

**ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА**  
**ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ**

**УФА 2009**

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Уфимский государственный авиационный технический университет

## ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

*Допущено Редакционно-издательским советом УГАТУ  
в качестве учебного пособия для студентов всех форм обучения, обу-  
чающихся по направлениям*

*090100, 140100, 140500, 150200, 150400, 150500, 150600, 150700, 150800,  
160100, 160300, 190700, 200500, 220100, 220200, 220300, 220400, 230100,  
230200, 280100, 280200*

Уфа 2009

Авторы: Р. В. Ахмадеев, И. В. Вавилова,  
П. А. Грахов, Т. М. Крымская

УДК 621.3(07)  
ББК 31.2 (я7)

*Э45*

*Рецензенты:*

*доктор техн. наук, проф. Баш. гос. аграрн. ун-та Аипов Р.С.,  
директор-гл. конструктор ФГУП НКТБ «ВИХРЬ»  
доцент, канд. техн. наук Шуляк А.А.*

*Э45 Электротехника и электроника. Электрические и магнитные цепи: Учебное пособие /Уфимск. госуд. авиац. техн. ун-т; Р. В. Ахмадеев, И. В. Вавилова, П. А. Грахов, Т. М. Крымская /Под ред. Т. М. Крымской. – Уфа, 2009. – 147 с.  
ISBN 978-5-86911-947-6*

Учебное пособие соответствует государственным образовательным стандартам дисциплины «Электротехника и электроника» для направлений подготовки бакалавров и дипломированных специалистов 090100, 140100, 140500, 150200, 150400, 150500, 150600, 150700, 150800, 160100, 160300, 190700, 200500, 220100, 220200, 220300, 220400, 230100, 230200, 280100, 280200, включая дистанционное обучение.

Излагаются основные теоретические положения, приводятся алгоритмы и примеры решения задач различной степени сложности, а также наборы задач, снабженных ответами, для самоконтроля по следующим темам: линейные и нелинейные электрические цепи, однофазные и трехфазные электрические цепи переменного тока, магнитные цепи с постоянными и переменными магнитодвижущими силами.

Предназначено для самостоятельной работы студентов неэлектротехнических специальностей, изучающих дисциплину «Электротехника и электроника» по дневной, вечерней и заочной формам обучения.

Ил. 139. Табл. 5. Библиогр.: 10 назв.

УДК 621.3(07)  
ББК 31.2 (я7)

**ISBN 978-5-86991-947-6**

© Уфимский государственный авиационный  
технический университет, 2009

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	5
<b>1. Линейные электрические цепи постоянного тока</b> .....	6
1.1. Цепи с одним источником питания .....	6
1.1.1. Основные положения .....	6
1.1.2. Примеры решения задач .....	10
1.1.3. Задачи для самостоятельного решения .....	15
1.2. Цепи с двумя и более источниками питания .....	18
1.2.1. Применение законов Кирхгофа и метод контурных токов .....	18
1.2.2. Метод междуузлового напряжения (метод двух узлов) ...	28
1.2.3. Метод эквивалентного генератора .....	34
<b>2. Нелинейные электрические цепи постоянного тока</b> .....	41
2.1. Основные положения .....	41
2.2. Примеры решения задач .....	42
2.3. Задачи для самостоятельного решения .....	46
<b>3. Линейные электрические цепи однофазного синусоидального тока</b> .....	48
3.1. Анализ неразветвленных электрических цепей .....	48
3.1.1. Основные положения .....	48
3.1.2. Примеры решения задач .....	50
3.1.3. Задачи для самостоятельного решения .....	57
3.2. Анализ разветвленных электрических цепей .....	58
3.2.1. Основные определения и алгоритм решения задач .....	58
3.2.2. Примеры решения задач .....	60
3.2.3. Задачи для самостоятельного решения .....	64
3.3. Резонансные явления в цепях синусоидального тока .....	65
3.3.1. Краткие теоретические сведения .....	65
3.3.2. Примеры решения задач .....	66
3.3.3. Задачи для самостоятельного решения .....	74

<b>4. Трехфазные электрические цепи</b> .....	75
4.1. Общие сведения .....	75
4.1.1. Основные положения .....	75
4.1.2. Четырехпроводная система соединения источников и приемников .....	75
4.1.3. Трехпроводная система соединения источников и приемников .....	77
4.1.4. Расчет и измерение мощности в трехфазных цепях .....	78
4.2. Соединение приемников трехфазной цепи звездой .....	80
4.2.1. Четырехпроводная схема соединения .....	80
4.2.2. Трехпроводная схема соединения .....	94
4.2.3. Задачи для самостоятельного решения .....	100
4.3. Соединение приемников трехфазной цепи треугольником ..	103
4.3.1. Симметричные нагрузки .....	103
4.3.2. Несимметричные нагрузки .....	106
4.3.3. Аварийные режимы .....	112
4.3.4. Задачи для самостоятельного решения .....	114
<b>5. Магнитные цепи</b> .....	117
5.1. Магнитные цепи с постоянными магнитодвижущими силами .....	117
5.1.1. Основные положения .....	117
5.1.2. Неразветвленная магнитная цепь .....	118
5.1.3. Определение тягового усилия электромагнита .....	120
5.1.4. Расчет неразветвленной магнитной цепи .....	121
5.1.5. Примеры решения задач .....	122
5.1.6. Разветвленная магнитная цепь .....	128
5.1.7. Задачи для самостоятельного решения .....	132
5.2. Магнитные цепи с переменными магнитодвижущими силами .....	134
5.2.1. Основные положения .....	134
5.2.2. Потери мощности в ферромагнитном сердечнике .....	136
5.2.3. Уравнение электрического состояния катушки со сталью .....	137
5.2.4. Примеры решения задач .....	140
5.2.5. Задачи для самостоятельного решения .....	145
<b>Список литературы</b> .....	146

## ВВЕДЕНИЕ

*Учебное пособие охватывает все вопросы, относящиеся к изучению электрических цепей постоянного и переменного токов, а также магнитных цепей с постоянными и переменными магнитодвижущими силами, дисциплины «Электротехника и электроника» в соответствии с государственными стандартами направлений и специальностей неэлектротехнического профиля.*

*Данное пособие предназначено для самостоятельного закрепления студентами лекционного материала и самоконтроля и пригодно для дневной, вечерней и заочной форм обучения, включая дистанционную форму образования. Цель достигается за счет индуктивного составления задач от простых к сложным. Основные физические законы и методы расчета цепей, базирующиеся на них, приведены в начале рассматриваемых разделов с подробными комментариями. Большая часть затрачиваемого студентами времени при решении задач направлена на анализ физических явлений, а математическая часть расчетов сведена к минимуму. Для ряда задач, имеющих сложные математические расчеты, предусмотрена возможность применения персональных компьютеров.*

*Пособие разработано в помощь студентам на лабораторно-практических занятиях, при выполнении расчетно-графических и курсовых работ, в рамках самостоятельной работы, а также при подготовке к экзаменам.*

*Работа по написанию пособия распределена между авторами следующим образом: главы 1 и 2 написаны Т.М.Крымской, глава 3 написана Р.В. Ахмадеевым, глава 4 – И.В.Вавиловой, глава 5 – П.А.Граховым.*

# 1. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

## 1.1. Цепи с одним источником питания

### 1.1.1. Основные положения

Электрической цепью называется совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе (ЭДС), токе и напряжении.

Элементы электрической цепи делятся на активные (те, в которых индуцируется ЭДС – источники ЭДС, электродвигатели, аккумуляторы в процессе зарядки и т.д.) и пассивные (электроприемники и соединительные провода).

Графическое изображение электрической цепи, содержащее условные обозначения ее элементов и показывающее их соединения, называется схемой.

Участок цепи с одним и тем же током называется ветвью. Место соединения ветвей электрической цепи называется узлом (на электрических схемах обозначается точкой). Любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям, называется контуром. Независимый контур отличается от любого другого хотя бы на одну новую ветвь.

Электрические цепи с одним источником питания могут быть разветвленные и неразветвленные. При этом различают последовательное, параллельное соединения пассивных элементов, а также их соединение звездой, треугольником и смешанное:

1) признаком *последовательного* соединения является один и тот же ток во всех элементах и отсутствие узлов между ними (рис. 1.1):

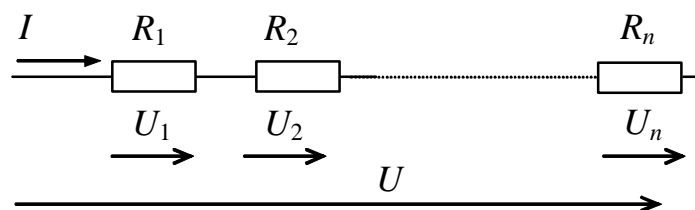


Рис. 1.1

Это соединение работает как делитель напряжения:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = U;$$

эквивалентное сопротивление

последовательно соединенных пассивных элементов равно сумме сопротивлений этих элементов (рис. 1.2):

$$R_{\text{ЭКВ}} = \sum_{i=1}^n R_i;$$

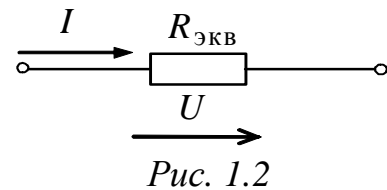


Рис. 1.2

2) признаком *параллельного* соединения является одно и то же напряжение на всех элементах и общность их зажимов (рис. 1.3).

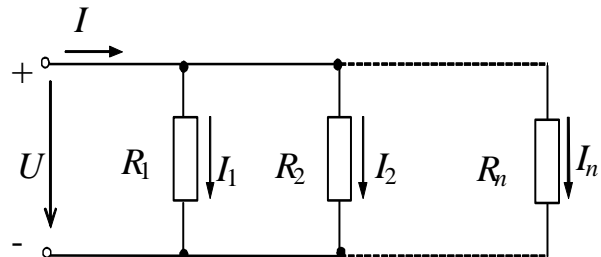


Рис. 1.3

Это соединение работает как делитель тока:

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n = I;$$

эквивалентная проводимость параллельно соединенных пассивных элементов равна сумме проводимостей этих элементов (рис. 1.4):

$$G_{\text{ЭКВ}} = \sum_{i=1}^n G_i$$

или

$$\frac{1}{R_{\text{ЭКВ}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}.$$

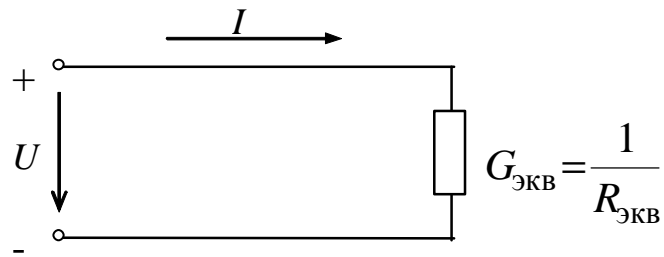


Рис. 1.4

В случае только двух параллельно соединяемых элементов (рис. 1.5)

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2},$$

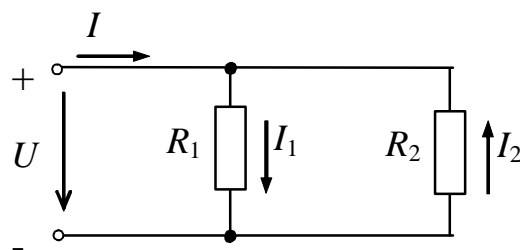


Рис. 1.5

а ток в каждой из двух параллельно соединяемых ветвей равен току в неразветвленной части схемы, деленному на сумму двух параллельно соединяемых сопротивлений и умноженному на сопротивление противоположного плеча (с учетом знака), т.е.



$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I, \quad I_2 = \frac{-R_1}{R_1 + R_2} I;$$

3) *звезда* представляет собой три элемента (луча), исходящих из одного узла (рис. 1.6); *треугольник* – это часть схемы, сторонами которого являются приемники, а вершинами – узлы схемы (рис. 1.7).

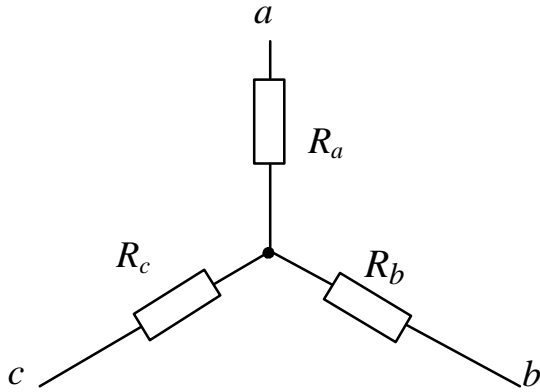


Рис. 1.6

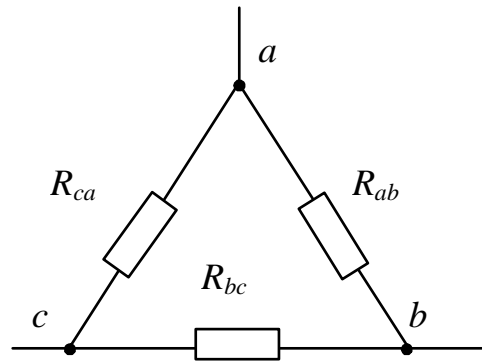


Рис. 1.7

Заменить звезду или треугольник эквивалентными сопротивлениями нельзя, можно лишь эквивалентно преобразовать их друг в друга согласно следующим формулам:

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c}, \quad R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a},$$

$$R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c \cdot R_a}{R_b};$$

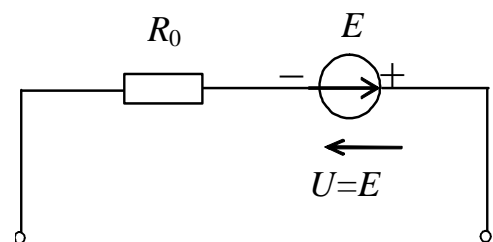
$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}, \quad R_b = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}},$$

$$R_c = \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}};$$

4) *смешанное* соединение пассивных элементов представляет собой любую совокупность рассмотренных выше соединений.

Реальные источники питания на электрических схемах замещаются идеальными элементами:

- реальный источник ЭДС с внутренним сопротивлением  $R_0$  обычно изображается в виде последовательной схемы замещения (напряжение на зажимах идеального источника ЭДС равно ЭДС, но направлено в противо-



положную сторону) (рис. 1.8);

Рис. 1.8

- реальный источник тока с внутренней проводимостью  $G_0$  – в виде параллельной схемы (ток в ветви источника тока всегда равен параметру  $I_k$  и направлен в ту же сторону, что и стрелки на условном графическом изображении источника) (рис. 1.9).

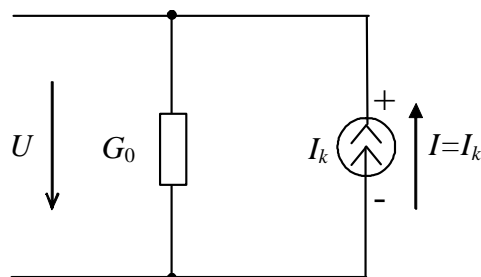


Рис. 1.9

Расчет и анализ любых электрических цепей может быть проведен с помощью основных законов электрических цепей: закона Ома и первого и второго законов Кирхгофа. Эти законы лежат также в основе различных методов, упрощающих расчет и анализ цепей.

Согласно закону Ома для пассивного участка цепи (рис. 1.10, 1.11) ток пропорционален напряжению и обратно пропорционален сопротивлению (с учетом знака), например:

$$I = \frac{U}{R}$$

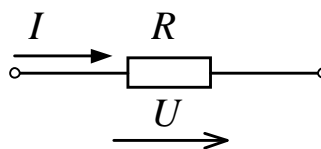


Рис. 1.10

или

$$I = -\frac{U}{R};$$

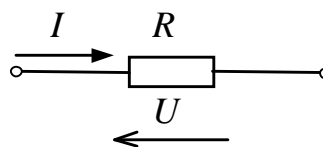


Рис. 1.11

в общем случае (при наличии источников ЭДС)  $I = \frac{\pm U \pm \sum E}{\sum R}$ ,

например

$$I = \frac{-U - E}{R}$$

на активном участке цепи (рис. 1.12): (для получения данного выражения можно использовать либо соотношения между потенциалами отдельных точек участка, либо второй закон Кирхгофа).

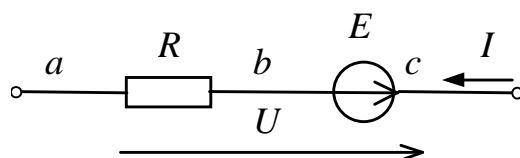


Рис. 1.12

В любой электрической цепи должен соблюдаться энергетический баланс – баланс мощностей – алгебраическая сумма мощностей всех источников энергии равна арифметической сумме мощностей всех приемников энергии:

$$\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{прием}}$$

(мощность источника ЭДС учитывается со знаком "+", если положительное направление тока совпадает с направлением действия ЭДС, и со знаком "-" в противном случае).

Расчет токов и напряжений в разветвленных цепях с одним источником питания производится одним из двух методов:

- 1) методом эквивалентных преобразований;
- 2) методом пропорциональных величин.

### 1.1.2. Примеры решения задач

#### Пример 1

Заданная электрическая цепь (рис. 1.13) характеризуется следующими параметрами элементов:  $E = 312$  В,  $R_{01} = 1$  Ом,  $R_1 = 3$  Ом,  $R_2 = 6$  Ом,  $R_3 = 20$  Ом,  $R_4 = 8$  Ом,  $R_5 = 16$  Ом,  $R_6 = 7$  Ом. Рассчитать токи во всех ветвях, падения напряжения на отдельных участках, потребляемую мощность и составить баланс мощностей.

*Решение 1* (по методу эквивалентных преобразований)

Эквивалентное (входное, общее) сопротивление цепи определяется путем "свертывания" схемы.

1. Резисторы  $R_4$  и  $R_5$  соединены параллельно, их общее сопротивление (рис. 1.14):

$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = \frac{8 \cdot 16}{8 + 16} \approx 5,33, \text{ Ом.}$$

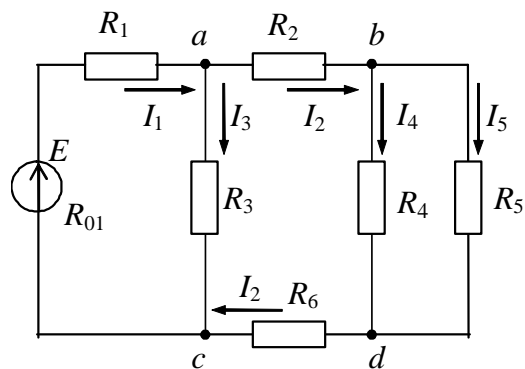


Рис. 1.13

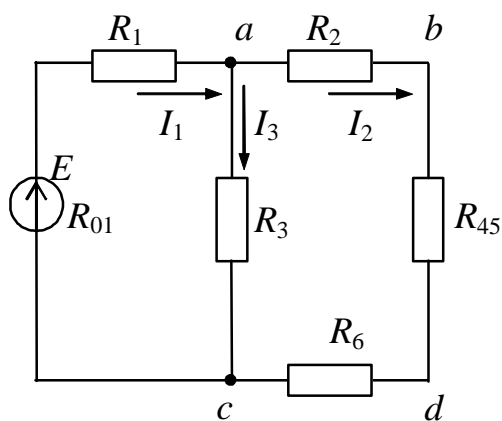


Рис. 1.14

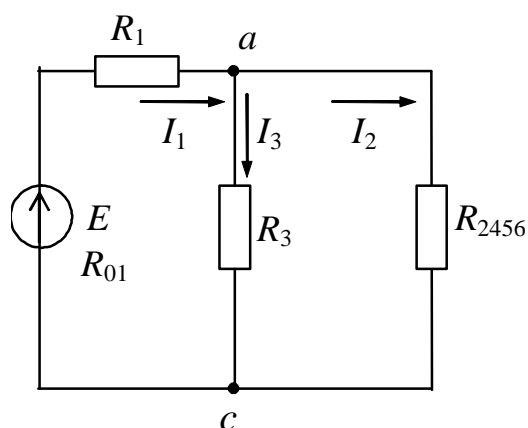


Рис. 1.15

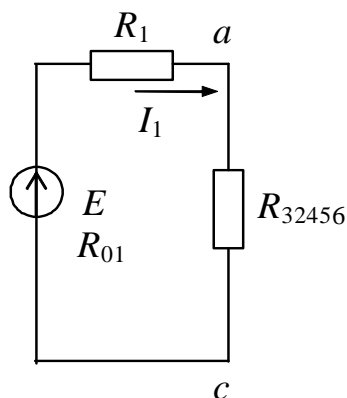


Рис. 1.16

Сопротивления  $R_2$ ,  $R_{45}$  и  $R_6$  соединены последовательно друг с другом, их эквивалентное сопротивление (рис. 1.15)

$$R_{2456} = R_2 + R_{45} + R_6 = 6 + 5,33 + 7 = 18,33, \text{ Ом.}$$

Пассивный элемент  $R_3$  подключен параллельно  $R_{2456}$ ,

$$R_{32456} = \frac{R_3 \cdot R_{2456}}{R_3 + R_{2456}} = \frac{20 \cdot 18,33}{20 + 18,33} \approx 9,56, \text{ Ом.}$$

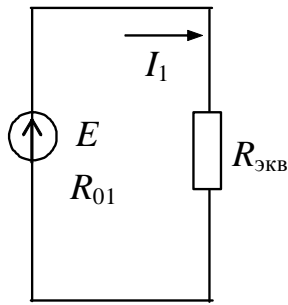


Рис. 1.17

Эквивалентное сопротивление внешней цепи состоит из последовательно соединенных  $R_1$  и  $R_{32456}$  (рис. 1.16, 1.17), поэтому

$$R_{\text{ЭКВ}} = R_1 + R_{32456} = 3 + 9,56 = 12,56, \text{ Ом.}$$

2. Ток, потребляемый схемой (рис. 1.13), в ветви источника питания

$$I_1 = \frac{E}{R_{\text{ЭКВ}} + R_{01}} = \frac{312}{12,56 + 1} = 23,01, \text{ А.}$$

Остальные токи, а также напряжения на отдельных участках определяются путем "развертывания" эквивалентной схемы (рис. 1.17) до исходной (рис. 1.13).

Напряжение на участке "ac" (рис. 1.16)

$$U_{ac} = R_{32456} \cdot I_1 = 9,56 \cdot 23,01 = 218,98, \text{ В,}$$

ток  $I_3$  (рис. 1.15), протекающий по ветви с резистором  $R_3$ ,

$$I_3 = \frac{U_{ac}}{R_3} = \frac{219,98}{20} \approx 11,00, \text{ А,}$$

ток  $I_2$  соответственно

$$I_2 = \frac{U_{ac}}{R_{2456}} = \frac{219,98}{18,33} \approx 12,00, \text{ А.}$$

Напряжение на участке "bd" (рис. 1.14)

$$U_{bd} = R_{45} \cdot I_2 = 5,33 \cdot 12,00 = 63,96, \text{ В;}$$

тогда (рис. 1.13)

$$I_4 = \frac{U_{bd}}{R_4} = \frac{63,96}{8} \approx 8,00, \text{ А,}$$

$$I_5 = \frac{U_{bd}}{R_5} = \frac{63,96}{16} \approx 4,00, \text{ А.}$$

3. Мощность, отдаваемая источником,

$$P_{\text{ист}} = E \cdot I_1 = 312 \cdot 23,01 = 7179,12, \text{ Вт.}$$

Мощность, потребляемая схемой,

$$\begin{aligned} P_{\text{потр}} &= R_{01} \cdot I_1^2 + R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 + R_5 \cdot I_5^2 + R_6 \cdot I_2^2 = \\ &= 1 \cdot 23,01^2 + 3 \cdot 23,01^2 + 6 \cdot 12,00^2 + 20 \cdot 11,00^2 + 8 \cdot 8,00^2 + 16 \cdot 4,00^2 + \\ &+ 7 \cdot 12,00^2 \approx 7179,48, \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Уравнение баланса мощностей:

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}},$$

$$7179,12 \text{ Вт} \approx 7179,48 \text{ Вт.}$$

*Решение 2* (по методу пропорциональных величин)

1. Задаются током величиной 1А в ветви с сопротивлением  $R_5$ :

$$I'_5 = 1 \text{ А};$$

тогда

$$U'_{bd} = R_5 \cdot I'_5 = 16 \cdot 1 = 16, \text{ В},$$

$$I'_4 = \frac{U'_{bd}}{R_4} = \frac{16}{8} = 2, \text{ А};$$

согласно первому закону Кирхгофа

$$I'_2 = I'_4 + I'_5 = 2 + 1 = 3, \text{ А};$$

$$U'_{ac} = R_{2456} \cdot I'_2 = 18,33 \cdot 3 = 54,99, \text{ В},$$

$$I'_3 = \frac{U'_{ac}}{R_3} = \frac{54,99}{20} = 2,75, \text{ А}.$$

Соответственно  $I'_1 = I'_2 + I'_3 = 3 + 2,75 = 5,75, \text{ А};$

согласно второму закону Кирхгофа ЭДС

$$E' = (R_{01} + R_{\text{экв}}) \cdot I'_1 = (1 + 12,56) \cdot 5,75 \approx 77,97, \text{ В}.$$

2. Рассчитывается коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{E}{E'} = \frac{312}{77,97} \approx 4,00.$$

3. Определяются истинные значения токов и напряжений:

$$I_1 = k \cdot I'_1 = 4 \cdot 5,75 = 23,00, \text{ А},$$

$$I_2 = k \cdot I'_2 = 4 \cdot 3 = 12, \text{ А},$$

$$I_3 = k \cdot I'_3 = 4 \cdot 2,75 = 11,00, \text{ А,}$$

$$I_4 = k \cdot I'_4 = 4 \cdot 2 = 8, \text{ А,}$$

$$I_5 = k \cdot I'_5 = 4 \cdot 1 = 4, \text{ А;}$$

$$E = k \cdot E' = 4 \cdot 77,97 \approx 312, \text{ В,}$$

$$U_{ac} = k \cdot U'_{ac} = 4 \cdot 54,99 \approx 219,96, \text{ В} \approx 220, \text{ В,}$$

$$U_{bd} = k \cdot U'_{bd} = 4 \cdot 16 = 64, \text{ В.}$$

### Пример 2

Определить входное сопротивление заданной электрической цепи относительно питающих зажимов, если  $R_1 = R_4 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = R_6 = 9 \text{ Ом}$  (рис.1.18).

### Решение

Поскольку заземленные узлы являются равнопотенциальными ( $\varphi = 0$ ), исходная схема может быть представлена следующим образом (рис. 1.19).

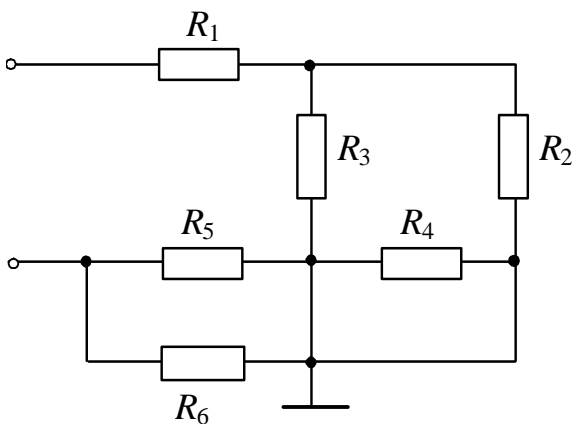


Рис. 1.19

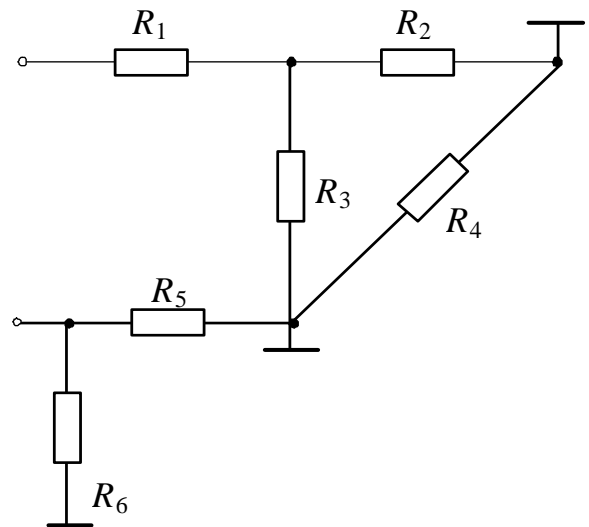


Рис. 1.18

Резистор  $R_4$  закорочен, поэтому не влияет на входное сопротивление (рис. 1.19):

$$R_{\text{вх}} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} =$$

$$= 4 + \frac{3 \cdot 3}{3 + 3} + \frac{9 \cdot 9}{9 + 9} = 10, \text{ Ом.}$$

### 1.1.3. Задачи для самостоятельного решения

#### Задача 1

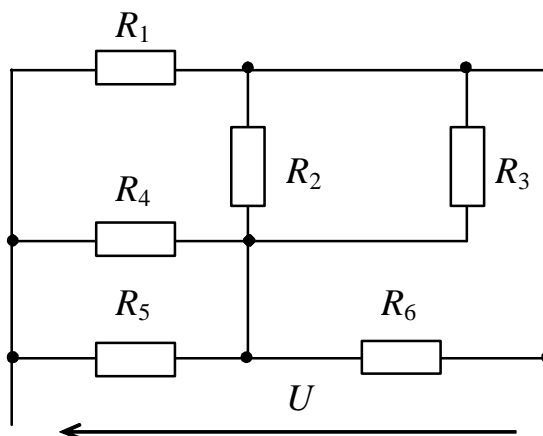
Определить ток, потребляемый схемой, если  $U = 75$  В,

$R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,

$R_3 = 30$  Ом,  $R_4 = 40$  Ом,

$R_5 = 50$  Ом,  $R_6 = 60$  Ом.

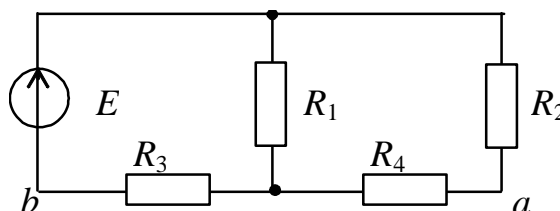
Ответ:  $\approx 10$  А.



#### Задача 2

Определить  $U_{ab}$ , если  $E = 56$  В,  $R_1 = 18$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $R_3 = 12$  Ом,  $R_4 = 6$  Ом.

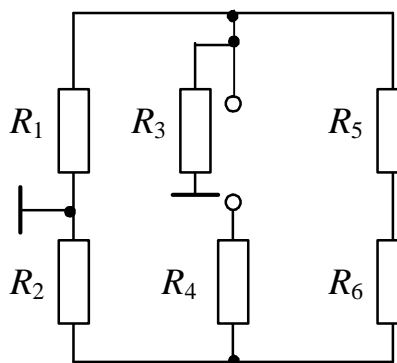
Ответ:  $\approx 50$  В.



#### Задача 3

Определить входное сопротивление относительно питающих зажимов, если  $R_1 = 4$  Ом,  $R_2 = 3,6$  Ом,  $R_3 = 6$  Ом,  $R_4 = 7$  Ом,  $R_5 = R_6 = 3$  Ом.

Ответ: 10 Ом.

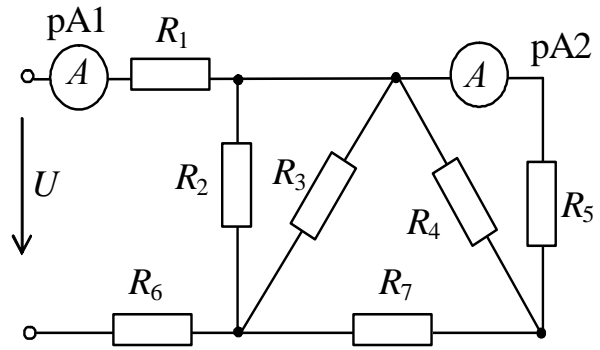




### Задача 4

Определить показания приборов, если  $U = 120 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_6 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_7 = 0,6 \text{ Ом}$ .

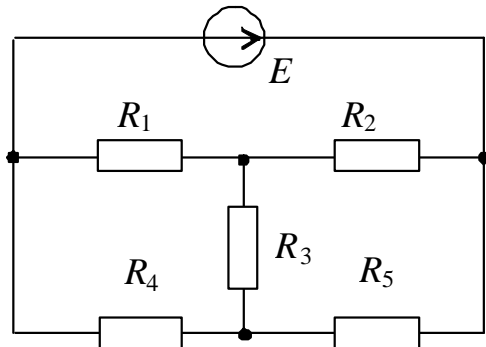
Ответ: 40 А, 8 А.



### Задача 5

Определить токи в ветвях схемы, если  $E = 72 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_2 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = R_4 = R_5 = 6 \text{ Ом}$ .

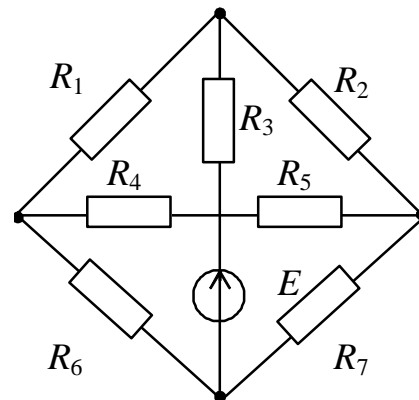
Ответ: 9 А, 3 А, 3 А, 0 А, 6 А, 6 А



### Задача 6

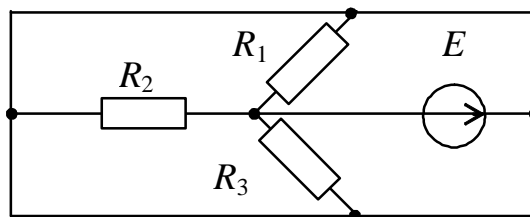
Определить токи во всех ветвях схемы, если  $E = 100 \text{ В}$ ,  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1,2 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 0,2 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 0,3 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_7 = 14,5 \text{ Ом}$ .

Ответ: 5 А, 10 А, 15 А, 6 А, 11 А, 4 А.



### Задача 7

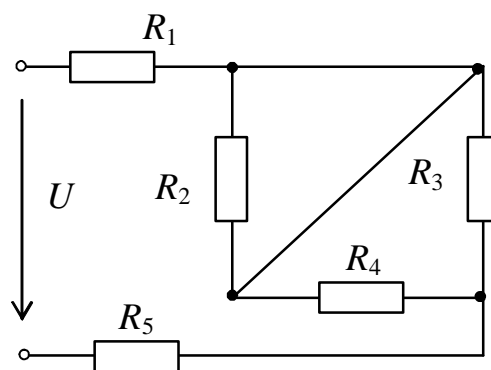
Определить входное сопротивление и токи во всех ветвях схемы, если  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 12 \text{ Ом}$ ,  $E = 12 \text{ В}$ .



Ответ: 2 Ом; 6А, 3А, 2А, 1А.

### Задача 8

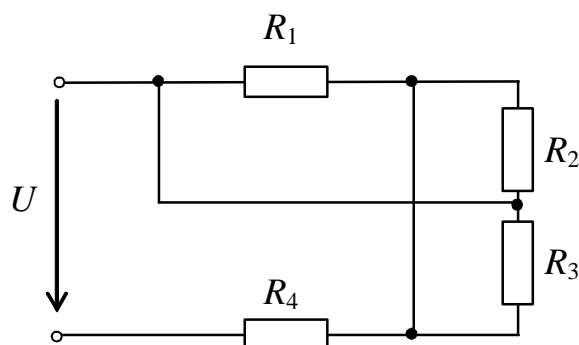
Определить эквивалентное сопротивление и токи в ветвях, если  $U = 20 \text{ В}$ ,  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = R_4 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 2 \text{ Ом}$ .



Ответ: 10 Ом; 2А, 0А, 1А, 1А.

### Задача 9

Определить общее сопротивление и токи во всех ветвях схемы, если  $U = 12 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 2 \text{ Ом}$ .

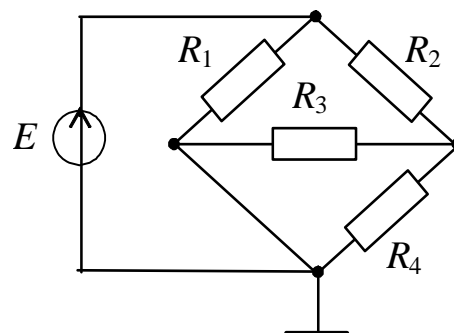


Ответ: 4 Ом; 3А, 1А, 1А, 1А.

### Задача 10

Определить сопротивление относительно зажимов источника ЭДС и все токи, если  $E = 40\text{В}$ ,  $R_1 = 8\text{Ом}$ ,  $R_2 = 5,6\text{ Ом}$ ,  $R_3 = 4\text{ Ом}$ ,  $R_4 = 6\text{ Ом}$ .

Ответ: 4 Ом; 10А, 5А, 5А, 3А, 2А.



## 1.2. Цепи с двумя и более источниками питания

Основным методом расчета сложных электрических цепей, то есть цепей, состоящих из двух и более контуров с несколькими источниками питания, является метод составления уравнений на основе первого и второго законов Кирхгофа. Несмотря на свою универсальность, этот метод трудоемок. Более простым, также основанным на использовании законов Кирхгофа и позволяющим проводить полный анализ схемы (то есть находить токи и падения напряжения во всех ветвях), представляется метод контурных токов. Для случая наличия в схеме только двух потенциальных узлов используется частный случай метода узловых потенциалов – метод междуузлового напряжения (или метод двух узлов).

К методам частичного анализа цепей (для нахождения тока только в одной ветви сколь угодно сложной электрической цепи) относится метод эквивалентного генератора.

### 1.2.1. Применение законов Кирхгофа и метод контурных токов

#### 1.2.1.1. Основные положения и алгоритм решения задач:

а) Расчет электрических цепей методом непосредственного применения уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа

Согласно первому закону Кирхгофа алгебраическая, т.е. с учетом знаков, сумма токов в данном потенциальном узле равна нулю;

при этом токи, подтекающие к узлу, учитываются со знаком "+", а оттекающие – со знаком "-":

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0,$$

где  $n$  – число ветвей, сходящихся в данном потенциальном узле. Или вторая формулировка первого закона Кирхгофа: сумма токов, подтекающих к данному узлу, равна сумме токов, оттекающих от него.

Физически это означает, что электрические заряды не могут накапливаться или исчезать в каком-либо узле схемы.

Второй закон Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма ЭДС, действующих вдоль замкнутого контура, равна алгебраической сумме падений напряжения вдоль этого же замкнутого контура:

$$\sum_{k=1}^m E_k = \sum_{j=1}^l U_j,$$

где  $m$  – число источников ЭДС в замкнутом контуре;  $l$  – количество участков в том же контуре, на которых создаются падения напряжения.

Знаки ЭДС и падений напряжения определяются относительно предварительно выбранного условно положительного направления обхода контура: если направления ЭДС и падения напряжения совпадают с направлением обхода контура, то они учитываются со знаком "+", в противном случае – со знаком "-". Или вторая формулировка второго закона Кирхгофа: алгебраическая сумма напряжений вдоль замкнутого контура равна нулю.

#### *Алгоритм решения задач:*

1. Выбираются условно положительные направления токов в ветвях и обходов независимых замкнутых контуров.

2. Составляются уравнения согласно первому закону Кирхгофа для всех потенциальных узлов за исключением одного (всего  $(y - 1)$  уравнений, где  $y$  – число потенциальных узлов в схеме), так как уравнение для последнего узла всегда будет представлять собой алгебраическую сумму уже записанных (при этом необходимо иметь в виду, что при наличии источника тока ток в его ветви всегда известен:

он равен параметру источника  $J_k$  и направлен в ту же сторону, что и стрелочки на условном обозначении источника на схеме).

3. Составляются уравнения согласно второму закону Кирхгофа для всех  $[n - n_t - (y - 1)]$  независимых замкнутых контуров, где  $n$  – общее число ветвей в схеме,  $n_t$  – число ветвей, содержащих источники тока (ветвь с источником тока не позволяет считать контур замкнутым, поскольку внутреннее сопротивление идеального источника тока бесконечно большое).

4. В результате решения записанной системы из  $(n - n_t)$  уравнений определяются величины всех неизвестных токов (токи, имеющие отрицательные значения, в действительности имеют направление, противоположное условно принятому).

#### *б) Расчет электрических цепей методом контурных токов*

Контурным током называется условный (расчетный) ток, замыкающийся по данному контуру. Метод контурных токов позволяет уменьшить число решаемых уравнений до  $[n - n_t - (y - 1)]$ , которые составляются по второму закону Кирхгофа относительно неизвестных контурных токов для замкнутых независимых контуров. При составлении уравнений необходимо учитывать, что на любом пассивном элементе создается падение напряжения не только от собственного контурного тока (тока того контура, в который входит данный элемент), но и от тока соседнего контура; в случае, если рассматриваемая ветвь является смежной, т.е. общей для этих контуров, знак падения напряжения определяется относительно направления обхода того контура, для которого составляется уравнение: если направление падения напряжения на рассматриваемом элементе совпадает с направлением обхода анализируемого контура на данном участке, то это падение напряжения учитывается в уравнении положительным членом, в противном случае – отрицательным.

Действие источников тока учитывается следующим образом: сопротивление участка цепи, к которому подключается идеальный источник тока, можно считать внутренним сопротивлением реального источника тока (параллельная схема замещения источника), следовательно, на нем создается падение напряжения и от собственного тока источника  $J_k$ ; знак падения напряжения определяется, как обычно, относительно направления обхода контура, для которого записывается уравнение.

Токи в ветвях определяются через рассчитанные контурные следующим образом: токи во внешних, принадлежащих только данному контуру, ветвях равны собственным контурным токам с учетом знака (если ток в ветви совпадает по направлению с контурным на данном участке, то он равен контурному току со знаком "+", если направлен противоположно – со знаком "-"); токи в смежных ветвях равны алгебраической сумме соответствующих контурных токов (если контурный ток, замыкаясь по рассматриваемой ветви, направлен в ту же сторону, что и ток данной ветви, то он учитывается со знаком "+", в противном случае – со знаком "-").

Проверка достоверности рассчитанных значений токов во всех ветвях схемы производится путем подстановки их в уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа (уравнения, соответствующие первому закону Кирхгофа, при подстановке в них числовых значений всегда будут выполняться, поскольку на их основании определялись токи в ветвях относительно контурных).

Кроме того, проверка правильности расчета может быть произведена путем подстановки найденных числовых значений токов в ветвях в уравнение баланса мощностей, составленное на основе закона сохранения энергии.

#### *Алгоритм решения задач:*

1. Выбираются условно положительные направления токов в ветвях, обходов независимых замкнутых контуров, а также контурных токов (обычно направления контурных токов выбирают совпадающими с направлениями обходов контуров).

2. Составляются уравнения согласно второму закону Кирхгофа для всех  $[n - n_r - (y - 1)]$  независимых замкнутых контуров относительно контурных токов (контурные токи индексируются римскими цифрами в отличие от токов в ветвях, обозначаемых арабскими).

При этом слагаемые в уравнениях располагаются таким образом, что на первом месте должен стоять член, соответствующий падению напряжения, создаваемому первым контурным током, на втором месте – вторым контурным током и т.д., свободные члены выносятся в правые части уравнений. Тогда коэффициенты главной диагонали представляют собой положительные суммы величин сопротивлений, а коэффициенты в каждой поперечной диагонали равны между собой (симметричны) относительно главной диагонали.

3. Любым из известных способов, например, методом Гаусса, определяются значения контурных токов, удовлетворяющие записанной системе.

4. Находятся токи в ветвях по рассчитанным значениям контурных токов.

### 1.2.1.2. Примеры решения задач

#### Пример 1

В электрической схеме, имеющей следующие параметры:  $E_1=52\text{В}$ ,  $E_2=69\text{В}$ ,  $R_{01}=1\text{ Ом}$ ,  $R_{02}=2\text{ Ом}$ ,  $R_3=5\text{ Ом}$ ,  $R_4=2\text{ Ом}$ ,  $R_5=6\text{ Ом}$ ,  $R_6=3\text{ Ом}$ , рассчитать токи во всех ветвях и составить уравнение баланса мощностей (рис. 1.20).

#### Решение

а) На основе уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа:

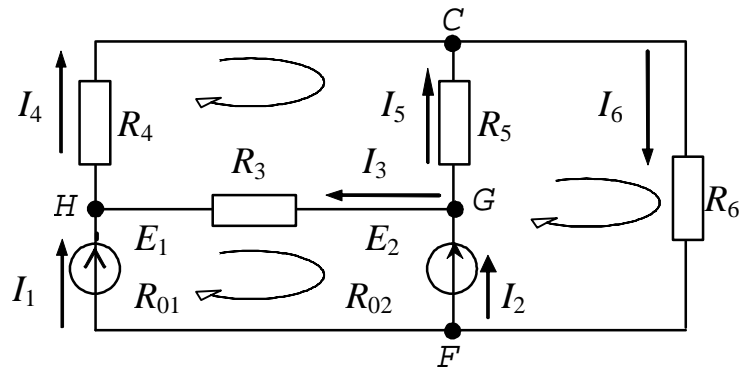


Рис. 1.20

1. Выбираются условно положительные направления токов в ветвях.

2. Составляются уравнения на основе первого закона Кирхгофа для любых трех потенциальных узлов из четырех ( $H$ ,  $C$ ,  $G$ ,  $F$ ), имеющих в схеме:

$$\text{для узла } H \rightarrow I_1 + I_3 - I_4 = 0,$$

$$\text{для узла } C \rightarrow I_4 + I_5 - I_6 = 0,$$

$$\text{для узла } G \rightarrow I_2 - I_3 - I_5 = 0.$$

3. Составляются уравнения на основе второго закона Кирхгофа для любых трех независимых замкнутых контуров с учетом предварительно выбранных положительных направлений обхода этих контуров (например, по часовой стрелке):

$$\text{для контура } HCGH \rightarrow R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 - R_5 \cdot I_5 = 0,$$

для контура  $HGFH \rightarrow R_{01} \cdot I - R_{02} \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 = E_1 - E_2$ ,

для контура  $CFGC \rightarrow R_{02} \cdot I_2 + R_5 \cdot I_5 + R_6 \cdot I_6 = E_2$ .

4. Из решения системы записанных выше шести уравнений получаются следующие значения токов:

$$I_1 = 5 \text{ А}, I_2 = 6 \text{ А}, I_3 = 2 \text{ А}, I_4 = 7 \text{ А}, I_5 = 4 \text{ А}, I_6 = 11 \text{ А}.$$

Поскольку полученные значения всех токов положительны, предварительно выбранные их направления верны.

б) Согласно методу контурных токов:

1. Выбираются условно положительные направления токов в ветвях (см. схему), а также контурных токов в трех независимых контурах (например, по часовой стрелке).

2. Составляются уравнения по второму закону Кирхгофа относительно контурных токов для трех ранее выбранных независимых контуров:

$$(R_3 + R_4 + R_5) \cdot I_{\text{I}} - R_3 \cdot I_{\text{II}} - R_5 \cdot I_{\text{III}} = 0,$$

$$-R_3 \cdot I_{\text{I}} + (R_{01} + R_3 + R_{02}) \cdot I_{\text{II}} - R_{02} \cdot I_{\text{III}} = E_1 - E_2,$$

$$-R_5 \cdot I_{\text{I}} - R_{02} \cdot I_{\text{II}} + (R_{02} + R_5 + R_6) \cdot I_{\text{III}} = E_2.$$

3. Решение согласно методу Гаусса дает следующие результаты:

$$I_{\text{I}} = 7 \text{ А}, I_{\text{II}} = 5 \text{ А}, I_{\text{III}} = 11 \text{ А}.$$

4. Определяются значения токов в ветвях через рассчитанные контурные:

$$I_1 = I_{\text{I}} = 7 \text{ А}, I_2 = I_{\text{III}} - I_{\text{II}} = 6 \text{ А},$$

$$I_4 = I_{\text{I}} = 7 \text{ А}, I_3 = I_{\text{I}} - I_{\text{II}} = 2 \text{ А},$$

$$I_6 = I_{\text{III}} = 11 \text{ А}, I_5 = I_{\text{III}} - I_{\text{I}} = 4 \text{ А}.$$

5. Уравнение баланса мощностей на основе закона сохранения энергии для рассматриваемой схемы записывается так:

$$E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 = R_{01} \cdot I_1^2 + R_{02} \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 + R_5 \cdot I_5^2 + R_6 \cdot I_6^2,$$

$$52 \cdot 5 + 69 \cdot 6 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 7^2 + 6 \cdot 4^2 + 3 \cdot 11^2,$$

$$674 \text{ Вт} = 674 \text{ Вт}.$$

*Пример 2*

В заданной электрической схеме, имеющей следующие параметры:  $E_1 = 80 \text{ В}$ ,  $E_2 = 70 \text{ В}$ ,  $E_3 = 20 \text{ В}$ ,  $E_4 = 50 \text{ В}$ ,  $J_k = 5 \text{ А}$ ,  $R_1 = 40 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 25 \text{ Ом}$ , рассчитать токи во всех ветвях и составить уравнение баланса мощностей (рис. 1.21).



## Решение

а) На основе уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа:

1. Выбираются условно положительные направления токов в ветвях.

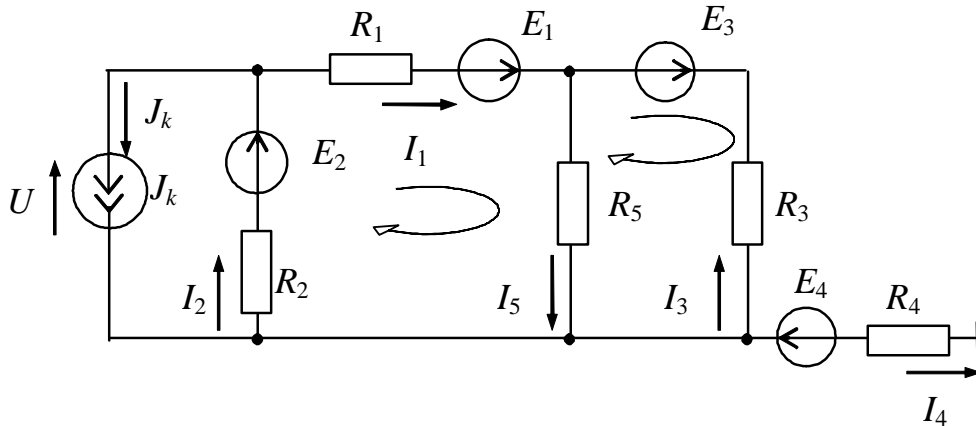


Рис. 1.21

2. Составляются уравнения на основе первого закона Кирхгофа для любых двух из трех потенциальных узлов, имеющих в схеме:

$$-I_1 + I_2 - J_k = 0,$$

$$I_1 + I_3 - I_5 = 0;$$

ток  $I_4 = 0$ , так как ветвь с элементами  $E_4$ ,  $R_4$  заземлена и больше заземленных ветвей нет.

3. Составляются уравнения на основе второго закона Кирхгофа для любых двух независимых замкнутых контуров с учетом предварительно выбранных положительных направлений обхода этих контуров (например, по часовой стрелке):

$$R_2 \cdot I_2 + R_1 \cdot I_1 + R_5 \cdot I_5 = E_2 + E_1,$$

$$-R_5 \cdot I_5 - R_3 \cdot I_3 = E_3.$$

4. Из решения системы записанных выше четырех уравнений следует:

$$I_1 = 2 \text{ А}, I_2 = 7 \text{ А}, I_3 = -2 \text{ А}, I_4 = 0, I_5 = 0.$$

Поскольку ток  $I_3$  отрицателен, истинное направление его в соответствующей ветви схемы противоположно.

б) Согласно методу контурных токов:

1. Выбираются условно положительные направления токов в ветвях (см. схему), а также контурных токов в двух независимых замкнутых контурах (например, по часовой стрелке).

2. Составляются уравнения по второму закону Кирхгофа относительно контурных токов для обоих ранее выбранных независимых замкнутых контуров:

$$\begin{aligned}(R_1 + R_2 + R_5) \cdot I_I - R_5 \cdot I_{II} + R_2 \cdot J_k &= E_1 + E_2, \\ -R_5 \cdot I_I + (R_3 + R_5) \cdot I_{II} &= E_3.\end{aligned}$$

3. Решение согласно методу Гаусса приводит к следующим результатам:

$$I_I = 2\text{А}, \quad I_{II} = 2\text{А}.$$

4. Определяются значения токов в ветвях через рассчитанные контурные:

$$I_1 = I_I = 2\text{А}, \quad I_2 = I_I + J_k = 7\text{А}, \quad I_3 = -I_{II} = -2\text{А}, \quad I_5 = I_I - I_{II} = 0.$$

5. Уравнение баланса мощностей согласно закону сохранения энергии:

$$E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 - E_3 \cdot I_3 + U \cdot J_k = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_5 \cdot I_5^2,$$

где напряжение на зажимах источника тока на основе закона Ома для активного участка цепи, содержащего элементы  $E_2$ ,  $R_2$ ,

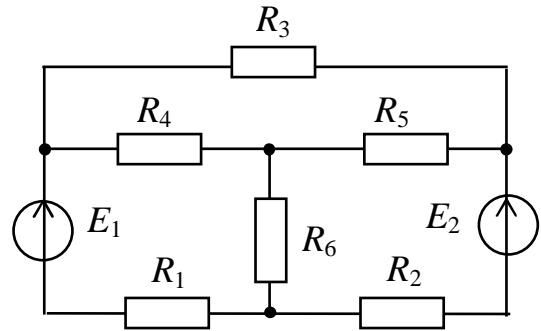
$$U = -E_2 + R_2 \cdot I_2,$$

$$80 \cdot 2 + 70 \cdot 7 - 20 \cdot (-2) + (-70 + 10 \cdot 7) \cdot 5 = 40 \cdot 2^2 + 10 \cdot 7^2 + 10 \cdot (-2)^2 + 25 \cdot 0^2,$$
$$690\text{Вт} = 690\text{Вт}.$$

1.2.1.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

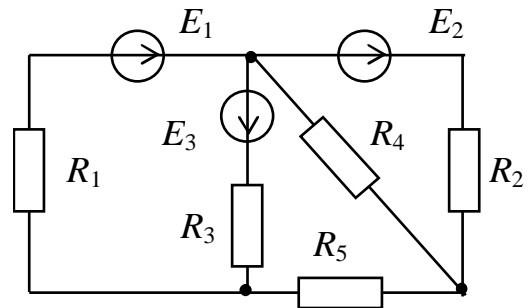
Определить токи в ветвях, если  $E_1 = 46$  В,  $E_2 = 62$  В,  $R_1 = R_2 = R_6 = 2$  Ом,  $R_3 = 1,5$  Ом,  $R_4 = 4$  Ом,  $R_5 = 10$  Ом.



Ответ: 2 А, 7 А, 4 А, 6 А, 3 А, 9 А.

Задача 2

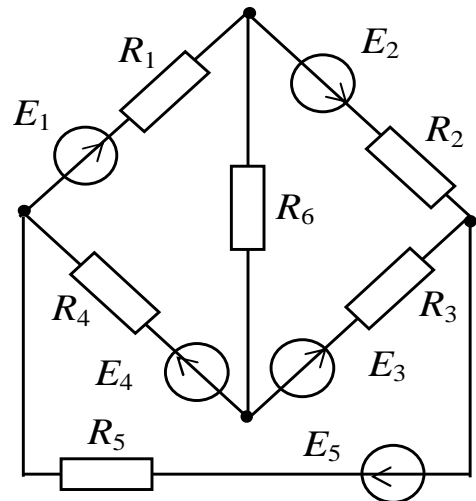
Определить токи в ветвях, если  $E_1 = 6$  В,  $E_2 = 4$  В,  $E_3 = 5$  В,  $R_1 = R_3 = 5$  Ом,  $R_2 = 1$  Ом,  $R_4 = R_5 = 2$  Ом.



Ответ: 2 А, 2 А, 1 А, 1 А, 1 А.

Задача 3

Определить токи в ветвях и составить баланс мощностей, если  $E_1 = 18$  В,  $E_2 = E_5 = 5$  В,  $E_3 = 15$  В,  $E_4 = 3$  В,  $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 1$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $R_6 = 5$  Ом.

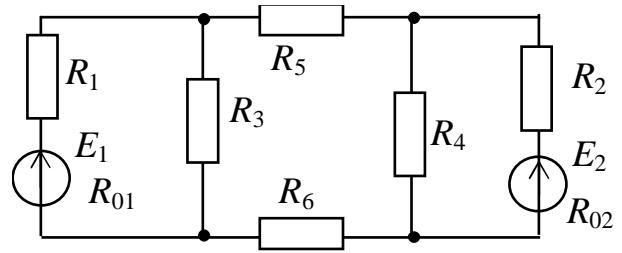


Ответ: 8 А, 5 А, 5 А, -2 А, 10 А, 3 А; 288 Вт.

### Задача 4

Определить токи во всех ветвях схемы, если  $E_1 = 472 \text{ В}$ ,  $E_2 = 104 \text{ В}$ ,

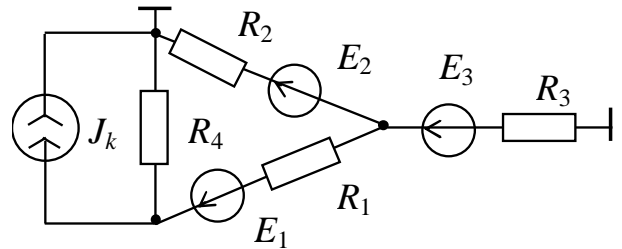
$R_{01} = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_{02} = 2 \text{ Ом}$ ,  
 $R_2 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 50 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 6 \text{ Ом}$ ,  
 $R_5 = 11,5 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 20 \text{ Ом}$ .



Ответ: 18 А, 4 А, 8 А, 14 А,  
 $\approx 10 \text{ А}$ ,  $\approx 10 \text{ А}$ .

### Задача 5

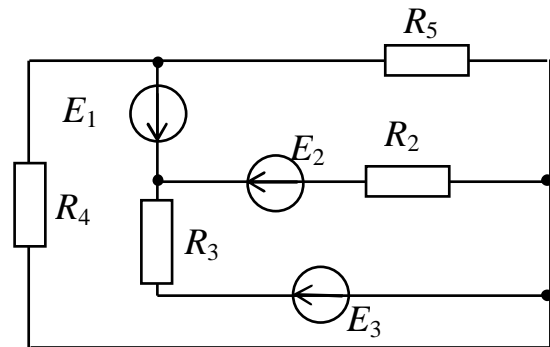
Определить токи во всех ветвях схемы и составить баланс мощностей, если  $E_1 = 30 \text{ В}$ ,  $E_2 = 20 \text{ В}$ ,  $E_3 = 80 \text{ В}$ ,  $J_k = 7 \text{ А}$ ,  $R_1 = 25 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 20 \text{ Ом}$ .



Ответ: 4 А, 3 А, 7 А, 3 А;  
 1160 Вт.

### Задача 6

Определить токи в ветвях схемы и составить баланс мощностей, если  $E_1 = 24 \text{ В}$ ,  $E_2 = 96 \text{ В}$ ,  $E_3 = 48 \text{ В}$ ,  $R_2 = R_3 = 16 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = R_5 = 8 \text{ Ом}$ .



Ответ:  $-4 \text{ А}$ ,  $3,5 \text{ А}$ ,  $0,5 \text{ А}$ ,  
 $-2 \text{ А}$ ,  $2 \text{ А}$ ; 264 Вт.

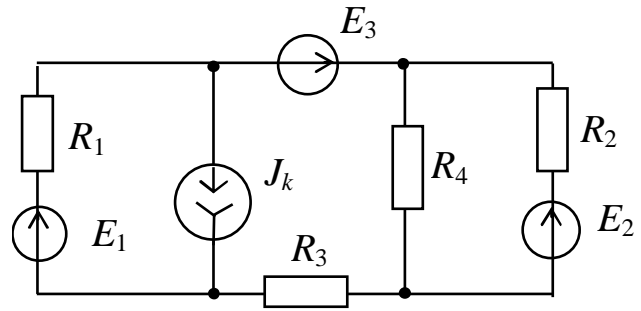
### Задача 7

Найти распределение токов в системе предыдущей задачи, если ЭДС  $E_3$  будет увеличена в два раза, т.е.  $E_3' = 2 E_3 = 96 \text{ В}$ .

Ответ:  $-6 \text{ А}$ ,  $3 \text{ А}$ ,  $3 \text{ А}$ ,  $-3 \text{ А}$ ,  $3 \text{ А}$ .

### Задача 8

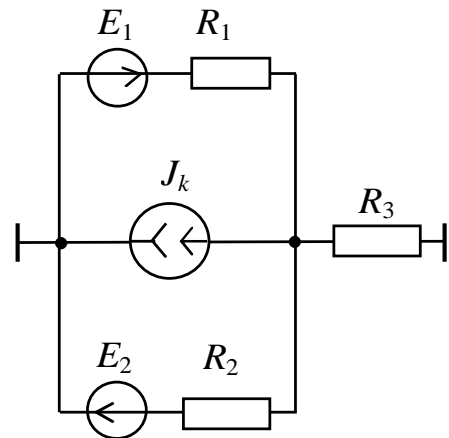
Рассчитать токи и составить баланс мощностей, если  $E_1 = 50 \text{ В}$ ,  $E_2 = 10 \text{ В}$ ,  $E_3 = 16 \text{ В}$ ,  $J_k = 5 \text{ А}$ ,  $R_1 = R_3 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 30 \text{ Ом}$ .



Ответ: 7 А, 1 А, 2 А, 1 А; 262 Вт.

### Задача 9

Определить все токи и составить баланс мощностей, если  $E_1 = 6 \text{ В}$ ,  $E_2 = 4 \text{ В}$ ,  $J_k = 7 \text{ А}$ ,  $R_1 = R_3 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1 \text{ Ом}$ .

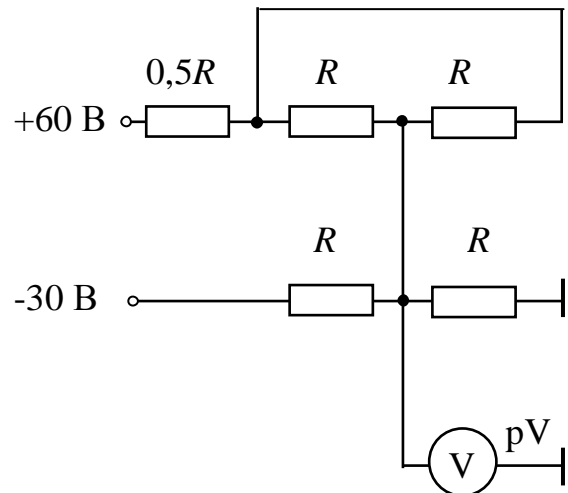


Ответ: 5 А, 0 А, -2 А; 58 Вт.

### Задача 10

Определить показание вольтметра и токи в ветвях, если  $R = 10 \text{ Ом}$ .

Ответ: 10 В;  $50/R \text{ А}$ ,  $25/R \text{ А}$ ,  $25/R \text{ А}$ ,  $40/R \text{ А}$ ,  $10/R \text{ А}$ .



## 1.2.2. Метод междуузлового напряжения (метод двух узлов)

### 1.2.2.1. Основные положения и алгоритм решения задач

Данный метод применяется при анализе многоконтурной электрической схемы, имеющей только два потенциальных узла (любое

число активных и пассивных ветвей включены параллельно друг другу).

Метод междуузлового напряжения основан на использовании первого закона Кирхгофа и закона Ома (соответственно для активного и пассивного участков цепи).

Предварительно осуществляется выбор условно положительных направлений токов во всех ветвях схемы и напряжения между двумя узлами, например, напряжения  $U_{ab}$ , которое на схеме всегда направлено от узла, обозначаемого первой буквой индекса (в данном случае "a").

Согласно первому закону Кирхгофа для одного из двух потенциальных узлов составляется уравнение относительно токов в ветвях, затем каждый ток заменяется выражением на основе закона Ома для соответствующей ветви (активной или пассивной), причем во всех этих выражениях только одно неизвестное – напряжение между двумя узлами.

Путем решения этого уравнения относительно неизвестного напряжения и подстановки полученного значения в выражения на основе закона Ома определяются величины токов во всех ветвях схемы.

#### *Алгоритм решения задач:*

1. Осуществляется выбор условно положительных направлений токов во всех ветвях схемы и напряжения между двумя узлами.

2. Записывается выражение для неизвестного напряжения между двумя узлами: оно всегда равно дроби, в знаменателе которой "стоит" сумма проводимостей всех ветвей, а в числителе – алгебраическая сумма узловых токов.

Узловой ток в качестве слагаемого в числитель "поставляет" только активная ветвь: если ветвь содержит источник(и) ЭДС, то узловой ток равен  $G_{\text{экв}} \cdot E_{\text{экв}}$ , где  $G_{\text{экв}}$  – эквивалентная проводимость ветви (величина, обратная эквивалентному сопротивлению), а  $E_{\text{экв}}$  – эквивалентная ЭДС рассматриваемой ветви (если в ветви несколько источников ЭДС, направленных в одну сторону, то эквивалентная ЭДС равна их сумме; если они направлены в противоположные стороны, то – алгебраической сумме, т.е. с учетом знака, и направлена в сторону большей ЭДС); если ветвь содержит источник тока с параметром  $J_k$ , то узловой ток равен этому параметру  $J_k$ .

Таким образом, если потенциальные узлы в схеме обозначить буквами  $a$  и  $b$ , то напряжение между двумя узлами, направленное в схеме от узла  $a$  к узлу  $b$ :

$$U_{ab} = \frac{\pm \sum_{l=1}^n G_{\text{ЭКВ}_l} \cdot E_{\text{ЭКВ}_l} \pm \sum_{i=1}^m J_{k_i}}{\sum_{j=1}^h G_{\text{ЭКВ}_j}},$$

где  $n$  – число ветвей с источниками ЭДС;  $m$  – число ветвей с источниками тока;  $h$  – общее число ветвей в схеме, за исключением ветвей, содержащих источники тока.

Знак узлового тока определяется следующим образом: если источник питания в ветви направлен к узлу, обозначаемому первой буквой индекса искомого напряжения, то узловой ток положителен, если от него – то узловой ток отрицателен.

В знаменателе выражения для определения напряжения между двумя узлами учитывается, что проводимость ветви, содержащей источник тока, равна нулю, так как внутреннее сопротивление идеального источника тока (а в схемах используются только идеальные элементы) стремится к бесконечности.

3. Токи во всех ветвях схемы определяются из выражений, составленных на основе закона Ома для активного или соответственно пассивного участков цепи, с использованием найденного числового значения напряжения между двумя узлами.

4. Проверка рассчитанных числовых значений токов может быть осуществлена путем подстановки их в уравнение, составленное по первому закону Кирхгофа для любого из двух потенциальных узлов схемы.

### 1.2.2.2. Примеры решения задач

#### Пример 1

В заданной электрической схеме, имеющей следующие параметры:  $E_1 = 336$  В,  $R_{01} = 2$  Ом,  $E_2 = 176$  В,  $R_{02} = 1$  Ом,  $E_3 = 30$  В,  $R_{03} = 2,5$  Ом,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 7$  Ом,  $R_3 = 7,5$  Ом,  $R_4 = 12$  Ом, рассчитать токи во всех ветвях (рис. 1.22).

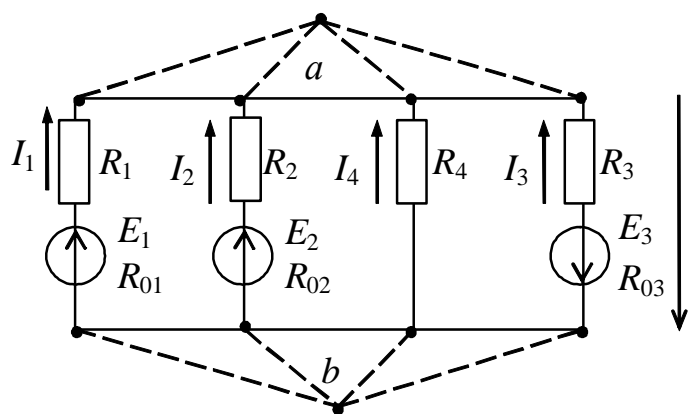


Рис. 1.22

#### Решение

1. Напряжение между двумя узлами  $U_{ab}$  с учетом направлений ЭДС относительно узла, обозначаемого первой буквой индекса искомого напряжения,

$$U_{ab} = \frac{+G_1 E_1 + G_2 E_2 - G_3 E_3}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} = \frac{\frac{336}{12} + \frac{176}{8} - \frac{30}{10}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = 120, \text{ В},$$

где

$$G_1 = \frac{1}{R_1 + R_{01}} = \frac{1}{12}, \text{ См}, \quad G_2 = \frac{1}{R_2 + R_{02}} = \frac{1}{8}, \text{ См},$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3 + R_{03}} = \frac{1}{10}, \text{ См},$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{12}, \text{ См} - \text{ проводимости соответствующих ветвей.}$$

2. Токи в ветвях на основе закона Ома для активного или пассивного участков цепи с учетом предварительно выбранных условно положительных их направлений:



$$I_1 = G_1 \cdot (E_1 - U_{ab}) = \frac{1}{12} \cdot (336 - 120) = 18, \text{ А},$$

$$I_2 = G_2 \cdot (E_2 - U_{ab}) = \frac{1}{8} \cdot (176 - 120) = 7, \text{ А},$$

$$I_3 = G_2 \cdot (-E_3 - U_{ab}) = \frac{1}{10} \cdot (-30 - 120) = -15, \text{ А},$$

$$I_4 = -G_4 \cdot U_{ab} = -\frac{1}{12} \cdot 120 = -10, \text{ А}.$$

Проверка по первому закону Кирхгофа (для любого из двух узлов) подтверждает правильность расчетов:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 18 + 7 - 15 - 10 = 0,$$

причем отрицательные значения токов  $I_3$  и  $I_4$  "говорят" о том, что действительные их направления противоположны выбранным.

### Пример 2

Определить показание вольтметра, если

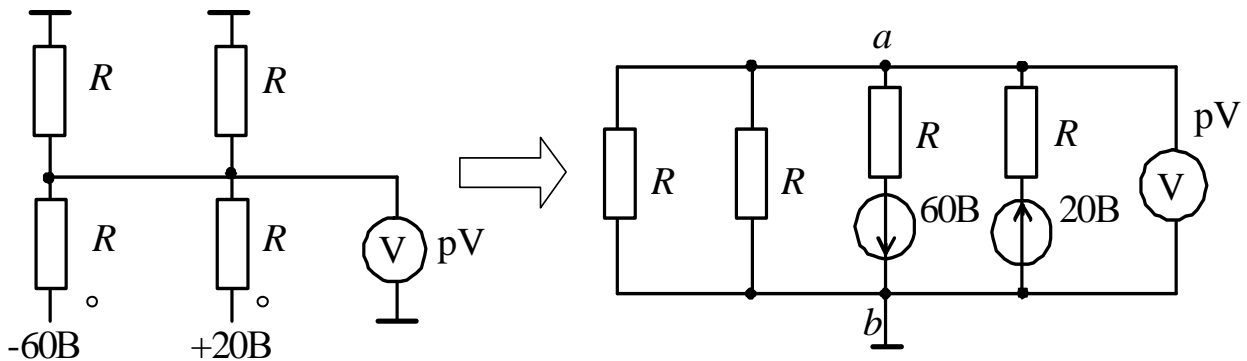


Рис. 1.23

### Решение

1. Исходная схема представляется в виде, более удобном для анализа (рис. 1.23).

2. Показание вольтметра есть не что иное, как абсолютная величина напряжения между двумя узлами  $U_{ab}$ :

$$U_{ab} = \left| \frac{\frac{-60}{R} + \frac{20}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} \right| = 10, \text{ В.}$$

Пример 3

В заданной электрической схеме, имеющей следующие параметры:  $E_1 = 20 \text{ В}$ ,  $J_k = 1 \text{ А}$ ,  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ , определить токи во всех ветвях (рис.1.24).

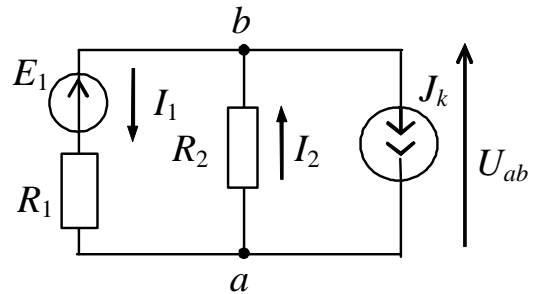


Рис. 1.24

Решение

1. Напряжение между двумя узлами  $U_{ab}$  с учетом направлений ЭДС и тока источников питания

$$U_{ab} = \frac{-\frac{E_1}{R_1} + I_k}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{-\frac{20}{2} + 1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = -12, \text{ В.}$$

2. Токи в ветвях на основе закона Ома соответственно для активного и пассивного участков цепи с учетом предварительно выбранных условно положительных их направлений:

$$I_1 = \frac{-(E_1 + U_{ab})}{R_1} = \frac{-(20 - 12)}{2} = -4, \text{ А}, \quad I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = \frac{-12}{4} = -3, \text{ А.}$$

Проверка по первому закону Кирхгофа (для одного из двух узлов) подтверждает правильность расчетов:

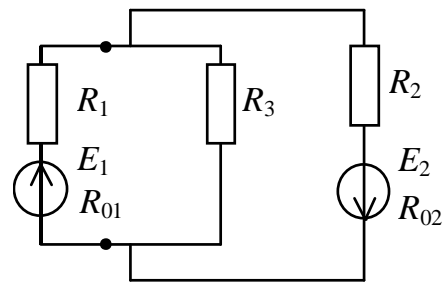
$$I_1 - I_2 + J_k = -4 - (-3) + 1 = 0,$$

но отрицательные значения обоих токов "говорят", что их истинные направления в ветвях противоположны выбранным.

### 1.2.2.3. Задачи для самостоятельного решения

#### Задача 1

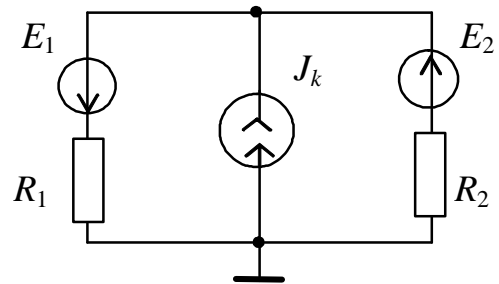
Рассчитать токи в ветвях схемы, если  $E_1=147$  В,  $E_2 = 114$  В,  $R_{01} = 2$  Ом,  $R_{02}= 1$  Ом,  $R_1= 6$  Ом,  $R_2= 2$  Ом,  $R_3= 9$  Ом.



Ответ: 22,68 А, 26,51 А, – 3,83 А.

#### Задача 2

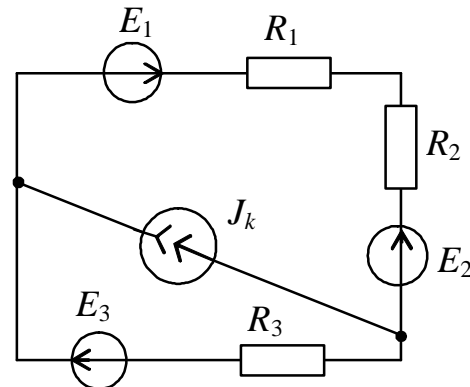
Определить токи, если  $E_1= E_2 = 10$  В,  $J_k= 10$  А,  $R_1=R_2= 5$  Ом.



Ответ: 7 А, – 3 А.

#### Задача 3

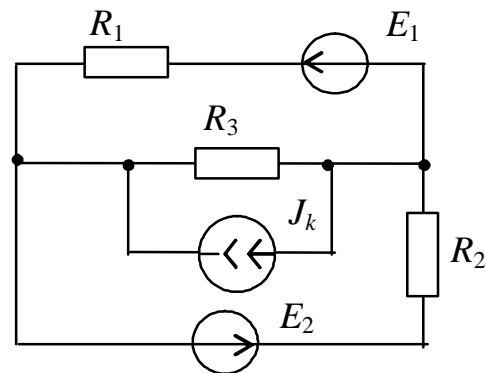
Рассчитать все токи, если  $E_1 = 15$  В,  $E_2= 13$  В,  $E_3 = 12$  В,  $J_k= 5$  А,  $R_1 = R_2 = 10$  Ом,  $R_3 = 2$  Ом.



Ответ: 1,09 А, – 3,91 А.

#### Задача 4

Определить токи во всех ветвях схемы и составить баланс мощностей, если  $E_1 = 4$  В,  $E_2 = 6$  В,  $J_k = 7$  А,  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = R_3 = 2$  Ом.

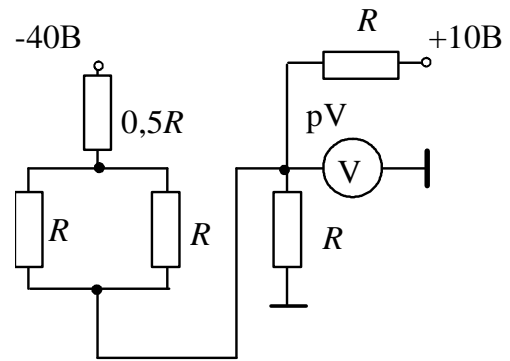


Ответ: 0 А, 5 А, 2 А; 58 Вт.

### Задача 5

Определить показание вольтметра.

Ответ: 10 В.



### 1.2.3. Метод эквивалентного генератора

#### 1.2.3.1. Основные положения и алгоритм решения задач.

Данный метод применяется в том случае, когда необходимо определить ток или исследовать режим работы только одной ветви сложной электрической цепи. Метод эквивалентного генератора, или метод эквивалентного активного двухполюсника, основывается на теореме об активном двухполюснике, согласно которой вся сложная электрическая цепь по отношению к ветви с искомым током рассматривается как эквивалентный источник (генератор) с ЭДС  $E_{\text{ЭГ}}$  и внутренним сопротивлением  $R_{\text{ЭГ}}$ . На эквивалентной схеме замещения эквивалентный генератор соединяется последовательно с исследуемой ветвью. Параметры  $E_{\text{ЭГ}}$  и  $R_{\text{ЭГ}}$  определяются по данным режимов холостого хода и короткого замыкания, поэтому описываемый метод иногда называют методом холостого хода и короткого замыкания.

*Алгоритм решения задач:*

1. Выбирается условно положительное направление тока в исследуемой ветви.

2. Составляется эквивалентная схема замещения в виде последовательного соединения эквивалентного генератора и ветви с неизвестным током. Направление ЭДС эквивалентного генератора выбирается произвольно, главное, впоследствии учесть, что направление напряжения противоположно направлению ЭДС. Если исследуемая ветвь включает в себя в общем случае источник ЭДС  $E$  и резистор  $R$ , то эквивалентная схема замещения выглядит так (рис. 1.25):

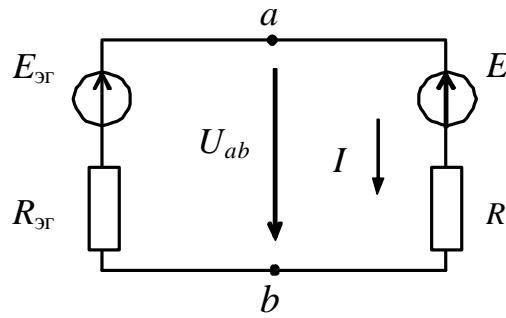


Рис. 1.25

3. На основе второго закона Кирхгофа записывается выражение для нахождения тока. В рассматриваемом случае

$$I = \frac{E_{\text{эГ}} - E}{R_{\text{эГ}} + R}, \quad (1.1)$$

где параметры эквивалентного генератора  $E_{\text{эГ}}$  и  $R_{\text{эГ}}$  являются неизвестными.

4. ЭДС эквивалентного генератора, как обычно, определяется по режиму холостого хода  $E_{\text{эГ}} = U_{ab_{\text{ХХ}}}$ , т.е. при разорванной ветви с не-

известным током; причем  $a$  и  $b$  – зажимы, к которым подключается ветвь с искомым током в заданной сложной электрической цепи.

Для конкретной схемы эквивалентному генератору, работающему на холостом ходу, соответствует исходная схема без исследуемой ветви. Любым из известных методов (методом контурных токов; по уравнениям, составленным согласно первому и второму законам Кирхгофа; или методом междуузлового напряжения, но для случая только двух потенциальных узлов) определяются токи в ветвях, а затем на основе второго закона Кирхгофа – напряжение между теми точками, к которым в исходной схеме подключена исследуемая ветвь.

5. Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора  $R_{\text{эГ}}$  также определяется по схеме, соответствующей эквивалентному генератору, работающему на холостом ходу, но преобразованной в пассивный двухполюсник (ПД) следующим образом: идеальные источники ЭДС заменяются их внутренними (нулевыми) сопротивлениями (т.е. закорачиваются), а ветви с идеальными источниками тока разрываются, что адекватно введению бесконечно больших их внутренних сопротивлений и соответствует холостому ходу источников тока. Таким образом,  $R_{\text{эГ}} = R_{ab_{\text{ХХПД}}}$ , где  $R_{ab_{\text{ХХПД}}}$  – общее (входное, эквивалентное) сопротивление пассивного двухполюсника, полученного из

схемы эквивалентного генератора, работающего на холостом ходу, относительно тех зажимов, к которым в исходной схеме подключается ветвь с неизвестным током.

6. Путем подстановки найденных значений  $E_{\text{эГ}}$  и  $R_{\text{эГ}}$  в формулу (1.1) рассчитывается величина тока в заданной ветви.

### 1.2.3.2. Примеры решения задач

#### Пример 1

В заданной электрической схеме, имеющей следующие параметры:  $E = 12$  В,  $R_1 = 6$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $R_3 = R_4 = 12$  Ом,  $R_5 = 4$  Ом, рассчитать ток в ветви, содержащей  $R_2$  (рис. 1.26).

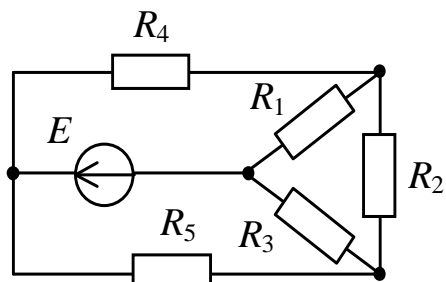


Рис. 1.26

#### Решение

1. Выбирается условно положительное направление неизвестного тока в ветви с  $R_2$  и составляется эквивалентная схема замещения (рис. 1.27).

2. Искомый ток на основе второго закона Кирхгофа

$$I = \frac{E_{\text{эГ}}}{R_{\text{эГ}} + R_2},$$

где  $E_{\text{эГ}} = U_{ab_{\text{хх}}}$  – ЭДС эквивалентного генератора;

$R_{\text{эГ}}$  – внутреннее сопротивление эквивалентного генератора.

3. Напряжение между зажимами  $a$  и  $b$ , к которым подключается исследуемая ветвь, в режиме холостого хода эквивалентного генератора (рис. 1.28):

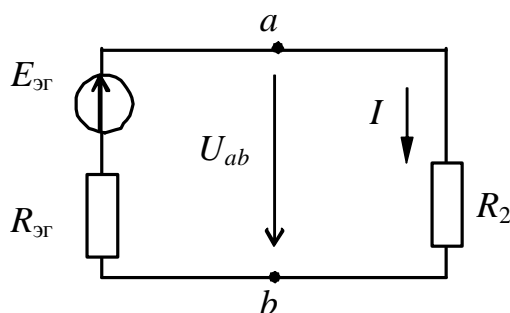


Рис. 1.27

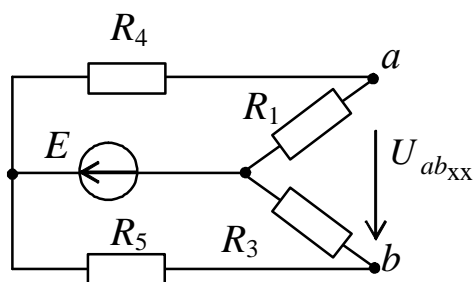


Рис. 1.28

$$E_{\text{эГ}} = U_{ab_{\text{хх}}} = R_1 \cdot \frac{E}{R_1 + R_4} - R_3 \cdot \frac{E}{R_3 + R_5} = 6 \cdot \frac{12}{6+12} - 12 \cdot \frac{12}{12+4} = -5, \text{В},$$

где  $\frac{E}{R_1 + R_4}$  – ток, протекающий по ветви, с резисторами  $R_1$  и  $R_4$ ;

$\frac{E}{R_3 + R_5}$  – ток, протекающий по ветви, с резисторами  $R_3$  и  $R_5$ .

4. Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора как общее сопротивление относительно зажимов  $a$  и  $b$  пассивного двухполюсника, получаемого из схемы эквивалентного генератора, работающего на холостом ходу, путем закорачивания источника ЭДС (рис. 1.29):

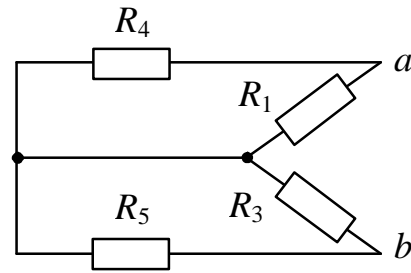


Рис. 1.29

$$R_{ab_{\text{ххпд}}} = R_{\text{эГ}} = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_5} = \frac{6 \cdot 12}{6+12} + \frac{12 \cdot 4}{12+4} = 7, \text{ Ом};$$

поскольку резистор  $R_1$  параллелен  $R_4$ , а  $R_3$  параллелен  $R_5$ , относительно друг друга эти группы соединены последовательно.

5. Таким образом, ток в ветви, содержащей резистор  $R_2$ :

$$I = \frac{-5}{7+3} = -0,5, \text{А}.$$

Отрицательное значение тока "говорит" о том, что его истинное направление в ветви схемы противоположно выбранному.

## Пример 2

В заданной электрической схеме, имеющей следующие параметры:  $E_1 = 4$  В,  $J_k = 4$  А,  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом, рассчитать ток в ветви, содержащей источник ЭДС (рис. 1.30).

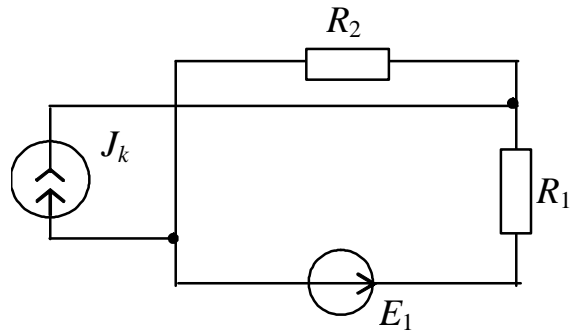


Рис. 1.30

## Решение

1. Выбирается условно положительное направление определяемого тока в ветви источника ЭДС и составляется эквивалентная схема замещения (рис. 1.31).

2. Искомый ток на основе второго закона Кирхгофа

$$I = \frac{E_{\text{эГ}} - E_1}{R_{\text{эГ}} + R_1},$$

где  $E_{\text{эГ}} = U_{ab_{\text{хх}}}$  – ЭДС эквивалентного генератора;

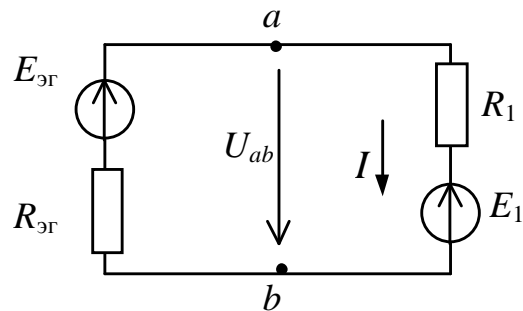


Рис. 1.31

$R_{\text{эГ}}$  – внутреннее сопротивление эквивалентного генератора.

3. Напряжение между зажимами  $a$  и  $b$ , к которым подключается исследуемая ветвь, в режиме холостого хода эквивалентного генератора (рис. 1.32):

$$E_{\text{эГ}} = U_{ab_{\text{хх}}} = R_2 \cdot J_k = 4 \cdot 4 = 16, \text{ В.}$$

4. Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора как общее сопротивление относительно зажимов  $a$  и  $b$  пассивного двухполюсника, получаемого из схемы эквивалентного генератора, работающего на холостом ходу, путем разрыва ветви, содержащей источник тока (рис. 1.33):

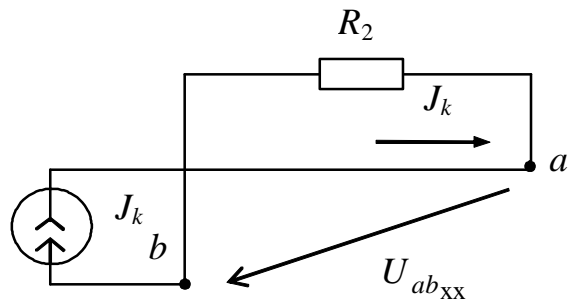


Рис. 1.32

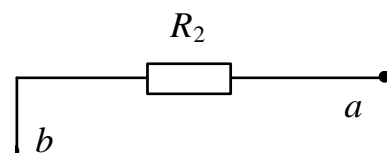


Рис. 1.33



$$R_{\text{эГ}} = R_{ab_{\text{ХХПД}}} = R_2 = 4, \text{ Ом.}$$

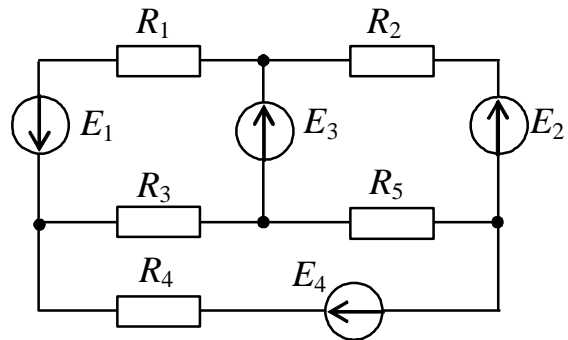
5. Таким образом, ток в ветви, содержащей источник ЭДС:

$$I = \frac{16 - 4}{4 + 2} = 2, \text{ А.}$$

### 1.2.3.3. Задачи для самостоятельного решения

#### Задача 1

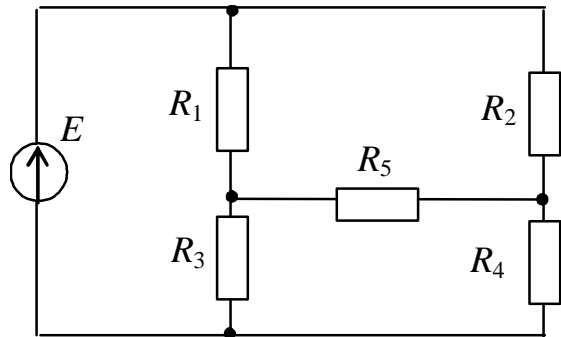
Определить ток в ветви, состоящей из источника ЭДС  $E_4$  и резистора  $R_4$ , если  $E_1=6\text{В}$ ,  $E_2=4\text{В}$ ,  $E_3=2\text{В}$ ,  $E_4 = 1 \text{ В}$ ,  $R_1= 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2=R_3=R_5=1 \text{ Ом}$ ,  $R_4=0,75 \text{ Ом}$ .



Ответ:  $- 1 \text{ А}$ .

#### Задача 2

Определить ток в ветви, содержащей резистор  $R_5$ , если  $E= 40 \text{ В}$ ,  $R_1=R_4=24 \text{ Ом}$ ,  $R_3=R_5=6 \text{ Ом}$ ,  $R_2=12 \text{ Ом}$ .

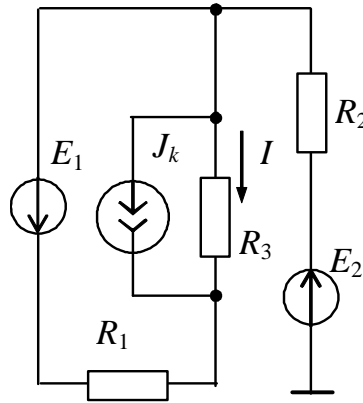


Ответ:  $0,99 \text{ А}$ .

Задача 3

Определить ток  $I$ , если  $E_1=40$  В,  $E_2=13$  В,  $J_k=2$  А,  $R_1=5$  Ом,  $R_2=4$  Ом,  $R_3=1$  Ом.

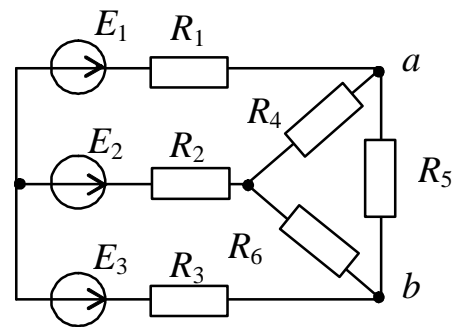
Ответ:  $-4,66$  А.



Задача 4

Определить ток в ветви  $ab$ , если  $E_1=120$  В,  $E_2=60$  В,  $E_3=140$  В,  $R_1=1$  Ом,  $R_2=0,5$  Ом,  $R_3=0,4$  Ом,  $R_4=R_5=R_6=3$  Ом.

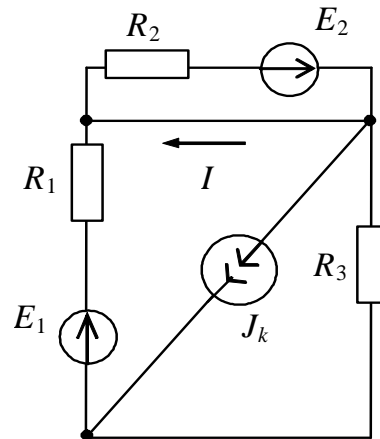
Ответ:  $5,74$  А.



Задача 5

Определить ток  $I$ , если  $E_1=10$  В,  $E_2=36$  В,  $J_k=1$  А,  $R_1=8$  Ом,  $R_2=6$  Ом,  $R_3=3$  Ом.

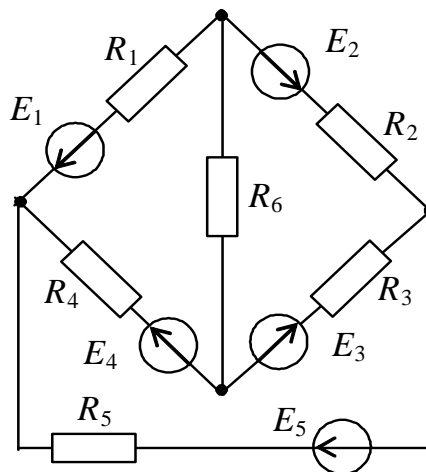
Ответ:  $4,82$  А.



Задача 6

Определить ток в ветви с ЭДС  $E_1$ , если  $E_1=18$  В,  $E_2=E_5=5$  В,  $E_3=15$  В,  $E_4=3$  В,  $R_1=R_3=R_4=R_5=1$  Ом,  $R_2=20$  Ом,  $R_6=50$  Ом.

Ответ:  $4,18$  А.



## 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 2.1. Основные положения

Нелинейными называются электрические цепи, содержащие элементы, которые имеют нелинейную вольт-амперную характеристику (ВАХ) (зависимость между током, протекающим по элементу, и напряжением на нем) (рис. 2.1).

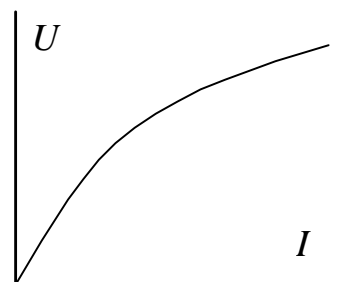


Рис. 2.1

Для выполнения расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока должна быть известна ВАХ нелинейного элемента (или элементов, если их несколько), представленная в виде графика или таблицы. Аналитический метод расчета таких цепей достаточно сложен, поэтому наиболее приемлемым на практике является графоаналитический метод.

При этом к той части электрической цепи, которая содержит линейные элементы, применимы все методы расчета и преобразования электрических цепей, рассмотренные ранее.

Если в цепи содержится несколько нелинейных элементов, то их необходимо заменить эквивалентным НЭ с эквивалентной ВАХ по следующему принципу:

1. При последовательном соединении общим является ток, а напряжение равно сумме напряжений на отдельных элементах, поэтому, задавшись значением тока, по ВАХ нелинейных элементов находят соответствующие напряжения, а затем их сумму: заданное значение тока и суммарное значение напряжения определяют точку эквивалентной ВАХ.

2. При параллельном соединении общим является напряжение, а ток равен сумме токов отдельных элементов, поэтому, задавшись значением напряжения, по ВАХ нелинейных элементов находят соответствующие токи, а затем их сумму: заданное значение напряжения и суммарное значение тока определяют точку эквивалентной ВАХ.

3. При смешанном соединении следует сначала построить ВАХ участка с параллельным соединением элементов, а затем ВАХ всей цепи.

Имея в распоряжении все ВАХ, нетрудно определить токи в ветвях и падения напряжения на отдельных элементах.

## 2.2. Примеры решения задач

### Пример 1

В электрической цепи (рис. 2.2), имеющей следующие параметры:  $E = 36$  В,  $R_0 = 1$  Ом,  $R_1 = 3$  Ом,  $R_2 = R_3 = R_4 = 6$  Ом, определить ток в ветви, содержащей нелинейный элемент, вольт-амперная характеристика которого задана графически (рис. 2.3).

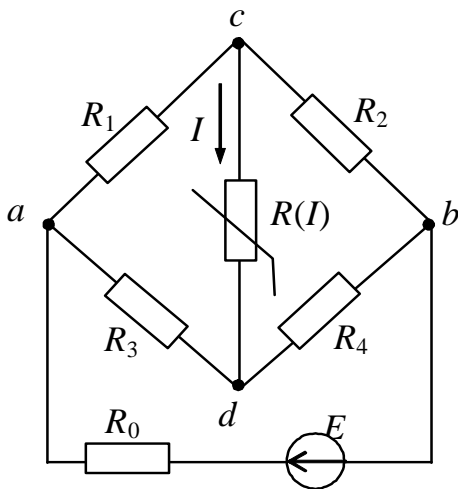


Рис. 2.2

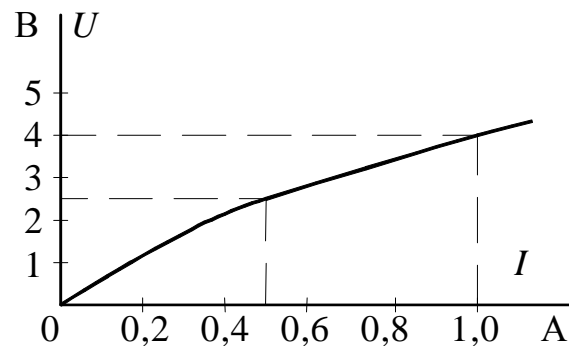


Рис. 2.3

### Решение

2. Выбирается условно положительное направление тока в исследуемой ветви; поскольку необходимо определить ток только в одной ветви, для решения задачи используется метод эквивалентного генератора.

3. Эквивалентная схема замещения "эквивалентный генератор с параметрами: ЭДС  $E_{\text{эГ}}$  и внутренним сопротивлением  $R_{\text{эГ}}$  плюс исследуемая ветвь" (рис. 2.4):

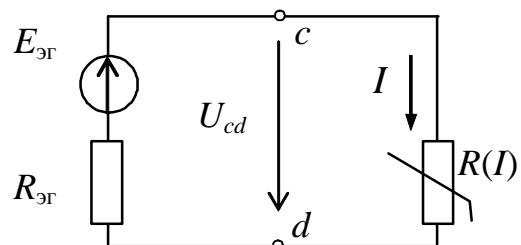


Рис. 2.4

Согласно методу эквивалентного генератора параметры эквивалентного источника определяются по режиму холостого хода последнего:

$$E_{\text{эГ}} = U_{cd_{\text{ХХ}}},$$

$$R_{\text{эГ}} = R_{cd_{\text{ХХПД}}},$$

где  $U_{cd_{\text{ХХ}}}$  – напряжение на зажимах  $c, d$ , к которым подключается ветвь с нелинейным элементом, но при условии его отсутствия, что соответствует режиму холостого хода эквивалентного генератора;

$R_{cd_{\text{ХХПД}}}$  – эквивалентное сопротивление относительно тех же зажимов  $c, d$ , но при условии преобразования эквивалентного генератора, работающего на холостом ходу, в пассивный двухполюсник.

3. Схема, соответствующая эквивалентному генератору, работающему на холостом ходу (рис. 2.5):

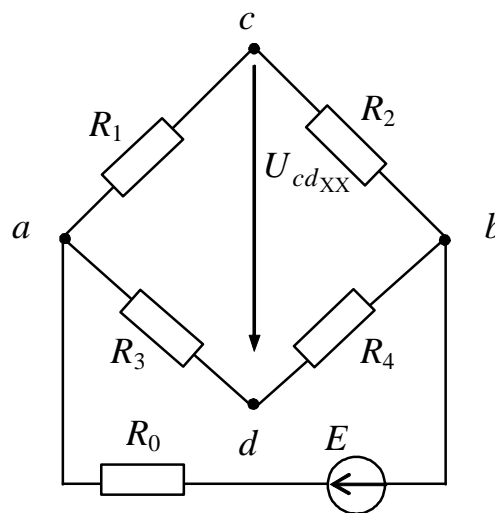


Рис. 2.5

Согласно методу двух узлов

$$U_{ab_{\text{ХХ}}} = \frac{\frac{E}{R_0}}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_3 + R_4} + \frac{1}{R_1 + R_2}} = \frac{\frac{36}{1}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{6+6} + \frac{1}{3+6}} = 30,14, \text{ В.}$$

Токи в ветвях на основе закона Ома для пассивных участков цепи (условно положительные направления токов выбираются произвольно):

$$I_{1_{\text{ХХ}}} = \frac{U_{ab_{\text{ХХ}}}}{R_1 + R_2} = \frac{30,14}{3+6} = 3,35, \text{ А,}$$

$$I_{2_{xx}} = \frac{U_{ab_{xx}}}{R_3 + R_4} = \frac{30,14}{6+6} = 2,51, \text{ А.}$$

На основании второго закона Кирхгофа

$$E_{\text{эрг}} = U_{cd_{xx}} = R_3 \cdot I_{2_{xx}} - R_1 \cdot I_{1_{xx}} = 6 \cdot 2,51 - 3 \cdot 3,35 = 5,0, \text{ В.}$$

4. Эквивалентный генератор, работающий на холостом ходу и преобразованный в пассивный двухполюсник, имеет вид (рис. 2.6)

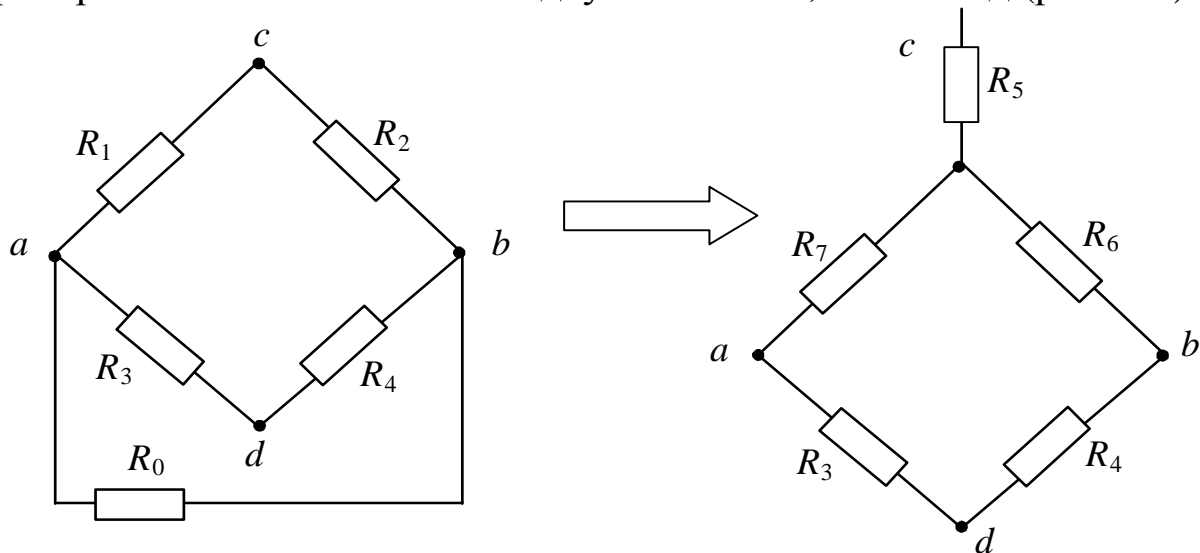


Рис. 2.6

Для нахождения эквивалентного сопротивления относительно зажимов  $c$  и  $d$  необходимы предварительные преобразования – треугольника в звезду или звезды в треугольник – например, треугольника  $R_1, R_2, R_0$  в звезду  $R_5, R_6, R_7$ :

$$R_5 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_0} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6 + 1} = 1,8, \text{ Ом,}$$

$$R_6 = \frac{R_2 \cdot R_0}{R_1 + R_2 + R_0} = \frac{6 \cdot 1}{3 + 6 + 1} = 0,6, \text{ Ом,}$$

$$R_7 = \frac{R_0 \cdot R_1}{R_1 + R_2 + R_0} = \frac{1 \cdot 3}{3 + 6 + 1} = 0,3, \text{ Ом.}$$

Общее сопротивление относительно зажимов  $c$  и  $d$ , являющееся внутренним сопротивлением эквивалентного генератора, будет

$$R_{\text{эГ}} = R_{\text{cd}_{\text{ххпд}}} = R_5 + \frac{(R_6 + R_4) \cdot (R_7 + R_3)}{(R_6 + R_4) + (R_7 + R_3)} =$$

$$= 1,8 + \frac{(0,6 + 6) \cdot (0,3 + 6)}{(0,6 + 6) + (0,3 + 6)} = 5,0, \text{ Ом.}$$

5. Напряжение на зажимах *c* и *d* в эквивалентной схеме замещения, с одной стороны – это напряжение на зажимах эквивалентного генератора:

$$U_{cd} = E_{\text{эГ}} - R_{\text{эГ}} \cdot I,$$

а с другой стороны, – напряжение на зажимах нелинейного элемента  $U_{cd}(I)$ .

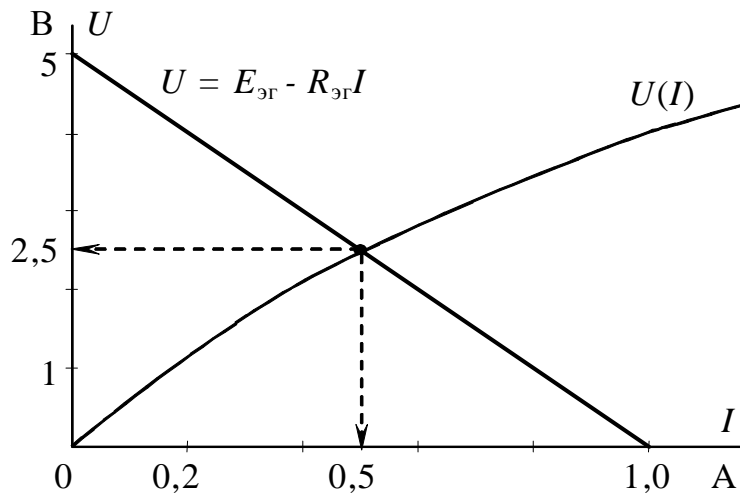


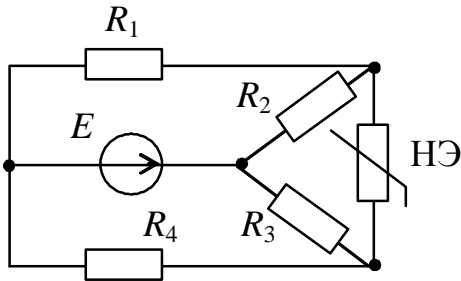
Рис. 2.7

Согласно методу пересечения характеристик эквивалентного генератора и нелинейного элемента находятся значения тока в исследуемой ветви, а также напряжения на зажимах нелинейного элемента (рис. 2.7):

$$I = 0,5 \text{ A}, U = 2,5 \text{ B.}$$

### 2.3. Задачи для самостоятельного решения

#### Задача 1

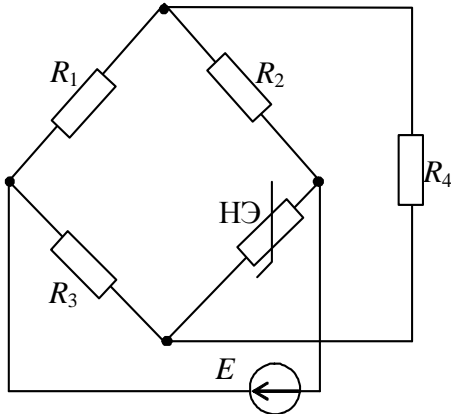


Определить ток в датчике (нелинейном элементе НЭ), если  $E = 112,8 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_3 = 12 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 6 \text{ кОм}$ ,  $R_4 = 4 \text{ кОм}$ . ВАХ нелинейного элемента:

$I, \text{ мА}$	0	1	2	3	5	10
$U, \text{ В}$	0	40	45	40	30	20

Ответ: 1 мА.

#### Задача 2

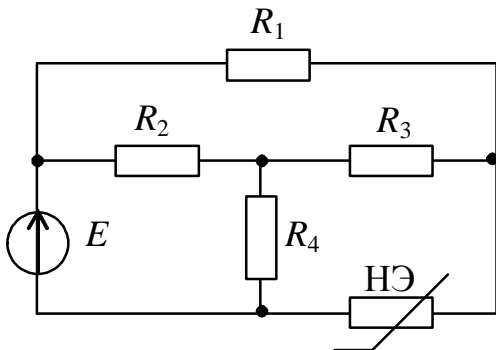


Определить ток нелинейного элемента (НЭ), если  $E = 48 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_2 = R_4 = 6 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 9 \text{ кОм}$ . ВАХ нелинейного элемента:

$I, \text{ мА}$	0	1	2	3	4	10
$U, \text{ В}$	0	10	20	12,5	5	5

Ответ: 7,1 мА.

#### Задача 3



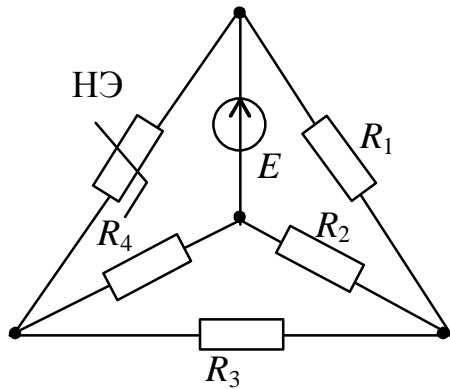
В схеме мостового преобразователя определить ток в плече с датчиком (нелинейным элементом НЭ), если  $E = 48 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_2 = R_4 = 6 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 9 \text{ кОм}$ . ВАХ нелинейного элемента:

$I, \text{ мА}$	0	1	2	4	8	15
$U, \text{ В}$	0	25	50	30	5	5

Ответ: 1,4 мА.



### Задача 4

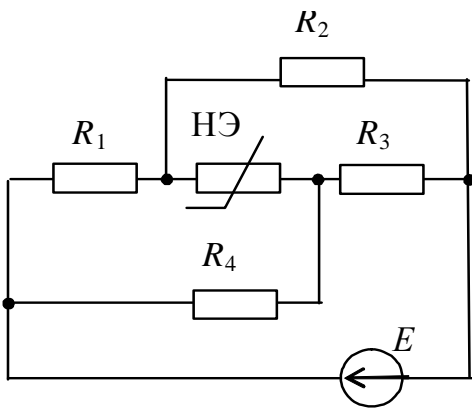


Определить ток нелинейного элемента (НЭ), если  $E = 36 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_2 = 6 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = R_4 = 3 \text{ кОм}$ . ВАХ нелинейного элемента:

$I, \text{ мА}$	0	2	3	4	5	10
$U, \text{ В}$	0	10	15	16	15	12

Ответ: 9 мА.

### Задача 5

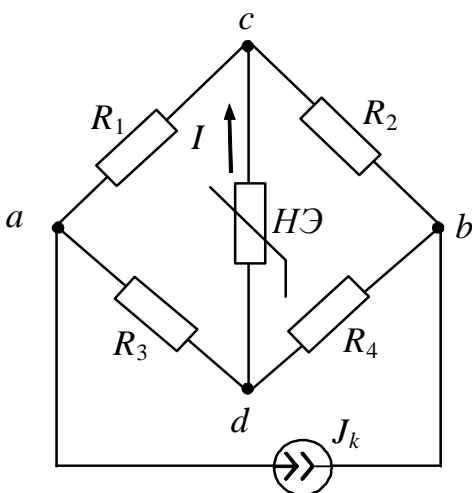


Определить ток нелинейного элемента (НЭ), если  $E = 180 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_4 = 18 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 3 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 9 \text{ кОм}$ . ВАХ нелинейного элемента:

$I, \text{ мА}$	0	1	2	3	5	10
$U, \text{ В}$	0	20	28	25	21	18

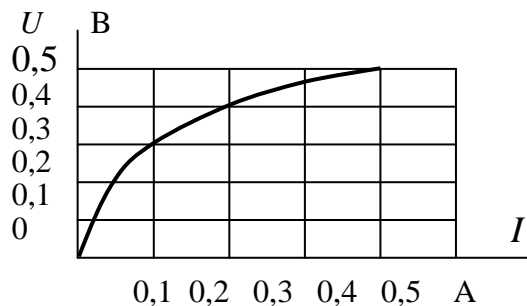
Ответ: 1,3 мА.

### Задача 6



Определить ток нелинейного элемента (НЭ), если  $J_k = 0,5 \text{ А}$ ,  $R_1 = R_4 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 3 \text{ Ом}$ .

ВАХ нелинейного элемента



Ответ: 0,1 А.

### 3. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

#### 3.1. Анализ неразветвленных электрических цепей

##### 3.1.1. Основные положения

Значения величин, действующих в электрических цепях синусоидального тока, аналитически выражаются одной из следующих форм записи:

1) мгновенные значения:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad e = E_m \sin(\omega t + \psi_e),$$

где  $I_m$ , А,  $U_m$ , В,  $E_m$ , В – амплитудные значения соответственно тока, напряжения и ЭДС;

$\omega$  – угловая частота, причем период изменения синусоидального тока  $T$  и его частота  $f$  связаны с величиной  $\omega$  следующим образом:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T, \quad 1/\text{с};$$

$\psi_i, \psi_u, \psi_e$  – начальные фазы, рад;

2) действующие значения:

$$I = I_m / \sqrt{2}, \text{ А}; \quad U = U_m / \sqrt{2}, \text{ В}; \quad E = E_m / \sqrt{2}, \text{ В};$$

3) комплексные числа:

в свою очередь, электрические величины в виде комплексных чисел записываются в одном из трех вариантов:

- алгебраическом

$$\dot{I} = \text{Re}(\dot{I}) + j \text{Im}(\dot{I}), \quad \dot{U} = \text{Re}(\dot{U}) + j \text{Im}(\dot{U});$$

- показательном

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i}, \quad \dot{U} = U e^{j\psi_u};$$

- тригонометрическом

$$\dot{I} = I \cos \psi_i + jI \sin \psi_i;$$

$$\dot{U} = U \cos \psi_u + jU \sin \psi_u;$$

Здесь  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица (на комплексной плоскости умножение на "j" сводится к повороту вектора против часовой стрелки на угол  $90^\circ$ , а умножение на "-j" – к повороту вектора на  $90^\circ$  по часовой стрелке).

Переход от показательной формы к тригонометрической осуществляется по формуле Эйлера

$$Ae^{j\psi} = A \cos \psi + jA \sin \psi,$$

обратный переход, принимая во внимание представление комплексных чисел, также несложен:

$$I = \sqrt{\operatorname{Re}(I)^2 + \operatorname{Im}(I)^2}, \quad U = \sqrt{\operatorname{Re}(U)^2 + \operatorname{Im}(U)^2} -$$

- модули комплексных чисел;

$$\psi_i = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(I)}{\operatorname{Re}(I)}, \quad \psi_u = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(U)}{\operatorname{Re}(U)} -$$

-начальные фазы.

Кроме аналитической формы представления, в электротехнике широко используется и графическое представление величин (рис. 3.1):

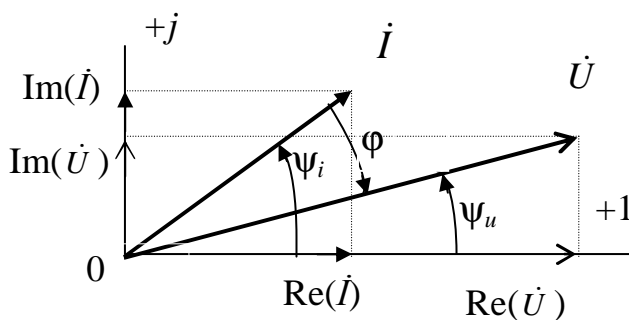


Рис. 3.1

1) в прямоугольной декартовой системе координат в виде синусоидальных функций времени;

2) в полярной системе координат в виде вращающихся векторов;

3) на комплексной плоскости в виде вращающихся векторов, изображенных для момента времени  $t = 0$ .

Величина электрического сопротивления, в отличие от ЭДС, тока и напряжения, не вектор, а скаляр.

В соответствии с законом Ома, записанным в комплексном виде, и с учетом вариантов представления комплексных чисел широко известна запись:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j(X_L - X_C) = Ze^{j\varphi}, \text{ Ом},$$

где  $R$  – линейное активное сопротивление, Ом;

$X_L$  – идеальное индуктивное сопротивление, определяемое как  $X_L = \omega L$ , Ом;

$X_C$  – идеальное емкостное сопротивление, определяемое как  $X_C = 1/(\omega C)$ , Ом;

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  – модуль полного комплексного сопротивления, Ом;

$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$  – фаза полного комплексного сопротивления, град (рад).

При последовательном соединении полное комплексное эквивалентное сопротивление равно сумме комплексных сопротивлений отдельных участков:

$$\underline{Z}_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k = \sum_{k=1}^n R_k + j \left( \sum_{k=1}^n X_{L_k} - \sum_{k=1}^n X_{C_k} \right).$$

Основные элементы схем замещения цепей синусоидального тока и их параметры сведены в табл. 3.1.

### 3.1.2. Примеры решения задач

#### Пример 1

Заданы графические изображения тока и напряжения, известны их амплитудные значения  $I_m = 2\text{ А}$ ,  $U_m = 141\text{ В}$  (рис.3.2).

1. Записать аналитические выражения функций в тригонометрической и комплексной формах.

2. Определить полное комплексное сопротивление цепи.

3. Вычертить электрическую схему цепи и определить ее параметры.

4. Построить векторную диаграмму тока и напряжения.

#### Решение

1. Исходя из общего вида записи, определяются:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

угловая частота:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T = 2\pi/0,01 \approx 628, \text{ с}^{-1}.$$

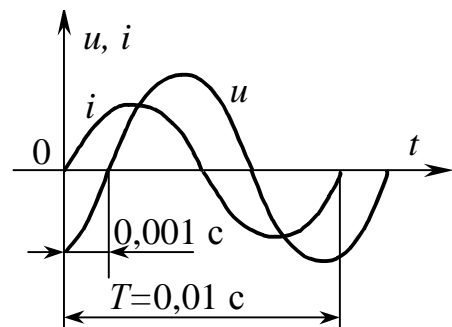
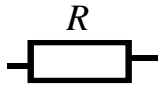
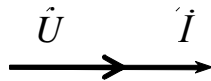

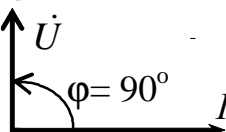
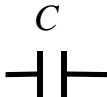
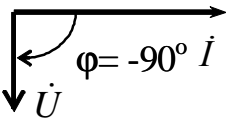

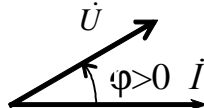
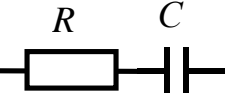
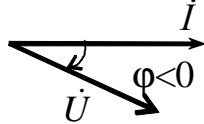



Рис. 3.2

### Пассивные элементы электрической цепи

Таблица 3.1

Элементы схем замещения		Запись закона Ома	Полное комплексное сопротивление, Ом	Модуль полного комплексного сопротивления, Ом	Аргумент полного комплексного сопротивления	Упрощенная векторная диаграмма
Название	Обозначение					
Идеальный резистивный элемент		$i = \dot{U}_R / R$ $\dot{U}_R = Ri$	$R$	$R$	$0$	
Идеальный индуктивный элемент		$i = \dot{U}_L / (jX_L),$ $\dot{U}_L = jX_L i$	$jX_L = j\omega L =$ $= \omega L e^{j90^\circ}$	$X_L = \omega L$	$90^\circ$	
Идеальный емкостный элемент		$i = \dot{U}_C / (-jX_C),$ $\dot{U}_C = -jX_C i$	$-jX_C = -j / (\omega C) =$ $= [1 / (\omega C)] e^{-j90^\circ}$	$X_C = 1 / (\omega C)$	$-90^\circ$	
Реальная индуктивная катушка		$i = \dot{U} / \underline{Z}$	$\underline{Z} = R + jX_L$	$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$	$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R}$	
Последовательное соединение резистивного и идеального емкостного элементов		$i = \dot{U} / \underline{Z}$	$\underline{Z} = R - jX_C$	$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$	$\varphi = \arctg \frac{-X_C}{R}$	
Обобщенный элемент		$i = \dot{U} / \underline{Z}$	$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$	$Z =$ $= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$	

Величины начальных сдвигов фаз:

для тока – из графика видно, что  $\psi_i = 0$ ,

для напряжения – определяем из пропорции:

$$\left| \frac{0,01 - 2\pi}{0,001 - \psi_u} \right| \Rightarrow \psi_u = \frac{0,001 \cdot 2\pi}{0,01} = \frac{\pi}{5}.$$

График тока пересекает начало координат раньше, чем график напряжения, поэтому  $\psi_u < 0$ .

После этого выражения для мгновенных значений приобретут вид:

$$\begin{aligned} i &= 2 \sin(628 t), \text{ А,} \\ u &= 141 \sin(628t - \pi/5), \text{ В.} \end{aligned}$$

Для перехода к комплексной форме записи определяются действующие значения тока и напряжения:

$$\begin{aligned} I &= I_m / \sqrt{2} = 2 / \sqrt{2} \approx 1,41, \text{ А;} \\ U &= U_m / \sqrt{2} = 141 / \sqrt{2} \approx 100, \text{ В.} \end{aligned}$$

Комплексные значения тока и напряжения в показательной форме имеют вид

$$\underline{I} = 1,41 \cdot e^{j0^\circ}, \text{ А;} \quad \underline{U} = 100 \cdot e^{-j36^\circ}, \text{ В.}$$

2. Полное комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{100e^{-j\pi/5}}{1,41e^{j0}} = 70,92e^{-j\pi/5}, \text{ Ом.}$$

Воспользовавшись формулой Эйлера, получим

$$\underline{Z} = 70,92 \cos(-\pi/5) + j70,92 \sin(-\pi/5) = 57,37 - j41,68, \text{ Ом,}$$

следовательно,

$$R = 57,37 \text{ Ом, } X_C = 41,68 \text{ Ом, } C = 1/(\omega X_C) = 7,64 \cdot 10^{-5} = 76,4, \text{ мкФ.}$$

3. Электрическая схема замещения содержит активное сопротивление  $R = 57,37$  Ом и емкостное  $X_C = 41,68$  Ом с величиной емкости  $C = 76,4$  мкФ (рис. 3.3).

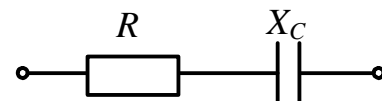


Рис. 3.3

4. Векторная диаграмма тока и напряжения показана на рис. 3.4.

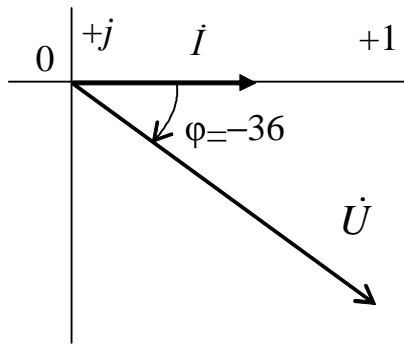


Рис. 3.4

### Пример 2

Даны комплексные значения тока и напряжения:  $\dot{I} = (4 + j3)$ , А,  $\dot{U} = (20 + j20)$ , В, частота питающей сети  $f = 50$  Гц.

1. Записать ток и напряжение в комплексной показательной форме и выражения для их мгновенных значений.
2. Вычислить величину  $\underline{Z}$ .
3. Построить векторную диаграмму тока и напряжения.
4. Вычертить схему замещения участка электрической цепи.

### Решение

#### 1. Модуль тока

$$I = \sqrt{\operatorname{Re}(\dot{I})^2 + \operatorname{Im}(\dot{I})^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \text{ А,}$$

начальная фаза тока

$$\psi_i = \operatorname{arctg} (\operatorname{Im}(\dot{I}) / (\operatorname{Re}(\dot{I}))) = \operatorname{arctg}(3/4) = 36,9^\circ,$$

комплекс тока в показательной форме записи

$$\dot{I} = 5e^{j36,9^\circ}, \text{ А.}$$

#### Модуль напряжения

$$U = \sqrt{\operatorname{Re}(\dot{U})^2 + \operatorname{Im}(\dot{U})^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28,3, \text{ В,}$$

начальная фаза напряжения

$$\psi_u = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\dot{U})}{\operatorname{Re}(\dot{U})} = \operatorname{arctg} \left( \frac{20}{20} \right) = 45^\circ,$$

комплекс напряжения в показательной форме записи

$$\dot{U} = 28,3e^{j45^\circ}, \text{ В.}$$

Амплитудные значения:

тока  $I_m = I\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = 7,1, \text{ А;}$

напряжения  $U_m = U\sqrt{2} = 28,3\sqrt{2} = 40$ , В.

Мгновенные значения:

тока  $i = 7,1 \sin(314t + 0,64)$ , А;

напряжения  $u = 40 \sin(314t + \pi/4)$ , В.

2. Полное комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{28,3e^{j45^\circ}}{5e^{j36,9^\circ}} = 5,66e^{j8,1^\circ}, \text{ Ом.}$$

3. В алгебраической форме (переход по формуле Эйлера через тригонометрическую форму)

$$\underline{Z} = 5,66\cos(8,1^\circ) + j5,66\sin(8,1^\circ) = 5,6 + j0,8, \text{ Ом.}$$

4. Векторная диаграмма тока и напряжения представлена на рис. 3.5

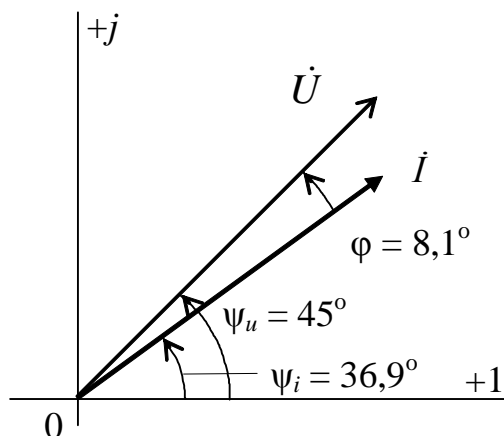


Рис. 3.5

5. Схема замещения цепи (рис. 3.6)

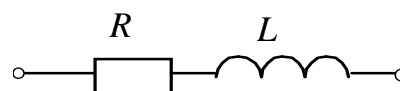


Рис. 3.6

### Пример 3

Задана электрическая цепь (рис. 3.7), содержащая последовательно включенные катушку индуктивности с активным сопротивлением  $R = 10$  Ом и индуктивным сопротивлением  $X_L = 2$  Ом и конденсатор с емкостным сопротивлением  $X_C = 5$  Ом. Напряжение

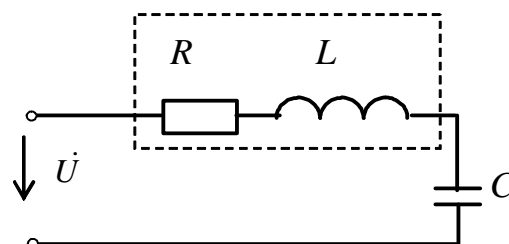


Рис. 3.7



питания цепи  $U = 36$  В. Вычислить величину тока и построить векторную диаграмму тока и напряжений.

*Решение*

Полное комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 10 - j3 = 10,44e^{-j16^\circ 42'}, \text{ Ом.}$$

Согласно закону Ома в комплексной форме ток в цепи составит

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{36e^{j0^\circ}}{10,44e^{-j16^\circ 42'}} = 3,45e^{j16^\circ 42'}, \text{ А.}$$

По известным значениям тока и сопротивлений участков цепи вычисляются падения напряжения на отдельных участках схемы замещения электрической цепи:

$$U_R = RI = 10 \cdot 3,45 = 34,5, \text{ В,}$$

$$U_L = X_L I = 2 \cdot 3,45 = 6,9, \text{ В,}$$

$$U_C = X_C I = 5 \cdot 3,45 = 17,25, \text{ В.}$$

*Алгоритм построения векторной диаграммы тока и напряжений (рис. 3.8):*

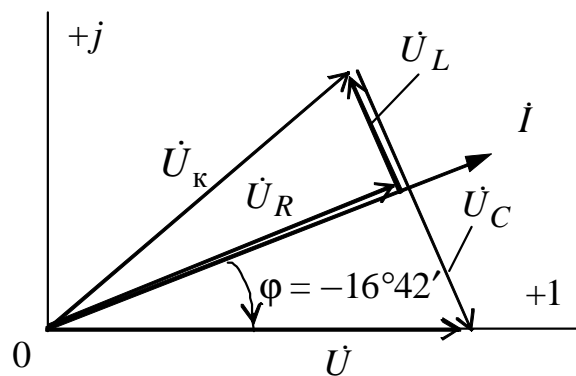


Рис. 3.8

1) поскольку в цепи из последовательно соединенных элементов общим для последних является ток, построение векторной диаграммы начинается с откладывания вектора тока  $\dot{I}$ ;

2) из начала координат по вектору тока откладывается вектор  $\dot{U}_R$  (длина вектора определяется исходя из масштаба напряжений  $m_U$ );

3) из конца вектора  $\dot{U}_R$  перпендикулярно вектору  $\dot{I}$  строится вектор  $\dot{U}_L$  так, чтобы этот вектор опережал вектор тока  $\dot{I}$  на  $90^\circ$ ;

4) сумма векторов  $\dot{U}_R$  и  $\dot{U}_L$  равна вектору падения напряжения на катушке  $\dot{U}_K$ ;

5) из конца вектора  $\dot{U}_L$  или  $\dot{U}_K$  проводится вектор  $\dot{U}_C$ ; его направление определяется из условия опережения вектором тока вектора напряжения  $\dot{U}_C$  на угол  $\pi/2$  (в случае идеального емкостного элемента);

6) сумма векторов падений напряжения  $\dot{U}_R$ ,  $\dot{U}_L$  и  $\dot{U}_C$  равна вектору напряжения  $\dot{U}$ , приложенного к электрической цепи.

#### Пример 4

В электрическую цепь с напряжением на входе  $u = 141 \sin \omega t$ , В, включена катушка индуктивности с активным сопротивлением  $R = 3$  Ом и индуктивным сопротивлением  $X_L = 4$  Ом.

Вычислить показания включенных в цепь амперметра и вольтметра, а также мощность, потребляемую цепью.

#### Решение

Полное комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = R + jX_L = 3 + j4 = 5e^{j53,1^\circ}, \text{ Ом.}$$

Действующее значение напряжения (показание вольтметра)

$$U = U_m / \sqrt{2} = 141 / \sqrt{2} = 100, \text{ В.}$$

Действующее значение тока (показание амперметра)

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{5} = 20, \text{ А.}$$

Комплексное значение тока (начальная фаза напряжения согласно условию задачи равна нулю)

$$\begin{aligned} \dot{i} &= \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{100e^{j0^\circ}}{5e^{j53,1^\circ}} = 20e^{-j53,1^\circ} = 20 \cos(-53,1^\circ) + j20 \sin(-53,1^\circ) = \\ &= 12 - j16, \text{ А.} \end{aligned}$$

Величины активной и реактивной мощностей, потребляемых цепью, рассчитываются исходя из действующих значений величин

$$P = UI \cos \varphi = U_a I = RI^2 = 3 \cdot 20^2 = 1200, \text{ Вт},$$

$$Q = UI \sin \varphi = U_p I = X_L I^2 = 4 \cdot 20^2 = 1600, \text{ вар},$$

либо с использованием комплекссов

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \dot{U} I^* = P + jQ = 100e^{j0^\circ} \cdot 20e^{j53,1^\circ} = 2000e^{j53,1^\circ} = \\ &= 2000 \cos 53,1^\circ + j2000 \sin 53,1^\circ \approx 1200 + j1600, \text{ ВА}. \end{aligned}$$

Необходимо обратить внимание на то, что в формуле нахождения мощности  $\underline{S}$  используется комплексно сопряженная величина тока  $I^*$ .

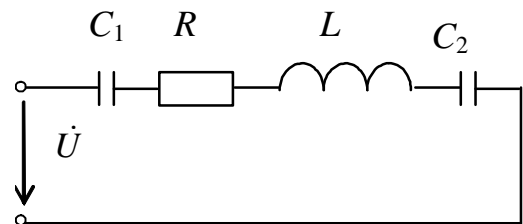
Полная или кажущаяся мощность (действующее значение)

$$S = UI = 100 \cdot 20 = 2000, \text{ ВА}.$$

### 3.1.3. Задачи для самостоятельного решения

#### Задача 1

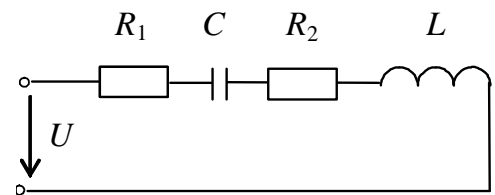
Определить напряжение на индуктивном элементе схемы, если  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $C_1 = 100 \text{ мкФ}$ ,  $C_2 = 20 \text{ мкФ}$ ,  $U = 24 \text{ В}$ ,  $L = 0,4 \text{ Гн}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ .



Ответ: 45,5 В.

#### Задача 2

Определить модуль полного комплексного сопротивления цепи, построить векторную диаграмму тока и напряжений, если  $L = 0,2 \text{ Гн}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ ,  $U = 220 \text{ В}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ .



Ответ: 58,8 Ом.

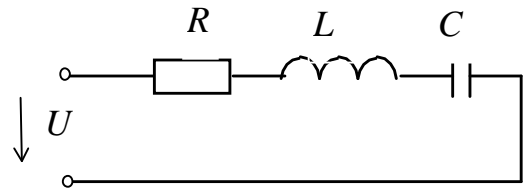
#### Задача 3

Определить полное комплексное сопротивление участка цепи, если  $i = 1,35 \sin(314t + \pi/10)$ , А,  $u = 245 \sin(314t - \pi/20)$ , В.

Ответ:  $161,7 - j82,39$ , Ом.

#### Задача 4

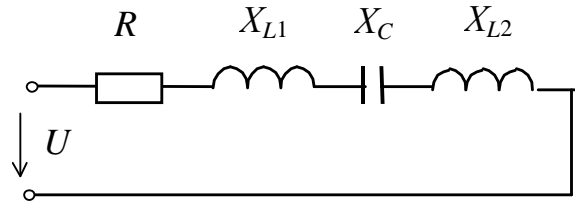
Вычислить потребляемую цепью полную комплексную мощность, если  $U = 127$  В,  $R = 230$  Ом,  $f = 50$  Гц,  $L = 0,5$  Гн,  $C = 200$  мкФ.



Ответ:  $51 + j31,2$ , ВА.

#### Задача 5

Вычислить величину действующего значения тока в цепи при  $U = 5$  В,  $R = 3$  Ом,  $X_{L1} = 1$  Ом,  $X_{L2} = 1$  Ом,  $X_C = 6$  Ом.



Ответ: 1 А.

### 3.2. Анализ разветвленных электрических цепей

#### 3.2.1. Основные определения и алгоритм решения задач

Полная комплексная проводимость электрической цепи определяется согласно закону Ома

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = G - j(B_L - B_C) = Ye^{-j\varphi}, \text{ Ом,}$$

где  $G$  – активная проводимость цепи, См;

$B_L$  – индуктивная составляющая проводимости, См;

$B_C$  – емкостная составляющая проводимости, См,

причем модуль полной комплексной проводимости

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}, \text{ См,}$$

а фаза  $\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G}$ , град.

Величины  $G$ ,  $B_L$ ,  $B_C$  могут быть вычислены также исходя из заданных параметров электрической цепи. И в общем виде можно сказать, что величина проводимости какой-то ветви прямо пропорциональна соответствующему сопротивлению ветви и обратно пропор-

циональна квадрату модуля полного комплексного сопротивления этой же ветви.

Так для ветви, содержащей активное сопротивление и емкость (рис. 3.9), величины проводимостей

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_C^2}, \quad B_C = \frac{X_C}{R_1^2 + X_C^2};$$

$$\underline{Y}_1 = G_1 - (-jB_C) = Y_1 \cdot e^{-j\varphi_1}; \quad Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_C^2},$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{-B_C}{G_1}.$$

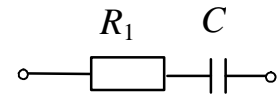


Рис. 3.9

Для ветви, содержащей последовательно соединенные активное сопротивление и индуктивность (рис. 3.10), проводимости запишутся в виде

$$G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_L^2},$$

$$B_L = \frac{X_L}{Z_2^2} = \frac{X_L}{R_2^2 + X_L^2},$$

$$\underline{Y}_2 = G_2 - jB_L = Y_2 \cdot e^{-j\varphi_2},$$

$$Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_L^2},$$

$$\varphi_2 = \arctg \left( \frac{B_L}{G_2} \right).$$

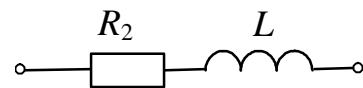


Рис. 3.10

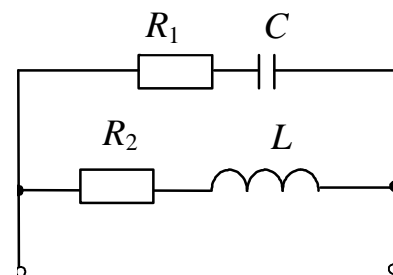


Рис. 3.11

Если эти ветви включены параллельно друг другу (рис. 3.11), то полная комплексная проводимость такой цепи запишется как

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = (G_1 + G_2) - j(B_L - B_C) = G - j(B_L - B_C) = \\ &= \left( \frac{R_1}{R_1^2 + X_C^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_L^2} \right) - j \left( \frac{X_L}{R_2^2 + X_L^2} - \frac{X_C}{R_1^2 + X_C^2} \right). \end{aligned}$$

Мощность в цепях переменного тока определяется независимо от способа соединения элементов.

Алгоритм решения задач (классический вариант):

- 1) определяется угловая частота сети;
- 2) вычисляются величины реактивных сопротивлений элементов электрической цепи и определяются:
  - комплексные сопротивления ветвей,
  - комплексные проводимости ветвей,
  - полная комплексная проводимость цепи,
- 3) ток на входе электрической цепи,
- 4) токи в ветвях цепи,
- 5) комплексное значение полной мощности;
- 6) по полученным данным строится векторная диаграмма напряжения и токов.

### 3.2.2. Примеры решения задач

#### Пример 1

$U = 220$  В,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 15$  Ом,  
 $C = 200$  мкФ,  $L = 0,1$  Гн,  $f = 50$  Гц.

Определить все токи в цепи, мощности и построить векторную диаграмму напряжения и токов (рис. 3.12).

Решение 1 (классический вариант):

1. Рассчитывается угловая частота:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314, \text{ с}^{-1}.$$

2. Вычисляются величины  $X_C$  и  $X_L$

$$X_C = 1/(\omega C) = 1/(314 \cdot 200 \cdot 10^{-6}) = 15,9, \text{ Ом},$$

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 0,1 = 31,4, \text{ Ом}.$$

3. Полные комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_C = 10 - j15,9 = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1} = 18,8e^{-j58^\circ}, \text{ Ом};$$

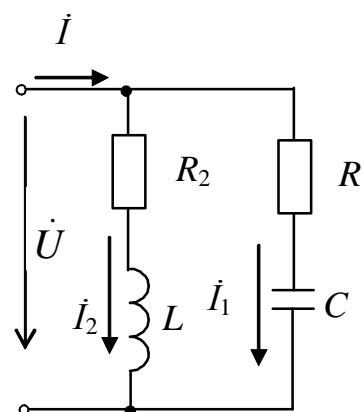


Рис. 3.12

величины  $Z_1$  и  $\varphi_1$  могут быть определены из треугольника сопротивлений (рис. 3.13) следующим образом :

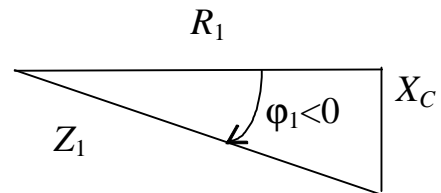


Рис. 3.13

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_C^2} = \sqrt{10^2 + 15,9^2} = 18,8, \text{ Ом},$$

$$\varphi_1 = \arctg\left(\frac{-X_C}{R}\right) = \arctg\left(\frac{-15,9}{10}\right) \approx -58^\circ;$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_L = 15 + j31,4 = Z_2 \cdot e^{j\varphi_2} = 34,8e^{j64^\circ}, \text{ Ом};$$

здесь величины  $Z_2$  и  $\varphi_2$  могут быть определены из треугольника сопротивлений (рис.3.14) следующим образом:

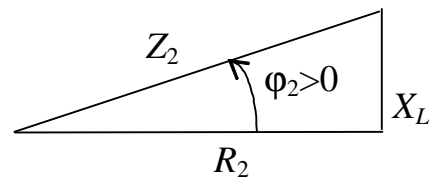


Рис. 3.14

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_L^2} = \sqrt{15^2 + 31,4^2} = 34,8, \text{ Ом},$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{X_L}{R_2} = \arctg \frac{31,4}{15} \approx 64^\circ.$$

4. Вычисляются активные и реактивные составляющие комплексных проводимостей ветвей  $G_1, G_2, B_L, B_C$

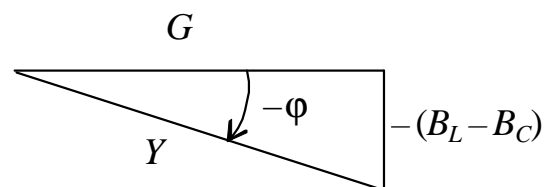
$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{10}{18,8^2} = 0,028, \text{ См},$$

$$G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{15}{34,8^2} = 0,012, \text{ См},$$

$$B_L = \frac{X_L}{Z_2^2} = \frac{31,4}{34,8^2} = 0,026, \text{ См},$$

$$B_C = \frac{X_C}{Z_1^2} = \frac{15,9}{18,8^2} = 0,045, \text{ См}.$$

5. Полная комплексная проводимость цепи определяется как  
 $\underline{Y} = G - j(B_L - B_C) = 0,04 - j(0,026 - 0,045) =$   
 $= 0,04 + j0,019 = Ye^{-j\varphi} = 0,044e^{j25^\circ}$ , См,



где

$$G = G_1 + G_2 = 0,028 + 0,012 = 0,04, \text{ См};$$

Рис. 3.15

величины  $Y$  и  $\varphi$  определяются из треугольника проводимостей (рис. 3.15) емкостного характера следующим образом

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{0,04^2 + (0,026 - 0,045)^2} = 0,044, \text{ См},$$

$$\varphi = \arctg \frac{(B_L - B_C)}{G} = \arctg \frac{(0,026 - 0,045)}{0,04} \approx -25^\circ.$$

6. Общий ток в цепи

$$\dot{I} = \underline{Y}\dot{U} = 0,044e^{+j25^\circ} \cdot 220e^{j0^\circ} = 9,68e^{j25^\circ}, \text{ А}.$$

Начальная фаза напряжения, не заданная в условии задачи, принимается для удобства расчетов равной нулю.

7. Токи в ветвях схемы :

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{220e^{j0^\circ}}{18,8e^{-j58^\circ}} = 11,7e^{j58^\circ}, \text{ А}.$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{220e^{j0^\circ}}{34,8e^{j64^\circ}} = 6,32e^{-j64^\circ}, \text{ А}.$$

8. Значение полной комплексной мощности рассчитывается по формуле

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I}^* = 220e^{j0^\circ} \cdot 9,68e^{-j25^\circ} = 2129,6e^{-j25^\circ}, \text{ ВА};$$

для представления в алгебраической форме полученного комплексного числа используется формула Эйлера:

$$\underline{S} = 2129,6\cos(-25^\circ) + j2129,6\sin(-25^\circ) \approx 1930 - j900, \text{ ВА},$$

следовательно,



$$P = 1930 \text{ Вт}, \quad Q = -900 \text{ вар.}$$

9. Векторная диаграмма токов и напряжения (рис. 3.16)

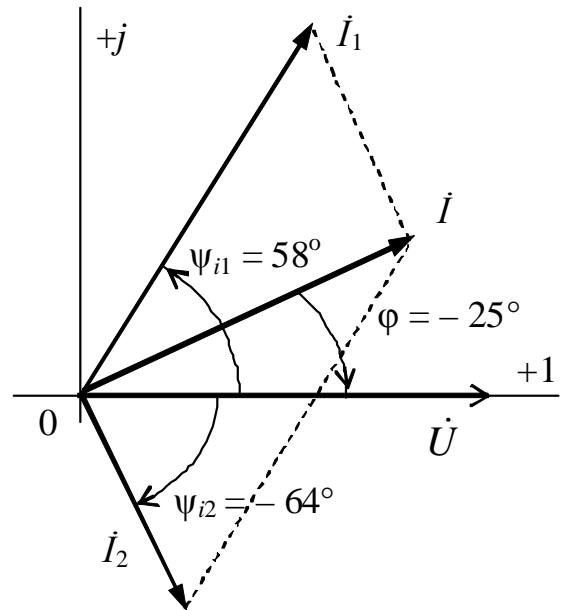


Рис. 3.16

Решение 2 (с использованием законов Кирхгофа)

Составляются уравнения согласно законам Кирхгофа: одно по первому, так как в схеме два потенциальных узла, и два по второму для двух замкнутых независимых контуров (рис. 3.17) :

$$\dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0;$$

$$(R_1 - jX_C) \cdot \dot{I}_1 = \dot{E};$$

$$(R_2 + jX_L) \cdot \dot{I}_2 = \dot{E}.$$

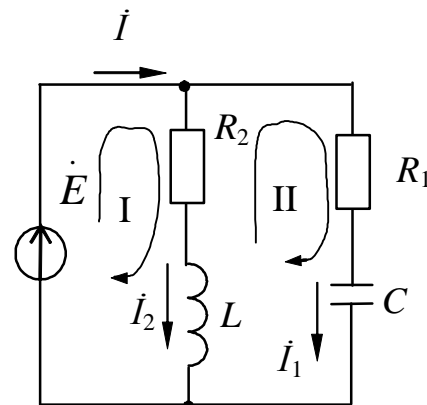


Рис. 3.17

В матричном виде

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & R_1 - jX_C & 0 \\ 0 & 0 & R_2 + jX_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I} \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{E} \\ \dot{E} \end{bmatrix}.$$

Из первого варианта решения подставляются значения  $X_C$  и  $X_L$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 10 - j15,9 & 0 \\ 0 & 0 & 15 + j31,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I} \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 220 \\ 220 \end{bmatrix}.$$

Решение этой системы комплексных уравнений на вычислительной машине, например, на персональном компьютере по программе "Гаусс" (можно использовать и стандартные программы *MatLab*, *Mathcad*, но программа "Гаусс" специально написана для решения систем уравнений и наиболее удобна в данном случае), дает следующие результаты:

$$\dot{I} = 8,77 + j4,09, \text{ А}, \quad \dot{I}_1 = 6,20 + j9,92, \text{ А}, \quad \dot{I}_2 = 2,77 - j5,68, \text{ А}.$$

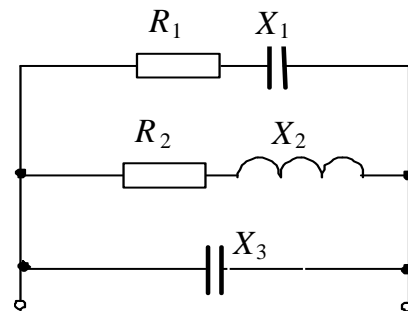
Мощность определяется, как в первом варианте решения, аналогично строится и векторная диаграмма токов и напряжения.

### 3.2.3. Задачи для самостоятельного решения

#### Задача 1

Определить полную комплексную проводимость цепи, если  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_1 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ ,  $X_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_3 = 10 \text{ Ом}$ .

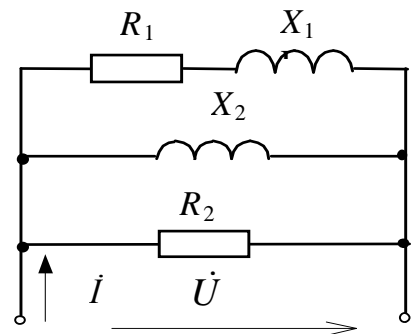
Ответ:  $(0,052 + j0,114) \text{ См}$ .



#### Задача 2

Определить комплексное значение тока в общей части цепи, если  $U = 15 \text{ В}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ ,  $R_1 = 56 \text{ Ом}$ ,  $X_1 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_2 = 40 \text{ Ом}$ .

Ответ:  $1,78 e^{-j16^\circ} \text{ А}$ .



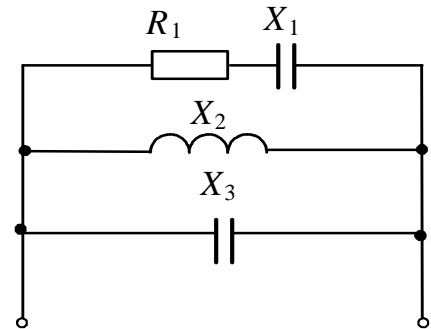
### Задача 3

Определить индуктивную составляющую общего тока вышеприведенной цепи.

Ответ: 0,49 А.

### Задача 4

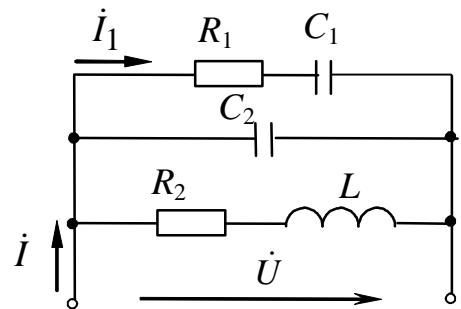
Определить емкостную составляющую общей проводимости цепи, если  $U = 20$  В,  $f = 50$  Гц,  $R = 10$  Ом,  $X_1 = 30$  Ом,  $X_2 = 20$  Ом,  $X_3 = 20$  Ом.



Ответ: 0,08 См.

### Задача 5

Определить активные составляющие тока  $I_1$ , общего тока  $I$ ; построить векторную диаграмму токов и напряжений, если  $R_1 = 10$  Ом,  $C_1 = 80$  мкФ,  $R_2 = 5$  Ом,  $C_2 = 60$  мкФ,  $L = 0,05$  Гн,  $u = 51 \sin(314t)$  В.



Ответ:  $I_{1a} = 0,21$  А,  $I_a = 0,88$  А.

## 3.3. Резонансные явления в цепях синусоидального тока

### 3.3.1. Краткие теоретические сведения

#### 3.3.1.1. Последовательное соединение приемников

Резонансом напряжений называется явление, возникающее в цепи, содержащей последовательно соединенные реактивные элементы (индуктивные и емкостные), при совпадении тока и напряжения по фазе ( $\varphi = 0$ ), он имеет место при отсутствии реактивного сопротивле-

ния ( $X=0$ ). При этом величины напряжений (по модулю) на идеальных реактивных элементах (емкости и индуктивности) равны друг другу, а, стало быть, напряжение на активном сопротивлении равно напряжению питания. Ток в цепи определяется только величиной активного сопротивления. При этом напряжения на реактивных элементах могут в несколько раз превышать напряжение питания. Если это не расчетный режим цепи, то превышение напряжения на реактивных элементах может привести к электрическому пробое и тепловому, необратимому, повреждению элементов. Параметр, показывающий превышение напряжениями на реактивных элементах напряжения питания, называется добротностью резонансного контура:

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U}.$$

### *3.3.1.2. Параллельное соединение приемников*

При параллельном соединении реактивных элементов возникает резонанс токов, и аналогично резонансу напряжения токи реактивных элементов могут намного превысить ток в неразветвленной части схемы. Превышение тока также характеризуется добротностью резонансного контура

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I}.$$

Условие возникновения резонанса токов:  $B = 0$ .

### *3.3.2. Примеры решения задач*

#### *Пример 1*

Определить резонансную частоту  $\omega_0$  в цепи, содержащей последовательно соединенные катушку индуктивности с  $R = 10$  Ом и  $L = 0,6$  Гн и конденсатор емкостью  $C = 10$  мкФ.

#### *Решение*

Из условия резонанса напряжений  $X = 0$  для данной схемы

$$X = X_L - X_C = 0,$$

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0,$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,6 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = 408,2, \text{ с}^{-1}.$$

### Пример 2

В последовательной цепи катушка индуктивности ( $L = 14,1$  мГн,  $R = 6,0$  Ом) и конденсатор ( $C = 45$  мкФ) питаются от источника синусоидального напряжения ( $U = 12$  В), частота которого изменяется от 100 до 500 Гц.

Вычислить резонансные значения частоты, тока, напряжений на конденсаторе и катушке, добротность резонансного контура. Построить графики зависимостей модуля полного комплексного сопротивления цепи, ее тока, напряжений на катушке и конденсаторе от частоты источника в диапазоне  $0,5f_0 - 2f_0$ , где  $f_0$  – резонансная частота.

Резонансный контур при переменной частоте представлен на (рис. 3.18).

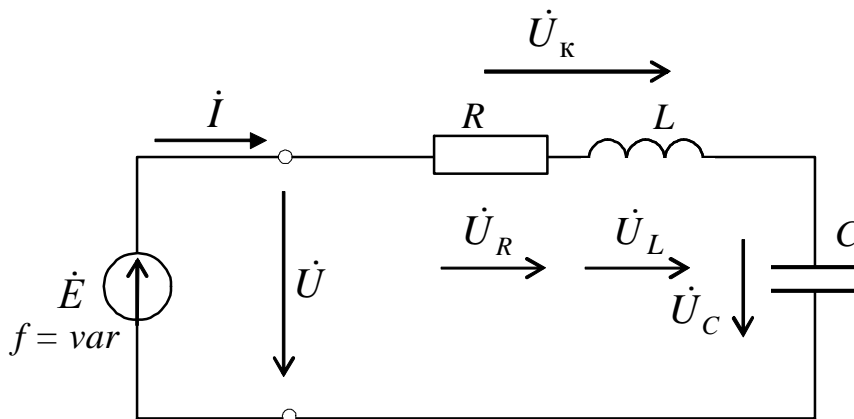


Рис. 3.18

### Решение

Резонанс возникает на частоте  $f_0$ , для которой  $2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C}$ ,

откуда резонансная частота

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{14,1 \cdot 10^{-3} \cdot 45 \cdot 10^{-6}}} = 200, \text{ Гц.}$$

Параметры цепи при резонансе:

$$X_{Lp} = 2\pi f_0 L = 2 \cdot 3,14 \cdot 200 \cdot 14,1 \cdot 10^{-3} = 17,7, \text{ Ом,}$$

$$X_{Cp} = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 200 \cdot 45 \cdot 10^{-6}} = 17,7, \text{ Ом.}$$

Модуль полного комплексного сопротивления цепи при  $X=0$   
( $X_{Lp} = X_{Cp}$ )

$$Z_p = \sqrt{R^2 + X^2} = R = 6, \text{ Ом.}$$

Модуль полного комплексного сопротивления катушки при резонансе

$$Z_{kp} = \sqrt{R^2 + X_{Lp}^2} = \sqrt{6,0^2 + 17,7^2} = 18,7, \text{ Ом.}$$

Ток в цепи

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{12}{6} = 2, \text{ А.}$$

Напряжение на конденсаторе при резонансе

$$U_{Cp} = X_{Cp} I = 17,7 \cdot 2 = 35,4, \text{ В.}$$

Напряжение на катушке при резонансе

$$U_{kp} = Z_{kp} I = 18,7 \cdot 2 = 37,4, \text{ В.}$$

Индуктивная и активная составляющие напряжения на катушке:

$$U_{Lp} = X_{Lp} I = 17,7 \cdot 2 = 35,4, \text{ В,}$$

$$U_{Rp} = RI = 6 \cdot 2 = 12, \text{ В.}$$

Для построения необходимых графиков зависимостей при изменении частоты от 100 Гц до 400 Гц результаты сведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

$f$ , Гц	100	150	200	250	300	350	400
$X_L$ , Ом	8,85	13,3	17,7	22,1	26,6	30,9	35,4
$X_C$ , Ом	35,5	23,6	17,7	14,2	11,8	10,1	8,8
$X$ , Ом	-26,6	-10,3	0	7,9	14,8	20,8	26,6
$Z$ , Ом	27,3	11,9	6	9,9	16,0	21,6	27,3
$I$ , А	0,44	1,0	2,0	1,21	0,75	0,55	0,44
$U_L$ , В	3,9	13,4	35,4	26,7	19,9	17,0	5,6
$U_C$ , В	15,6	23,8	35,4	17,2	8,8	5,6	3,9
$\varphi$ , °	-77	-60	0	53	68	74	77

Добротность контура

$$Q = \frac{U_{Cp}}{U} = \frac{U_{Lp}}{U} = \frac{35,4}{12} = 2,95.$$

Добротность контура показывает, как увеличивается падение напряжения на реактивных элементах последовательного контура при резонансе.

Резонансные кривые последовательного контура представлены на рис. 3.19.

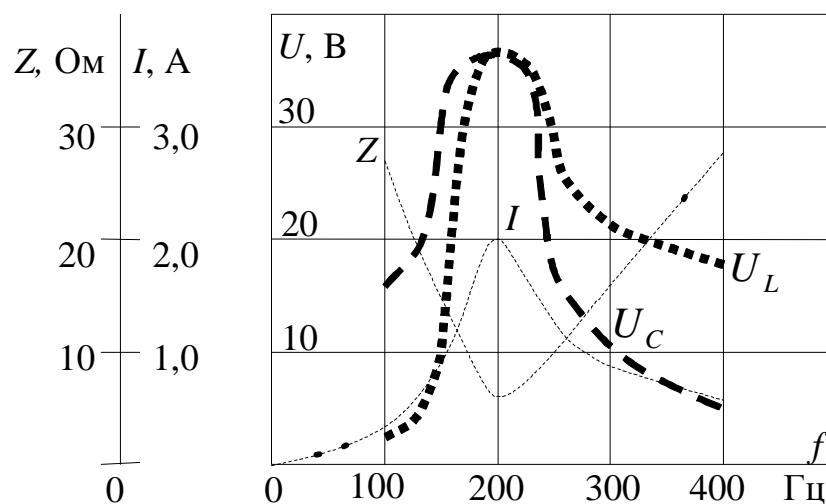


Рис. 3.19

Фазовая характеристика последовательного контура представлена на рис. 3.20.

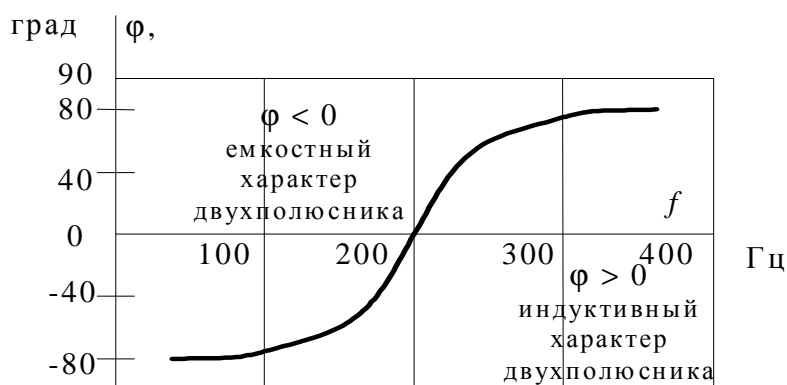


Рис. 3.20

Из рисунка видно, что графики зависимостей  $U_L(f)$  и  $U_C(f)$  несимметричны относительно резонансной частоты 200 Гц. Следует иметь в виду, что графики  $U_L$  и  $U_C$  имеют максимальные значения ( $U_{L\max}$  и  $U_{C\max}$ ) при частотах, отличающихся от резонансной. Рассматриваемое смещение величин  $U_{L\max}$  и  $U_{C\max}$  уменьшается с возрастанием добротности контура, и при больших  $Q$  им можно практически пренебречь.

### Пример 3

Определить величину активного сопротивления  $R_2$ , необходимую для возникновения в цепи резонанса токов:  $R_1 = 10$  Ом,  $L = 0,2$  Гн,  $C = 70$  мкФ,  $f = 50$  Гц (рис. 3.21).

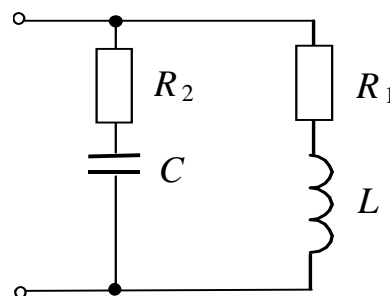


Рис. 3.21

### Решение

Из условия резонанса токов  $B = 0$  для данной схемы

$$B = B_L - B_C = 0,$$

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + (1/\omega C)^2},$$

если  $\omega = 2\pi f = 314\text{с}^{-1}$ ,



$$R_2 = \pm \sqrt{\frac{R_1^2 + (\omega L)^2}{\omega^2 LC} - \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{10^2 + (2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0,2)^2}{(2 \cdot \pi \cdot 50)^2 \cdot 0,2 \cdot 70 \cdot 10^{-6}} - \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 70 \cdot 10^{-6}}\right)^2} = 29,32, \text{ Ом.}$$

#### Пример 4

В заданной электрической цепи имеет место резонанс (рис. 3.22). Определить вид резонанса и величину индуктивности цепи, если известны величины сопротивлений:  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 20$  Ом и величина емкости конденсатора  $C = 30$  мкФ. Частота питающей сети  $f = 50$  Гц.

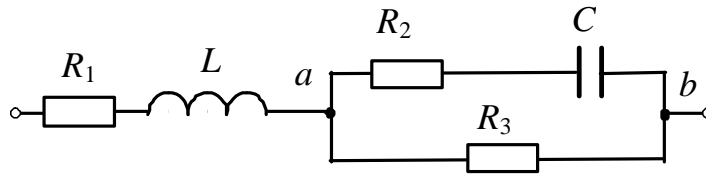


Рис. 3.22

#### Решение

В заданной электрической цепи может иметь место только резонанс напряжений, так как элементы  $L$  и  $C$  оказываются включенными последовательно относительно друг друга.

Условие резонанса напряжений  $X = 0$  для данной цепи выливается в следующее выражение

$$X = X_L - X_{C_3} = 0, \quad X_L = X_{C_3}, \quad L = \frac{X_{C_3}}{2\pi f}.$$

Сложность решения задачи заключается в правильном определении величины  $X_{C_3}$ , так как параллельно ветви, содержащей последовательно включенные емкостный элемент  $C$  и активное сопротивление  $R_2$ , включена ветвь с активным сопротивлением  $R_3$ . В таком случае нужно вычислить эквивалентное комплексное сопротивление  $\underline{Z}_3$  участка  $ab$ .

Величину  $\underline{Z}_3$  для параллельно включенных участков цепи целесообразнее всего рассчитывать как обратную комплексной проводимости

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{\underline{Y}_3},$$

причем  $\underline{Y}_3 = G_3 + (G_2 + jB_C)$ ,

$$\text{где } G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2}, \quad G_3 = \frac{1}{R_3},$$

$$B_C = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}.$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = 106,103, \text{ Ом},$$

$$B_C = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} = \frac{106,103}{2^2 + 106,103^2} = 0,00942, \text{ См},$$

$$G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} = \frac{2}{2^2 + 106,103^2} = 0,00018, \text{ См},$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{20} = 0,050, \text{ См},$$

$$\underline{Y}_3 = 0,05018 + j0,00942, \text{ См},$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{\underline{Y}_3} = \frac{1}{0,05018 + j0,00942} \times \frac{0,05018 - j0,00942}{0,05018 - j0,00942} =$$

$$= 19,250 - j3,614, \text{ Ом}.$$

Следовательно:

$$L = \frac{X_{C3}}{2\pi f} = \frac{3,614}{2\pi \cdot 50} = 0,012, \text{ Гн}.$$

### Пример 5

В заданной электрической цепи (рис. 3.23) рассчитать требуемые параметры элементов, если известны:  $R_1=4$  Ом,  $R_2=10$  Ом,  $L_2=0,1$  Гн, частота питающей сети  $f = 50$  Гц, в следующих двух случаях:

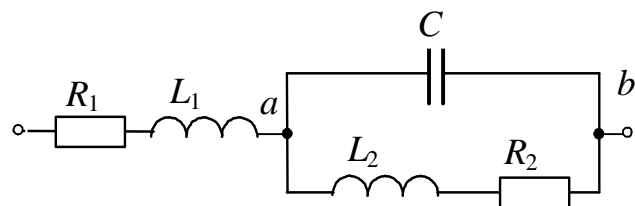


Рис. 3.23

1. Определить величину  $C$ , если известно, что в цепи – резонанс токов, а величина индуктивности  $L_1 = 0,2$  Гн.

2. Определить величину  $L_1$ , если известно, что в цепи – резонанс напряжений, а величина емкости конденсатора  $C = 100$  мкФ.

*Решение*

1. Условие резонанса токов

$$B = 0, \quad B_C - B_{L_2} = 0, \quad B_C = B_{L_2}, \quad B_{L_2} = \frac{X_{L_2}}{R_2^2 + X_{L_2}^2},$$

$$X_{L_2} = \omega L_2 = 2\pi f L_2 = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 = 31,416, \text{ Ом},$$

$$B_{L_2} = \frac{31,416}{10^2 + 31,416^2} = 0,029, \text{ См},$$

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \omega \cdot C = 2\pi f C,$$

$$C = \frac{B_{L_2}}{2\pi f} = \frac{0,029}{2\pi \cdot 50} = 0,000092, \text{ мкФ} = 92,0 \text{ мкФ}.$$

2. Условие резонанса напряжений

$$X = 0, \quad X_{L_1} - X_{Cab} = 0,$$

$$X_{Cab} = \frac{1}{B_{ab}}, \text{ причем для получения резонанса напряжений в}$$

данной цепи  $B_{ab}$  обязательно должна иметь емкостный характер,

$$\begin{aligned} B_{ab} = B_C - B_{L_2} &= \frac{1}{X_C} - \frac{X_{L_2}}{R_2^2 + X_{L_2}^2} = 2\pi f C - \frac{X_{L_2}}{R_2^2 + X_{L_2}^2} = \\ &= 2\pi \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6} - \frac{31,416}{10^2 + 31,416^2} = 0,031 - 0,029 = 0,002, \text{ См}. \end{aligned}$$

$$X_{Cab} = \frac{1}{0,002} = 500,0, \text{ Ом}.$$

$$X_{L_1} = \omega L_1 = 2\pi f L_1,$$

$$L_1 = \frac{X_{Cab}}{2\pi f} = \frac{500,0}{2\pi \cdot 50} = 1,592, \text{ Гн}.$$

### 3.3.3. Задачи для самостоятельного решения

#### Задача 1

Определить величину емкости в цепи, содержащей последовательно соединенные катушку индуктивности и конденсатор, в которой – резонанс напряжений.

Параметры катушки индуктивности:  $R = 10$  Ом,  $L = 0,8$  Гн. Частота питающей сети  $f = 50$  Гц.

Ответ:  $C = 12,7$  мкФ.

#### Задача 2

Определить величину напряжения на конденсаторе, если в цепи с последовательно включенными катушкой индуктивности и конденсатором – резонанс напряжений.

Параметры катушки индуктивности:  $R = 5$  Ом,  $L = 1,1$  Гн. Цепь запитана от источника напряжения  $u = 51 \sin(314t)$ , В.

Ответ:  $U_C = 2491$  В.

#### Задача 3

Определить добротность резонансного контура, содержащего последовательно включенные катушку индуктивности с активным сопротивлением  $R = 6$  Ом и конденсатор емкостью  $C = 5$  мкФ. Частота питающей сети  $f = 400$  Гц.

Ответ:  $Q = 13,26$ .

#### Задача 4

Определить величину индуктивности катушки  $L$ , включенной параллельно конденсатору емкостью  $C = 45$  мкФ, если активное сопротивление катушки  $R = 7$  Ом, а частота питающей сети  $f = 50$  Гц (в цепи – резонанс).

Ответ:  $L_1 = 0,22$  Гн,  $L_2 = 0,002$  Гн.

## 4. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

### 4.1. Общие сведения

#### 4.1.1. Основные положения

*Симметричная трехфазная система ЭДС* – это совокупность трех синусоидальных ЭДС одной частоты, одинаковой амплитуды, сдвинутых относительно друг друга по фазе на угол  $2\pi/3$  ( $120^\circ$ ). Фаза трехфазной системы – часть цепи, где проходит один из токов.

Отдельные фазы трехфазной цепи могут быть соединены между собой *звездой* или *треугольником*. В каждой схеме соединений различают *симметричный* (комплексные сопротивления фаз одинаковы) и *несимметричный* (комплексные сопротивления фаз разные) режимы работы приемников.

Все электрические величины, относящиеся к источникам, записываются с индексами  $A, B, C, N$ , а величины, относящиеся к приемникам, с индексами  $a, b, c, n$  для случая соединения их "звездой" и  $ab, bc, ca$  для схемы "треугольник".

Трехфазные цепи в зависимости от числа проводов, соединяющих источник и приемник, бывают четырехпроводными ("звезда с нейтральным проводом") и трехпроводными ("звезда без нейтрального провода" и "треугольник").

Расчет трехфазных цепей так же, как и цепей однофазного синусоидального тока, производится комплексным методом.

#### 4.1.2. Четырехпроводная система соединения источников и приемников

В четырехпроводных сетях к приемникам подводятся два напряжения:

1) *линейное*  $U_{\text{л}}(\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA})$  – напряжение между линейными проводами;

2) *фазное*  $U_{\text{ф}}(\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C)$  – напряжение между линейными и нейтральным проводами.

Включение приемников по четырехпроводной схеме и соответствующая векторная диаграмма напряжений изображены на рис. 4.1, 4.2.

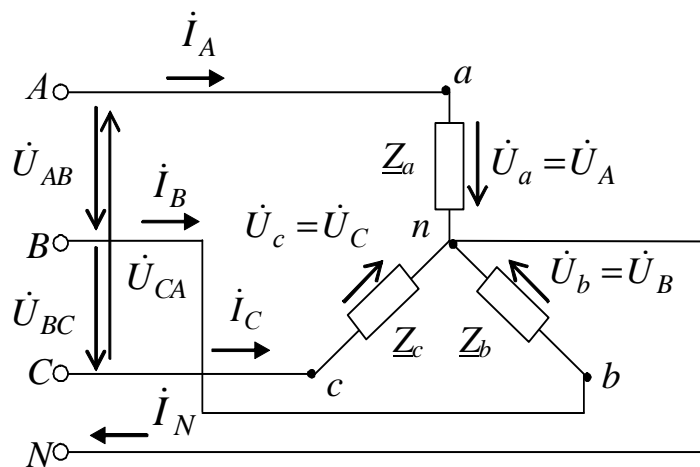


Рис. 4.1

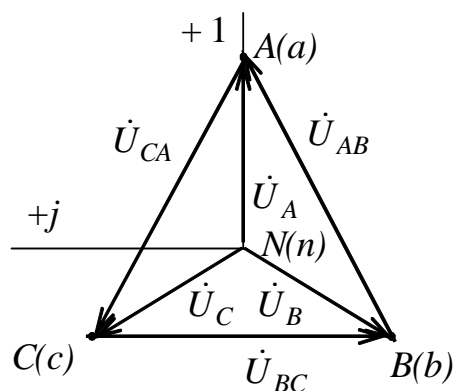


Рис. 4.2

Линейные и фазные напряжения связаны между собой следующими соотношениями (согласно второму закону Кирхгофа):

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A.$$

Благодаря нейтральному проводу фазы приемников оказываются параллельными фазам генератора. Поэтому система фазных напряжений приемника, независимо от величины и характера фазных нагрузок, так же как и система фазных напряжений источника, симметрична. В связи с этим линейные и фазные напряжения как источника, так и приемника связаны между собой (см. рис. 4.2) соотношением

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\text{ф}}.$$

В комплексной форме фазные напряжения записываются как

$$\dot{U}_A = U_{\text{ф}}e^{j0^\circ}, \text{В}; \quad \dot{U}_B = U_{\text{ф}}e^{-j120^\circ}, \text{В}; \quad \dot{U}_C = U_{\text{ф}}e^{-j240^\circ} = U_{\text{ф}}e^{j120^\circ}, \text{В}$$

(начальная фаза напряжения  $\dot{U}_A$  принята равной нулю).

Комплексные линейные напряжения

$$\dot{U}_{AB} = U_{\text{л}}e^{j30^\circ}, \text{В}; \quad \dot{U}_{BC} = U_{\text{л}}e^{-j90^\circ}, \text{В}; \quad \dot{U}_{CA} = U_{\text{л}}e^{j150^\circ}, \text{В}.$$

Для токов в четырехпроводной системе справедливо уравнение (согласно первому закону Кирхгофа)

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_N.$$

Фазные и линейные токи равны между собой

$$I_\phi = I_\text{л}.$$

Режим работы каждой фазы не зависит от работы других фаз, потенциал нейтральной точки приемника всегда равен нулю (т.е.  $\dot{U}_{nN} = 0$ ), поэтому токи в фазах (они же линейные токи) определяются по формулам:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_a}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_b}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_c}.$$

При обрыве нейтрального провода (в случае несимметричной нагрузки) потенциал нейтральной точки не равен нулю (т.е.  $\dot{U}_{nN} \neq 0$ : нейтраль смещается). Если пренебречь сопротивлением нейтрального провода, то

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_A + \underline{Y}_b \dot{U}_B + \underline{Y}_c \dot{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c},$$

где  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  – комплексные фазные напряжения источника питания, В;

$\underline{Y}_a, \underline{Y}_b, \underline{Y}_c$  – комплексные проводимости фаз, См.

Так как  $\dot{U}_{nN} \neq 0$ , то напряжения фаз приемника не одинаковы и определяются по формулам (согласно второму закону Кирхгофа):

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN}; \quad \dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{nN}; \quad \dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{nN},$$

а токи в фазах (они же линейные токи):

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c}.$$

### 4.1.3. Трехпроводная система соединения источников и приемников

Включение по трехпроводной схеме нагрузки звездой ("звезда без нейтрального провода") осуществляется только для симметричного потребителя, так как иначе возникают напряжения смещения нейтрали  $\dot{U}_{nN}$  и перекос напряжений по фазам.

В трехпроводных сетях к приемникам подводятся линейные напряжения  $U_{л}$ , их комплексные значения аналогичны комплексам линейных напряжений четырехпроводной системы (рис. 4.3).

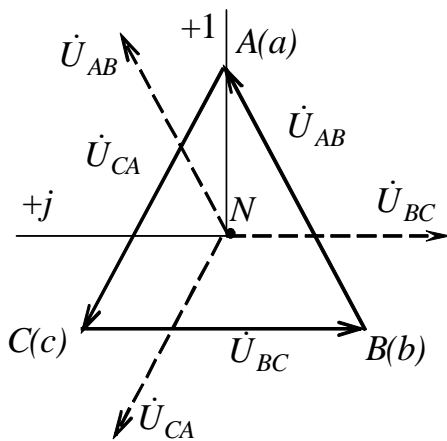


Рис. 4.3

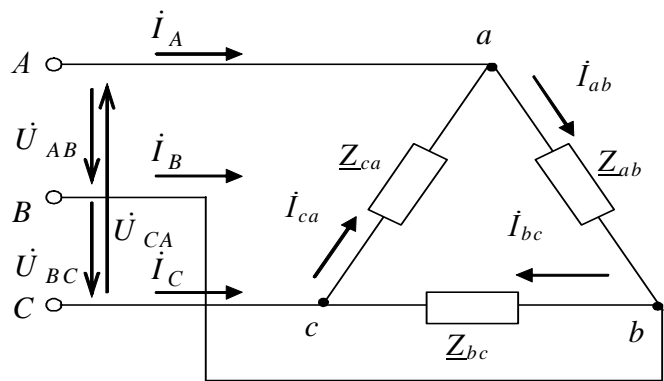


Рис. 4.4

Токи в трехпроводной системе связаны уравнением по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

При соединении приемников по схеме "треугольник" (рис. 4.4) режим работы каждой фазы не зависит от режима работы двух других фаз, поэтому токи в фазах:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_{ab}}; \quad \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z_{bc}}; \quad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{Z_{ca}}.$$

Токи в линейных проводах определяются по первому закону Кирхгофа для узловых точек  $a, b, c$ :

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}, \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}, \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}.$$



#### 4.1.4. Расчет и измерение мощности в трехфазных цепях

Мощности трехфазной системы рассчитываются по следующим формулам:

1) при симметричной нагрузке и любой схеме соединения приемников:

- активная мощность

$$P = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi_{\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi_{\phi}, \text{ Вт};$$

- реактивная мощность

$$Q = 3U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi_{\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi_{\phi}, \text{ вар};$$

- полная мощность

$$S = 3U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}; \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \text{ ВА};$$

2) при несимметричной нагрузке:

- активная мощность нагрузки, соединенной по схеме "звезда":

$$P = P_a + P_b + P_c = R_a I_a^2 + R_b I_b^2 + R_c I_c^2, \text{ Вт};$$

- активная мощность нагрузки, соединенной по схеме "треугольник":

$$P = P_{ab} + P_{bc} + P_{ca} = R_{ab} I_{ab}^2 + R_{bc} I_{bc}^2 + R_{ca} I_{ca}^2, \text{ Вт};$$

- реактивная мощность

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c, \text{ вар}; \quad Q = Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{ca}, \text{ вар};$$

- полная мощность

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \text{ ВА},$$

но  $S \neq S_a + S_b + S_c$  или  $S \neq S_{ab} + S_{bc} + S_{ca}$ ;

- комплексная мощность:

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{S}_a + \underline{S}_b + \underline{S}_c = \dot{U}_A^* I_A + \dot{U}_B^* I_B + \dot{U}_C^* I_C;$$

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{S}_{ab} + \underline{S}_{bc} + \underline{S}_{ca} = \dot{U}_{AB}^* I_{ab} + \dot{U}_{BC}^* I_{bc} + \dot{U}_{CA}^* I_{ca}.$$

Измерения активной и реактивной мощностей производятся с помощью трех, двух или одного ваттметров при различных схемах

включения приемников (с учетом симметричности или несимметричности последних).

При симметричном приемнике активная мощность одной фазы  $P_\phi$  определяется с помощью одного ваттметра по схемам рис. 4.5, 4.6, тогда активная мощность трехфазной цепи  $P = 3 P_\phi$ .

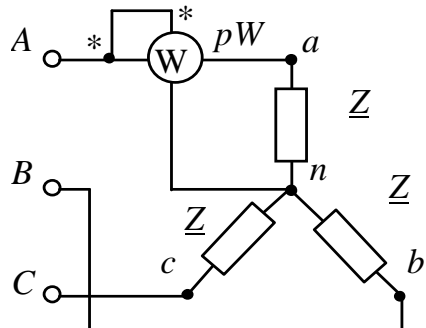


Рис. 4.5

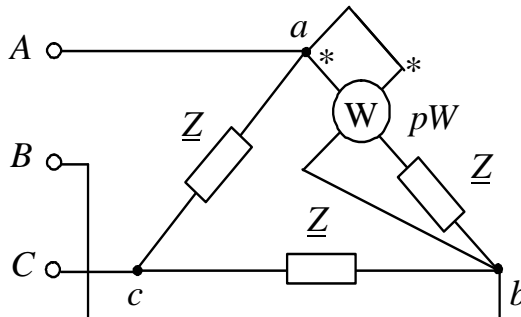


Рис. 4.6

При измерении активной мощности в четырехпроводной цепи включаются три ваттметра между соответствующим линейным проводом и нейтралью. Активная мощность несимметричного приемника определяется по сумме показаний трех ваттметров:

$$P = P_1 + P_2 + P_3.$$

Для трехпроводных цепей при несимметричных нагрузках применяется метод двух ваттметров (рис. 4.7)

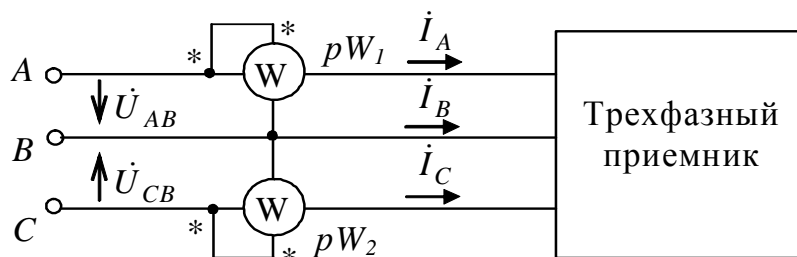


Рис. 4.7

Активная мощность определяется как алгебраическая сумма показаний двух ваттметров:

$$pW_1 \Rightarrow P_1 = \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_{AB} I_A^* \right], \quad pW_2 \Rightarrow P_2 = \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_{CB} I_C^* \right].$$

Основные схемы соединения трехфазных цепей и их параметры приведены в табл.4.1.

## **4.2. Соединение приемников трехфазной цепи звездой**

### ***4.2.1. Четырехпроводная схема соединения***

Расчеты проводятся с помощью законов Кирхгофа и Ома методом междуузлов напряжения в комплексных числах.

#### ***Алгоритм решения задач:***

- 1) выбирается система питающих напряжений;
- 2) определяются сопротивления фаз;
- 3) определяются фазные и линейные токи;
- 4) определяется ток нейтрального провода;
- 5) строятся векторные диаграммы токов и напряжений;
- 6) определяются потребляемые мощности;
- 7) проводится анализ аварийных режимов.

Таблица 4.1

Напряжения	Токи	Векторная диаграмма напряжений	Схема изображения приемников	
			практическая	замещенная
Звезда с нейтральным проводом				
$\dot{U}_A = U_\phi e^{j0}$ $\dot{U}_B = U_\phi e^{-j120^\circ}$ $\dot{U}_C = U_\phi e^{j120^\circ}$ $U_\Pi = \sqrt{3}U_\phi$	$I_\Phi = I_\Pi$ $I_\Phi = U_\phi / Z_\Phi$			
Звезда без нейтрального провода				
$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN}$ $\dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{nN}$ $\dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{nN}$ $\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_A + \underline{Y}_b \dot{U}_B + \underline{Y}_c \dot{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}$	$I_\Phi = I_\Pi$ $I_\Phi = U_\phi / Z_\Phi$			
Треугольник				
$\dot{U}_{AB} = U_\Pi e^{j30^\circ}$ $\dot{U}_{BC} = U_\Pi e^{-j90^\circ}$ $\dot{U}_{CA} = U_\Pi e^{j150^\circ}$ $U_\Pi = U_\phi$	$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}$ $\dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}$ $\dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}$			

## 5. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

### 5.1. Магнитные цепи с постоянными магнитодвижущими силами

#### 5.1.1. Основные положения

По магнитным свойствам вещества подразделяются на диамагнитные, парамагнитные и ферромагнитные. При решении электротехнических задач вещества достаточно разделить на *ферро* - и *неферромагнитные*. У ферромагнитных веществ относительная магнитная проницаемость  $\mu \gg 1$  ( $10^3 \div 10^6$ ), у всех неферромагнитных  $\mu \approx 1$ .

Основные величины, характеризующие магнитное поле, – *магнитная индукция  $\mathbf{B}$* , *напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$* , *магнитный поток  $\Phi$* . Магнитная индукция  $\mathbf{B}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  в ферромагнитных веществах связаны друг с другом зависимостью

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H} = \mu_a \mathbf{H},$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – постоянная, характеризующая магнитные свойства вакуума;  $\mu_a$  – абсолютная магнитная проницаемость.

Магнитный поток  $\Phi$  – поток вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  через некоторую поверхность  $S$  ( $ds$  – элемент поверхности  $S$ ):

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}.$$

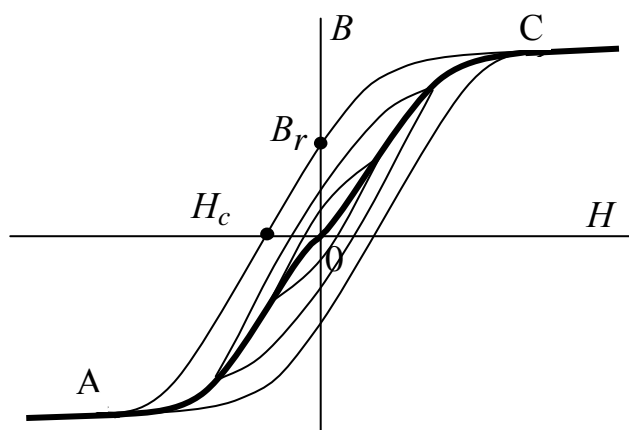


Рис. 5.1

Размерности магнитных величин:

$$[B] = [\text{Тл}] \text{ – Тесла,}$$

$$[H] = [\text{А/м}] \text{ – Ампер/метр,}$$

$$[\Phi] = [\text{Вб}] \text{ – Вебер.}$$

Свойства ферромагнитных материалов оцениваются по зависимости магнитной индукции  $B$  от напряженности магнитного поля  $H$  (рис. 5.1). Различают *кривые намагничивания* и *гистерезисные петли*. Ферромагнитный *гистерезис* – отставание изменения магнитной индукции  $B$  от изменения напряженности магнитного поля  $H$ . *Основная кривая намагничивания* материала (см. рис. 5.1 – AOC) – геометрическое место вершин симметричных частных и предельной гистерезисных петель. На предельной петле имеются характерные точки:  $B_r$  – остаточная индукция и  $H_c$  – коэрцитивная сила. В зависимости от величины  $H_c$  ферромагнитные

материалы подразделяются на «магнитотвердые» ( $H_c > 4$  кА/м) и «магнитомягкие» ( $H_c < 4$  кА/м).

Анализ магнитных систем имеет ряд особенностей, а именно:

- 1) различие между  $\mu_a$  ферромагнитных участков магнитной системы и воздушных участков ( $\mu_a \approx \mu_0$ ) не столь велико ( $10^3 \div 10^6$ ), что ведет к появлению магнитных потоков рассеяния, замыкающихся по воздуху;
- 2) расчетные уравнения являются нелинейными вследствие нелинейной и неоднозначной зависимости  $B(H)$  ферромагнитных материалов.

При проведении предварительных расчетов пренебрегают потоками рассеяния, выпучиванием основного потока в зазорах, неоднозначным поведением кривой  $B(H)$  и рассматривают магнитную систему как *магнитную цепь* с сосредоточенными параметрами, что позволяет применять графоаналитические методы анализа.

Магнитное поле создается электрическим током в обмотках (реже постоянными магнитами). Связь между напряженностью поля и током осуществляется в соответствии с законом полного тока

$$\oint H dl = \sum w I,$$

где  $w$  – число витков обмотки катушки,  $I$  – ток в обмотке катушки, А;  $dl$  – элементарный участок контура  $l$ , по которому ведется интегрирование, м.

Величина  $F$ , равная произведению  $wI$ , называется *магнитодвижущей силой* (или МДС).

*Магнитная цепь* – это совокупность источников МДС, ферромагнитных тел или каких-либо иных тел (сред), по которым замыкается основной магнитный поток.

При отсутствии разветвлений потока магнитная цепь является неразветвленной, а при наличии – разветвленной. В качестве материала для магнитопровода выбираются «магнитомягкие» ферромагнетики.

### 5.1.2. Неразветвленная магнитная цепь

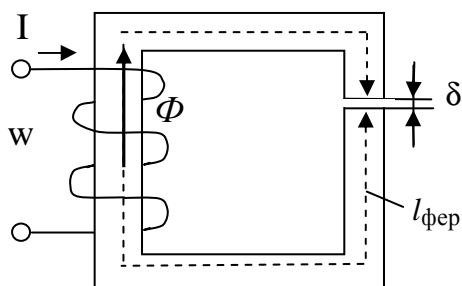


Рис. 5.2

В неразветвленной цепи (рис. 5.2) магнитный поток  $\Phi$  неизменен во всех сечениях и справедливо скалярное уравнение, позволяющее определить магнитную индукцию  $B_i$  на  $i$ -м участке

магнитной цепи при известной площади поперечного сечения  $S_i$   $i$ -го участка

$$B_i = \Phi/S_i.$$

По основной кривой намагничивания материала и известному значению  $B_i$  определяется напряженность магнитного поля  $H_i$   $i$ -го участка ферромагнитной части магнитной цепи. Напряженность магнитного поля  $H_i$  может быть определена и по известной зависимости  $\mu = f(B)$  материала

$$H_i = B_i / \mu \mu_0.$$

Отношение МДС вдоль всей цепи ( $\oint Hdl = wI = F$ ) к магнитному потоку  $\Phi$  является *магнитным сопротивлением* этой цепи:

$$R_M = (wI)/\Phi,$$

а уравнение

$$\Phi = (wI)/ R_M$$

называется *законом Ома для магнитной цепи*.

МДС вдоль замкнутой магнитной цепи можно представить в виде суммы МДС на отдельных разнородных участках цепи (см. рис. 5.2), как

$$wI = \oint Hdl = \int_{l_{\text{фер}}} Hdl + \int_{\delta} Hdl = U_{\text{мфер}} + U_{\text{м}\delta},$$

где  $U_{\text{мфер}}$  – падение магнитного напряжения на ферромагнитном участке, А;

$U_{\text{м}\delta}$  – падение магнитного напряжения в зазоре, А.

Магнитное сопротивление

$$R_M = (\oint Hdl) / \Phi = \frac{U_{\text{мфер}}}{\Phi} + \frac{U_{\text{м}\delta}}{\Phi} = R_{\text{мфер}} + R_{\text{м}\delta},$$

где  $R_{\text{мфер}}$  – магнитное сопротивление ферромагнитного сердечника, Гн<sup>-1</sup>;

$R_{\text{м}\delta}$  – магнитное сопротивление воздушного зазора, Гн<sup>-1</sup>.

Магнитное сопротивление  $i$ -го участка длиной  $l_i$

$$R_{\text{ми}} = l_i / (\mu_a S_i).$$

При постоянной площади сечения сердечника операция интегрирования заменяется умножением

$$\int_{l_{\text{фер}}} Hdl = H_{\text{ср}} l_{\text{ср}},$$

где  $l_{\text{ср}} = l_{\text{фер}}$  – средняя длина сердечника магнитопровода, м.

Уравнение для представления МДС цепи (рис. 5.2) записывается

как

$$wI = U_{\text{мфер}} + U_{\text{м}\delta} = H_{\text{фер}} l_{\text{фер}} + H_{\delta} \delta = (R_{\text{м фер}} + R_{\text{м}\delta}) \Phi$$

и соответствует второму закону Кирхгофа.

### 5.1.3. Определение тягового усилия электромагнита

В электротехнике широкое применение находят электромагниты. В результате перемещения якоря электромагнитное устройство выполняет различные функции – производится подъем грузов, переключаются контакты коммутационных аппаратов и т.д. Магнитная цепь электромагнита как правило выполняется неразветвленной (см. рис. 5.3).

Подвижная часть (см. рис. 5.3) магнитопровода (якорь) 1 отделена от неподвижной части 2 (закреплена на основании 4) воздушным зазором с поперечным сечением  $S_{\delta}$ . При подключении обмотки 3 (число витков  $w$ ) к источнику питания по ней протекает ток  $I$ , создается магнитный поток  $\Phi$ , возникает электромагнитная сила  $F$ , действующая на якорь 1, и последний, преодолевая силу тяжести и действие пружин 5, притягивается к неподвижной части 2.

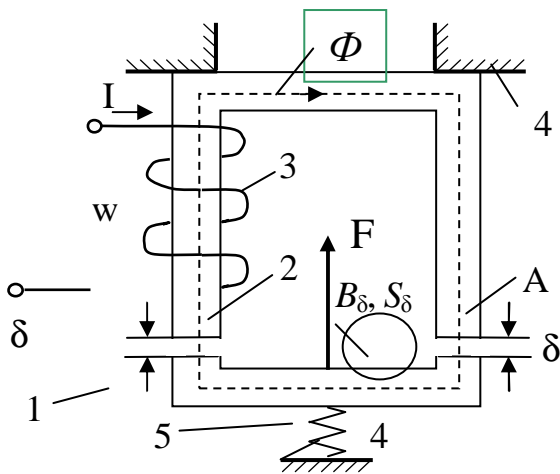


Рис. 5.3

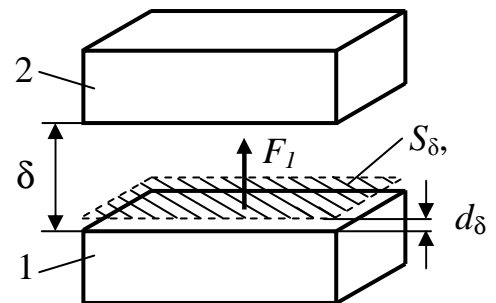


Рис. 5.4

Тяговое усилие определяется приближенно. Полагают, что значения  $I$  и  $B_{\delta}$  при изменении зазора на величину  $d_{\delta}$  (рис. 5.4) неизменны, а механическая работа совершается за счет изменения энергии магнитного поля воздушного зазора вследствие уменьшения его объема.

Тяговое усилие, приходящееся на один воздушный зазор:

$$F_1 = \frac{B_{\delta}^2}{2\mu_0} S_{\delta}.$$



Электромагнитная сила  $F$ , действующая на якорь 1 рассматриваемого устройства (рис. 5.3), имеющего два рабочих зазора,

$$F = \frac{B_{\delta}^2}{\mu_0} S_{\delta}.$$

Далее возможно проведение уточняющего расчета тягового усилия.

#### **5.1.4. Расчет неразветвленной магнитной цепи**

Нелинейная зависимость  $B = f(H)$  для каждого ферромагнитного материала (основная кривая намагничивания) задается в виде графика или таблицы.

Существуют две задачи – «прямая» и «обратная».

##### **5.1.4.1. Прямая задача**

Заданы конфигурация и геометрические размеры магнитной цепи, кривые намагничивания материалов, магнитный поток или индукция в каком-либо сечении. Требуется найти МДС, ток или число витков намагничивающей катушки.

*Алгоритм расчета:*

1) магнитная цепь разбивается на однородные участки постоянного сечения и определяются длины  $l_i$  и площади поперечных сечений  $S_i$  этих участков (длины участков рассчитываются по средней силовой линии);

2) по известной (или расчетной) величине потока  $\Phi$  определяются магнитные индукции на каждом  $i$ -м участке магнитной цепи;

3) по кривой намагничивания материала (приводятся в справочниках по электротехнике) определяются напряженности поля  $H_i$  для ферромагнитных участков цепи, напряженность поля  $H_{\delta}$  в зазоре определяется как

$$H_{\delta} = B_{\delta} / \mu_0;$$

4) подсчитывается сумма падений магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи, которая будет равна искомой МДС:

$$\sum H_i l_i + H_{\delta} \delta = wI;$$

5) при заданном числе витков  $w$  определяется величина тока обмотки  $I$ .



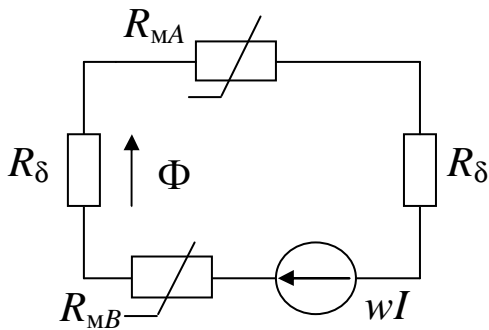


Рис. 5.6

ном количестве витков  $w$  обмотки катушки ее ток.

В соответствии с правилом правого-ходового винта (см. направление тока  $I$  в обмотке) определяется направление магнитного потока  $\Phi_{ст}$  в сердечнике (рис.

5.5) и направление МДС для схемы замещения (см. рис. 5.6).

Так как магнитный поток на всех участках цепи одинаков ( $\Phi = \Phi_{ст} = \Phi_{\delta}$ ), по заданному потоку  $\Phi_{\delta}$  и сечениям  $S_k$  находятся значения магнитных индукций на всех участках:

$$B_A = \Phi / S_A = 20 \cdot 10^{-4} / 25 \cdot 10^{-4} = 0,8, \text{ Тл,}$$

$$B_B = \Phi / S_B = 20 \cdot 10^{-4} / 16 \cdot 10^{-4} = 1,25, \text{ Тл.}$$

Величина сечения зазора  $S_{\delta}$  принимается равной  $S_B$  (при этом пренебрегают потоками выпучивания в зазоре)

$$B_{\delta} = \Phi_{\delta} / S_{\delta} = 20 \cdot 10^{-4} / 16 \cdot 10^{-4} = 1,25, \text{ Тл.}$$

По кривой намагничивания стали 2012 (рис. 5.7) определяются напряженности поля  $H_k$  для всех ферромагнитных участков цепи

$$B_A \Rightarrow H_A \approx 126, \text{ А/м,}$$

$$B_B \Rightarrow H_B \approx 310, \text{ А/м.}$$

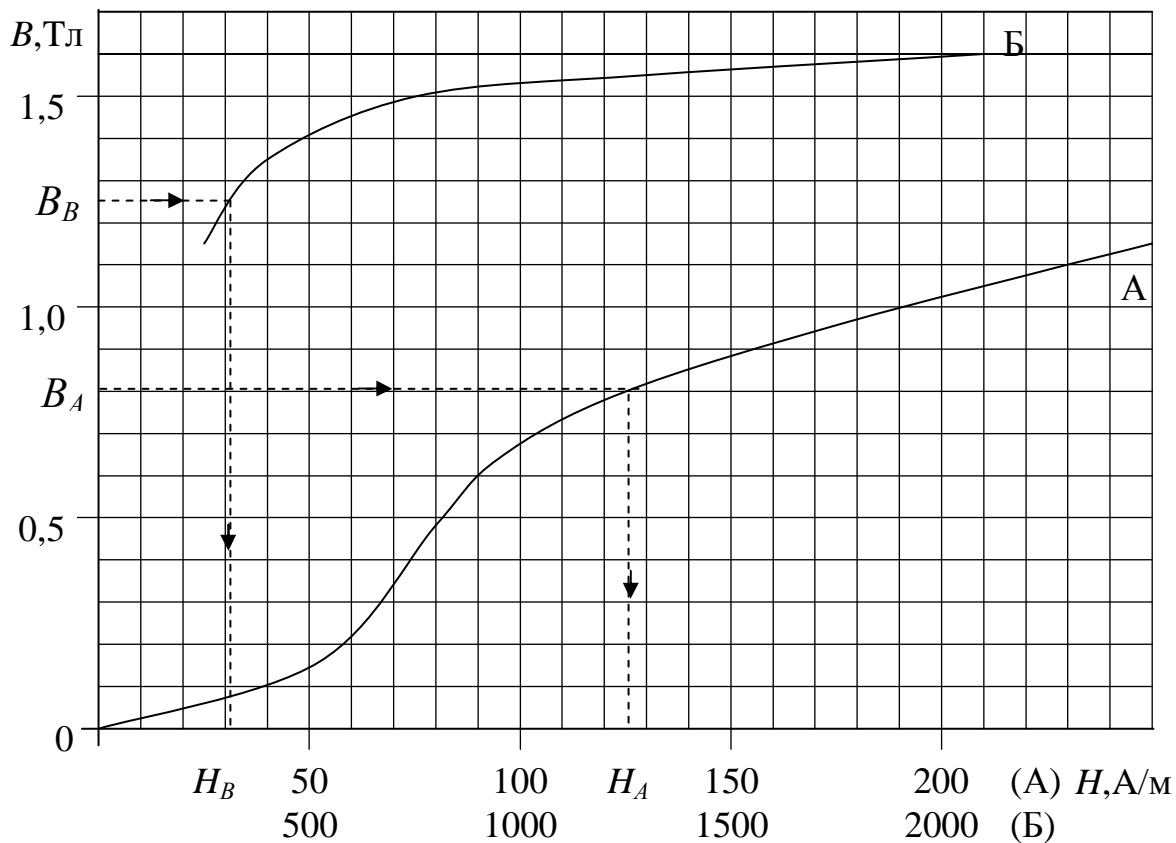


Рис. 5.7

Напряженность поля  $H_\delta$  в зазоре

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = 1,25/4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,25/1,256 \cdot 10^{-6} \approx 995223 \approx 10^6, \text{ А/м.}$$

Подсчитывается сумма падений магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи, которая и будет равна искомой МДС,

$$\begin{aligned} F &= w I = H_A l_{MA} + H_B l_{MB} + 2H_\delta \delta = \\ &= 126 \cdot 0,2 + 310 \cdot 0,6 + 2 \cdot 995223 \cdot 10^{-3} \approx 2200, \text{ А.} \end{aligned}$$

**Величина тока  $I$  в катушке (число витков  $w$  катушки задано):**

$$I = F / w = 2200 / 1000 = 2,2, \text{ А.}$$

Алгоритм выполненного расчета магнитной цепи по варианту «прямая задача» может быть схематично представлен следующим образом

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_\delta \begin{array}{l} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \left. \begin{array}{l} B_A \xrightarrow{2012} H_A \rightarrow H_A l_{MA} \\ B_B \xrightarrow{2012} H_B \rightarrow H_B l_{MB} \\ B_\delta \rightarrow H_\delta \rightarrow H_\delta \delta \end{array} \right\} \rightarrow H_A l_{MA} + H_B l_{MB} + 2H_\delta \delta = F = wI \rightarrow I. \end{array}$$

По известным значениям тока  $I$  и магнитного потока  $\Phi$  определяется индуктивность катушки  $L$ . Потокосцепление  $\Psi$  рассчитывается как произведение магнитного потока  $\Phi$  на число витков катушки  $w$ , с которыми сцепляется поток

$$\Psi = w\Phi,$$

одновременно

$$\Psi = L I.$$

Следовательно, индуктивность катушки  $L$  составит

$$L = (w \Phi) / I = 1000 \cdot 20 \cdot 10^{-4} / 2,2 \approx 0,91, \text{ Гн.}$$

*Пример 2*

Определить величину магнитного потока  $\Phi$  в магнитной цепи (рис. 5.5) при отсутствии воздушного зазора и токе катушки  $I$ , равном 2,2 А (см. пример 1).

*Решение*

Задача относится к типу «обратная задача» расчета магнитной цепи. Величина магнитодвижущей силы  $F$  составляет

$$F = w I = 2,2 \cdot 1000 = 2200, \text{ А.}$$

По известной величине магнитодвижущей силы  $F$  в магнитной цепи (рис.5.5) определяется величина магнитного потока  $\Phi_{ст}$  в магнитопроводе (и величина магнитной индукции  $B_{ст}$ ) в отсутствии зазора.

Схема замещения магнитной цепи (рис. 5.6) в этом случае не содержит магнитных сопротивлений зазоров ( $R_{\delta} = 0$ ), но, так как магнитные сопротивления участков магнитопровода неизвестны, необходимо, следуя алгоритму решения обратной задачи магнитной цепи, применить графоаналитический метод расчета.

1) Задаются несколькими значениями магнитной индукции в каком-то сечении, например, индукцией магнитного поля в зазоре  $B_{\delta i}$  (или значением магнитного потока  $\Phi_i$  в цепи).

Так как  $\delta=0$ , равны нулю и  $R_{\delta}$ , и  $H_{\delta}$ , и, в соответствии с законом Ома для магнитной цепи, поток  $\Phi$  будет больше, чем в случае с зазором (несмотря на нелинейную зависимость магнитных сопротивлений участков магнитопровода от потока). Следовательно, начальное минимальное значение магнитного потока  $\Phi_i$  в цепи может быть выбрано равным или даже несколько большим, чем в цепи по *примеру 1*.

2) Для каждого  $\Phi_i$  решается прямая задача, то есть определяются значения МДС ( $F_i$ ), необходимые для создания этого потока по схеме

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_i \rightarrow B_{Ai} \xrightarrow{2012} H_{Ai} \rightarrow H_{Ai} l_{mA} \\ \Phi_i \rightarrow B_{Bi} \xrightarrow{2012} H_{Bi} \rightarrow H_{Bi} l_{mB} \end{array} \right\} \rightarrow H_{Ai} l_{mA} + H_{Bi} l_{mB} = w I_i = F_i.$$

Результаты расчетов сводятся в таблицу (табл. 5.1).

Таблица 5.1

$\Phi_i \cdot 10^{+4}$ Вб	$B_A$ , Тл	$B_B$ , Тл	$B_{\delta}$ , Тл	$H_A$ , А/м	$H_B$ , А/м	$F=wI$ , А
22	0,88	1,375	-	151	450	300
24	0,96	1,5	-	175	750	485
26	1.04	1,625	-	199	2500	1540
27	1,08	1.687	-	224	3500	2100
28	1,12	1,75	-	249	4500	2748

3) По данным табл. 5.1 строится зависимость (см. рис. 5.8)  $F = f(\Phi)$ , по которой при заданном значении МДС ( $F=2200$  А) определяется искомый поток  $\Phi$

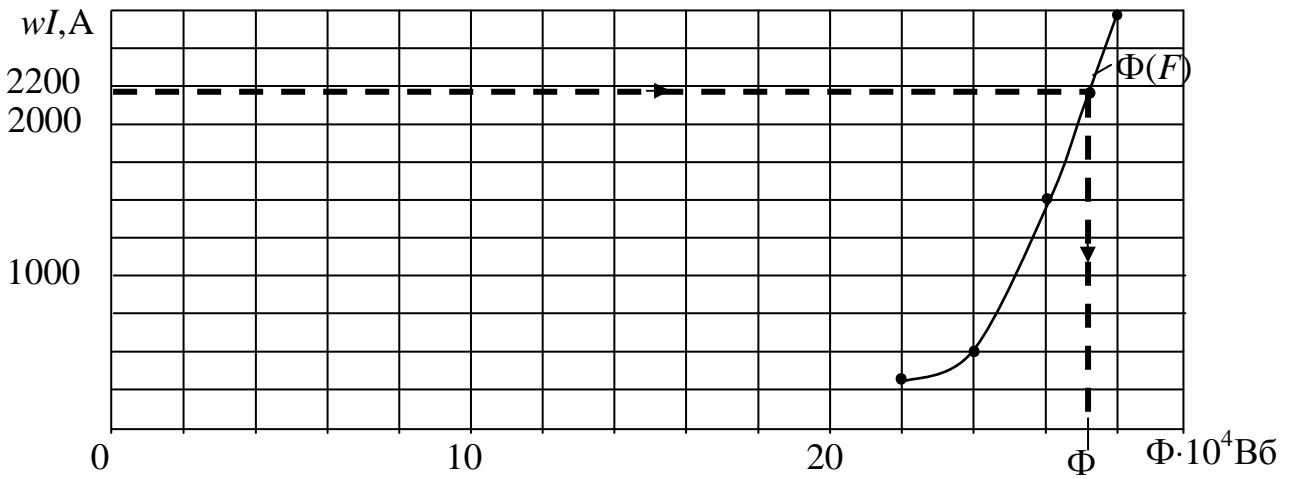


Рис. 5.8

$$\Phi \approx 27,2 \cdot 10^{-4}, \text{ Вб,}$$

и далее (при необходимости) величина  $B$

$$B = \Phi / S = 27,2 \cdot 10^{-4} / 16 \cdot 10^{-4} = 1,7, \text{ Тл.}$$

### Пример 3

Построить тяговую характеристику электромагнита (параметры магнитной цепи см. *пример 1*, рис. 5.5) при токе катушки  $I = 2,2$  А.

### Решение

Для построения тяговой характеристики электромагнита необходимо определить величину магнитной индукции  $B_\delta$  в зазоре (а следовательно и величину магнитного потока  $\Phi_\delta$ ) для промежуточных значений зазора  $0 < \delta < \delta_{\max}$ . Значения  $\Phi_\delta$  для  $\delta_{\max}$  и  $\delta=0$  известны из *примера 1* (задан  $\Phi_{\delta_{\max}}=20 \cdot 10^{-4}$  Вб) и *примера 2* (определен  $\Phi_{\delta=0}=27,2 \cdot 10^{-4}$  Вб).

Задаются значениями зазоров:

$$\delta_1 = 0,25 \delta_{\max} = 2,5 \cdot 10^{-4}, \text{ м,}$$

$$\delta_2 = 0,5 \delta_{\max}, = 5 \cdot 10^{-4}, \text{ м,}$$

$$\delta_3 = 0,75 \delta_{\max} = 7,5 \cdot 10^{-4}, \text{ м.}$$

Решаются три обратные задачи аналогично тому, как определяется величина магнитного потока в *примере 2*.

Результаты расчетов сводятся в табл. 5.2.

Таблица 5.2

$\Phi_i \cdot 10^4, \text{Вб}$	$B_A, \text{Тл}$	$B_B, \text{Тл}$	$B_\delta, \text{Тл}$	$H_A, \text{А/м}$	$H_B, \text{А/м}$	$H_\delta, \text{А/м}$	$F=wI, \text{А}$
$\delta_1 = 0,25\delta_{\max} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$							
22	0,88	1,375	1,375	151	450	1094745	847
24	0,96	1,5	1,5	175	750	1194267	1082
25	1	1,5625	1,5625	188	1400	1244028	1500
26	1,04	1,625	1,625	199	2500	1293789	2186
27	1,08	1,687	1,687	224	3500	1343152	2771
$\delta_2 = 0,5\delta_{\max} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$							
22	0,88	1,375	1,375	151	450	1094745	1394
23	0,92	1,4375	1,4375	163	550	1144506	1512
24	0,96	1,5	1,5	175	750	1194267	1678
25	1	1,5625	1,5625	188	1400	1244028	2122
26	1,04	1,625	1,625	199	2500	1293789	2833
$\delta_3 = 0,75\delta_{\max} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$							
21	0,84	1,3125	1,3125	137	360	1044984	1810
22	0,88	1,375	1,375	151	450	1094745	1942
23	0,92	1,4375	1,4375	163	550	1144506	2085
23,5	0,94	1,4687	1,4687	169	650	1169386	2178
24	0,96	1,5	1,5	175	750	1194267	2276

По данным табл. 5.2 строятся зависимости  $F=f(\Phi_{\delta i})$ , по которым определяются потоки  $\Phi_{\delta i}$  (см. рис. 5.9):

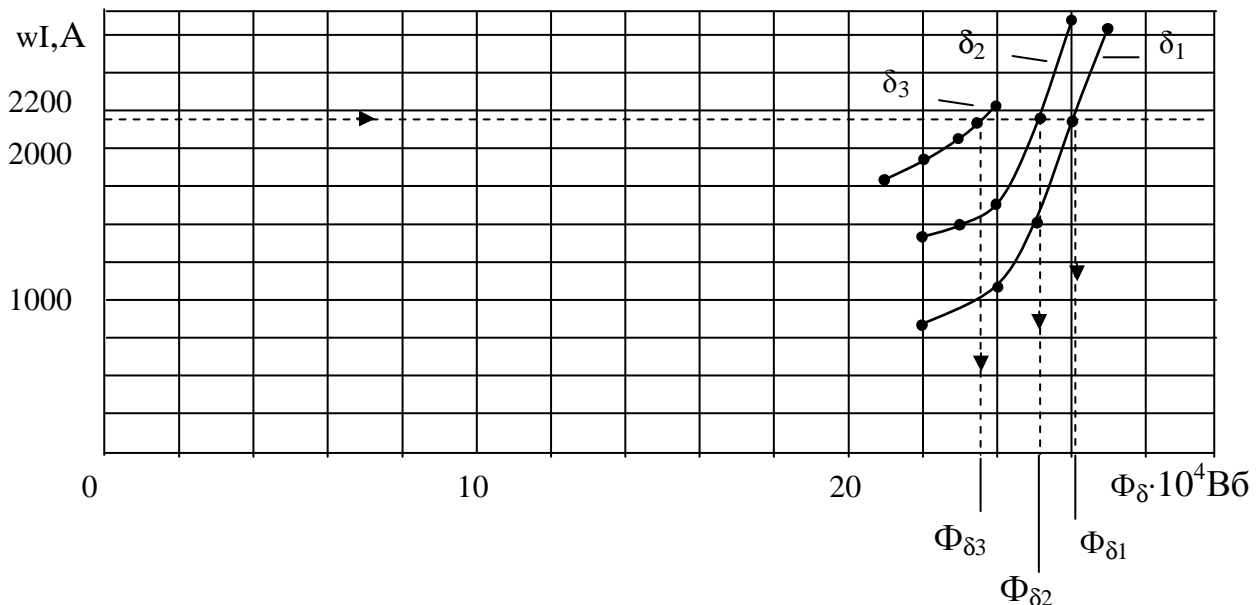


Рис. 5.9

$$\Phi_{\delta 1} \approx 26,07 \cdot 10^{-4}, \text{ Вб},$$

$$\Phi_{\delta 2} \approx 25,1 \cdot 10^{-4}, \text{ Вб},$$

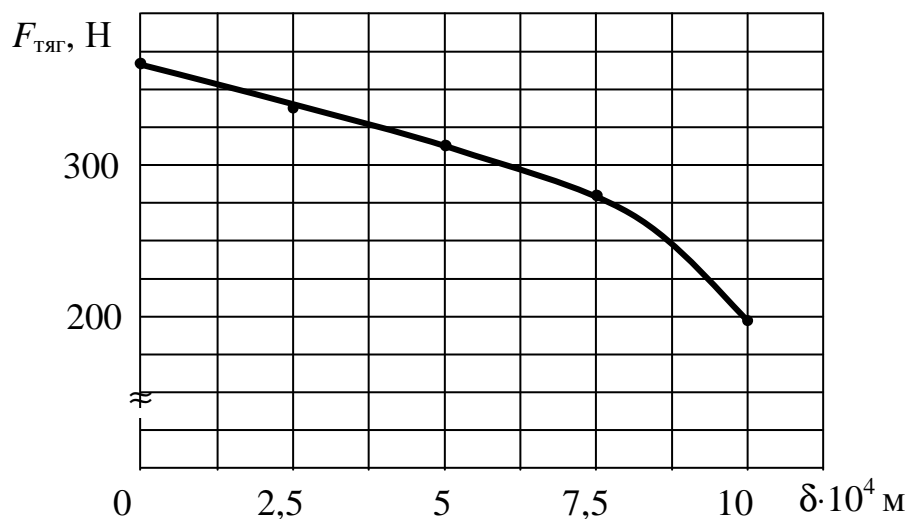


Рис. 5.10

$$\Phi_{\delta\delta} \approx 23,75 \cdot 10^{-4}, \text{ Вб.}$$

Далее рассчитываются значения  $B_{\delta i}$ :

$$B_{(\delta=0)} = 1,7, \text{ Тл (см. пример 2),}$$

$$B_{(\delta=2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м})} = 26,07 \cdot 10^{-4} / 16 \cdot 10^{-4} = 1,62, \text{ Тл,}$$

$$B_{(\delta=5 \cdot 10^{-4} \text{ м})} = 25,1 \cdot 10^{-4} / 16 \cdot 10^{-4} = 1,568, \text{ Тл,}$$

$$B_{(\delta=7,5 \cdot 10^{-4} \text{ м})} = 23,75 \cdot 10^{-4} / 16 \cdot 10^{-4} = 1,484, \text{ Тл,}$$

$$B_{(\delta_{\max})} = 1,25, \text{ Тл (см. пример 1)}$$

и тяговые усилия электромагнита для зазоров  $\delta_i$  по выражению:

$$F_{тяги i} = 2 F_{тяги \delta} = B_{\delta}^2 \cdot S_{\delta} / \mu_0,$$

а именно,

$$F_{тяги (\delta=0)} = 3681,5, \text{ Н,}$$

$$F_{тяги (\delta=2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м})} = 3343, \text{ Н,}$$

$$F_{тяги (\delta=5 \cdot 10^{-4} \text{ м})} = 3132, \text{ Н,}$$

$$F_{тяги (\delta=7,5 \cdot 10^{-4} \text{ м})} = 2805, \text{ Н,}$$

$$F_{тяги (\delta_{\max})} = 1990, \text{ Н.}$$

По результатам расчетов строится тяговая характеристика электромагнита  $F_{тяги} = f(\delta)$  (рис. 5.10).



### 5.1.6. Разветвленная магнитная цепь

Расчет разветвленных магнитных цепей проводится с применением законов Кирхгофа (по аналогии с электрическими цепями).

*Первый закон:* алгебраическая сумма магнитных потоков в любом узле магнитной цепи равна нулю

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0.$$

*Второй закон:* алгебраическая сумма падений магнитного напряжения вдоль любого замкнутого контура магнитной цепи равна алгебраической сумме МДС вдоль этого же контура:

$$\sum H_i l_i = \sum U_{mi} = \sum R_{mi} \Phi_i = \sum wI.$$

Слагаемые входят в уравнение со знаком «+», если направление МДС

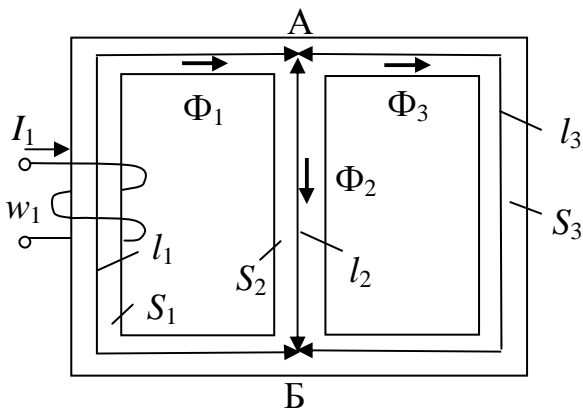


Рис. 5.11

или магнитного напряжения (магнитного потока) совпадают с выбранным условно положительным направлением обхода контура.

В разветвленных магнитных цепях в подавляющем большинстве случаев количество ветвей равно трем, и цепь имеет два узла. Для магнитной цепи с одной МДС (рис. 5.11) направление МДС и магнитного потока в этой ветви определяется в соответствии с «правилом правоходового винта».

Поток  $\Phi_1$  разветвляется и по первому закону Кирхгофа:

$$\Phi_1 = \Phi_3 + \Phi_2.$$

По второму закону Кирхгофа для контура, образованного первой и второй ветвями (обход по часовой стрелке),

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = w_1 I_1 = F.$$

Магнитные напряжения на параллельных ветвях равны между собой и равны магнитному напряжению  $U_{МАБ}$  между узлами

$$H_2 l_2 = H_3 l_3 = U_{МАБ}.$$

Магнитные потоки распределяются обратно пропорционально магнитным сопротивлениям параллельных ветвей

$$\Phi_3 / \Phi_2 = R_{M2} / R_{M3}.$$

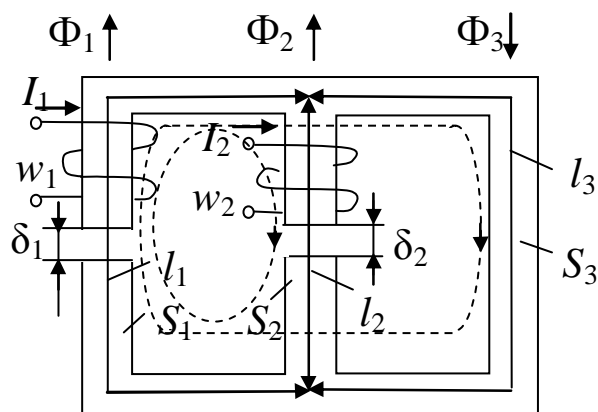


Рис. 5.12

Для магнитной цепи с несколькими МДС (рис. 5.12) положительные направления магнитных потоков выбираются произвольно, и записываются уравнения по законам Кирхгофа (обход контуров показан пунктиром)

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0,$$

$$H_1 l_1 + H_{\delta 1} \delta_1 - H_2 l_2 - H_{\delta 2} \delta_2 = w_1 I_1 - w_2 I_2,$$

$$H_1 l_1 + H_{\delta 1} \delta_1 + H_3 l_3 = w_1 I_1.$$

Для цепей рис. 5.11 и рис. 5.12 решение «прямой задачи» (например, задан магнитный поток в одной из ветвей, одна МДС, геометрические размеры и материал магнитопровода, необходимо определить неизвестные потоки в ветвях и другую МДС в ветви, где неизвестен магнитный поток) ведется следующим образом:

- 1) составляются уравнения по законам Кирхгофа;
- 2) по заданной величине потока  $\Phi_i$  в ветви определяются значения  $B_i$  и далее (по кривой намагничивания)  $H_i$ ;
- 3) на основе одного из составленных по второму закону Кирхгофа уравнений, содержащего слагаемое  $H_i l_i$  и известную МДС  $F_i$ , рассчитывается  $H_j$  другой ветви, а по кривой намагничивания -  $B_j$ , и далее поток этой ветви  $\Phi_j = B_j S_j$ ;
- 4) из уравнения, составленного по первому закону Кирхгофа, определяются последний неизвестный поток  $\Phi_k$  и, далее,  $B_k$ , и по кривой намагничивания  $H_k$ ;
- 5) из последнего уравнения определяется  $F$  - неизвестная МДС.

В процессе решения «обратной задачи» (заданы МДС и необходимо определить все потоки  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ ):

- 1) строится эквивалентная схема замещения цепи (рис. 5.13);

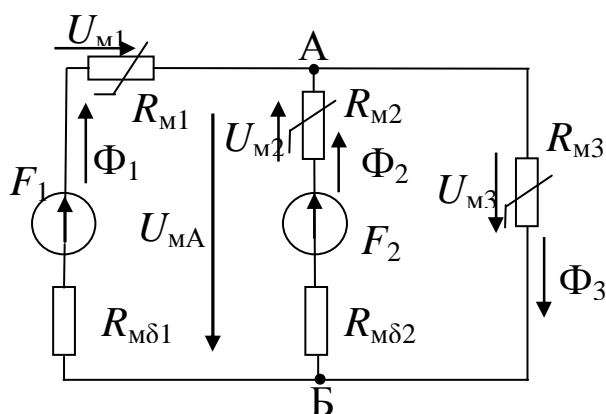


Рис. 5.13

2) определяются веберамперные характеристики  $U_{mi}(\Phi)$  для магнитных сопротивлений схемы: перестраивают кривые намагничивания материалов ферромагнитных участков цепи  $B(H)$ , умножая значения по оси  $B$  на сечение  $i$ -го участка  $S_i$ , а по оси  $H$  - на длину  $l_i$ ;

3) далее расчет магнитных потоков в цепи ведется тем или иным графоаналитическим методом, например, методом двух узлов.

### Пример 1

Определить величину воздушного зазора  $l_\delta$  в третьей ветви магнитной цепи (рис. 5.14), при которой магнитный поток  $\Phi_1$  в первой ветви равен  $4 \cdot 10^{-4}$  Вб, а также магнитные потоки  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ , если МДС составляет 800 А,  $l_1=0,40$ м,  $l_2=0,25$ м,  $l_3=0,35$ м,  $S_1=3$ см<sup>2</sup>,  $S_2=2$  см<sup>2</sup>,  $S_3=1,5$  см<sup>2</sup>. Материал ферромагнитного сердечника – сталь 3404.

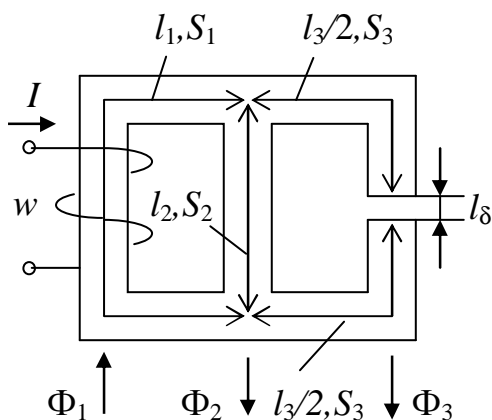


Рис. 5.14

### Решение

В соответствии с первым законом Кирхгофа для верхнего узла магнитной цепи и вторым законом Кирхгофа для контура, образованного первой и второй ветвями, и внешнего контура,

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3, \\ wI = H_1 l_1 + H_2 l_2, \\ wI = H_1 l_1 + H_3 l_3 + H_\delta l_\delta. \end{cases}$$

По заданному значению магнитного потока  $\Phi_1$  определяется значение магнитной индукции  $B_1$ , а по основной кривой намагничивания стали 3404 (рис. 5.15) – соответствующая ей напряженность магнитного поля  $H_1$

$$B_1 = \Phi_1 / S_1 = 4 \cdot 10^{-4} / 3 \cdot 10^{-4} = 1,33, \text{ Тл} \Rightarrow H_1 \approx 104 \text{ А/м.}$$

Из второго уравнения системы

$$H_2 = \frac{wI - H_1 l_1}{l_2} = \frac{800 - 104 \cdot 0,4}{0,25} \approx 3033, \text{ А/м.}$$

По кривой намагничивания (рис. 5.15) определяется соответствующее напряженности магнитного поля  $H_2$  (шкала по оси  $H$  логарифмическая) значение магнитной индукции  $B_2$  и, далее, значение магнитного потока  $\Phi_2$

$$B_2 \approx 1,71, \text{ Тл}; \quad \Phi_2 = B_2 \cdot S_2 = 3,42 \cdot 10^{-4}, \text{ Вб.}$$

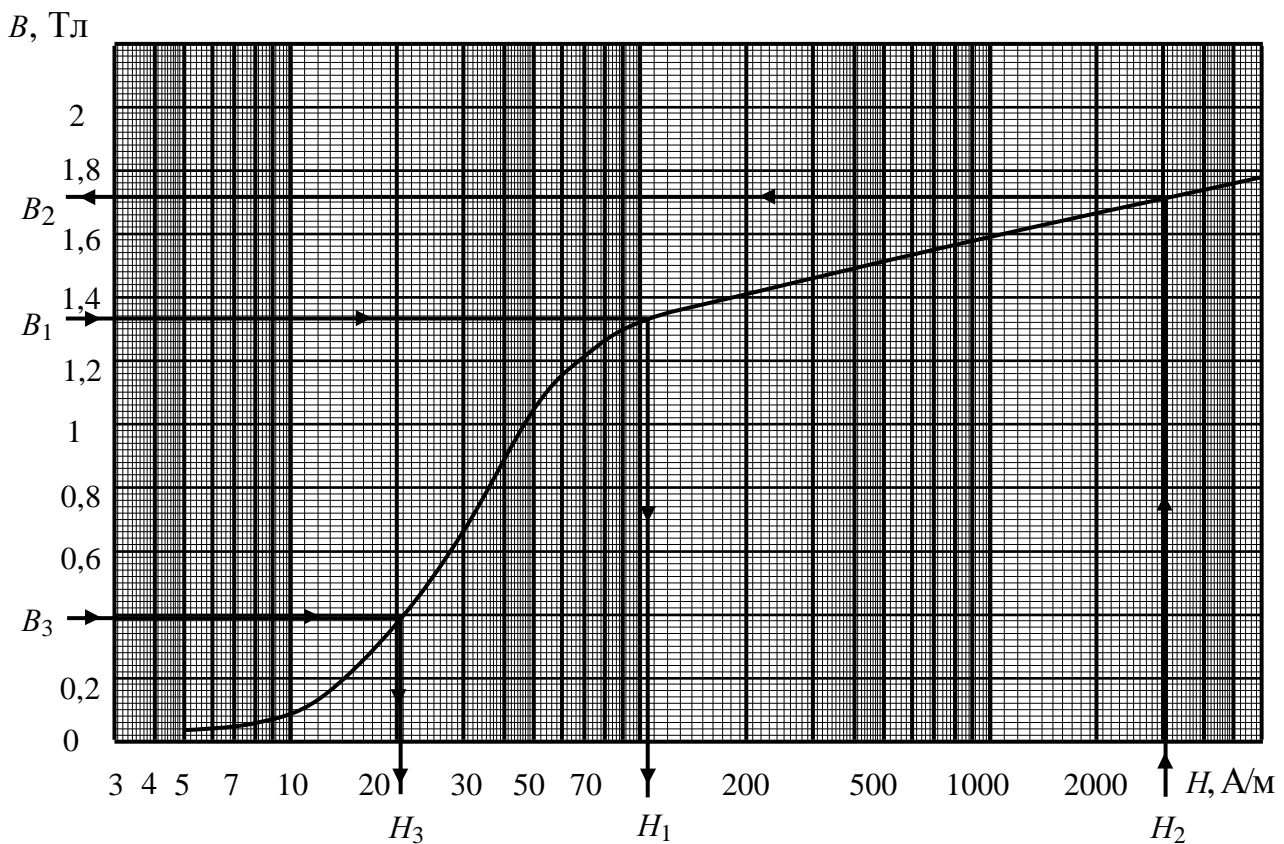


Рис. 5.15

По первому уравнению системы рассчитывается магнитный поток  $\Phi_3$  как

$$\Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_2 = (4 - 3,42) \cdot 10^{-4} = 0,58 \cdot 10^{-4}, \text{ Вб,}$$

далее значение  $B_3$  и по кривой намагничивания (рис. 5.15) – напряженность магнитного поля  $H_3$

$$B_3 = \Phi_3 / S_3 = 0,58 \cdot 10^{-4} / 1,5 \cdot 10^{-4} = 0,387, \text{ Тл} \Rightarrow H_3 \approx 20,7, \text{ А/м.}$$

Значение магнитной индукции в зазоре  $B_\delta$  равно  $B_3$ , тогда значение напряженности магнитного поля  $H_\delta$ :

$$H_{\delta} = \frac{B_3}{\mu_0} = \frac{0,387}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 307700, \text{ А/м}.$$

Из третьего уравнения системы определяется  $l_{\delta}$ :

$$l_{\delta} = \frac{wI - H_1 l_1 - H_3 l_3}{H_{\delta}} = \frac{800 - 104 \cdot 0,4 - 20,7 \cdot 0,35}{307700} \approx 0,00244, \text{ м}.$$

### 5.1.7. Задачи для самостоятельного решения

#### Задача 1

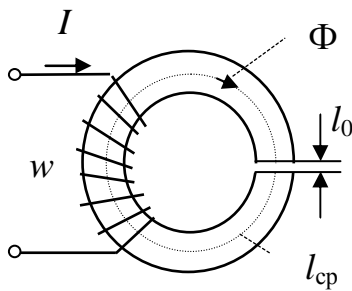


Рис. 5.16

Определить магнитодвижущую силу, необходимую для создания в сердечнике постоянного магнитного потока  $\Phi = 4 \cdot 10^{-4}$  Вб, если площадь сечения  $S = 4 \text{ см}^2$ , длина средней силовой линии  $l_{\text{ср}} = 100 \text{ см}$ , величина зазора  $l_0 = 0,2 \text{ мм}$ . Материал сердечника - электротехническая сталь 3406. Кривая намагничивания задана таблично

$B, \text{ Тл}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
$H, \text{ А/м}$	50	75	115	170	291	700	1800

Ответ:  $wI = 450 \text{ А}$ .

#### Задача 2

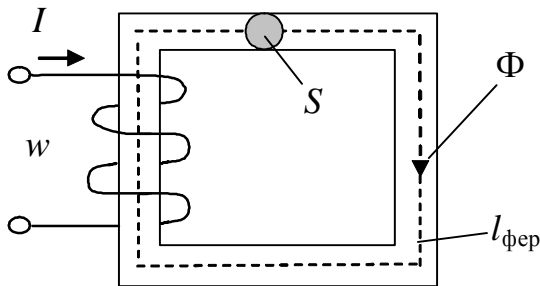


Рис. 5.17

Определить магнитный поток  $\Phi$  (рис. 5.17), если величина МДС магнитной цепи составляет 200 А, длина средней линии  $l_{\text{фер}} = 0,5 \text{ м}$ , площадь поперечного сечения магнитопровода  $S = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

Основная кривая намагничивания материала сердечника приведена на рис. 5.18.

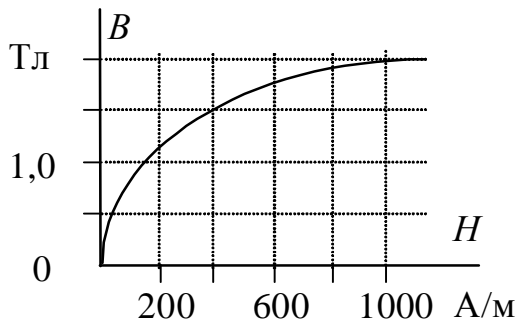


Рис. 5.18

Ответ: 0,0015 Вб.

### Задача 3

В стальном магнитопроводе (рис. 5.19) магнитная индукция  $B$  составляет 1,4 Тл. Какой воздушный зазор следует сделать в магнитопроводе, чтобы индукция уменьшилась вдвое (ток в обмотке остается неизменным). Кривая намагничивания материала магнитопровода приведена на рис. 5.20.

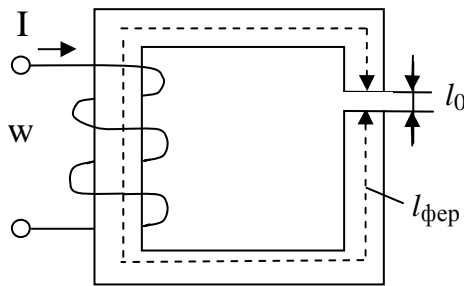


Рис. 5.19

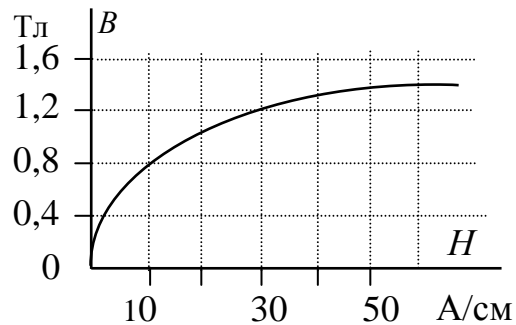


Рис. 5.20

Ответ:  $l_0 = 0,00942l_{\text{фер}}$ .

### Задача 4

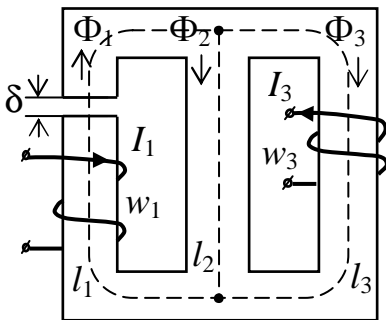


Рис. 5.21

Определить ток катушки  $I_3$ , магнитные потоки  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ , если заданы следующие величины:

$w_1 = w_3 = 300$ ,  $l_1 = l_3 = 25$  см,  $l_2 = 12$  см,  $S_2 = S_3 = 10$  см<sup>2</sup>,  $S_1 = 18$  см<sup>2</sup>,  $\delta = 0,06$  мм,  $I_1 = 0,4$  А,  $\Phi_1 = 14,4 \cdot 10^{-4}$  Вб.

Кривая намагничивания материала ферромагнитного сердечника задана таблично

$B$ , Тл	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$H$ , А/м	0	20	35	54	73	98	118	150
$B$ , Тл	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$H$ , А/м	185	235	300	402	610	1000	1300	2200

Ответ:  $I_3 = 0,05$  А,  $\Phi_2 = 10 \cdot 10^{-4}$  Вб и  $\Phi_3 = 4,4 \cdot 10^{-4}$  Вб.

### Задача 5

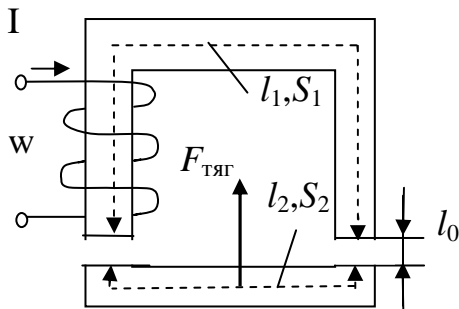


Рис. 5.22

Определить магнитную индукцию в зазоре (рис. 5.22), если сила тяги электромагнита  $F_{\text{тяг}}=240$  Н и сечение магнитопровода  $S_1=3$  см<sup>2</sup>.

Ответ: 1 Тл.

## 5.2. Магнитные цепи с переменными магнитодвижущими силами

### 5.2.1. Основные положения

Магнитная цепь с переменной МДС - это цепь, магнитный поток в которой возбуждается переменным током. Она представляет собой катушку индуктивности с ферромагнитным (стальным) сердечником (магнитопроводом).

При подключении к источнику синусоидального напряжения

$$u(t) = U_m \sin \omega t$$

в цепи катушки появляются переменный ток  $i(t)$  и переменная МДС  $w i$  ( $w$  - число витков катушки), под действием последней в сердечнике возникает основной переменный магнитный поток  $\Phi(t)$ .

Незначительная часть создаваемого потока рассеивается - замыкается по воздуху (поток рассеяния  $\Phi_p$ ), его силовые линии сцепляются только с витками обмотки, что приводит к линейной связи потокосцепления и тока

$$\Psi_p = L_p i,$$

где  $L_p$  - индуктивность рассеяния, Гн.

Вектор результирующего магнитного потока  $\Phi_{\text{рез}}$  равен векторной сумме составляющих (основной поток и поток рассеяния не совпадают по фазе):

$$\Phi_{\text{рез}} = \Phi + \Phi_p.$$

Нелинейные свойства ферромагнитного материала ведут к нелинейной связи потокосцепления основного потока и тока

$$\Psi(i) = L(i) i,$$

где  $L(i)$  – индуктивность как функция тока. Значение магнитного потока  $\Phi$  определяется по магнитной индукции магнитного поля  $B$ , которая зависит от напряженности магнитного поля ( $B=\mu H$ ).

Для такой цепи на основании второго закона Кирхгофа относительно мгновенных значений может быть записано выражение для напряжения на зажимах катушки

$$u = -e - e_p + Ri = Ri + L_p \frac{di}{dt} + \frac{d\Psi}{dt},$$

где  $e = -\frac{d\Psi}{dt} = -w \frac{d\Phi}{dt}$  - ЭДС самоиндукции основного потока, В;

$e_p = -\frac{d\Psi_p}{dt} = -w \frac{d\Phi_p}{dt}$  - ЭДС самоиндукции потока рассеяния, В;

$R$  - активное сопротивление обмотки катушки, Ом.

Вследствие наличия переменного магнитного потока сердечник перемагничивается с частотой тока  $f$ , благодаря чему в процессе его циклического перемагничивания за несколько полупериодов устанавливается замкнутая симметричная петля гистерезиса.

При синусоидальном напряжении в силу нелинейности зависимости  $\Psi(i)$  ток в обмотке несинусоидальный. Если пренебречь потоками рассеяния и активным сопротивлением обмотки, то

$$u = U_m \sin \omega t = -e$$

и

$$\Phi = -\int \frac{e}{w} dt = \frac{E_m}{w\omega} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \text{const}.$$

Поскольку напряжение не имеет постоянной составляющей, то ее не будут иметь ни ток  $i$ , ни МДС ( $wi$ ). Магнитный поток  $\Phi$  в сердечнике является синусоидальным, отстает по фазе от напряжения на четверть периода ( $\pi/2$ ), и его амплитуда

$$\Phi_m = \frac{E_m}{w\omega}.$$

Действующее значение ЭДС в катушке со стальным сердечником

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 4,44 w f \Phi_m,$$

и, так как  $E_m \approx U_m$ , амплитудное значение магнитного потока определяется действующим значением синусоидального напряжения, подводимого к катушке, его частотой и числом витков катушки:



$$\Phi_m = U / (4,44wf) = B_m S_c,$$

где  $S_c$  – площадь поперечного сечения магнитопровода.

Магнитный поток в сердечнике с воздушным зазором (для случая переменной МДС) по закону Ома

$$\Phi(t) = \frac{w i(t)}{\left(\sum_{k=1}^n l_k / \mu_k S_k\right) + \delta / \mu_0 S_0} = \frac{F(t)}{R_M},$$

где  $\mu_k$  – магнитная проницаемость, соответствующая напряженности магнитного поля  $H_k$  участка цепи длиной  $l_k$  и площадью сечения  $S_k$ ;  $S_0$  – площадь сечения магнитопровода в воздушном зазоре  $\delta$ .

Воздушный зазор увеличивает (за счет составляющей  $\delta / \mu_0 S_0$ ) магнитное сопротивление цепи  $R_M$ , что в соответствии с приведенным выше выражением должно привести к существенному уменьшению магнитного потока, однако этого не происходит. При неизменном значении питающего напряжения амплитуда магнитного потока (как показано ранее) остается неизменной. Это обеспечивается возрастанием действующего значения тока катушки (за счет изменения угла сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением и током катушки вследствие уменьшения ее реактивного сопротивления) до значения, при котором сохраняется постоянство амплитуды магнитного потока  $\Phi$ .

Путем изменения величины воздушного зазора в магнитопроводе можно регулировать значение тока катушки индуктивности (дроселя) при включении ее в цепь переменного тока.

### ***5.2.2. Потери мощности в ферромагнитном сердечнике***

Наряду с электрическими потерями мощности в проводах обмотки катушки ( $P_m$  – потери мощности в меди) существуют потери на циклическое перемагничивание ферромагнитного сердечника в виде выделяемой в нем теплоты; это приводит к дополнительному нагреву катушки и магнитопровода и снижению коэффициента полезного действия электротехнических устройств.

Потери энергии за один цикл перемагничивания сердечника

$$A = V_{ст} \int H_C dB = V_{ст} m_H m_B S,$$

где  $V_{ст}$  – объем сердечника;  $S$  – площадь петли гистерезиса;  $m_H$ ,  $m_B$  – масштабы по осям координат, в которых построены петли гистерезиса.

Мощность потерь (в стали) при перемагничивании с частотой  $f$

$$P_{ст} = Af.$$

Удельные потери  $P_{уд}$  и удельная намагничивающая мощность  $Q_{уд}$  являются паспортными характеристиками ферромагнитных материалов

$$P_{уд} = \frac{P_{ст}}{G} = \frac{P_{ст}}{V_{ст} \gamma}, \quad Q_{уд} = \frac{Q_H}{G} = \frac{Q_H}{V_{ст} \gamma},$$

где  $Q_H$  – намагничивающая мощность при перемагничивании с частотой  $f$ ;  $G$  – масса сердечника;  $\gamma$  – плотность стали. В электротехнических справочниках приводятся зависимости  $P_{уд}$  и  $Q_{уд}$  от магнитной индукции в сердечнике для различных частот  $f$ .

Потери мощности в стали  $P_{ст}$  включают в себя потери мощности на гистерезис  $P_H$  (пропорциональны площади статической петли гистерезиса) и потери мощности на вихревые токи  $P_B$ , индуцируемые переменным магнитным потоком в токопроводящем материале сердечника (пропорциональны разности между площадями динамической и статической петель гистерезиса)

$$P_{ст} = P_H + P_B.$$

Величина мощности потерь на гистерезис  $P_H$

$$P_H = p_{yг} f B_m^2 G,$$

где  $p_{yг}$  – удельные (на единицу массы) потери мощности на гистерезис;  $f$  – частота питающего тока;  $B_m$  – амплитудное значение магнитной индукции в сердечнике;  $G$  – масса сердечника.

Потери мощности на вихревые токи  $P_B$  рассчитываются по формуле

$$P_B = p_{yв} f^2 B_m^2 G,$$

где  $p_{yв}$  – удельные потери мощности от вихревых токов.

С целью снижения потерь мощности на гистерезис для изготовления магнитопровода используются ферромагнитные материалы, характеризующиеся узкой петлей гистерезиса.

Уменьшение потерь мощности на вихревые токи достигается применением металлов с большим удельным электрическим сопротивлением, а также выполнением сердечника в виде набора тонких электрически изолированных друг от друга пластин, что способствует уменьшению индуцированных в каждой пластине вихревых токов и снижению потерь мощности (пропорционально квадрату тока).

### 5.2.3. Уравнение электрического состояния катушки со сталью

Зависимость магнитного потока в сердечнике от тока катушки при синусоидальном  $\Phi(t)$  нелинейна из-за нелинейной зависимости  $B(H)$ , а магнитный поток  $\Phi$  отстает по фазе от тока  $i$  на угол  $\delta$  из-за потерь на перемагничивание. При питании синусоидальным напряжением  $u(t)$  ток  $i(t)$  в катушке с ферромагнитным сердечником искажается и является несинусоидальным. Кривая тока  $i(t)$  строится графически по веберамперной характеристике катушки  $\Psi(i)$ .

С целью упрощения расчет катушки с ферромагнитным сердечником проводится для эквивалентного синусоидального тока  $i_{\text{ЭК}}(t)$ , имеющего с реальным несинусоидальным током  $i(t)$  одинаковое действующее значение ( $I=I_{\text{ЭК}}$ ) при частоте питающего напряжения и развивающего одинаковую с ним активную мощность (одинаковое значение коэффициента мощности):

$$I = \sqrt{\int_0^T i^2 dt / T} = I_{\text{ЭК}} = I_{m\text{ЭК}} / \sqrt{2}; \quad \cos \varphi = P / UI = \cos \varphi_{\text{ЭК}} = \frac{P}{UI_{\text{ЭК}}}.$$

Тогда уравнение электрического состояния катушки со сталью записывается по второму закону Кирхгофа и может быть представлено в комплексной форме

$$\dot{U} = R\dot{I} + j\omega L_p \dot{I} - \dot{E} = (R + jX_p)\dot{I} + \dot{U}_\phi.$$

где  $\dot{U}$  – комплексное значение напряжения;  $\dot{E}$  – комплекс ЭДС самоиндукции, обусловленной основным магнитным потоком;  $\dot{I}$  – комплексное значение тока;  $R$  – активное сопротивление катушки;  $X_p = \omega L_p$  – индуктивное сопротивление катушки, обусловленное потоком рассеяния.

По этому уравнению могут быть построены векторная диаграмма токов и напряжений (рис. 5.23) и составлены эквивалентные схемы замещения катушки со сталью, параллельная (рис. 5.24) и последовательная (рис. 5.25).

Векторная диаграмма токов и напряжений строится по расчетным или экспериментальным данным:

1) определяются напряжение  $\dot{U}$ , ток  $\dot{I}$ , угол сдвига фаз  $\varphi$  между ними и изображаются (рис. 5.23) на

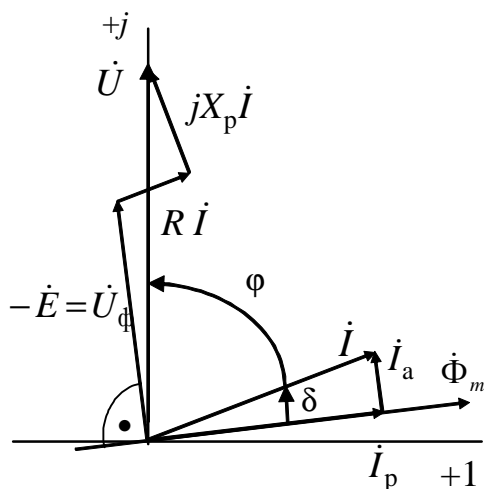


Рис. 5.23

комплексной плоскости (например, в предположении, что начальная фаза напряжения равна  $90^\circ$ );

2) рассчитываются  $R$ ,  $X_p$  и напряжения на соответствующих элементах, графически (согласно уравнению состояния цепи) находятся вектор  $\dot{U}_\phi$ , направление вектора  $\dot{\Phi}_m$  (отстает по фазе от напряжения  $\dot{U}_\phi$  на  $90^\circ$ ), угол  $\delta$  и составляющие тока  $\dot{I}_a$ ,  $\dot{I}_p$  (как проекции на направления потока и вектора напряжения  $\dot{U}_\phi$ ).

На диаграмме  $\dot{I}_a$  – вектор активной составляющей тока (обусловленной потерями мощности в стали),  $\dot{I}_p$  – вектор реактивной составляющей тока (создается основным магнитным потоком),  $\delta$  – угол между векторами тока и основного магнитного потока (угол магнитных потерь, приближенно  $\delta \approx 90^\circ - \varphi$ ).

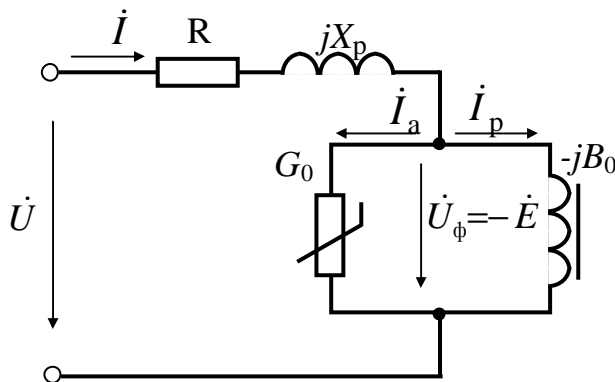


Рис. 5.24

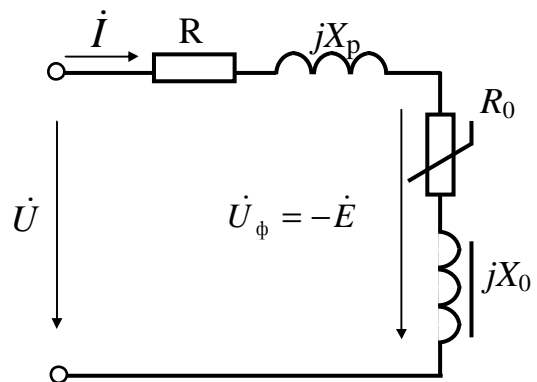


Рис. 5.25

Потери мощности на гистерезис и вихревые токи на схемах замещения учитываются нелинейной проводимостью  $G_0$  (рис. 5.24) или нелинейным сопротивлением  $R_0$  (рис. 5.25). Напряжение  $U_\phi$  обусловлено ЭДС самоиндукции основного потока

$$\dot{U}_\phi = \dot{I}_a / G_0 = \dot{I}_p / (-jB_0) \quad \text{или} \quad \dot{U}_\phi = (R_0 + jX_0)\dot{I},$$

где  $B_0$  и  $X_0$  – индуктивная проводимость и индуктивное сопротивление соответственно, обусловленные основным магнитным потоком  $\Phi$  (намагничивающей мощностью  $Q_H$ ).

Потери мощности в стали  $P_{ст}$  и намагничивающая мощность  $Q_H$  связаны с параметрами схем замещения и соответствующими электрическими величинами следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{ст} &= R_0 I^2 = G_0 U_\phi^2 = UI \cos \varphi - R I^2 = U_\phi I \sin \delta = U_\phi I_a, \\ Q_H &= X_0 I^2 = B_0 U_\phi^2 = UI \sin \varphi - X_p I^2 = U_\phi I \cos \delta = U_\phi I_p, \end{aligned}$$

тогда параметры схем замещения

$$R_0 = P_{ст} / I^2, \quad G_0 = P_{ст} / U_\phi^2, \quad X_0 = Q_H / I^2, \quad B_0 = Q_H / U_\phi^2.$$

Активное сопротивление  $R$  обмотки определяется экспериментально на постоянном токе. Индуктивный элемент схемы замещения  $X_p = \omega L_p$  обусловлен потоком рассеяния  $\Phi_p$ . Если степень насыщения стали и воздушные зазоры невелики, для ориентировочного определения индуктивного сопротивления рассеяния применяется эмпирическая формула:

$$X_p \approx (1,5 \div 2,5) R.$$

Полное сопротивление катушки с магнитопроводом:

$$Z_{\text{эк}} = U/I.$$

Эквивалентное активное сопротивление  $R_{\text{эк}}$  катушки определяется по значению потребляемой активной мощности  $P$  или по потерям мощности на перемагничивание  $P_{\text{ст}}$  и активному сопротивлению  $R$  проводов катушки

$$R_{\text{эк}} = P/I^2 = (P_{\text{ст}}/I^2) + R,$$

эквивалентное индуктивное сопротивление катушки:

$$X_{\text{эк}} = X_p + X_0 = \sqrt{Z_{\text{эк}}^2 - R_{\text{эк}}^2}.$$

#### 5.2.4. Примеры решения задач

##### Пример 1

*Определить полные и удельные потери мощности в стали магнитной цепи для динамической петли гистерезиса, полученной на частоте 400 Гц, основываясь на данных: объем сердечника  $5 \times 10^2 \text{ см}^3$ ; площадь петли  $30 \text{ см}^2$ ; масштабы по осям составляют:  $m_H = 40 \text{ (А/м)/см}$ ,  $m_B = 0,2 \text{ Тл/см}$ .*

##### Решение

Потери энергии за один цикл перемагничивания сердечника можно найти как:

$$A = V_{\text{ст}} m_H m_B S,$$

где  $V_{\text{ст}}$  – объем сердечника;  $S$  – площадь петли гистерезиса;  $m_H$ ,  $m_B$  – масштабы по осям координат, в которых построены петли,

$$A = 5 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 10^2 \cdot 0,2 \cdot 10^2 \cdot 30 \cdot 10^{-4} = 0,12, \text{ Дж.}$$

При перемагничивании с частотой  $f$ , равной 400 Гц, мощность потерь в стали

$$P_{\text{ст}} = A f = 0,12 \cdot 400 = 48, \text{ Вт.}$$

Удельные потери мощности:

$$P_{уд} = \frac{P_{ст}}{G} = \frac{P_{ст}}{V_{ст} \cdot \gamma} = \frac{48}{5 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 7800} = 12,308, \text{ Вт/кг},$$

где  $\gamma=7800 \text{ кг/м}^3$  - плотность стали.

### Пример 2

Показания приборов (рис. 5.26) в цепи катушки со стальным сердечником, подключенной к синусоидальному напряжению:  $pW \Rightarrow 50 \text{ Вт}$ ,  $pV \Rightarrow 127 \text{ В}$ ,  $pA \Rightarrow 0,5 \text{ А}$ . Определить параметры параллельной (рис.5.27) и последовательной (рис.5.28) схем замещения, если полем рассеяния и сопротивлением проводов катушки можно пренебречь. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

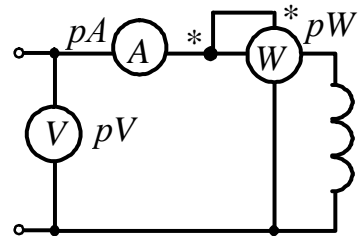


Рис. 5.26

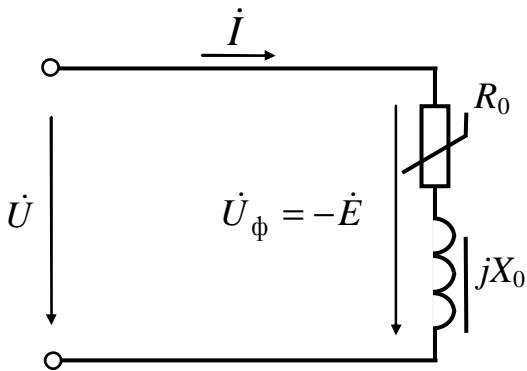


Рис. 5.27

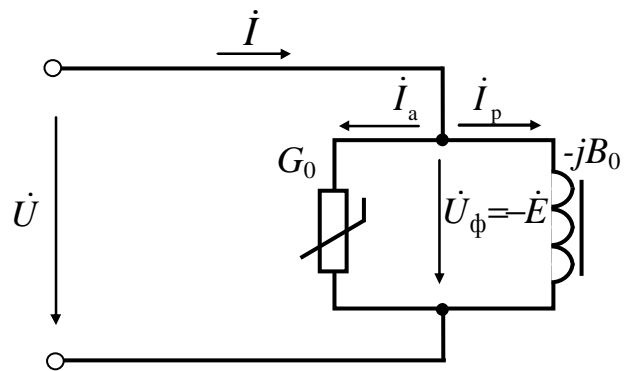


Рис. 5.28

### Решение

В схемах замещения катушки (рис. 5.27, 5.28) элементами  $R$  и  $X_p$  по условию задачи можно пренебречь, т.е. принять равными нулю.

Для последовательной цепи реальные потери мощности в сердечнике замещены эквивалентными потерями в активном сопротивлении  $R_0$

$$R_0 = \frac{P_{ст}}{I^2} = \frac{50}{0,5^2} = 200, \text{ Ом}.$$

Модуль комплексного сопротивления катушки

$$Z_0 = U / I = 127 / 0,5 = 254, \text{ Ом},$$

реактивное сопротивление катушки

$$X_0 = \sqrt{Z_0^2 - R_0^2} = \sqrt{254^2 - 200^2} = 156,58, \text{ Ом}.$$

Активной составляющей напряжения  $U_a$  соответствует падение напряжения на активном сопротивлении  $R_0$ , а реактивная составляющая  $U_p$  равна падению напряжения на сопротивлении  $X_0$

$$U_a = R_0 I = 200 \cdot 0,5 = 100, \text{ В.}$$

$$U_p = X_0 \cdot I = 156,58 \cdot 0,5 = 78,29, \text{ В.}$$

Угол сдвига фаз  $\varphi$  между током и напряжением в катушке

$$\varphi = \arctg (X_0 / R_0) = \arctg (156,58 / 200) = 38^\circ.$$

Векторная диаграмма тока и напряжений для последовательной схемы замещения катушки приведена на рис. 5.29.

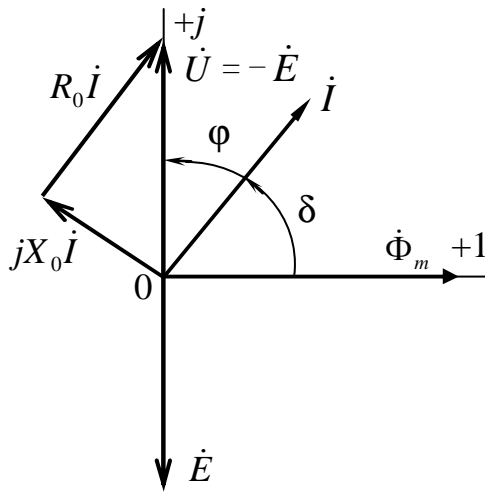


Рис. 5.29

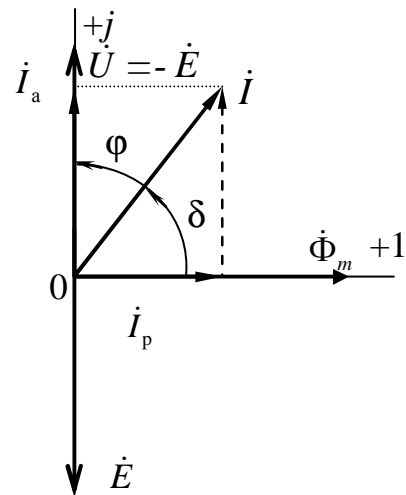


Рис. 5.30

Угол потерь  $\delta$  (между векторами магнитного потока и тока):

$$\delta = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ.$$

Параметры параллельной схемы замещения вычисляются по рассчитанным параметрам последовательной схемы:

$$G_0 = \frac{R_0}{R_0^2 + X_0^2} = \frac{R_0}{Z_0^2} = \frac{200}{254^2} = 0,0031, \text{ См};$$

$$B_0 = \frac{X_0}{R_0^2 + X_0^2} = \frac{X_0}{Z_0^2} = \frac{156,58}{254^2} = 0,00243, \text{ См.}$$

Активная составляющая тока

$$I_a = G_0 U = 0,0031 \cdot 127 = 0,394, \text{ А.}$$

Реактивная составляющая тока

$$I_p = B_0 \cdot U = 0,00243 \cdot 127 = 0,308, \text{ А.}$$

Угол потерь

$$\delta = \arctg (I_a / I_p) = \arctg (0,394 / 0,308) = 52^\circ.$$

Векторная диаграмма токов и напряжений для параллельной схемы замещения представлена на рис. 5.30.

### Пример 3

Катушка дросселя (количество витков  $w$  составляет 100) подключается к синусоидальному напряжению (рис. 5.26). Показания приборов: амперметр  $I_1 \Rightarrow 8\text{ A}$ , вольтметр  $U_1 \Rightarrow 120\text{ В}$ , ваттметр  $P_1 \Rightarrow 120\text{ Вт}$ . После удаления ферромагнитного сердечника показания изменились: амперметр  $I_2 \Rightarrow 14\text{ А}$ , вольтметр  $U_2 \Rightarrow 120\text{ В}$ , ваттметр  $P_2 \Rightarrow 100\text{ Вт}$ . Определить параметры схемы замещения, изобразить векторную диаграмму токов и напряжений дросселя для частоты  $f=50\text{ Гц}$ .

### Решение

Последовательная схема замещения катушки (рис. 5.31) при отсутствии сердечника упрощается и содержит только два элемента (рис. 5.32).

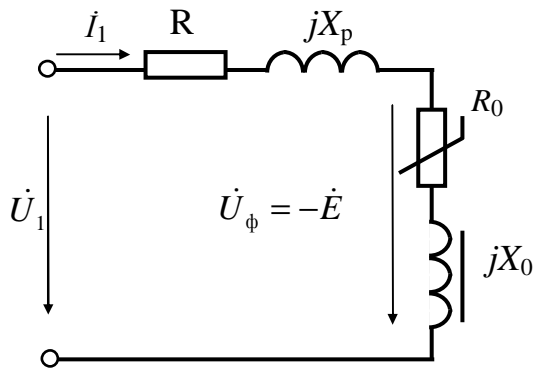


Рис. 5.31

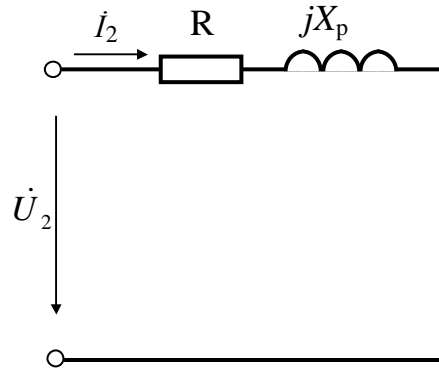


Рис. 5.32

Можно допустить, что индуктивность рассеяния при удалении сердечника не изменяется, тогда активное сопротивление проводов катушки дросселя равно

$$R = P_2 / I_2^2 = 100 / 14^2 = 0,51, \text{ Ом};$$

полное сопротивление катушки без сердечника

$$Z = U_2 / I_2 = 120 / 14 = 8,57, \text{ Ом};$$

индуктивное сопротивление рассеяния

$$X_p = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{8,57^2 - 0,51^2} = 8,56, \text{ Ом}.$$

При наличии ферромагнитного сердечника по показаниям приборов определяются суммарные сопротивления

$$R_k = P_1 / I_1^2 = 120 / 8^2 = 1,875, \text{ Ом};$$

$$Z_k = U_1 / I_1 = 120 / 8 = 15, \text{ Ом};$$

тогда



$$R_0 = R_k - R = 1,875 - 0,51 = 1,365, \text{ Ом};$$

$$X_0 = \sqrt{Z_k^2 - R_k^2} - X_p = \sqrt{15^2 - 1,875^2} - 8,56 = 6,236, \text{ Ом}.$$

Мощность электрических потерь в проводах катушки (в меди)

$$P_M = R I_1^2 = 8^2 \cdot 0,51 = 32,64, \text{ Вт}.$$

Мощность потерь в стали сердечника

$$P_{ст} = P_1 - P_M = 120 - 32,64 = 87,36, \text{ Вт}.$$

Активная составляющая тока, обусловленная потерями мощности в стали сердечника,

$$I_a = P_{ст} / U_1 = 87,36 / 120 = 0,728, \text{ А}.$$

Намагничивающая (реактивная) составляющая тока

$$I_p = \sqrt{I_1^2 - I_a^2} = \sqrt{8^2 - 0,728^2} = 7,967, \text{ А}.$$

Падение напряжения на сопротивлении проводов катушки

$$U_R = R I = 0,51 \cdot 8 = 4,08, \text{ В}.$$

Падение напряжения на сопротивлении рассеяния катушки

$$U_{рас} = X_p I = 8,56 \cdot 8 = 68,48, \text{ В}.$$

Амплитуда магнитного потока

$$\Phi_m = U_1 / (4,44 wf) = 120 / (4,44 \cdot 100 \cdot 50) = 5,4 \cdot 10^{-3}, \text{ Вб}.$$

Согласно схеме замещения

$$U_\phi = E = Z_0 \cdot I_1 = (\sqrt{R_0^2 + X_0^2}) I_1 = (\sqrt{1,365^2 + 6,232^2}) 8 = 51,069, \text{ В}.$$

Построение векторной диаграммы токов и напряжений (рис. 5.33) начинается с откладывания вектора магнитного потока  $\dot{\Phi}_m$  по оси действительных чисел. Перпендикулярно, с отставанием на угол  $\pi/2$ ,

откладывается вектор ЭДС  $\dot{E}$  (по отрицательной полуоси мнимых чисел). Строится вектор тока как сумма активной  $\dot{I}_a$  и реактивной  $\dot{I}_p$  составляющих.

Так как входное напряжение может быть представлено в виде суммы

$$\dot{U} = -\dot{E} + R \cdot \dot{I} + jX_p \cdot \dot{I},$$

строится вектор  $(-\dot{E})$ , откладываем его вдоль положительной полуоси мнимых чисел. К концу вектора

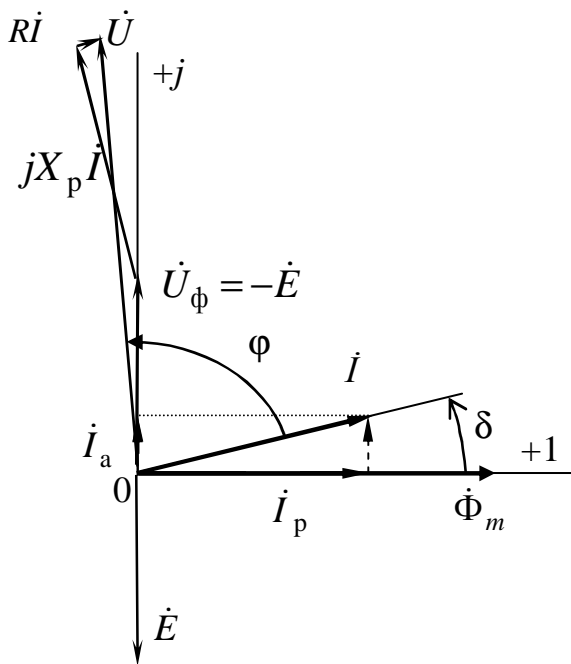


Рис. 5.33

( $-\dot{E}$ ) пристраивается вектор  $\dot{U}_{\text{рас}} = jX_p \cdot \dot{I}$ , перпендикулярно вектору тока  $\dot{I}$ , и далее вектор падения напряжения на проводах катушки  $\dot{U}_R = R \cdot \dot{I}$ . Из начала координат в конец вектора  $\dot{U}_R$  проводится вектор питающего напряжения  $\dot{U}$ .

### 5.2.5. Задачи для самостоятельного решения

#### Задача 1

Для определения амплитуды магнитной индукции на сердечник катушки была намотана измерительная обмотка с числом витков  $w=60$  витков. Площадь сечения сердечника  $S=4 \text{ см}^2$ . При частоте  $f=50$  Гц напряжение на измерительной обмотке оказалось равным  $U=7,5$  В. Какова амплитуда магнитной индукции?

Ответ: 1,41 Тл.

#### Задача 2

Катушка с числом витков  $w=438$  и магнитопроводом, имеющим площадь поперечного сечения  $S=32 \text{ см}^2$  и длину средней магнитной силовой линии  $l_{\text{ср}}=1\text{м}$ , присоединена к источнику синусоидального напряжения ( $U_m=311,13$  В,  $f=50$  Гц). Определить ток катушки, если ее магнитопровод изготовлен из электротехнической стали с характеристиками

$B$ , Тл	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,5
$P_{\text{уд}}$ , Вт/кг	0,89	1,13	1,38	1,64	2,24	3,4
$Q_{\text{уд}}$ , вар/кг	2,25	2,75	3,5	4,6	10,0	43,5

Ответ: 0,554 А.

#### Задача 3

Определить сопротивления  $R_0$  и  $X_0$  схемы замещения катушки с ферромагнитным сердечником по следующим данным: действующее значение напряжения на катушке 120 В; действующее значение тока 0,5 А; потери мощности в катушке 2 Вт; сопротивление обмотки, измеренное мостом постоянного тока,  $R=4$  Ом. Поток рассеяния можно пренебречь.

Ответ: 4 Ом; 239,87 Ом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Касаткин А. С. и др. Электротехника: Учеб. для вузов / А. С. Касаткин, М. В. Немцов. М.: Высш. шк., 2007. 542 с.*
- Иванов И. И. и др. Электротехника: Учебник / И. И. Иванов, Г. И. Соловьев, В. С. Равдоник. СПб.: Лань, 2006. 496 с.*
- Беневоленский С. Б. и др. Основы электротехники: Учеб. пособие для вузов / С. Б. Беневоленский, А. Л. Марченко. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2006. 568 с.*
- Жаворонков М. А. и др. Электротехника и электроника: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / М. А. Жаворонков, А. В. Кузин. М.: Академия, 2005. 400 с.*
- Кононенко В. В. и др. Практикум по электротехнике и электронике: Учеб. пособие для вузов / В. В. Кононенко, В. И. Мишквич; Под. ред. Кононенко В. В. Ростов н/Д: Феникс, 2007. 384 с.*
- Иванов И. И. и др. Электротехника. Основные положения, примеры и задачи: Учеб. пособие / И. И. Иванов, А. Ф. Лукин, Г. И. Соловьев. СПб.: Лань, 2002. 192 с.*
- Рекус Г. Г. и др. Сборник задач и упражнений по электротехнике и основам электроники: Учеб. пособие для неэлектротех. спец. вузов / Г. Г. Рекус, А. И. Белоусов; Ред. Л.В. Честная, М.: Высш. шк., 2001. 416 с.*
- Алиев И. И. Справочник по электротехнике и электрооборудованию: Учеб. пособие для вузов. Ростов н/Д: Феникс, 2003. 480 с.*
- Электрические и магнитные цепи: Практикум по дисциплине «Электротехника и электроника» / Р. В. Ахмадеев, И. В. Вавилова, П. А. Грахов, Т. М. Крымская. Уфа: УГАТУ, 2007. 78 с.*
- Электротехника и электроника. Часть 1. Электрические и магнитные цепи: Учебный комплект по дисциплине «Электротехника и электроника». Учебное электронное издание / Р. В. Ахмадеев, И. В. Вавилова, П. А. Грахов. Уфа: УГАТУ, 2007. 268 с.*

*Учебное пособие*

АХМАДЕЕВ Рашит Вадутович  
БАВИЛОВА Ирина Владимировна  
ГРАХОВ Павел Анатольевич  
КРЫМСКАЯ Татьяна Махмутовна

**ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА**  
**ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ**

Редактор *Г. Р. Медведева*

Подписано к печати 2009. Формат 60x84/1/16.  
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Times New Roman.  
Усл.печ.л. 9,2. Усл.кр.-отт. 9,2. Уч.-изд.л. 9,1.

Тираж 100 экз. Заказ №

ГОУ ВПО

Уфимский государственный авиационный технический университет  
Редакционно-издательский комплекс УГАТУ  
450000, Уфа-центр, ул. К. Маркса,12