значения  $(b_1/a_1)_k$ ,  $(a_2/b_2)_k$ .

4. Найденные величины подставляются в правые части дифференциальных уравнений (3.23). Выполняется численное интегрирование этих уравнений с учетом граничных условий (3.7) и определяются в  $(k+1)$ -ом приближении функции  $\varphi_{k+1}(z)$ ,  $\psi_{k+1}(z)$ .

Расчет продолжается до тех пор, пока частоты колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  последнего приближения не совпадут с предыдущим.

В качестве исходных функций  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$  удобно задать формы низшего тона изгибных и крутильных колебаний соответствующим образом закрепленного стержня постоянного сечения (см. п. 1.1 и п. 1.2).

Числовые расчеты и эксперимент показывают [2,4], что с частотой  $\omega_1$  совершаются преимущественно изгибные колебания, а с частотой  $\omega_2$  - преимущественно крутильные колебания, т.е.  $b_1/a_1$  и  $a_2/b_2$  - малые величины. Поэтому частоту  $\omega_1$  иногда условно называют частотой совместных изгибных колебаний, а  $\omega_2$  - частотой совместных крутильных колебаний.

### 3.3. Определение частот и форм собственных совместных изгибно-крутильных колебаний методом Рэлея-Ритца

Поскольку колебания изгиба и кручения совершаются с одинаковыми частотами, представим разложение перемещений  $u_y(z,t)$ ,  $\vartheta_z(z,t)$  по формам собственных колебаний в виде

$$u_y(z,t) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(z)q_r(t), \quad \vartheta_z(z,t) = \sum_{r=0}^{\infty} \vartheta_r(z)q_r(t).$$

В дальнейшем нам потребуются перемещения центров масс

$$\bar{u}_y(z,t) = u_y(z,t) - \sigma(z)\vartheta_z(z,t),$$

которые представим также разложением

$$\bar{u}_y(z,t) = \sum_{r=0}^{\infty} \bar{u}_r(z)q_r(t),$$

где

$$\bar{u}_r(z) = u_r(z) - \sigma(z)\vartheta_r(z). \quad (3.24)$$

Рассматривая вариационный принцип Гамильтона применительно к движению по формам собственных колебаний с частотой  $\omega_r$ , придем, как показано в п. 2.3, к условию  $\delta\Phi = 0$ , где

$$\Phi = \bar{U}_r - \frac{1}{2}\omega_r^2 M_r.$$

Здесь  $\bar{U}_r$  - потенциальная энергия при деформациях, соответствующих формам колебаний  $u_r(z)$  и  $\vartheta_r(z)$ :

$$\bar{U}_r = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x(z) [u_r''(z)]^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l GI_{кр}(z) [\vartheta_r'(z)]^2 dz. \quad (3.25)$$

Для обобщенной массы  $M_r$  в соответствии с (1.70), (1.72) имеем

$$M_r = \int_0^l m_0(z) \bar{u}_r^2(z) dz + \int_0^l \bar{I}_{m_0}(z) \mathcal{G}_r^2(z) dz.$$

Подчеркнем еще раз, что  $\bar{u}_r(z)$  соответствует перемещениям центров масс, а  $\bar{I}_{m_0}$  - погонный момент инерции крыла относительно линии центров масс.

Подставив в последнее равенство  $\bar{u}_r(z)$  согласно (3.24), получим

$$M_r = \int_0^l m_0(z) u_r^2(z) dz - 2 \int_0^l m_0(z) \sigma(z) u_r(z) \mathcal{G}_r(z) dz + \int_0^l I_{m_0}(z) \mathcal{G}_r^2(z) dz,$$

где  $I_{m_0}(z) = \bar{I}_{m_0}(z) + m_0(z) \sigma^2(z)$  - погонный массовый момент инерции крыла относительно оси жесткости.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} \int_0^l EI_x(z) [u_r''(z)]^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l GI_{кр}(z) [\mathcal{G}_r'(z)]^2 dz - \\ & - \frac{1}{2} \omega_r^2 \left[ \int_0^l m_0(z) u_r^2(z) dz - 2 \int_0^l m_0(z) \sigma(z) u_r(z) \mathcal{G}_r(z) dz + \int_0^l I_{m_0}(z) \mathcal{G}_r^2(z) dz \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Приближенное решение будем отыскивать в виде усеченных рядов

$$u_r(z) = \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(z), \quad \mathcal{G}_r(z) = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^m b_k \psi_k(z), \quad (3.27)$$

где координатные функции  $\varphi_k(z)$ ,  $\psi_k(z)$  должны удовлетворять геометрическим граничным условиям. Если при этом удовлетворяются и статические граничные условия, то решение будет сходиться быстрее. Множитель  $1/l$  в выражении для  $\mathcal{G}_r(z)$  введен для того, чтобы коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  имели одинаковую размерность.

Подставим (3.27) в (3.26):

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} \int_0^l EI_x(z) \left[ \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k''(z) \right]^2 dz + \frac{1}{2l^2} \int_0^l GI_{кр}(z) \left[ \sum_{k=1}^m b_k \psi_k'(z) \right]^2 dz - \\ & - \frac{1}{2} \omega_r^2 \left\{ \int_0^l m_0(z) \left[ \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(z) \right]^2 dz - \frac{2}{l} \int_0^l m_0(z) \sigma(z) \left[ \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(z) \right] \left[ \sum_{k=1}^m b_k \psi_k(z) \right] dz + \right. \\ & \left. + \frac{1}{l^2} \int_0^l I_{m_0}(z) \left[ \sum_{k=1}^m b_k \psi_k(z) \right]^2 dz \right\}. \end{aligned}$$

После интегрирования получим

$$\Phi = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots, b_m).$$

Равенство нулю вариации  $\delta\Phi$  запишется в виде

$$\delta\Phi = \sum_{n=1}^m \frac{\partial\Phi}{\partial a_n} \delta a_n + \sum_{n=1}^m \frac{\partial\Phi}{\partial b_n} \delta b_n = 0.$$

Поскольку  $\delta a_n, \delta b_n$  - произвольные вариации, то должно иметь место

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_n} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial b_n} = 0 \quad (n = \overline{1, m}).$$

Дифференцирование  $\Phi$  по  $a_n$  и  $b_n$  дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial a_n} = & \int_0^l EI_x(z) \varphi_n''(z) \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k''(z) dz - \omega^2 \left[ \int_0^l m_0(z) \varphi_n(z) \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(z) dz - \right. \\ & \left. - \int_0^l m_0(z) \bar{\sigma}(z) \varphi_n(z) \sum_{k=1}^m b_k \psi_k(z) dz \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial b_n} = & \frac{1}{l^2} \int_0^l GI_{кр}(z) \psi_n'(z) \sum_{k=1}^m b_k \psi_k'(z) dz - \omega^2 \left[ \frac{1}{l^2} \int_0^l I_{m_0}(z) \psi_n(z) \sum_{k=1}^m b_k \psi_k(z) dz - \right. \\ & \left. - \int_0^l m_0(z) \bar{\sigma}(z) \psi_n(z) \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(z) dz \right] = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы опустили индекс  $r$  при  $\omega^2$  и ввели безразмерный параметр  $\bar{\sigma}(z) = \sigma(z)/l$ . Введем, как и ранее, параметры  $I_x^*, I_{кр}^*, m_0^*, I_{m_0}^*$ , представляющие собой соответственно величины  $I_x(z), I_{кр}(z), m_0(z), I_{m_0}(z)$  в фиксированном сечении крыла. Умножим теперь последние два равенства на  $l^3/(EI_x^*)$ , заменим интегралы от сумм суммами интегралов и, перейдя к безразмерным координатам  $\xi = z/l$ , запишем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m a_k \int_0^1 \frac{I_x(\xi)}{I_x^*} \varphi_n''(\xi) \varphi_k''(\xi) d\xi - \frac{m_0^* l^4 \omega^2}{EI_x^*} \left[ \sum_{k=1}^m a_k \int_0^1 \frac{m_0(\xi)}{m_0^*} \varphi_n(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^m b_k \int_0^1 \frac{m_0(\xi)}{m_0^*} \bar{\sigma}(\xi) \varphi_n(\xi) \psi_k(\xi) d\xi \right] = 0, \\ & \sum_{k=1}^m b_k \frac{GI_{кр}^*}{EI_x^*} \int_0^1 \frac{I_{кр}(\xi)}{I_{кр}^*} \psi_n'(\xi) \psi_k'(\xi) d\xi - \frac{m_0^* l^4 \omega^2}{EI_x^*} \left[ \sum_{k=1}^m b_k \frac{I_{m_0}^*}{m_0^* l^2} \int_0^1 \frac{I_{m_0}(\xi)}{I_{m_0}^*} \psi_n(\xi) \psi_k(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^m a_k \int_0^1 \frac{m_0(\xi)}{m_0^*} \bar{\sigma}(\xi) \psi_n(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi \right] = 0, \quad (n = \overline{1, m}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} A_{nk} &= \int_0^1 \frac{I_x(\xi)}{I_x^*} \varphi_n''(\xi) \varphi_k''(\xi) d\xi, & \tilde{A}_{nk} &= \alpha \int_0^1 \frac{I_{кр}(\xi)}{I_{кр}^*} \psi_n'(\xi) \psi_k'(\xi) d\xi; \\ B_{nk} &= \int_0^1 \frac{m_0(\xi)}{m_0^*} \varphi_n(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi, & \tilde{B}_{nk} &= \beta \int_0^1 \frac{I_{m_0}(\xi)}{I_{m_0}^*} \psi_n(\xi) \psi_k(\xi) d\xi; \\ C_{nk} &= \int_0^1 \frac{m_0(\xi)}{m_0^*} \bar{\sigma}(\xi) \varphi_n(\xi) \psi_k(\xi) d\xi, & \tilde{C}_{nk} &= \int_0^1 \frac{m_0(\xi)}{m_0^*} \bar{\sigma}(\xi) \psi_n(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi, \end{aligned} \right\} (3.29)$$

$$\alpha = \frac{GI_{кр}^*}{EI_x^*}, \quad \beta = \frac{I_{m_0}^*}{m_0^* l^2}, \quad \lambda = \frac{m_0^* l^4}{EI_x^*} \omega^2, \quad \omega^2 = \frac{EI_x^*}{m_0^* l^4} \lambda = \frac{\beta GI_{кр}^*}{\alpha l_{m_0}^* l^2} \lambda. \quad (3.30)$$

Тогда система уравнений (3.28) для  $n = \overline{1, m}$  примет вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^m A_{nk} a_k - \lambda \left( \sum_{k=1}^m B_{nk} a_k - \sum_{k=1}^m C_{nk} b_k \right) &= 0; \\ \sum_{k=1}^m \tilde{A}_{nk} b_k - \lambda \left( \sum_{k=1}^m \tilde{B}_{nk} b_k - \sum_{k=1}^m \tilde{C}_{nk} a_k \right) &= 0. \end{aligned} \right\} (3.31)$$

Введем квадратные матрицы размером  $m \times m$

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix}, & [B] &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix}, & [C] &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots \\ C_{21} & C_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix} \\ [\tilde{A}] &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \dots \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix}, & [\tilde{B}] &= \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \dots \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix}, & [\tilde{C}] &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \dots \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и матрицы-столбцы  $[a] = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ,  $[b] = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ . При этом система однородных уравнений (3.31) может быть записана в следующей матричной форме:

$$\begin{aligned} [A][a] - \lambda([B][a] - [C][b]) &= [0], \\ [\tilde{A}][b] - \lambda([\tilde{B}][b] - [\tilde{C}][a]) &= [0]. \end{aligned}$$

Объединив эти два матричных уравнения в одно, приходим к обобщенной проблеме собственных значений с симметричными матрицами вида

$$\left( \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} B & -C \\ -C^T & \tilde{B} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [0]. \quad (3.32)$$

Из (3.24) видно, что  $\tilde{C}_{nk} = C_{kn}$ , вследствие чего  $[\tilde{C}] = [C]^T$ , где индекс "T" означает транспонирование матрицы. Это учтено в (3.32).

Из решения обобщенной проблемы (3.32) определяются  $2m$  собственных значения  $\lambda_r$ , через которые вычисляются по (3.30) частоты колебаний  $\omega_r$ , а также собственные векторы

$$[a_r] = \{a_{1r} a_{2r} \dots a_{kr} \dots a_{mr}\}, \quad [b_r] = \{b_{1r} b_{2r} \dots b_{kr} \dots b_{mr}\}.$$

После этого можно определить для каждой частоты  $\omega_r$  формы колебаний

$$u_r(z) = \sum_{k=1}^m a_{kr} \varphi_k(z), \quad \vartheta_r(z) = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^m b_{kr} \psi_k(z). \quad (3.33)$$

Если на крыле при  $z = z_j$  ( $j = \overline{1, q}$ ) расположены массивные грузы (например, двигатели), имеющие массы  $M_j$  и центральные массовые моменты инерции  $\bar{I}_{M_j}$ , то согласно (1.71), (1.72) обобщенная масса при колебаниях с частотой  $\omega_r$  будет равна

$$M_r = \int_0^l m_0(z) \bar{u}_r^2(z) dz + \int_0^l \bar{I}_{m_0} \vartheta_r^2(z) dz + \sum_{j=1}^q [M_j \bar{u}_r^2(z_j) + \bar{I}_{M_j} \vartheta_r^2(z_j)],$$

где  $\bar{u}_r(z_j)$ ,  $\vartheta_r(z_j)$  - перемещения центра масс  $j$ -того груза и его угол поворота, соответствующие формам колебаний  $u_r(z)$  и  $\vartheta_r(z)$ .

Обозначим через  $\sigma_j$  расстояние от центра масс груза до оси жесткости.

Тогда

$$\bar{u}_r(z_j) = u_r(z_j) - \sigma_j \vartheta_r(z_j), \quad \bar{I}_{M_j} = I_{M_j} - M_j \sigma_j^2,$$

где  $I_{M_j}$  - массовый момент инерции груза относительно оси жесткости.

Рассуждая далее аналогично предыдущему, получим для элементов матриц  $[B]$ ,  $[\tilde{B}]$ ,  $[C]$ ,  $[\tilde{C}]$  следующие выражения:

$$B_{nk} = \int_0^l \frac{m_0(\xi)}{m_0^*} \varphi_n(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^q \kappa_j \varphi_n(\xi_j) \varphi_k(\xi_j),$$

$$\tilde{B}_{nk} = \beta \int_0^l \frac{I_{m_0}(\xi)}{I_{m_0}^*} \psi_n(\xi) \psi_k(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^q \chi_j \psi_n(\xi_j) \psi_k(\xi_j),$$

$$C_{nk} = \tilde{C}_{kn} = \int_0^l \frac{m_0(\xi)}{m_0^*} \bar{\sigma}(\xi) \varphi_n(\xi) \psi_k(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^q \kappa_j \bar{\sigma}_j \varphi_n(\xi_j) \psi_k(\xi_j),$$

где

$$\bar{\sigma}_j = \sigma_j / l, \quad \kappa_j = M_j / (m_0^* l), \quad \chi_j = I_{M_j} / (m_0^* l^3).$$

Коэффициенты  $A_{nk}$  и  $\tilde{A}_{nk}$  подсчитываются по первым двум формулам (3.29), после чего расчет ведется по изложенному ранее алгоритму.

### 3.4. Приближенная качественная математическая модель изгибно-крутильного флаттера крыла в дозвуковом потоке

Флаттером называются самовозбуждающиеся колебания (автоколебания) тел в потоке газа или жидкости. Применительно к крылу явления флаттера тесно связаны с воздействием набегающего потока воздуха на колеблющееся крыло. Этой проблеме посвящена специальная литература, например, [2,4] и др. В настоящем пособии нет возможности детально рассматривать аэродинамику неустановившегося обтекания крыла, поэтому ограничимся лишь рассмотрением принципиальной картины явления [1,7].

Для упрощения задачи рассмотрим колебания в набегающем потоке воздуха отсека крыла длиной, равной единице, который будем считать абсолютно жестким. Влияние примыкающих к отсеку частей крыла будем моделировать упругой силой  $(-k_1 u_y)$ , проходящей через центр жесткости Ж (рис. 3.5), и упругим моментом  $(-k_2 \vartheta_z)$ , где  $u_y = u_y(t)$  - перемещение центра жесткости в направлении оси  $y$ ,  $\vartheta_z = \vartheta_z(t)$  - угол поворота сечения,  $k_1, k_2$  - соответствующие коэффициенты жесткости. Таким образом приходим к колебательной системе с двумя степенями свободы.

Большие трудности возникают при определении приращений аэродинамических сил, обусловленных движением крыла. В первом приближении можно воспользоваться гипотезой квазиустановившегося обтекания, в соответствии с которой аэродинамические силы можно вычислить как для неподвижного крыла, подставив в соответствующие формулы значения мгновенных углов атаки. В этом случае можно приращение погонной аэродинамической силы  $\Delta q_y^a$ , обусловленной поворотом рассматриваемого отсека в процессе колебаний на угол  $\vartheta_z$  и проходящей через фокус<sup>1</sup> сечения крыла (точка  $\Phi$  на рис. 3.5), определить по формуле

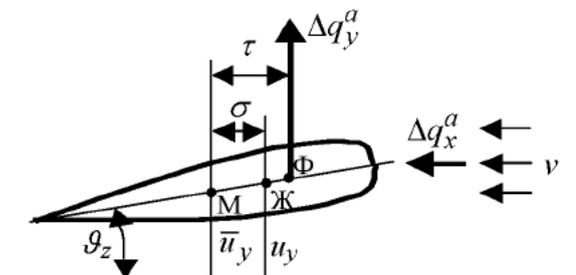


Рис. 3.5

<sup>1</sup> Фокусом сечения крыла называется точка, через которую проходит равнодействующая приращения аэродинамической нагрузки, обусловленного изменением угла атаки. При дозвуковом потоке она расположена примерно на расстоянии четверти хорды от носка профиля.

$$\Delta q_y^a = C_y^\alpha \frac{\rho v^2}{2} b \left( \vartheta_z - \frac{\dot{u}_y}{v} \right), \quad (3.34)$$

где  $\rho$  - плотность воздуха,  $v$  - скорость набегающего потока,  $b$  - хорда крыла,  $\dot{u}_y/v$  - уменьшение эффективного угла атаки, обусловленное вертикальным движением крыла.

Подчеркнем, однако, что формула (3.34) дает весьма грубое приближение, игнорируется влияние угловой скорости крыла  $\dot{\vartheta}_z$  на снос потока, не учитывается еще ряд факторов, которые не будем здесь оговаривать. Но для качественного анализа ею можно воспользоваться. Кроме того, ради упрощения задачи пренебрежем слагаемым  $\dot{u}_y/v$ , которое определяет аэродинамическое демпфирование вертикальных колебаний, и запишем

$$\Delta q_y^a = \gamma \vartheta_z v^2, \quad \gamma = C_y^\alpha \frac{\rho b}{2}. \quad (3.35)$$

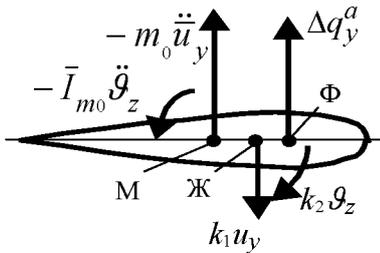


Рис. 3.6

Силы, действующие на выделенный отсек крыла, показаны на рис. 3.6. Приращением сил лобового сопротивления  $\Delta q_x^a$  пренебрегаем. В соответствии с принципом Д'Аламбера, приравняв нулю проекции всех сил на ось  $y$  и момент относительно центра масс  $M$ , запишем

$$\left. \begin{aligned} -m_0 \ddot{u}_y - k_1 u_y + \gamma v^2 \vartheta_z &= 0; \\ -\bar{I}_{m_0} \ddot{\vartheta}_z - k_2 \vartheta_z - k_1 \sigma u_y + \tau \gamma v^2 \vartheta_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Здесь  $\bar{u}_y$  - перемещение центра масс,  $\bar{I}_{m_0}$  - погонный массовый момент инерции отсека крыла относительно линии центров масс,  $\sigma$  - расстояние между центром масс и центром жесткости,  $\tau$  - расстояние от фокуса до центра масс. Учитывая, что  $u_y = \bar{u}_y + \sigma \vartheta_z$ , получим

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{\bar{u}}_y + k_1 \bar{u}_y + k_1 \sigma \vartheta_z - \gamma v^2 \vartheta_z &= 0, \\ \bar{I}_{m_0} \ddot{\vartheta}_z + k_2 \vartheta_z + k_1 \sigma \bar{u}_y + k_1 \sigma^2 \vartheta_z - \tau \gamma v^2 \vartheta_z &= 0. \end{aligned}$$

Разделим первое уравнение на  $m_0$ , второе - на  $\bar{I}_{m_0}$  и введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= k_1/m_0, & c_{12} &= (k_1 \sigma - \gamma v^2)/m_0; \\ c_{21} &= k_1 \sigma / \bar{I}_{m_0}, & c_{22} &= (k_2 + k_1 \sigma^2 - \tau \gamma v^2) / \bar{I}_{m_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Тогда система дифференциальных уравнений (3.36) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\bar{u}}_y + c_{11}\bar{u}_y + c_{12}\mathcal{G}_z &= 0; \\ \ddot{\mathcal{G}}_z + c_{21}\bar{u}_y + c_{22}\mathcal{G}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Будем отыскивать решение этой системы линейных дифференциальных уравнений в виде

$$\bar{u}_y = ae^{\lambda t}, \quad \mathcal{G}_z = be^{\lambda t}. \quad (3.39)$$

Подстановка в (3.38) дает

$$\begin{aligned} (c_{11} + \lambda^2)a + c_{12}b &= 0, \\ c_{21}a + (c_{22} + \lambda^2)b &= 0. \end{aligned}$$

Нетривиальное решение этой системы однородных алгебраических уравнений относительно  $a$  и  $b$  будет иметь место, если определитель системы равен нулю:

$$(c_{11} + \lambda^2)(c_{22} + \lambda^2) - c_{12}c_{21} = 0$$

или

$$\lambda^4 + (c_{11} + c_{22})\lambda^2 + c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0. \quad (3.40)$$

Решением биквадратного уравнения (3.40) будет

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2 - (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}}. \quad (3.41)$$

Если разность  $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$  отрицательна, то два корня (3.41) будут вещественными, два - мнимыми:

$$\lambda_{1,2} = \pm h, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega.$$

Частное решение (3.39), соответствующее  $\lambda_1 = h$  (т.е.  $e^{ht}$ ), характеризует монотонный уход системы от положения равновесия (рис. 3.7). Имеет место дивергенция крыла.

Если эта разность положительна и удовлетворяет неравенству

$$(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) > \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2,$$

то корни (3.41) можно привести к виду

$\lambda = \pm\sqrt{-\alpha \pm i\beta} = \pm(h \pm i\omega)$ , т.е. получаем две пары

комплексных сопряженных корней. Частные реше-

ния уравнений (3.38), соответствующие положительной вещественной части, имеют вид  $e^{(h \pm i\omega)t}$ , откуда

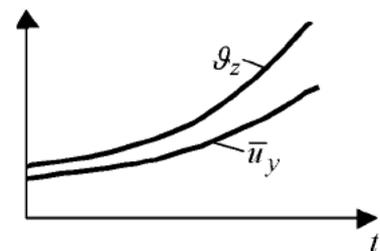


Рис. 3.7

$$\begin{aligned}\bar{u}_y &= e^{ht} (a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}) = A e^{ht} \sin(\omega t + \varphi_1), \\ \vartheta_z &= e^{ht} (b_1 e^{i\omega t} + b_2 e^{-i\omega t}) = B e^{ht} \sin(\omega t + \varphi_2).\end{aligned}\quad (3.42)$$

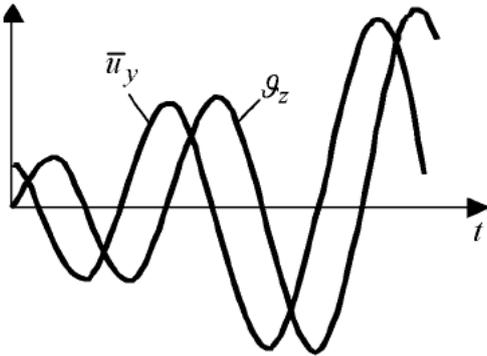


Рис. 3. 8

В рассмотренном случае имеют место колебания с одной частотой  $\omega$  и с возрастающей по времени амплитудой (рис. 3.8) - изгибно-крутильный флаттер. Колебания возрастают за счет энергии, вносимой извне набегающим потоком воздуха.

Из (3.42) видно, что в общем случае сдвиг фаз  $\varphi_2 \neq \varphi_1$ , т.е. перемещения  $\bar{u}_y$  и  $\vartheta_z$

не совпадают по фазе. Более строгие исследования показывают [2,4], что при флаттере между перемещениями изгиба и кручения всегда имеется сдвиг по фазе. Это показано на рис. 3.8.

Исследуем теперь случай, когда

$$0 < (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) < \left( \frac{c_{11} + c_{22}}{2} \right)^2. \quad (3.43)$$

Выражение (3.41) может быть при этом приведено к виду  $\lambda = \pm \sqrt{-\alpha \pm \beta}$ , где  $\beta < \alpha$ . Корни  $\lambda$  будут равны  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$ . Система будет совершать гармонические колебания с двумя частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Выражения для перемещений  $\bar{u}_y$  и  $\vartheta_z$  можно привести к виду

$$\begin{aligned}\bar{u}_y &= a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \vartheta_z &= b_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + b_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы рассматриваемая система после возмущения оставалась в окрестности положения равновесия, необходимо, чтобы разность  $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$  удовлетворяла двум неравенствам (3.43). При нарушении левого неравенства возникает дивергенция, а при нарушении правого - флаттер.

Заменив левое неравенство (3.43) на равенство

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0, \quad (3.44)$$

можно формально найти критическую скорость дивергенции  $v_{кр}^{\delta}$ . Подстановка (3.37) в (3.44) после преобразований дает

$$(\tau - \sigma)\gamma(v_{кр}^{\delta})^2 = k_2. \quad (3.45)$$

Обратим внимание на то, что в (3.45) отсутствуют инерционные параметры. Если правую и левую части этого равенства умножить на  $\vartheta_z$ , то придем к выводу, что при критической скорости дивергенции момент от аэродинамиче-

ских сил относительно оси жесткости равен моменту упругих сил. Дивергенция крыла относится к явлениям статической аэроупругости.

Заменив правое неравенство (3.43) на равенство, можно получить критическую скорость флаттера  $v_{кр}^{\phi}$ . Однако рассмотренная нами динамическая модель носит качественный характер и получить значения  $v_{кр}^{\phi}$  и  $v_{кр}^{\partial}$  не позволяет. Дело в том, что мы ввели в рассмотрение условные жесткостные характеристики  $k_1$  и  $k_2$ . Из сопоставления (3.38) с дифференциальным уравнением совместных изгибно-крутильных колебаний крыла (3.4) можно заключить, что  $k_1$  имеет

смысл  $\frac{\partial Q_y}{\partial z}$ , и  $k_2$  - смысл  $-\frac{\partial M_z}{\partial z}$ , но числовых значений  $k_1$  и  $k_2$  мы не знаем.

Детальный анализ показывает [2], что частоты совместных колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с ростом скорости сближаются, как показано на рис.3.9, и сходятся к единой частоте колебаний  $\omega$  при  $v = v_{кр}^{\phi}$ .

Для определения величины критической скорости флаттера можно в правые части системы дифференциальных уравнений совместных изгибно-крутильных колебаний крыла (3.4) подставить вместо  $q_y, m_z$  приращение погонных сил и моментов, подсчитанные по той или иной модели обтекания колеблющегося крыла. Далее отыскивается решение дифференциальных уравнений, соответствующее гармоническим колебаниям крыла с единой частотой, после чего по процедуре, изложенной в [2,4] и других литературных источниках, подсчитывается критическая скорость флаттера. При этом в качестве форм колебаний принимаются, как правило, формы собственных изгибно-крутильных колебаний крыла.

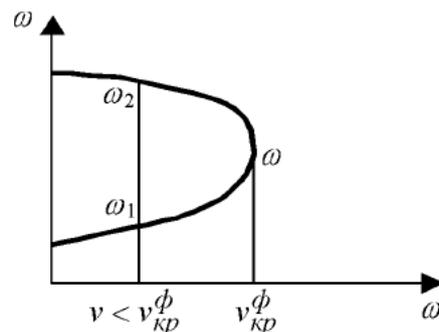


Рис. 3.9

— • —

Автор выражает искреннюю признательность доцентам Л.М. Савельеву и И.С. Ахмедьянову, внимательно просмотревшим рукопись настоящего пособия и сделавших ряд ценных замечаний, учет которых улучшил изложение материала. Автор выражает также признательность инженерам В.Н. Готовой и Л.К.Мещеряковой за большую помощь в компьютерном оформлении рукописи.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М: Высшая школа, 1980. 408 с.
2. Биспингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмен Р.Л. Аэроупругость: Пер.с англ. М: ИЛ, 1958. 799 с.
3. Воронович А.П. и др. Конструкция и прочность самолетов. Часть первая./Под ред. Гуреева Д.И. – М: ВВИА им. Жуковского, 1950. 496 с.
4. Гроссман Е.П., Пановко Я.Г. Упругие колебания частей самолета. М: Оборонгиз, 1947. 311 с.
5. Новацкий В. Динамика сооружений. Пер. с польск. – М: Госстройиздат, 1963. 376 с.
6. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М: Высшая школа, 1985. 392 с.
7. Пановко Я.Г., Губанова И.И, Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. - М: Наука, 1964. 336 с.
8. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле: Пер. с англ. М: Машиностроение, 1985. 472 с.
9. Хазанов Х.С. Современные методы исследования колебаний механических систем: Учебное пособие, издание второе. Самара: Самарский аэрокосмический университет, 1995. 78 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ . . . . .	3.
1.1. Продольные и крутильные колебания стержней . . . . .	3
1.2. Поперечные колебания балки . . . . .	11
1.3. Условия ортогональности форм собственных колебаний. Обобщенная масса стержня . . . . .	22
1.4. Влияние постоянной осевой силы на частоту собственных поперечных колебаний балки . . . . .	25
1.5. Колебания балки на упругом основании . . . . .	27
1.6. Вынужденные колебания стержней . . . . .	29
1.7. Приближенный учет диссипативных сил при вынужденных колебаниях. . . . .	35
2. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ . . . . .	38
2.1. Вариационный принцип Гамильтона . . . . .	38
2.2. Определение приближенного значения низшей частоты собственных колебаний стержней методом Рэлея . . . . .	40
2.3. Определение частот и форм собственных колебаний стержней методом Рэлея-Ритца . . . . .	44
2.4. Определение частот и форм собственных колебаний стержней методом Бубнова-Галеркина . . . . .	56
3. СОВМЕСТНЫЕ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРЫЛА . . . . .	61
3.1. Дифференциальные уравнения движения . . . . .	61
3.2. Определение низших частот и форм собственных изгибно- крутильных колебаний крыла методом Бубнова-Галеркина . . . . .	64
3.3. Определение частот и форм собственных изгибно-крутильных колебаний крыла методом Рэлея-Ритца . . . . .	68
3.4. Приближенная качественная математическая модель изгибно- крутильного флаттера крыла в дозвуковом потоке . . . . .	73
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .	78

Учебное издание

*Хазанов Хацкель Соломонович*

**МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ  
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Учебное пособие

Самарский государственный аэрокосмический  
университет им. академика С.П.Королева  
443086 Самара, Московское шоссе, 34