

**ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ  
ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ**

**Часть 1. Расчет кинематических параметров и составление уравнений движений толкателей  
Методические указания к курсовому проектированию**

В методических указаниях описывается удобный способ задания диаграмм движения толкателей кулачковых механизмов и аналитический метод обработки этих диаграмм, включая вывод уравнений.

Излагаемые приемы и методы ориентированы на использование ПЭВМ; в частности, они могут быть полезны при работе в среде AUTOCAD и КОМПАС.

Материалы, получаемые с помощью описанных здесь методов, будут полезны на последующих стадиях проектирования кулачковых механизмов – при выборе рациональных размеров и при построении профиля кулачка. Предназначены для студентов механических специальностей.

## Введение

Кулачковые механизмы используют для преобразования равномерного движения входного звена (кулачка) в движение выходного звена (толкателя) по заранее заданному закону.

Кулачок - это звено, имеющее элемент высшей кинематической пары, выполненный в виде поверхности переменной кривизны.

В данном пособии рассмотрено проектирование только плоских кулачковых механизмов, в которых кулачок вращается вокруг неподвижной оси, а толкатель движется либо возвратно-поступательно (т.е. является ползуном), либо совершает возвратно-качательное движение (является коромыслом) (рис. 1, а - г).

Схемы кулачковых механизмов

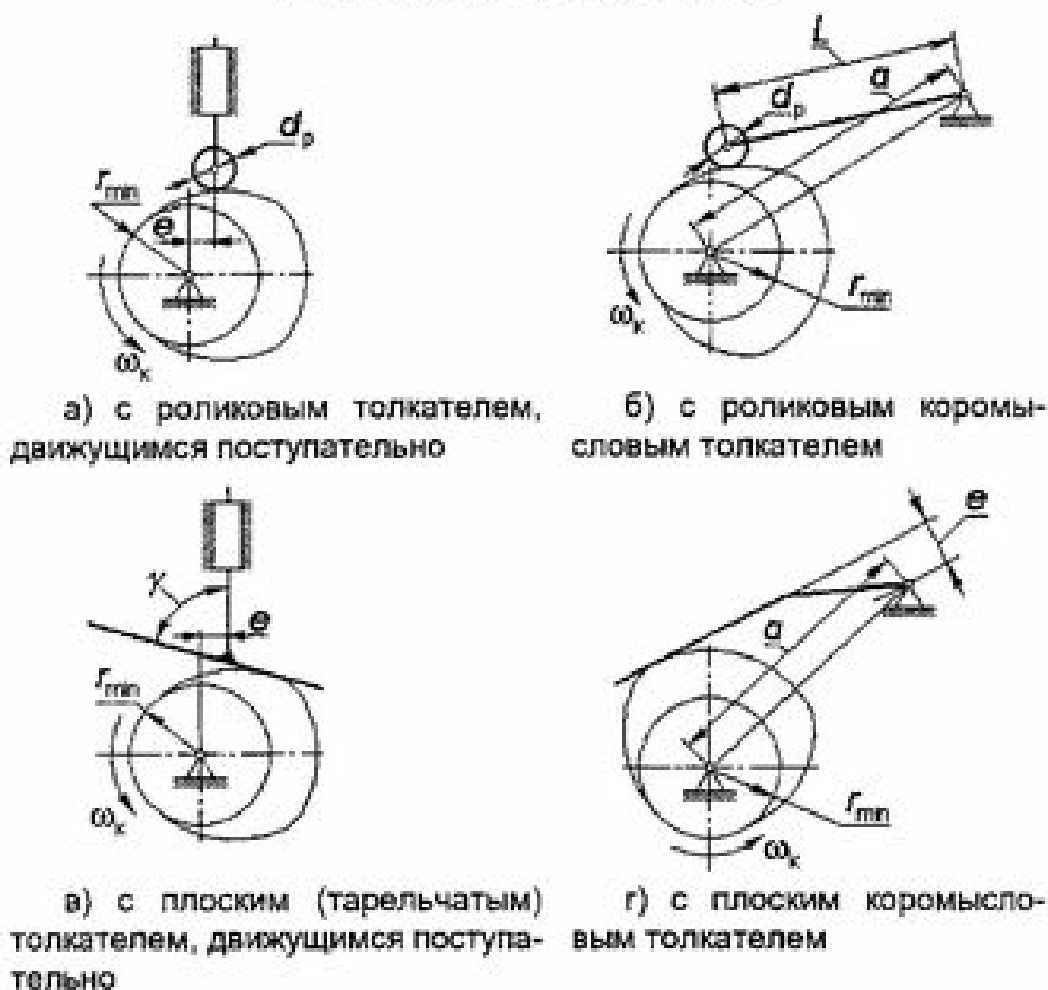


Рис. 1

Процесс проектирования кулачкового механизма любой из указанных схем обычно включает в себя три этапа:

- выбор закона движения толкателя, расчет и построение диаграмм движения;
- выбор размеров, необходимых для расчета и построения профиля кулачка;
- построение профиля кулачка.

В настоящее время проектирование кулачковых механизмов выполняют, как правило, графоаналитическими методами, что сопряжено с потерей точности, снижением достоверности оценок результатов и при широком распространении вычислительной техники является попросту несовременным.

В данном пособии рассмотрен первый этап проектирования кулачковых механизмов; предпочтение отдано аналитическому методу, который более точен, современен и достаточно легко реализуется с помощью предлагаемых здесь приемов, предусматривающих применение разработанных авторами компьютерных программ. Остальные этапы проектирования будут рассмотрены во второй части методических указаний.

## 1. Расчет параметров диаграмм движения толкателя. Вывод уравнений движения

Все формулы в этом пособии приведены для механизмов с поступательно движущимися толкателями.

Предполагается, что движение толкателя состоит из следующих фаз: ускоренного, равномерного и замедленного подъема (удаления от нижнего крайнего положения); выстоя в верхнем крайнем положении (или в положении наибольшего удаления); ускоренного, равномерного и замедленного опускания (приближения к нижнему крайнему положению); выстоя в нижнем крайнем положении. В соответствии с этим задают фазовые углы поворота кулачка:

$\varphi_{уп}$  - за время ускоренного подъема толкателя;

$\varphi_{рп}$  - за время равномерного подъема;

$\varphi_{зп}$  - за время замедленного подъема;

$\varphi_{вп}$  - за время верхнего выстоя;

$\varphi_{уо}$  - за время ускоренного опускания;

$\varphi_{ро}$  - за время равномерного опускания;

$\varphi_{зо}$  - за время замедленного опускания;

угол поворота кулачка  $\varphi_{инп}$  за время пребывания толкателя в нижнем крайнем положении не задают, так как

$$\varphi_{инп} = 360^\circ - (\varphi_{уп} + \varphi_{рп} + \varphi_{зп} + \varphi_{вп} + \varphi_{уо} + \varphi_{ро} + \varphi_{зо}).$$

Любой из углов  $\varphi_{pn}$ ,  $\varphi_{en}$  и  $\varphi_{po}$  может быть равен нулю.

Угол  $\varphi_{en}$  не может быть отрицательным, т.е. должно соблюдаться неравенство

$$\varphi_{yn} + \varphi_{pn} + \varphi_{en} + \varphi_{po} + \varphi_{yo} + \varphi_{ro} + \varphi_{zo} \leq 360^\circ.$$

Профиль кулачка необходимо спроектировать так, чтобы при заданной величине хода толкателя  $H$  обеспечить требуемый закон его движения, который задают либо как функцию  $S = S(\varphi)$ , либо как

$$a_\varphi(\varphi) = \frac{d^2 S}{d\varphi^2},$$

где  $\varphi$  - угол поворота кулачка с момента начала подъема толкателя;

$a_\varphi$  - аналог ускорений толкателя;

$S = S(\varphi)$  - функция перемещений.

Обычно закон движения толкателя задают функцией  $a_\varphi = a_\varphi(\varphi)$ , причем ее вид может быть различным для разных фаз неравномерного движения толкателя; функцию  $S = S(\varphi)$ , необходимую для построения профиля кулачка, находят в этом случае двукратным интегрированием аналога ускорений.

Удобно закон изменения аналога ускорений задавать для каждой фазы движения толкателя в виде

$$\frac{d^2 s}{dz^2} = a_\varphi(z), \quad (1)$$

где  $Z$  - безразмерный параметр, линейно зависящий от угла поворота кулачка и изменяющийся в пределах каждой фазы движения от 0 до 1 ( $Z=0$  - для начала фазы,  $Z=1$  - для конца). Если все фазы пронумеровать в порядке их следования (начиная с фазы ускоренного подъема), то для фазы с номером  $n$  связь между углом  $\varphi$  и параметром  $Z$  определится формулами:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_k + Z \cdot \Phi_n = \varphi_{н\Phi_n} + Z \cdot \Phi_n; \quad (2)$$

$$Z = \frac{\varphi - \varphi_{н\Phi_n}}{\Phi_n}; \quad (3)$$

здесь  $k, n$  - номера фаз;

$\Phi_k, \Phi_n$  - фазовые углы, соответствующие номерам  $k$  и  $n$ ; например,  $\Phi_1 = \Phi_{ym}, \Phi_4 = \Phi_{zn}$  и т.д.:

$$\Phi_{n\Phi_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_k - \text{угол поворота кулачка к моменту начала рассматриваемой фазы; например, для фазы ускоренного опускания } (n=5)$$

например, для фазы ускоренного опускания ( $n=5$ )

$$\Phi_{n\Phi_5} = \Phi_{ym} + \Phi_{pn} + \Phi_{zn} + \Phi_{zn}$$

Поскольку из (2) следует, что

$$d\varphi = \Phi_n \cdot dz,$$

то при двукратном интегрировании уравнения (1) получим:

$$v_\varphi(\varphi) = \frac{ds}{d\varphi} = C_v + \Phi_n \int_0^z a_\varphi(z) dz = v_\varphi(z); \quad (4)$$

$$s(\varphi) = C_s + \Phi_n \int_0^z v_\varphi(z) dz = s(z). \quad (5)$$

Постоянные интегрирования  $C_v$  и  $C_s$  для каждой фазы движения толкателя определяются начальными условиями, характерными для начала (или конца) этой фазы.

Вид функции  $a_\varphi(z)$  в уравнении (1) теоретически может быть любым; в данном пособии предусмотрено использование шести различных функций, условно обозначаемых номерами от 1 до 6 и согласно которым модуль аналога ускорения в пределах каждой фазы (или соответствующего фазового угла  $\Phi$ ) изменяется следующим образом (рис. 2):

- |                         |  |
|-------------------------|--|
| 1 - постоянен;          | 4 - возрастает по закону синуса;                 |
| 2 - линейно возрастает; | 5 - убывает по закону косинуса;                  |
| 3 - линейно убывает;    | 6 - изменяется по закону полувольтной синусоиды. |

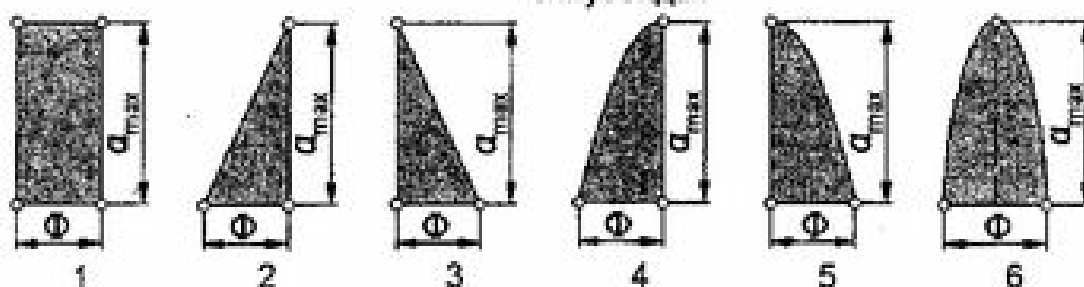


Рис. 2

Для каждой из четырех фаз неравномерного движения толкателя, продолжительность которых обусловлена углами  $\Phi_{ym}, \Phi_{zn}, \Phi_{yo}$  и  $\Phi_{zo}$ ,

может быть задан любой из оговоренных выше законов; их конкретную комбинацию можно обозначить четырехзначным числом, каждая цифра которого - номер закона для соответствующей фазы движения.

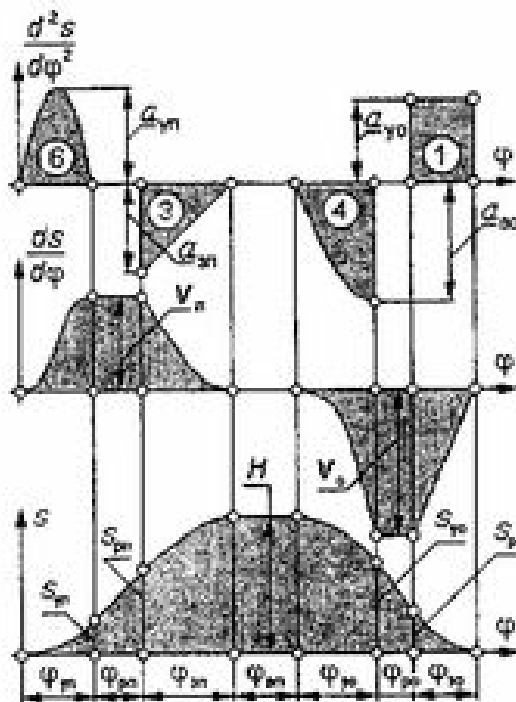


Рис. 3

Рассмотрим в качестве примера закон движения, обозначаемый числом 6341 и изображенный на рис. 3; цифры 6, 3, 4 и 1 означают следующее:

- при ускоренном подъеме толкателя аналог его ускорения положителен и сначала возрастает от нуля до максимальной величины  $a_{yn}$ , а затем вновь убывает до нуля по закону полуволны синусоиды

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{yn} \sin(\pi z); \quad (6)$$

- при замедленном подъеме аналог ускорения толкателя отрицателен и его модуль убывает от максимального значения  $a_{xn}$  до нуля по линейному закону

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{xn}(1-z); \quad (7)$$

- при ускоренном опускании аналог ускорения толкателя отрицателен и его модуль возрастает от нуля до  $a_{yo}$  по синусоидальному закону

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{yo} \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right); \quad (8)$$

- при замедленном опускании аналог ускорения толкателя положителен, постоянен по величине и равен  $a_{\infty}$

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{\infty}. \quad (9)$$

Дважды интегрируя уравнения (6) - (9), можно для всех фаз движения толкателя получить функции  $v_{\phi} = v_{\phi}(\varphi)$  и  $s = s(\varphi)$ , их диаграммы изображены на том же рисунке.

Отметим характерные параметры диаграмм движения:

- наибольшие значения величины модуля аналога ускорения  $a_{yn}$ ,  $a_{yo}$  и  $a_{yo}$  для соответствующих фаз диаграммы  $a_\varphi = a_\varphi(\varphi)$ ;
- наибольшие значения модуля аналога скорости толкателя при его подъеме -  $V_n$  и опускании -  $V_o$  (диаграмма  $V_\varphi = V_\varphi(\varphi)$ );
- координаты конца толкателя в конце фазы: ускоренного подъема -  $S_{yn}$ ; равномерного подъема -  $S_{pn}$  (если  $\varphi_{pn} = 0$ , то  $S_{pn} = S_{yn}$ ); замедленно-го подъема -  $S_{zn} = H$ ; ускоренного опускания -  $S_{yo}$ ; равномерного опускания -  $S_{po}$  (если  $\varphi_{po} = 0$ , то  $S_{po} = S_{yo}$ ); замедленного опускания -  $S_{zo} = 0$ .

При заданных значениях фазовых углов  $\varphi_{yn}$ ,  $\varphi_{zn}$ ,  $\varphi_{yo}$ ,  $\varphi_{zo}$ , величине хода толкателя  $H$  и видах законов изменения аналогов ускорений указанные параметры диаграмм могут быть полностью определены либо в процессе интегрирования уравнений типа (1), либо с помощью известных квадратурных формул для вычисления площадей диаграмм  $a_\varphi(\varphi)$  и  $V_\varphi(\varphi)$ .

Как известно, параметры  $S_{yn}$ ,  $S_{pn}$ ,  $S_{zn} = H$ ,  $S_{yo}$ ,  $S_{po}$ ,  $S_{zo} = 0$  можно связать с площадями фигур диаграммы  $V_\varphi(\varphi)$ , а параметры  $V_n$  и  $V_o$  - с площадями диаграммы  $a_\varphi(\varphi)$ .

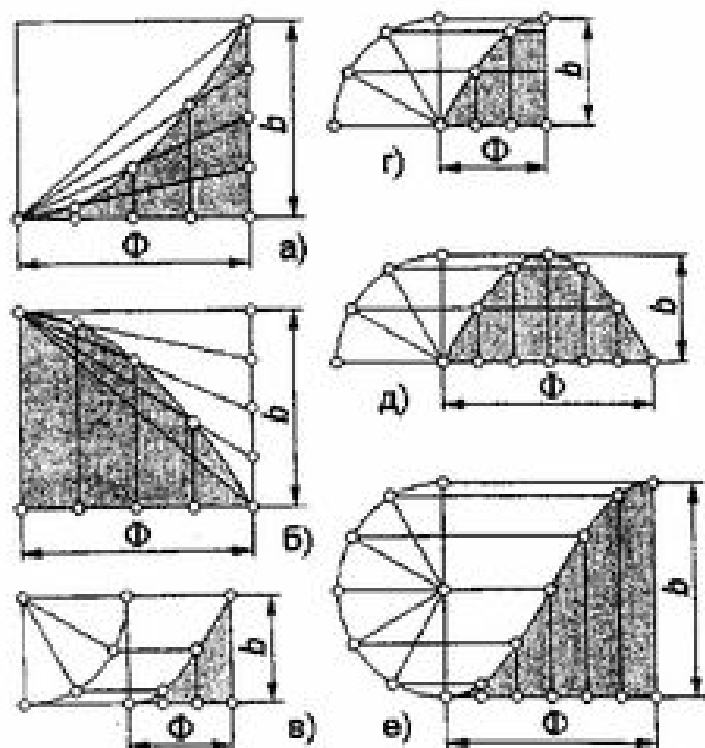


Рис. 4

Пусть каждая из этих фигур имеет какой-то вертикальный размер  $b$  (один из перечисленных выше параметров диаграммы  $V_\varphi(\varphi)$  или  $a_\varphi(\varphi)$ ), и горизонтальный -  $\Phi$  (какой-либо фазовый угол в радианах). Тогда для прямоугольной фигуры искомая площадь равна

$$S = b \Phi,$$

для треугольной -

$$S = 0.5 b \Phi;$$

для прочих фигур, встречающихся при обработке

диаграмм описанных выше типов и изображенных на рис. 4, аналогичные параметры имеют вид:

вогнутая парабола второй степени (рис. 4, а)

$$S = \frac{1}{3} b \Phi;$$

выпуклая парабола второй степени (рис. 4, б)

$$S = \frac{2}{3} b \Phi;$$

косинусоида или синусоида (рис. 4, в)

$$S = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) b \Phi;$$

синусоида (рис. 4, г и д)

$$S = \frac{2}{\pi} b \Phi;$$

косинусоида или синусоида (рис. 4, е)

$$S = \frac{1}{2} b \Phi.$$

Согласно сказанному, для закона движения 6341 ход толкателя  $H$  можно выразить как площадь под кривой  $V_{\varphi}(\varphi)$  для фазы подъема, или для фазы опускания

$$H = \left(\frac{1}{2}\varphi_{yn} + \varphi_{pn} + \frac{1}{3}\varphi_{zn}\right)V_n = \left(\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\varphi_{yo} + \varphi_{po} + \frac{1}{2}\varphi_{zo}\right)V_o;$$

тогда

$$V_n = \frac{H}{\frac{1}{2}\varphi_{yn} + \varphi_{pn} + \frac{1}{3}\varphi_{zn}}; \quad V_o = \frac{H}{\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\varphi_{yo} + \varphi_{po} + \frac{1}{2}\varphi_{zo}}. \quad (10)$$

Найдя величины  $V_n$  и  $V_o$ , можно с помощью графических приемов, показанных на рис. 4, построить диаграмму  $V_{\varphi}(\varphi)$  для любого количества промежуточных точек.

Аналогичные квадратурные соотношения можно записать, выразив величины  $V_n$  и  $V_o$  через площади под кривыми  $a_{\varphi}(\varphi)$ :

$$V_n = \frac{2}{\pi}\varphi_{yn}a_{yn} = \frac{1}{2}\varphi_{zn}a_{zn}; \quad V_o = \frac{2}{\pi}\varphi_{yo}a_{yo} = \varphi_{zo}a_{zo}.$$



Из этих выражений найдем требуемые параметры диаграммы  $a_e(\varphi)$ :

для фазы подъема

$$a_{y_n} = \frac{V_n}{\frac{2}{\pi} \varphi_{y_n}}; \quad a_{x_n} = \frac{V_n}{\frac{1}{2} \varphi_{x_n}}; \quad (11)$$

для фазы опускания

$$a_{y_o} = \frac{V_o}{\frac{2}{\pi} \varphi_{y_o}}; \quad a_{x_o} = \frac{V_o}{\varphi_{x_o}}. \quad (12)$$

По найденным значениям  $a_{y_n}$ ,  $a_{x_n}$ ,  $a_{y_o}$  и  $a_{x_o}$ , зная вид фигур диаграммы  $a_e(\varphi)$ , можно ее построить, используя приемы, показанные на рис. .

Параметры диаграммы  $s(\varphi)$  найдем, вычисляя площади отдельных участков кривой  $V_e(\varphi)$ :

для фазы подъема:

$$S_{y_n} = \frac{1}{2} \varphi_{y_n} V_n;$$

$$S_{p_n} = S_{y_n} + \varphi_{p_n} V_n;$$

$$S_{x_n} = S_{p_n} + \frac{1}{3} \varphi_{x_n} V_n = H;$$

для фазы опускания:

$$S_{y_o} = H - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \varphi_{y_o} V_o; \quad (13)$$

$$S_{p_o} = S_{y_o} - \varphi_{p_o} V_o; \quad (14)$$

$$S_{x_o} = S_{p_o} - \frac{1}{2} \varphi_{x_o} V_o = 0. \quad (15)$$

последние равенства в каждом столбце являются проверочными и их можно не использовать.

Для построения кривых, составляющих диаграмму  $s(\varphi)$ , обычно не находится таких удобных графических приемов, как изображенные на рис. 4 и их приходится строить, рассчитывая значения ординат по формулам, являющимся интегралами уравнений типа (1). Процесс вывода подобных зависимостей можно показать на примере закона движения 6341 (рис. 3).

**Фаза ускоренного подъема.** Интегрируя уравнение (6), получим: для аналога скоростей

$$\frac{ds}{d\varphi} = v_e(\varphi) = C_v - \frac{1}{\pi} a_{y_n} \varphi_{y_n} \cos(\pi z);$$

поскольку при  $z = 0$  имеем  $v_e = 0$ , то  $C_v = (1/\pi) a_{y_n} \varphi_{y_n} = 0.5 V_n$  и следовательно

$$\frac{ds}{d\varphi} = v_e(\varphi) = 0.5 V_n (1 - \cos(\pi z)); \quad (16)$$

для перемещений

$$s(\varphi) = C_s + \frac{v_n}{2} \varphi_{ym} z - \frac{v_n}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \varphi_{ym} \sin(\pi z);$$

т.к. при  $z = 0$  перемещение  $s = 0$ , то  $C_s = 0$ ; учитывая, кроме того, что  $0.5 v_n \varphi_{ym} = s_{ym}$ , получаем функцию перемещений

$$s(\varphi) = s_{ym} \left( z - \frac{1}{\pi} \sin(\pi z) \right). \quad (17)$$

**Фаза равномерного подъема.** Для этой фазы

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} = a_\varphi(\varphi) = 0; \quad \frac{ds}{d\varphi} = v_\varphi(\varphi) = v_n; \quad s(\varphi) = s_{ym} + (s_{pn} - s_{ym})z.$$

**Фаза замедленного подъема.** Интегрируя уравнение (7), получим:

для аналога скоростей

$$\frac{ds}{d\varphi} = v(\varphi) = C_v - a_{zn} \varphi_{zn} \cdot z + a_{zn} \varphi_{zn} \cdot 0.5 z^2;$$

из начальных условий -  $z = 0$ ,  $v_\varphi = v_n$  (т.е.  $C_v = v_n$ ) и равенства  $0.5 a_{zn} \varphi_{zn} = v_n$  получаем

$$\frac{ds}{d\varphi} = v(\varphi) = v_n (1 - z)^2; \quad (18)$$

для диаграммы перемещений

$$s(\varphi) = C_s + v_n \varphi_{zn} z - v_n \varphi_{zn} z^2 + v_n \varphi_{zn} \cdot \frac{1}{3} z^3;$$

поскольку при  $z = 0$  имеем  $s = s_{pn}$  и при этом  $v_n \varphi_{zn} \cdot \frac{1}{3} = H - s_{pn}$ , то  $C_s = s_{pn} = H - (H - s_{pn})$ ; следовательно уравнение перемещений

$$s(\varphi) = H - (H - s_{pn})(1 - z)^3. \quad (19)$$

**Фаза верхнего положения толкателя** интереса не представляет, поскольку в этот период движения толкатель неподвижен и

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} = 0; \quad \frac{ds}{d\varphi} = 0; \quad s = H.$$

**Фаза ускоренного опускания.** Движение толкателя описывается уравнением (8), интегрируя которое, получим:

для аналога скоростей

$$\frac{ds}{d\varphi} = C_v + a_{y0} \varphi_{y0} \cdot \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} z\right);$$

при  $z = 0$  имеем  $v_\varphi = 0$ , следовательно  $C_v = -a_{y0} \varphi_{y0} \cdot \frac{2}{\pi} = -v_0$  и

тогда закон изменения аналога скоростей

$$\frac{ds}{d\varphi} = v(\varphi) = -v_0 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} z\right)\right); \quad (20)$$

для диаграммы перемещений

$$s(\varphi) = C_s - v_0 \varphi_{y0} z + v_0 \varphi_{y0} \cdot \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right);$$

начальное условие -  $z = 0$ ,  $s = H$ , следовательно  $C_s = H$ ; по-

скольку  $\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) v_0 \varphi_{y0} = H - s_{y0}$ , то уравнение диаграммы перемещений

$$s(\varphi) = H - \frac{H - s_{y0}}{1 - \frac{2}{\pi}} \left(z - \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right)\right). \quad (21)$$

**Фаза равномерного опускания.** Для этой фазы

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} = 0; \quad \frac{ds}{d\varphi} = v_\varphi(\varphi) = v_0; \quad s(\varphi) = s_{y0} - (s_{y0} - s_{p0}) z.$$

**Фаза замедленного опускания.** Интегрируем уравнение (9):

для аналога скоростей

$$\frac{ds}{d\varphi} = v(\varphi) = C_v + a_{z0} \varphi_{z0} z;$$

начальные условия -  $z = 1$ ,  $v_\varphi = 0$ , поэтому  $C_v = -a_{z0} \varphi_{z0} = -v_0$  и

закон изменения аналога скоростей

$$\frac{ds}{d\varphi} = -v_0(1 - z); \quad (22)$$

тот же результат можно получить, рассматривая начальные условия при  $z = 0$  и  $v_\varphi = -v_0$ .

Для диаграммы перемещений

$$s(\varphi) = C_s - v_0 \varphi_{z0} z + v_0 \varphi_{z0} \cdot 0.5 z^2;$$

поскольку при  $z = 0$  имеем  $s = s_{po}$  (т.е.  $C_s = s_{po}$ ) и при этом  $0.5 v_o \varphi_{zo} = s_{po}$ , то уравнение перемещений

$$s(\varphi) = s_{po}(1 - z)^2. \quad (23)$$

## 2. Общий вид формул для расчета параметров диаграмм движения толкателя. Уравнения диаграмм

Вывод уравнений движения толкателя - процедура несложная, но трудоемкая и требующая внимательности. Кроме того, при ограниченной номенклатуре видов законов изменения аналогов ускорений элементы многих формул и уравнений будут от случая к случаю повторяться и поэтому есть смысл составить набор таблиц, содержащих константы, формулы и уравнения, которые можно использовать при любой комбинации законов движения для различных фаз неравномерного движения толкателя.

Анализируя расчетные формулы для определения параметров диаграмм  $a_\varphi(\varphi)$ ,  $v_\varphi(\varphi)$  и  $s(\varphi)$ , можно заметить, что их вид при рассматриваемом наборе законов движения всегда один и тот же.

Параметры  $v_n$  и  $v_o$  всегда рассчитываются по формулам типа

$$v_n = \frac{H}{A_{yn}\varphi_{yn} + \varphi_{pn} + A_{zn}\varphi_{zn}}; \quad v_o = \frac{H}{A_{yo}\varphi_{yo} + \varphi_{po} + A_{zo}\varphi_{zo}}; \quad (24)$$

аналогично этому, формулы для расчета параметров диаграммы  $a_\varphi(\varphi)$  всегда имеют вид

$$a_{yn} = \frac{v_n}{B_{yn}\varphi_{yn}}; \quad a_{zn} = \frac{v_n}{B_{zn}\varphi_{zn}}; \quad a_{yo} = \frac{v_o}{B_{yo}\varphi_{yo}}; \quad a_{zo} = \frac{v_o}{B_{zo}\varphi_{zo}}. \quad (25)$$

а для параметров диаграммы  $s(\varphi)$  -

$$\begin{cases} s_{yn} = A_{yn}\varphi_{yn}v_n; & s_{pn} = s_{yn} + \varphi_{pn}v_n; \\ s_{yo} = H - A_{yo}\varphi_{yo}v_o; & s_{po} = s_{yo} - \varphi_{po}v_o. \end{cases} \quad (26)$$

Константы  $A_{yn}$ ,  $A_{zn}$ ,  $A_{yo}$ ,  $A_{zo}$  и  $B_{yn}$ ,  $B_{zn}$ ,  $B_{yo}$ ,  $B_{zo}$  определяются только видом (или номером) выбранного закона для соответствующих фаз неравномерного движения толкателя.

1. Модуль ускорения толкателя постоянен

Подъем толкателя	
Ускоренный	Замедленный
$A_{y_n} = \frac{1}{2}; \quad B_{y_n} = 1.$	$A_{z_n} = \frac{1}{2}; \quad B_{z_n} = 1.$
$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{y_n};$	$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{z_n};$
$\frac{ds}{d\varphi} = v_n z;$	$\frac{ds}{d\varphi} = v_n (1 - z);$
$s = s_{y_n} z^2.$	$s = H - (H - s_{z_n})(1 - z)^2.$
Опускание толкателя	
Ускоренное	Замедленное
$A_{y_o} = \frac{1}{2}; \quad B_{y_o} = 1.$	$A_{z_o} = \frac{1}{2}; \quad B_{z_o} = 1.$
$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{y_o};$	$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{z_o};$
$\frac{ds}{d\varphi} = -v_o z;$	$\frac{ds}{d\varphi} = -v_n (1 - z);$
$s = H - (H - s_{y_o}) z^2.$	$s = s_{z_o} (1 - z)^2.$

2. Модуль ускорения линейно возрастает

Подъем толкателя	
Ускоренный	Замедленный
$A_{y_n} = \frac{1}{3}; \quad B_{y_n} = \frac{1}{2}.$	$A_{z_n} = \frac{2}{3}; \quad B_{z_n} = \frac{1}{2}.$
$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{y_n} z;$	$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{z_n} z;$
$\frac{ds}{d\varphi} = v_n z^2;$	$\frac{ds}{d\varphi} = v_n (1 - z^2);$
$s = s_{y_n} z^3.$	$s = H - \frac{H - s_{z_n}}{2} (1 - z)^2 (2 + z).$

Опускание толкателя	
<i>Ускоренное</i>	<i>Замедленное</i>
$A_{y_0} = \frac{1}{3}; \quad B_{y_0} = \frac{1}{2}$	$A_{y_0} = \frac{2}{3}; \quad B_{y_0} = \frac{1}{2}$
$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{y_0}z;$	$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{y_0}z;$
$\frac{ds}{d\varphi} = -v_0z^2;$	$\frac{ds}{d\varphi} = -v_0(1-z^2);$
$s = H - (H - s_{y_0})z^3.$	$s = \frac{s_{y_0}}{2}(1-z)^2(2+z).$

### 3. Модуль ускорения линейно убывает

Подъем толкателя	
<i>Ускоренный</i>	<i>Замедленный</i>
$A_{y_n} = \frac{2}{3}; \quad B_{y_n} = \frac{1}{2}$	$A_{y_n} = \frac{1}{3}; \quad B_{y_n} = \frac{1}{2}$
$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{y_n}(1-z);$	$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{y_n}(1-z);$
$\frac{ds}{d\varphi} = v_n(2-z)z;$	$\frac{ds}{d\varphi} = v_n(1-z)^2;$
$s = 0.5s_{y_n}(3-z)z^2.$	$s = H - (H - s_{y_n})(1-z)^3.$

Опускание толкателя	
<i>Ускоренное</i>	<i>Замедленное</i>
$A_{y_0} = \frac{2}{3}; \quad B_{y_0} = \frac{1}{2}$	$A_{y_0} = \frac{1}{3}; \quad B_{y_0} = \frac{1}{2}$
$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{y_0}(1-z);$	$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{y_0}(1-z);$
$\frac{ds}{d\varphi} = -v_0(2-z)z;$	$\frac{ds}{d\varphi} = -v_0(1-z)^2;$
$s = H - 0.5(H - s_{y_0})(3-z)z^2.$	$s = s_{y_0}(1-z)^3.$

#### 4. Модуль ускорения возрастает по закону синуса

Подъем толкателя	
<i>Ускоренный</i> $A_{yn} = 1 - 2/\pi; \quad B_{yn} = 2/\pi.$	<i>Замедленный</i> $A_{zn} = 2/\pi; \quad B_{zn} = 2/\pi.$
$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{yn} \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right);$	$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{zn} \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right);$
$\frac{ds}{d\varphi} = v_n \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right);$	$\frac{ds}{d\varphi} = v_n \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right);$
$s = \frac{s_{yn}}{1 - 2/\pi} \left(z - \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right).$	$s = s_{zn} + (H - s_{zn}) \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right).$
Опускание толкателя	
<i>Ускоренное</i> $A_{yo} = 1 - 2/\pi; \quad B_{yo} = 2/\pi.$	<i>Замедленное</i> $A_{zo} = 2/\pi; \quad B_{zo} = 2/\pi.$
$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{yo} \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right);$	$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{zo} \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right);$
$\frac{ds}{d\varphi} = -v_o \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right);$	$\frac{ds}{d\varphi} = -v_o \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right);$
$s = H - \frac{H - s_{yo}}{1 - 2/\pi} \left(z - \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)$	$s = s_{zo} \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right).$

#### 5. Модуль ускорения убывает по закону косинуса

Подъем толкателя	
<i>Ускоренный</i> $A_{yn} = 2/\pi; \quad B_{yn} = 2/\pi.$	<i>Замедленный</i> $A_{zn} = 1 - 2/\pi; \quad B_{zn} = 2/\pi.$
$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{yn} \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right);$	$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{zn} \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right);$
$\frac{ds}{d\varphi} = v_n \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right);$	$\frac{ds}{d\varphi} = v_o \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right);$
$s = s_{yn} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right).$	$s = H - \frac{H - s_{zn}}{1 - \frac{2}{\pi}} \left(1 - z - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)$

Опускание толкателя	
Ускоренное	Замедленное
$A_{y_0} = \frac{2}{\pi}; \quad B_{y_0} = \frac{2}{\pi}.$	$A_{z_0} = 1 - \frac{2}{\pi}; \quad B_{z_0} = \frac{2}{\pi}.$
$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{y_0} \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right);$	$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{z_0} \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right);$
$\frac{ds}{d\varphi} = -v_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right);$	$\frac{ds}{d\varphi} = -v_0 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right);$
$s = H - (H - s_{y_0}) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right).$	$s = \frac{s_{z_0}}{1 - 2/\pi} \left(1 - z - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right).$

6. Модуль ускорения изменяется по закону полуволны синусоиды

Подъем толкателя	
Ускоренный	Замедленный
$A_{y_n} = 0.5; \quad B_{y_n} = 2/\pi.$	$A_{z_n} = 0.5; \quad B_{z_n} = 2/\pi.$
$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{y_n} \sin(\pi z);$	$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{z_n} \sin(\pi z);$
$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{v_n}{2} (1 - \cos(\pi z));$	$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{v_n}{2} (1 + \cos(\pi z));$
$s = s_{y_n} \left(z - \frac{1}{\pi} \sin(\pi z)\right).$	$s = s_{z_n} + (H - s_{z_n}) \left(z + \frac{1}{\pi} \sin(\pi z)\right).$
Опускание толкателя	
Ускоренное	Замедленное
$A_{y_0} = 0.5; \quad B_{y_0} = 2/\pi.$	$A_{z_0} = 0.5; \quad B_{z_0} = 2/\pi.$
$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = -a_{y_0} \sin(\pi z);$	$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a_{z_0} \sin(\pi z);$
$\frac{ds}{d\varphi} = -0.5 v_0 (1 - \cos(\pi z));$	$\frac{ds}{d\varphi} = -0.5 v_0 (1 + \cos(\pi z));$
$s = H - (H - s_{y_0}) \left(z - \frac{1}{\pi} \sin(\pi z)\right).$	$s = s_{z_0} \left(1 - z - \frac{1}{\pi} \sin(\pi z)\right).$



Обозначения всех функций, переменных и констант, используемых в приведенных выше формулах и уравнениях (за исключением фазовых углов), пригодны только для механизмов с поступательно движущимися толкателями; для механизмов с коромысловыми толкателями указанные обозначения должны быть заменены согласно приведенной ниже таблице.

Механизм с поступательно движущимся толкателем	Механизм с коромысловым толкателем
<b>Функции, участвующие в уравнениях диаграмм движения</b>	
Аналог ускорения толкателя $a_{\varphi}(\varphi) = \frac{d^2 s}{d\varphi^2} = \frac{dv_{\varphi}}{d\varphi}$	Аналог углового ускорения толкателя $\varepsilon_{\psi}(\varphi) = \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} = \frac{d\omega_{\psi}}{d\varphi}$
Аналог скорости толкателя $v_{\varphi}(\varphi) = \frac{ds}{d\varphi}$	Аналог угловой скорости толкателя $\omega_{\psi}(\varphi) = \frac{d\psi}{d\varphi}$
Функция перемещений толкателя $s = s(\varphi)$	Функция угловых перемещений толкателя $\psi = \psi(\varphi)$
<b>Постоянные, входящие в уравнения диаграмм движения</b>	
$a_{yn}, a_{zn}, a_{yo}, a_{zo}$	$\varepsilon_{yn}, \varepsilon_{zn}, \varepsilon_{yo}, \varepsilon_{zo}$
$v_n, v_o$	$\omega_n, \omega_o$
$s_{yn}, s_{zn}, s_{yo}, s_{zo}, s_{po}, s_{zo}, H$	$\psi_{yn}, \psi_{zn}, \psi_{yo}, \psi_{zo}, \psi_{po}, \psi_{zo}$

Формулы (24) - (26) применительно к механизмам с коромысловыми толкателями принимают вид:

предельные значения аналогов угловых скоростей толкателя

$$\omega_n = \frac{\psi_{max}}{A_{yn}\varphi_{yn} + \varphi_{pn} + A_{zn}\varphi_{zn}}; \quad \omega_o = \frac{\psi_{max}}{A_{yo}\varphi_{yo} + \varphi_{po} + A_{zo}\varphi_{zo}}; \quad (27)$$

предельные значения аналогов угловых ускорений

$$\varepsilon_{yn} = \frac{\omega_n}{B_{yn}\varphi_{yn}}; \quad \varepsilon_{zn} = \frac{\omega_n}{B_{zn}\varphi_{zn}}; \quad \varepsilon_{yo} = \frac{\omega_o}{B_{yo}\varphi_{yo}}; \quad \varepsilon_{zo} = \frac{\omega_o}{B_{zo}\varphi_{zo}}; \quad (28)$$

значения угловых координат толкателя к концу каждой фазы движения

$$\begin{cases} \psi_{yn} = A_{yn} \varphi_{yn} \omega_n; & \psi_{pn} = \psi_{yn} + \varphi_{pn} \omega_n; & \psi_{zn} = \psi_{max}; \\ \psi_{yo} = \psi_{max} - A_{yo} \varphi_{yo} \omega_o; & \psi_{po} = \psi_{yo} - \varphi_{po} \omega_o; & \psi_{zo} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Отметим, что фазовые углы в формулы (10) - (15), (24) - (26) и (28) следует подставлять в радианах.

В формулах (27) - числители и знаменатели, а в формулах (29) - правые и левые части равенств должны иметь одинаковую размерность (градусы, или радианы).

### Список литературы

1. Теория механизмов и машин / Под ред. К.В.Фролова. – М.: Высшая школа, 1987. – 485 с.
2. Кулачковые механизмы: Учеб. пособие / В.Э.Смирнов. - Уфа: УАИ, 1987. – 55 с.
3. Проектирование механизмов с высшими кинематическими параметрами: Методические указания к курсовому проектированию по теории механизмов и машин / Сост.: И.А.Болотовский, Б.И.Гурьев. - Уфа: УАИ, 1987. - 26 с.
4. Анализ и синтез зубчатых, рычажных и кулачковых механизмов: Методические указания к курсовому проектированию по теории механизмов и машин / Сост.: Б.И.Гурьев, О.Ф.Васильева. - Уфа: УГАТУ, 2000. - 72 с.