

# РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт»

М.П. Львов, А.Г. Дибир

## РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Учебное пособие  
по курсу «Строительная механика»

Харьков «ХАИ» 2011

УДК 629.735.33.02 (075.8)

Львов М.П. Расчет тонкостенных стержней: учеб. пособие / М.П. Львов, А.Г. Дибир. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2011. – 101 с.

Изложены методики анализа нормальных напряжений изгиба в дискретном неоднородном сечении крыла дискретной модели лонжерона, определения касательных напряжений в тонкостенных стержнях различного профиля: открытого, замкнутого и многозамкнутых, а также поиска местонахождения центра изгиба и центра жесткости. Особое внимание уделено нахождению функции текущего статического момента площади сечения в тонкостенных стержнях различного профиля. Приведены индивидуальные задания и справочные данные, а также рекомендации к выполнению домашнего задания.

Для студентов авиационных специальностей, изучающих курс «Строительная механика», при самостоятельной работе.

Ил. 180. Табл. 19. Библиогр.: 4 назв.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. С.А. Бычков,  
канд. техн. наук, доц. Е.Т. Василевский

© Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт», 2011 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Пособие является второй частью методического обеспечения самостоятельной работы студентов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского («ХАИ») при изучении дисциплины «Строительная механика», ориентированной на несущие конструкции изделий авиационно-космической техники.

Содержание задач соответствует учебным программам авиационных специальностей.

Представленные в пособии решения задач расчета тонкостенных стержней основываются на теории, разработанной профессором В.З. Власовым. Согласно данной теории нормальные и касательные напряжения постоянны по толщине стенки профиля и равны действующим на контурной линии, которая проходит по всему профилю через середины толщин стенки профиля.

Анализируются нормальные напряжения изгиба в дискретном неоднородном сечении крыла.

Для определения касательных напряжений применяется балочная теория сдвига тонкостенных стержней. Подробно изложена методика получения зависимости текущего статического момента площади поперечного сечения от контурной координаты. Эта функция используется для нахождения потоков касательных усилий на участках контурной линии тонкостенного стержня. Учитывая, что потоки касательных усилий, которые являются погонными нагрузками, действующими по касательной к контурной линии, получение касательных напряжений не представляет трудностей.

В пособии представлены методики расчета касательных напряжений сечения тонкостенного стержня открытого профиля от сдвига и определения положения центра изгиба в таких стержнях.

Кроме того, исследуются потоки касательных усилий и касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении тонкостенного стержня замкнутого и двухзамкнутого контура от действия сдвига и кручения.

Приведена методика определения положения центра жесткости в тонкостенном стержне замкнутого профиля методом фиктивного момента.

Положение центра жесткости в тонкостенном стержне двухзамкнутого профиля предлагается определить двумя методами: фиктивного момента и фиктивной силы.

Для проведения представленных исследований студентам предлагаются индивидуальные задания и справочные материалы, приводимые в приложениях.

Приводится пример расчета касательных напряжений в тонкостенном стержне открытого профиля.

# 1. ИССЛЕДОВАНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ИЗГИБА В ДИСКРЕТНОМ НЕОДНОРОДНОМ СЕЧЕНИИ КРЫЛА

Цель исследования: ознакомиться с методикой учета неоднородности механических характеристик материалов при расчете дискретной модели сечения крыла.

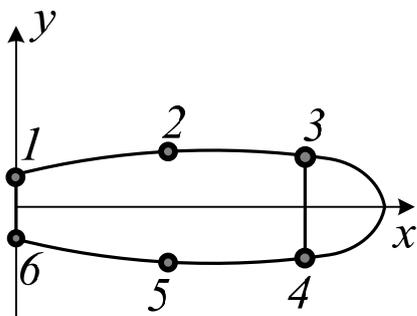


Рис. 1.1. Схема сечения крыла

Рассматривается упрощенная модель сечения крыла (рис. 1.1): сосредоточенные элементы 1, 3, 4, 6 имитируют пояса лонжеронов с присоединенными площадями обшивки и стенок; сосредоточенные элементы 2 и 5 имитируют совокупность стрингеров с присоединенной к ним обшивкой на верхней и нижней панелях крыла. Координаты элементов приведены в системе координат, связанной с геометрической (строительной) хордой аэродинамического профиля сечения. Изгибающий момент отнесен к горизонтальной оси этой системы. Расчет производится методом редуцированных коэффициентов.

Исследованию подлежат следующие положения:

- 1) положение центра тяжести редуцированного сечения не зависит от величины фиктивного модуля;
- 2) угол, на который следует повернуть центральные оси до положения главных, не зависит от величины фиктивного модуля;
- 3) нормальные напряжения в сосредоточенных элементах сечения не зависят от величины фиктивного модуля;
- 4) найденная система нормальных напряжений статически эквивалентна изгибающему моменту в исходной системе координат.

Расчетная процедура

Эта процедура записана далее в форме «Рабочей таблицы» (табл. 1.1). В столбце 3 этой таблицы указано, в каких строках расположены числовые значения операндов для вычисления величины, указанной в столбце 2. Некоторые элементы последнего столбца подлежат вычислению – суммированию величин, находящихся в элементах строки, которые соответствуют сосредоточенным элементам сечения ( $F_p = \dots$ ;  $S_{yp} = \dots$ ; и т.д.).

Исходные данные для расчета содержатся в табл. П.1.1 – П.1.14.

Замечание. При использовании сведений из табл. П.1.13 следует учесть, что схема сечения крыла представлена на рис. П.1.1 и «Рабочая таблица» (табл. 1.1) должна быть изменена – необходимо добавить два столбца для сосредоточенных элементов № 7 и № 8.

Процедура расчета состоит из следующих этапов (описание относится к табл. 1.1):

- 1) Запись исходных данных (строки 1 – 6).
- 2) Переход с помощью коэффициентов редукции  $\varphi_i$  от реального неоднородного сечения  $f_i$  к фиктивному однородному  $f_{ip}$  (строки 8 – 9).
- 3) Переход от начальных осей к главным осям сечения:
  - а) определение положения центра тяжести сечения  $x_c, y_c$  (строки 10 – 12);
  - б) перенос осей в центр тяжести сечения и получение координат  $x_{ic}, y_{ic}$  (строки 13 – 14);
  - в) поворот центральных осей до совпадения с главными и получение координат  $\bar{x}_i, \bar{y}_i$  в главных осях инерции (строки 15 – 21);
  - г) проверка вычислений: в строках 22 – 23 вычисляются статические моменты сечения в главных осях  $S_{\bar{y}}, S_{\bar{x}}$  (суммы в столбце 10). Если вычисления верны, то эти суммы должны быть равны нулю; погрешности не должны превышать 3% от величин, найденных в строках 10 и 11;
  - д) моменты инерции фиктивного сечения в главных осях  $J_{\bar{x}\bar{y}}, J_{\bar{y}}, J_{\bar{x}}$  (суммы строк 24 – 26);
  - е) проверка вычислений: в строке 27 те же моменты инерции  $J_{\bar{x}}, J_{\bar{y}}$  вычисляются по формулам поворота осей; разности не должны превышать 3% полусумм двух значений каждого из моментов инерции.
- 4) Вычисление фиктивных нормальных напряжений  $\sigma'_{if}, \sigma''_{if}, \sigma_{if}$  (строки 28 – 30).
- 5) Обратный переход от фиктивного сечения к реальному: определение действительных напряжений в сосредоточенных элементах  $\sigma_i$  (строка 31).
- 6) Проверка результатов – вычисление внутренних силовых факторов (ВСФ) в действительном сечении по исходным (не главным и не редуцированным) геометрическим характеристикам (суммы строк 32 – 34 следует сравнить с заданными в строке 1 значениями  $M_x^0, M_y^0, N_z^0$ ). Если расхождения значений ВСФ превышают погрешности округлений, это свидетельствует о наличии ошибок в вычислениях.

Таблица 1.1

Рабочая таблица расчета нормальных напряжений изгиба в упругом неоднородном дискретном сечении

№ строки	Параметр	Строки операндов	Числовое значение параметра для сосредоточенного элемента №						Для сечения в целом
			1	2	3	4	5	6	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	ВСФ в сечении: (см. исходные данные)		$M_x^0 =$			$M_y^0 = 0; N_z^0 = 0.$			
2	$x_i^0$ , см								
3	$y_i^0$ , см								
4	$f_i$ , см <sup>2</sup>								
5	$E_i$ , ГПа								
6	$\sigma_{Ti}$ , МПа								
7	Фиктивный модуль сечения (по указанию преподавателя) $E_\phi =$								
8	$\varphi_i = E_i/E_\phi$	(5), (7)							
9	$f_{ip} = f_i\varphi_i$ , см <sup>2</sup>	(4), (8)							$F_p =$ ,см <sup>2</sup>
10	$x_i f_{ip}$ , см <sup>3</sup>	(2), (9)							$S_{yp} =$ ,см <sup>3</sup>
11	$y_i f_{ip}$ , см <sup>3</sup>	(3), (9)							$S_{xp} =$ ,см <sup>3</sup>
12	Центр сечения: $x_c = S_{yp}/F_p =$ см; $y_c = S_{xp}/F_p =$ см .								
13	$x_{ic} = x_i - x_c$ , см	(2), (12)							

Продолжение табл. 1.1

			1	2	3	4	5	6	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
14	$y_{ic} = y_i - y_c, \text{ см}$	(3), (12)							
15	$f_{ip} x_{ic}^2, \text{ см}^4$	(9), (13)							$J_{yc} = \text{ см}^4$
16	$f_{ip} x_{ic} y_{ic}, \text{ см}^4$	(9), (13), (14)							$J_{xyc} = \text{ см}^4$
17	$f_{ip} y_{ic}^2, \text{ см}^4$	(9), (14)							$J_{xc} = \text{ см}^4$
18	$\text{tg } 2\beta = -\frac{2J_{xyc}}{J_{xc} - J_{yc}} = \quad ; \beta^0 = \quad , \text{ градусы}; \quad \cos \beta = \quad ; \sin \beta =$								
19	$M_{\bar{x}} = M_x^0 \cos \beta = \quad ; (19a) \quad M_{\bar{y}} = M_y^0 \sin \beta = \quad (19б)$								
20	$\bar{x}_i = x_{ic} \cos \beta + y_{ic} \sin \beta, \text{ см}$	(13), (14), (18)							
21	$\bar{y}_i = y_{ic} \cos \beta - x_{ic} \sin \beta, \text{ см}$	(13), (14), (18)							
22	$f_{ip} \cdot \bar{x}_i, \text{ см}^3$	(9), (20)							$S_{\bar{y}} = \text{ см}^3$
23	$f_{ip} \cdot \bar{y}_i, \text{ см}^3$	(9), (21)							$S_{\bar{x}} = \text{ см}^3$
24	$f_{ip} \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{y}_i, \text{ см}^4$	(9), (20), (21)							$J_{\bar{x}\bar{y}} = \text{ см}^4$
25	$f_{ip} \cdot \bar{x}_i^2, \text{ см}^4$	(9), (20)							$J_{\bar{y}} = \text{ см}^4$
26	$f_{ip} \cdot \bar{y}_i^2, \text{ см}^4$	(9), (21)							$J_{\bar{x}} = \text{ см}^4$

			1	2	3	4	5	6	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
27	$J_{\bar{x}} = J_{xc} \cdot \cos^2 \beta + J_{yc} \sin^2 \beta - J_{xyc} \cdot \sin 2\beta =$ $J_{\bar{y}} = J_{yc} \cdot \cos^2 \beta + J_{xc} \sin^2 \beta + J_{xyc} \cdot \sin 2\beta =$								
Необходимо перевести в метры все линейные размеры и геометрические характеристики сечения									
28	$\sigma'_{i\phi} = -\frac{M_{\bar{y}}}{J_{\bar{y}}} \bar{x}_i$ , МПа	(19b), (20), (27b)							
29	$\sigma''_{i\phi} = +\frac{M_{\bar{x}}}{J_{\bar{x}}} \bar{y}_i$ , МПа	(19b), (21), (27a)							
30	$\sigma_{i\phi} = \sigma'_{i\phi} + \sigma''_{i\phi}$ , МПа	(28), (29)							
31	$\sigma_i = \varphi_i \cdot \sigma_{i\phi}$ , МПа	(8), (30)							
Проверка вычислений									
32	$\sigma_i \cdot f_i^0$	(31), (4)							$N_x =$
33	$\sigma_i \cdot f_i^0 \cdot x_i^0$	(32), (2)							$M_y =$
34	$\sigma_i \cdot f_i^0 \cdot y_i^0$	(32), (3)							$M_x =$
35	$ \sigma_i  / \sigma_{Ti}$	(31), (6)							

## 2. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ СДВИГА В ОТКРЫТОМ ПРОФИЛЕ

### 2.1. Балочная формула сдвига открытого профиля

Касательные напряжения в тонкостенном стержне постоянны по толщине стенок и в каждой точке контура определяются по формуле:

$$\tau = \frac{q}{\delta}, \quad (2.1)$$

где  $\delta$  – толщина стенки;  $q$  – поток касательных напряжений, который в соответствии с балочной теорией сдвига распределяется в сечении по закону текущих статических моментов:

$$q(t) = -\frac{Q_y}{J_x} S_x(t) - \frac{Q_x}{J_y} S_y(t). \quad (2.2)$$

### 2.2. Главные оси сечения

Формула (2.2) записана в предположении, что оси  $x$  и  $y$  являются главными осями сечения. Главные оси сечения отличаются от прочих осей тем, что:

а) начало координат лежит в центре тяжести сечения, и, следовательно, равны нулю полные статические моменты сечения:  $S_{xF} = S_{yF} = 0$ ;

б) положение осей таково, что осевые моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ , экстремальны, а центробежный момент инерции сечения  $J_{xy}$  равен нулю.

### 2.3. Типы задач

Содержание процедуры расчета касательных напряжений зависит от того, к какому типу задач относится данная конкретная задача. Типы задач определяются в зависимости от наличия информации о положении главных осей сечения. Различают четыре типа:

1) **основная задача**: положение главных осей инерции сечения известно, например, сечение имеет две взаимно перпендикулярные оси сим-

метрии (например, рис. П2.2). Заданная сила  $Q$  действует вдоль оси  $y$ . Балансовая формула сдвига принимает вид

$$q(t) = -\frac{Q_y}{J_x} S_x(t). \quad (2.3)$$

2) **Первый частный** случай: сечение имеет ось симметрии и эта ось *перпендикулярна* действующей силе сдвига. В этом случае не требуется искать положение второй главной оси и можно прямо переходить к формуле (2.2) или (2.3), т.е. определять осевой момент инерции и строить эпюру текущих статических моментов.

3) **Второй частный** случай: сечение имеет ось симметрии и эта ось *параллельна* действующей силе сдвига. В этом случае необходимо найти положение второй главной оси, для чего достаточно определить центр тяжести сечения. Когда положение оси  $x$  становится известно, приходим к основному случаю.

4) **Общий случай**: Сечение не имеет осей симметрии и положение главных осей неизвестно. В этом случае необходимо выполнить весь комплекс процедур по определению положения главных осей инерции сечения (перенос вспомогательных осей в центр тяжести сечения и поворот центральных осей до положения главных), в результате чего приходим к основному случаю.

## 2.4. Центр тяжести сечения

Если задача относится ко второму частному случаю, то необходимо определить положение центра тяжести сечения, через который проходит вторая главная ось сечения  $x$ , перпендикулярная к оси симметрии  $y$ . Для этого следует выбрать вспомогательную ось  $x^\circ$ , перпендикулярную оси  $y$ , но не проходящую через центр тяжести. Рекомендуется проводить эту ось либо через горизонтальный элемент профиля, либо через центр окружности дугового элемента. Сечение следует рассматривать как совокупность прямолинейных отрезков и дуг окружности.

Для каждого из прямолинейных элементов площадь и положение центра тяжести известно, обозначим их как  $F_i$  и  $y_i$ .

Если дуговой элемент имеет угол раствора  $180^\circ$ , то его "местные" характеристики также известны (см. рис.2.1): площадь полукольца  $F = \pi R \delta$ ;

расстояние до центра тяжести  $y_{\text{цт}} = \frac{2}{\pi}R$ ; осевые моменты инерции  $J_x = 0,2976R^3\delta$ ,  $J_y = 0,5\pi R^3\delta$ .

Если дуговой элемент имеет угол раствора, не равный  $180^\circ$ , то его "местные" характеристики следует вычислять интегрированием. Если известны характеристики всех элементов, можно перейти к определению характеристик сечения.

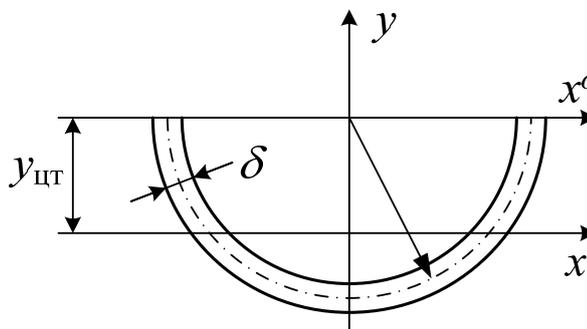


Рис. 2.1. Дуговой элемент

Площадь сечения определяется суммированием площадей элементов:

$$F = \sum F_i. \quad (2.4)$$

Полный статический момент сечения относительно вспомогательной оси:

$$S_x^o = \sum F_i y_i^o. \quad (2.5)$$

Расстояние от вспомогательной оси до центра тяжести сечения:

$$y_{\text{цт}}^o = \frac{S_x^o}{F}, \quad (2.6)$$

Новые, главные координаты центров тяжести элементов:

$$y_i = y_i^o - y_{\text{цт}}^o. \quad (2.7)$$

В качестве примера профиля из прямолинейных отрезков на рис. 2.2 изображен профиль, ось симметрии  $y$  которого вертикальна.

Положение центра тяжести определяется во вспомогательной системе координат  $x^o$ , проведенной по нижнему горизонтальному участку контурной линии.

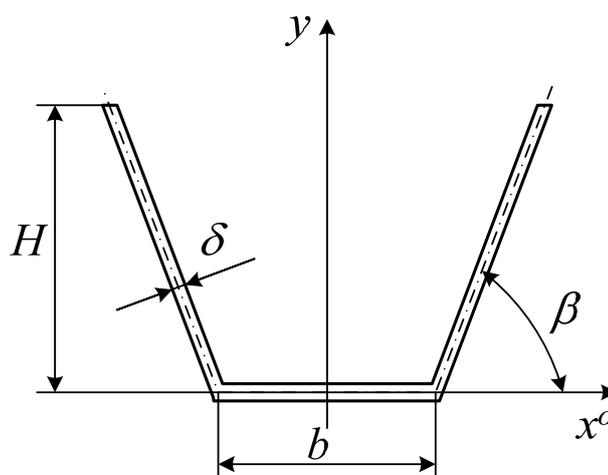


Рис. 2.2. Профиль с наклонными участками

$$\text{Тогда } F = b \cdot \delta + 2 \frac{h \cdot \delta}{\sin \beta}, \quad S_x^o = 2 \frac{h \cdot \delta}{\sin \beta} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h^2 \delta}{\sin \beta}.$$

Далее следует применить формулы (2.6) и (2.7).

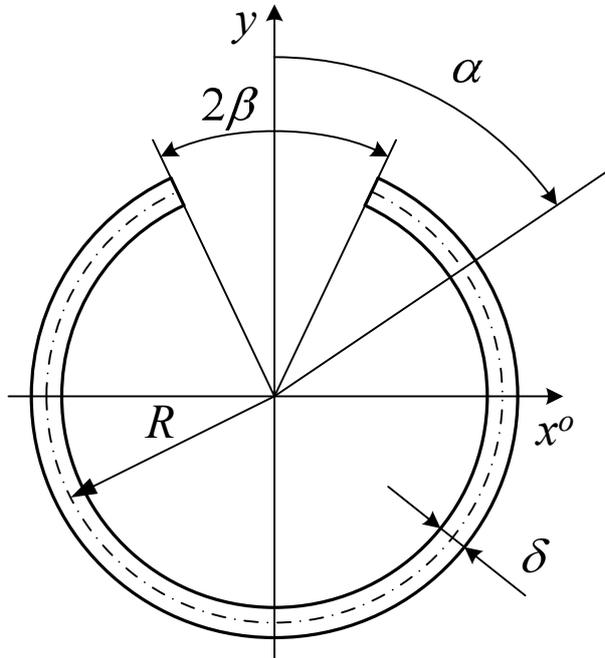


Рис. 2.3. Дуговой профиль

В случае дугового элемента с углом выреза  $2\beta$  (рис. 2.3) вспомогательную ось  $x^o$  следует провести через центр окружности. В интеграле  $S_{xF}^o = 2 \int_{\beta}^{\pi} y \delta dt$  в качестве переменной интегрирования следует ввести угловую координату  $\alpha$ , отсчитываемую от вертикали по часовой стрелке. Тогда  $y = R \cos \alpha$ ,  $dt = R d\alpha$ .

Интегрирование не составляет большого труда.

Для кольцевого сектора, ось симметрии которого перпендикулярна оси  $x^o$ , центр тяжести расположен на оси симметрии на удалении  $y_c = \frac{\sin \beta}{\pi - \beta} R$  в сторону, противоположную вырезу.

## 2.5. Осевой момент инерции сечения

Сечение тонкостенного стержня представляет собой совокупность очень узких полосок – прямолинейных и криволинейных. Момент инерции любой из этих полосок относительно произвольной оси  $x$  определяется как сумма собственного момента инерции  $J_x^o$  (то есть момента инерции полоски относительно оси, параллельной оси  $x$ , но проходящей через центр тяжести полоски) и переносного момента инерции, который определяется как произведение квадрата расстояния между осями на площадь полоски:

$$J_x = J_x^o + y_o^2 F. \quad (2.8)$$

В свою очередь собственный момент инерции элемента определяется через его главные моменты инерции по формуле

$$J_x^o = J_{\max} \cos^2 \beta + J_{\min} \sin^2 \beta, \quad (2.9)$$

где  $\beta$  – угол между осью максимального момента инерции и осью  $x$ . В случае прямолинейного участка контура минимальный момент инерции принимается равным нулю, что соответствует гипотезе о равномерном распределении нормальных напряжений по толщине стенок.

Поэтому моменты инерции относительно оси  $x$  трех элементов, показанных на рис. 2.4, равны:

1.  $J_x = \frac{\delta b^3}{12} + a^2 b \delta;$
2.  $J_x = \frac{\delta b^3}{12} \cos^2 \beta + a^2 b \delta;$
3.  $J_x = a^2 b \delta.$

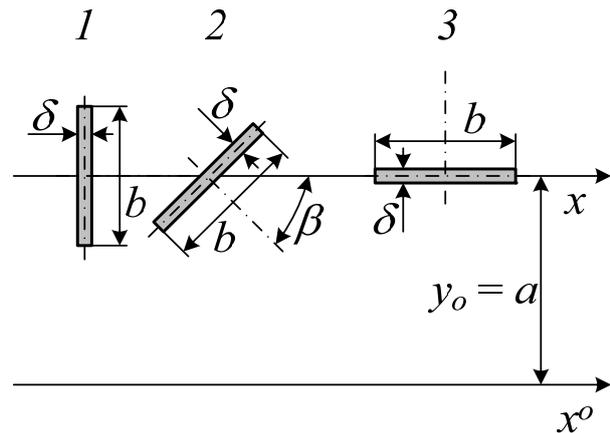


Рис. 2.4. Прямолинейные участки контура

Например, для профиля на рис. 2.5

$$J_x = 2J_{x1} + 2J_{x2} + 2J_{x3} + J_{x4},$$

причем:

$$J_{x2} = y_{02}^2 a \delta,$$

где  $y_{02} = \frac{h}{2} + b \sin \alpha;$

$$J_{x3} = \frac{\delta b^3}{12} \sin^2 \alpha + y_{03}^2 b \delta,$$

где  $y_{03} = \frac{h}{2} + \frac{1}{2} b \sin \alpha;$

$$J_{x4} = \frac{\delta h^3}{12}.$$

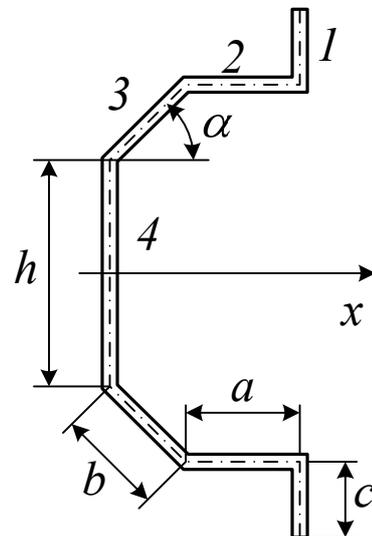
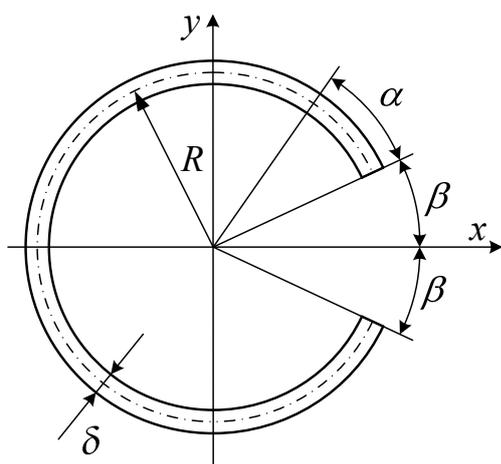


Рис. 2.5. Пример профиля

Если участок контура представляет собой дугу окружности, для нахождения его собственного момента инерции приходится применять интегрирование. При этом следует вместо дуговой координаты  $t$  использовать угловую координату  $\alpha$ . Элемент площади в этом случае равен  $dF = R\delta \cdot d\alpha$ . Координату  $y$  такого элемента также следует выразить через  $R$  и  $\alpha$ . Например, формула для момента инерции сечения в виде сектора (рис. 2.6) строится следующим образом:



$$\begin{aligned}
 J_x &= \int_F y^2 dF = \int_{\beta}^{2\pi-\beta} (R \sin \alpha)^2 R \delta d\alpha \\
 &= R^3 \delta \int_{\beta}^{2\pi-\beta} \sin^2 \alpha d\alpha = \\
 &= R^3 \delta \left[ \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right]_{\beta}^{2\pi-\beta} = \\
 &= R^3 \delta [(\pi - \beta) + \sin \beta \cos \beta].
 \end{aligned}$$

Рис. 2.6. Сечение с круговым контуром

Для кольцевого сектора, ось симметрии которого перпендикулярна оси  $x^0$ , его момент инерции относительно собственной центральной оси равен:

$$\Delta J_x = R^3 \cdot \delta \cdot \left( \pi - \beta - \sin \beta \cdot \cos \beta - \frac{2 \cdot \sin^2 \beta}{\pi - \beta} \right).$$

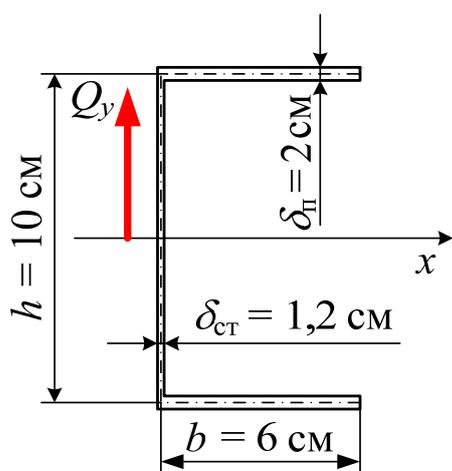


Рис. 2.7. Профиль примера

Выполнение последующих этапов описываемой процедуры расчета касательных напряжений будем иллюстрировать на простом примере швеллерного сечения (рис. 2.7) – первый частный случай. Показанные на рис. 2.7 габаритные размеры тонкостенного контура ориентируются на контурные линии. Рассматривается модель, когда стенки работают на нормальные напряжения " $\delta_{\sigma} \neq 0$ ".

В сечении действует сила сдвига  $Q_y = 84000$  Н.

Момент инерции данного сечения определяется как сумма моментов трех тонких полосок – стенки и двух полок:

$$J_x = J_x^{\text{ст}} + 2 \cdot J_x^{\text{п}},$$

где  $J_x^{\text{ст}} = \frac{\delta_{\text{ст}} h^3}{12} = \frac{1,2 \cdot 10^3}{12} = 100 \text{ см}^4$ .

Как уже было сказано, собственные моменты инерции полок не учитываются:

$$J_x^{\text{п}} = \left(\frac{h}{2}\right)^2 b \cdot \delta_{\text{п}} = 25 \cdot 6 \cdot 2 = 300 \text{ см}^4.$$

Таким образом, в рассматриваемом примере осевой момент инерции равен  $J_x = 100 + 2 \cdot 300 = 700 \text{ см}^4$ .

## 2.6. Поворот центральных осей до совпадения с главными

В задачах четвертого типа (общий случай) необходимо вычислить для сечения в целом также и осевой момент

$$J_y = \sum (J_{yi}^0 + x_i^2 F_i), \quad (2.10)$$

и центробежный момент

$$J_{xy} = \sum x_i \cdot y_i \cdot F_i, \quad (2.11)$$

где  $J_{yi}^0$  – момент инерции  $i$ -го элемента относительно оси, проходящей через центр тяжести элемента и параллельной оси  $y$ ; в формуле (2.11) учтено, что собственные центробежные моменты элементов равны нулю,  $x_i, y_i$  – координаты центра тяжести  $i$ -го элемента в центральных осях сечения.

Угол поворота осей определяется из соотношения

$$\text{tg} 2\beta = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (2.12)$$

При положительном значении угла центральные оси следует поворачивать против часовой стрелки. Заданную силу  $Q$  следует разложить на главные направления:

$$Q_x = Q \cdot \sin \beta; \quad Q_y = Q \cdot \cos \beta. \quad (2.13)$$

После этого потоки касательных сил в открытом контуре определяются отдельно и независимо друг от друга (разными студентами) в двух разных плоскостях сдвига:

$$q'(t) = -\frac{Q_y \cdot S_x(t)}{J_x}; \quad (2.14)$$

$$q''(t) = -\frac{Q_x \cdot S_y(t)}{J_y}, \quad (2.15)$$

и впоследствии складываются. При сложении потоков касательных сил в данной точке контура каждому из них (потоку) приписывается знак в соответствии с правилом: положительным считается поток, направление которого совпадает с направлением координаты  $t$ .

## 2.7. Эпюра текущих статических моментов. Элементы теории

### 2.7.1. Общие положения

Текущий статический момент в точке контурной линии есть функция дуговой координаты этой точки и определяется как интеграл с переменным верхним пределом  $t$ :

$$S_x(t) = \int_0^t y(\xi) \delta(\xi) d\xi, \quad (2.16)$$

где  $\xi$  - переменная интегрирования  $0 \leq \xi \leq t$ .

Для того, чтобы преобразовать данный интеграл в явную функцию от  $t$ , необходимо:

- а) выбрать начальные точки и направления отсчета дуговых координат;
- б) разбить контурную линию профиля на участки;

- в) построить параметрические зависимости  $y(\xi)$  и  $\delta(\xi)$  для каждого из участков;
- г) провести интегрирование, подставить в первообразную верхний (переменный) и нижний пределы;
- д) исследовать полученную функцию на предмет наличия экстремума или перегиба, выпуклости или вогнутости.

### 2.7.2. Выбор начальной точки и направления дуговой координаты

Существует два типа открытых профилей: разветвленные и неразветвленные. (разветвленными являются сечения рис. П.2.1, П.2.2, П.2.3, П.2.19, П.2.26, П.2.39, П.2.45, П.2.50, .2.69, П.2.70).

В открытом неразветвленном профиле имеется две концевые точки, в каждой из которых действительное значение потока касательных сил  $q = 0$ . Поэтому такие точки называют свободными. Одну из этих точек следует брать в качестве начальной точки обхода. Условимся выбирать в качестве начальной ту из двух концевых (свободных) точек, которая лежит в зоне положительных  $x$  и  $y$ . Направление дуговой координаты в неразветвленном контуре однозначно определяется выбором начальной точки.

В рассматриваемом иллюстративном примере (рис. 2.8) в соответствии с приведенными общими рекомендациями начальная точка выбирается в верхней концевой точке контурной линии (точка  $A$ ). Следовательно, направление обхода против часовой стрелки.

Отличительными признаками разветвленного профиля являются как наличие трех и более свободных точек, так и наличие узлов. Узлом называется точка профиля, в которой сходятся три (или более) контурные линии. Участки между узлами называются общими. Типичным представителем разветвленного контура является

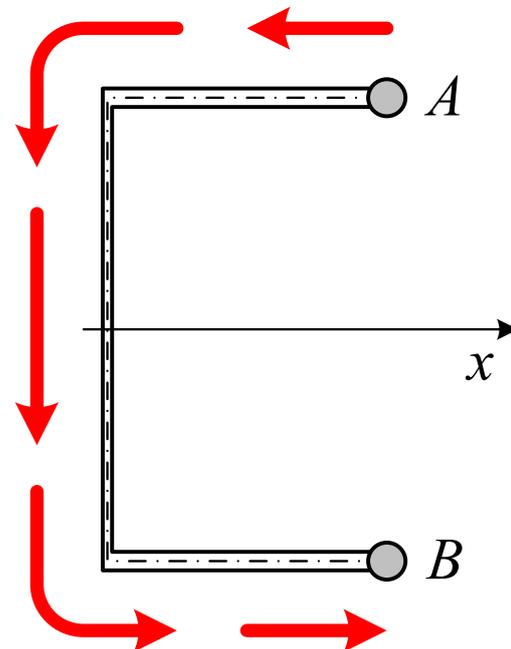


Рис. 2.8. Начальная точка и направление обхода

двутавр.

Тавр можно рассматривать как частный случай двутавра - с нулевой шириной нижнего пояса. Разветвленный контур рассматривается как наложение нескольких открытых неразветвленных контуров. Один из этих контуров назначается основным; тогда другие контура – вспомогательные. Начальная точка и направление обхода в основном контуре выбираются так же, как в неразветвленном контуре. Начальные точки и направления дуговой координаты во вспомогательных контурах выбираются таким образом, чтобы в общей части основного и вспомогательного контуров направления дуговых координат (направления обхода) совпадали.

При движении точки вдоль основного контура участки, не входящие в основной контур, рассматриваются как отростки и учитываются в эпюре текущих статических моментов подобно сосредоточенным элементам: при переходе через узел к статическому моменту в точке, предшествующей узлу, прибавляется полный статический момент отростка. Аналогично при рассмотрении любого вспомогательного контура все участки контура, не входящие в этот вспомогательный контур, в том числе и не входящие в него участки основного контура, также рассматриваются как отростки и учитываются при построении эпюры текущих статических моментов подобным образом.

### 2.7.3. Разбиение контура на участки

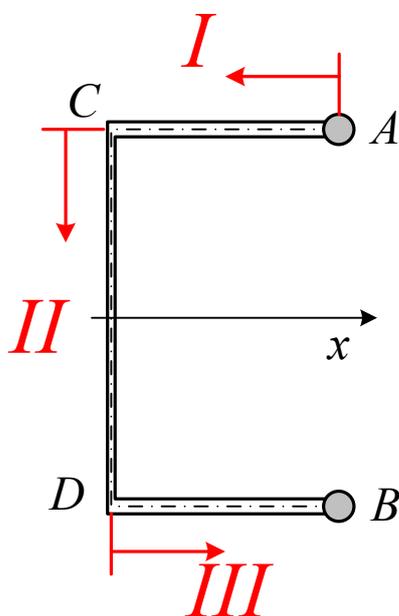


Рис. 2.9. Разбиение контура на участки

Участком называется такая часть длины контурной линии, в пределах которой зависимость текущего статического момента от дуговой координаты описывается одной формулой. Достаточно, чтобы одной формулой описывались зависимости  $y(t)$ ,  $x(t)$ ,  $\delta(t)$  при отсутствии на участке узлов и сосредоточенных продольных элементов. Отсюда следует вывод, что границами участков являются:

- а) точки излома контурной линии (изменяется вид функции  $y(\xi)$ ),
- б) точки скачкообразного изменения  $\delta(\xi)$ ,
- в) сосредоточенные продольные элементы,
- г) узловые точки разветвленных контуров.

Например, в рассматриваемом контуре типа «швеллер» содержится 3 участка (рис. 2.9).

Участки следует нумеровать, а границы участков обозначать латинскими буквами.

#### 2.7.4. Параметрические зависимости текущих координат точек на контуре

В соответствии со свойством автономности начальную точку отсчета дуговой координаты выбираем на каждом участке заново. Характер зависимости  $S_x(t)$  определяется, в основном, характером подынтегральной функции  $y(\xi)$  на данном участке. Рассмотрим простейшие случаи.

Если участок контурной линии есть отрезок прямой, которая наклонена к оси  $x$  под углом  $\beta$ , то

$$y(\xi) = y_0 \pm \xi \cdot \sin \beta, \quad (2.17)$$

где  $y_0$  – координата  $y$  начальной точки участка ( $\xi = 0$ ).

При  $\beta = 0$  участок горизонтален и  $y(\xi) = y_0 = \text{const}$ .

При  $\beta = \pm 90^\circ$  участок вертикален и  $y(\xi) = y_0 \pm \xi$ .

Например, для участков профиля на рис. 2.9:

участок 1 – верхняя полка  $0 < t_1 < b$ :  $y(t) = +\frac{h}{2} = \text{const}$ ,  $\delta_{\text{п}} = \text{const}$ ;

участок 2 – стенка  $0 < t_2 < h$ :  $y_2(t) = \frac{h}{2} - t_2$ ,  $\delta_{\text{ст}} = \text{const}$ ;

участок 3 – нижняя полка  $0 < t_3 < b$ :  $y_3 = -\frac{h}{2} = \text{const}$ ;  $\delta_{\text{п}} = \text{const}$ .

Если рассматриваемый участок представляет собой дугу окружности радиуса  $R$ , то для указания местоположения точек на контуре следует перейти от дуговых координат  $t$  и  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq t$ ) к угловым координатам  $\psi$  и  $\varphi$  ( $\varphi_0 \leq \varphi \leq \psi$ ), причем  $t = R \cdot \psi$ ,  $\xi = (\varphi - \varphi_0) \cdot R$  и  $Rd\xi = Rd\varphi$ .

Например, для профиля на рис. 2.6 в начальной точке  $\varphi_0 = \beta$ , вертикальная координата текущей точки:  $y = R \cdot \sin \varphi$  и текущий статический момент в точке с угловой координатой  $\psi$ , причем  $\beta \leq \psi \leq (2\pi - \beta)$ , равен:

$$S_x(\psi) = \int_{\beta}^{\psi} R \sin \varphi \delta R d\varphi = R^2 \delta (\cos \beta - \cos \psi).$$

### 2.7.5. Общие правила

1. В начальной точке контура текущий статический момент равен нулю или статическому моменту сосредоточенного элемента, расположенного в этой точке.

2. **Правило автономности:** на каждом участке выбирается своя дуговая координата с нулем в начальной точке; направление этой координаты совпадает с направлением общей дуговой координаты профиля. Возможность этого упрощения обеспечивается выполнением правил 3 и 4.

3. В пределах одного участка текущие статические моменты определяются как сумма текущего статического момента в начальной точке участка (постоянная составляющая) и приращения, соответствующего рассматриваемой точке участка (переменная составляющая).

4. **Правило стыковки участков:** текущий статический момент в начальной точке следующего участка определяется как сумма текущего статического момента в последней точке предыдущего участка, статического момента продольного сосредоточенного элемента, расположенного на границе участков, а также полного статического момента отростка, примыкающего к границе двух участков (как продольный элемент, так и отросток могут отсутствовать).

5. **Правило нулевой суммы:** в конечной точке последнего участка текущий статический момент равен нулю или статическому моменту сосредоточенного элемента, расположенного в этой точке

## 2.8 Эпюра текущих статических моментов. Процедура

### 2.8.1. Эпюра $S_x(t)$ на первом участке (рис. 2.10)

В соответствии с правилом 1 значение текущего статического момента в начальной точке  $A$

$$S_{xA} \equiv 0.$$

Приращение в точке  $t$ :

$$S_{x1}(t) = \int_0^t y(\xi) \delta d\xi = \int_0^t \left(+\frac{h}{2}\right) \delta d\xi = \frac{h\delta t}{2}.$$

Зависимость  $S_{x1}(t)$  – линейная; для построения графика достаточно иметь две точки: в последней точке первого участка – точке  $C$   $t=b$ , следовательно:

$$S_{C1} = \frac{h \cdot \delta \cdot b}{2} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 2}{2} = 60 \text{ см}^3.$$

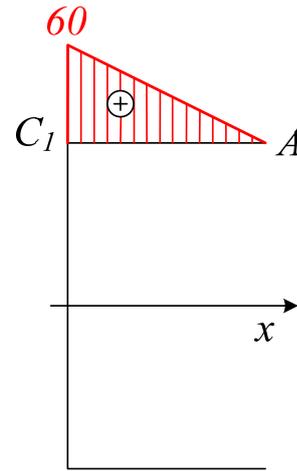


Рис. 2.10. Эпюра  $S_x(t)$  на первом участке

### 2.8.2. Эпюра $S_x(t)$ на втором участке (рис. 2.11)

Значение текущего статического момента в начальной точке второго участка  $C_2$  равно конечному значению текущего статического момента первого участка:  $S_{xC2} = S_{xC1} = 60 \text{ см}^3$ . Дуговая координата и переменная интегрирования отсчитываются от точки  $C$  вниз.

Приращение в текущей точке  $t$  рассматриваемого участка определяется по формуле:

$$\Delta S_{x2}(t) = \int_0^t y_2(t) \delta_2 d\xi.$$

Здесь  $y_2(t) = \frac{h}{2} - \xi$ , а

$$\delta_2 = \delta_{\text{ст}}.$$

В подынтегральном выражении удобно сделать замену переменных: вместо  $\xi$  использовать  $y$  в соответствии с формулой:

$$y = 0,5h - \xi.$$

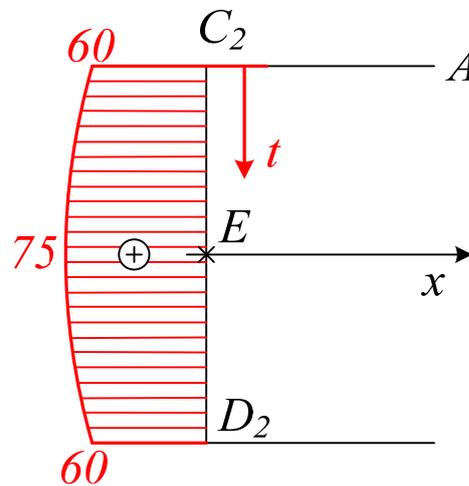


Рис. 2.11. Эпюра  $S_x(t)$  на втором участке

Тогда  $d\xi = -dy$ ; при этом нижний предел интегрирования будет  $y = +\frac{h}{2}$ , а верхний предел интегрирования – переменный:  $y$ . Интегрирование дает:

$$\Delta S_{x2} = \frac{\delta_{ст}}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Данная функция – квадратная парабола с вершиной в точке  $y = 0$ . Полная величина статического момента в произвольной точке стенки определяется выражением:

$$S_{x2}(y) = S_{xc} + \frac{\delta_{ст}}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Максимум величины статического момента имеет место при  $y = 0$ :

$$S_{x2max} = S_{xc} + \frac{\delta_{ст}}{2} \cdot \frac{h^2}{4} = 60 + \frac{1,2 \cdot 100}{8} = 60 + 15 = 75 \text{ см}^3.$$

В пределах всего второго участка значения  $S_x > 0$ . В конечной точке второго участка  $S_{xD2} = +60 \text{ см}^3$ .

### 2.8.3. Эпюра $S_x(t)$ на третьем участке

Учтем, что

а) начальное значение  $S_{xD3} = S_{xD2} = +60 \text{ см}^3$  (нет сосредоточенных элементов);

б) дуговая координата  $t$  и переменная интегрирования  $\xi$  отсчитываются от точки  $D$  вправо;

в) параметрические зависимости:  $y = -\frac{h}{2} = \text{const}$ ;  $\delta = \delta_{п}$ .

г) приращение текущего статического момента в текущей точке рассматриваемого участка:

$$\Delta S_{x3} = \int_0^t \left( -\frac{h}{2} \right) \delta_{п} d\xi = -\frac{h\delta_{п}}{2} t.$$

Полная формула  $S_{x3}(t) = S_{xD} - \frac{h\delta_n}{2}t$ . Зависимость линейная; при  $t = b$

$$S_{x3} = S_{xD} - \frac{hb\delta_n}{2} = 60 - \frac{10 \cdot 6 \cdot 2}{2} = 60 - 60 = 0.$$

Правило нулевой суммы выполняется: Эюра текущих статических моментов  $S_x(t)$  в конечной точке контурной линии всегда равна нулю, так как это – статический момент **всего** сечения **целиком** относительно одной из центральных осей.

Полностью эюра текущих статических моментов представлена на рис. 2.12.

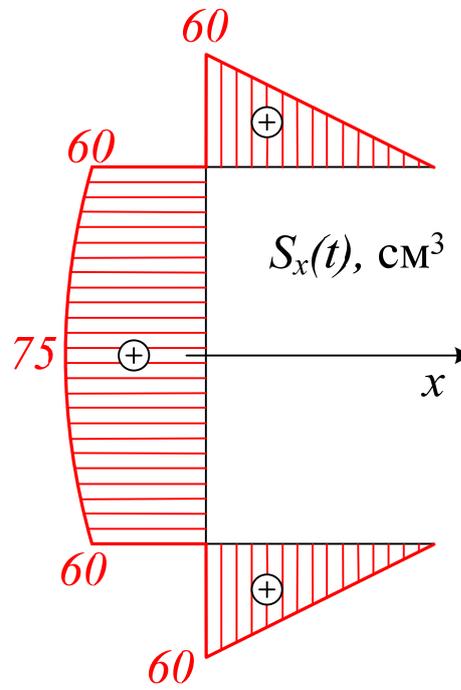


Рис. 2.12. Эюра  $S_x(t)$

## 2.9. Построение эюры касательных сил по контуру сечения

Потоки касательных сил определяются по формуле (2.2), причем коэффициент  $\frac{Q_y}{J_x}$  является общим для всех точек сечения:

$$\frac{Q_y}{J_x} = \frac{84000}{700} = 120 \frac{\text{Н}}{\text{см}^4} = 120 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^4}.$$

Рассмотрим значения потока касательных сил в характерных точках сечения:

Точка  $A$  (начальная):  $q_A = 0$

Точка  $C$ :  $S_{xC} = 60 \text{ см}^3 = 60 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ ;

$$q_C = -\frac{Q_y}{J_x} S_{xC} = -120 \cdot 10^8 \cdot 60 \cdot 10^{-6} = -720000 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Точка  $E$ :  $S_{xE} = 75 \text{ см}^3 = 75 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$

$$q_C = -\frac{Q_y}{J_x} S_{xC} = -120 \cdot 10^8 \cdot 75 \cdot 10^{-6} = -900000 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

В нижней части сечения – симметрично.

## 2.10. Определение направлений касательных сил

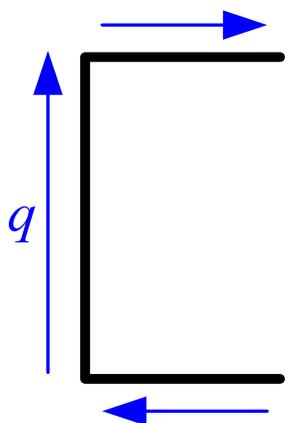


Рис. 2.13. Направление  $q$

Общие правила. Если касательное напряжение сохраняет знак в пределах некоторого участка контура, то сохраняется и его направление по отношению к направлению дуговой координаты  $t$  (совпадает или противоположно). Направление положительных потоков касательных сил  $q$  совпадает с направлением дуговой координаты, а направление отрицательных потоков касательных сил противоположно направлению дуговой координаты.

Во всех точках контура касательные напряжения получились одного знака – отрицательные; значит, во всех точках контура сохраняется одно и то же направление потоков касательных сил: по часовой стрелке.

## 2.11. Вычисление касательных напряжений в характерных точках контура

Общая формула для касательных напряжений при известных положительных потоках касательных сил  $q$  – формула (2.1). Характерными считаются те точки участков, в которых достигается наибольшее касательное напряжение. На разных участках значения наибольших потоков и значения

толщин различны. Характерными точками в данном примере являются точки  $C$  (первый и третий участки) и  $E$  (второй участок).

Точка  $C_1$  – крайняя левая точка на верхней полке:

$$\delta = \delta_{\Pi} = 2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}; \quad \delta_{C_2} = \delta_{\text{ст}} = 0,012 \text{ м};$$

$$q_{C_1} = q_{C_2} = q_C = -720000 = -0,72 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$\tau_{C_1} = \frac{q_{C_1}}{\delta_{\Pi}} = -\frac{0,72 \cdot 10^6}{0,02} = -36 \text{ МПа}; \quad \tau_{C_2} = \frac{q_{C_2}}{\delta_{\Pi}} = -\frac{0,72 \cdot 10^6}{0,012} = -60 \text{ МПа}.$$

Точка  $E$  – середина высоты стенки, в этой точке действует самый большой поток касательных сил:

$$\delta_E = \delta_{\text{ст}} = 0,012 \text{ м}; \quad q_E = -900000 = -0,9 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$\tau_E = \frac{q_{C_1}}{\delta_{\text{ст}}} = -\frac{0,9 \cdot 10^6}{0,012} = -75 \text{ МПа}.$$

Эпюры  $q$  и  $\tau$  представлены на рис. 2.14 и 2.15.

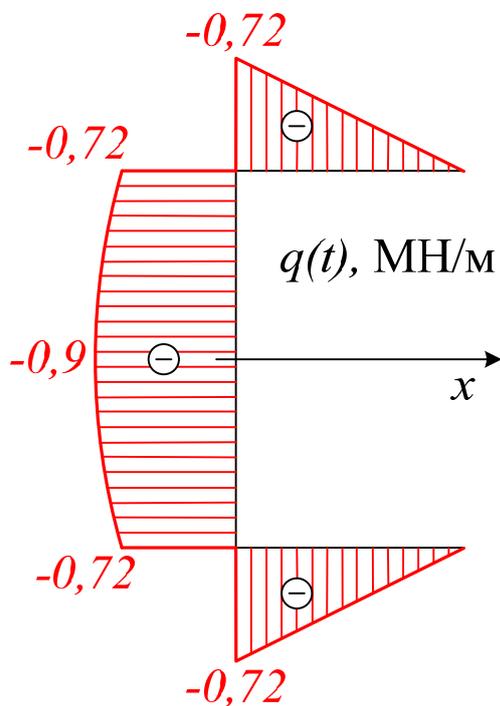


Рис. 2.14. Эпюра  $q$

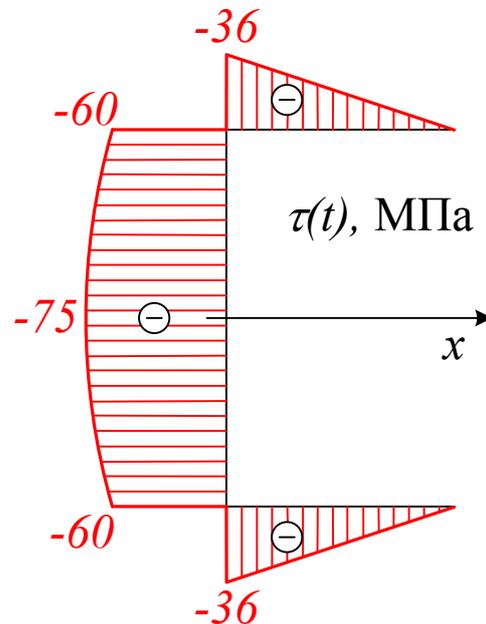


Рис. 2.15. Эпюра  $\tau$

### 3. ЦЕНТР ИЗГИБА ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Центр изгиба – точка в сечении открытого тонкостенного профиля, через которую проходит равнодействующая касательных напряжений при поперечном изгибе без кручения.

Иными словами: центр изгиба – такая точка в сечении открытого тонкостенного профиля, при походе линии действия перерезывающей силы через которую, не будет возникать кручение.

Положение центра изгиба не зависит от действующих сил и определяется геометрическими характеристиками сечения.

Обычно для определения положения центра изгиба открытого профиля предпочитают использовать «метод фиктивной силы».

#### 3.1. Метод фиктивной силы

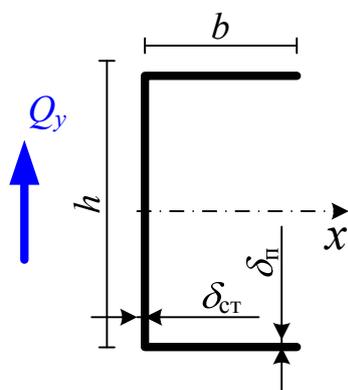


Рис. 3.1. Сечение профиля

Суть метода фиктивной силы опирается на приведенное определение центра изгиба и состоит в следующем (см. пример: сечение тонкостенного стержня на рис. 3.1):

1). К сечению, связанному с координатами  $x$  и  $y$  (главными), мысленно прикладывается фиктивная сила  $Q_y$  произвольной величины, направленная, например, вверх, т.е. в сторону положительных координат  $y$ .

2). Строится эпюра потоков касательных сил в соответствии с балочной формулой сдвига:

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t)$$

с обязательным указанием направления потока на каждом из участков.

Следовательно, необходимо определить:

- а) момент инерции сечения относительно главной центральной оси  $I_x$ ;
- б) эпюру текущих статических моментов площади сечения относительно главной центральной оси  $S_x(t)$ ;

в) потоки касательных усилий  $q_p(t)$ ;

г) направление  $q_p(t)$ .

В нашем примере (см. рис. 3.1 и 3.2):

$$I_x = 2 \left( \frac{h^2}{4} b \delta_n \right) + \frac{\delta_{ct} \cdot h^3}{12} = \frac{h^2}{2} \left( b \delta_n + \frac{1}{6} \delta_{ct} h \right);$$

$$y_1(\xi) = \frac{h}{2}; \quad \delta_1(\xi) = \delta_n; \quad S_{x1}(t) = \int_0^t \frac{h}{2} \delta_n d\xi = \frac{h \delta_n t}{2}.$$

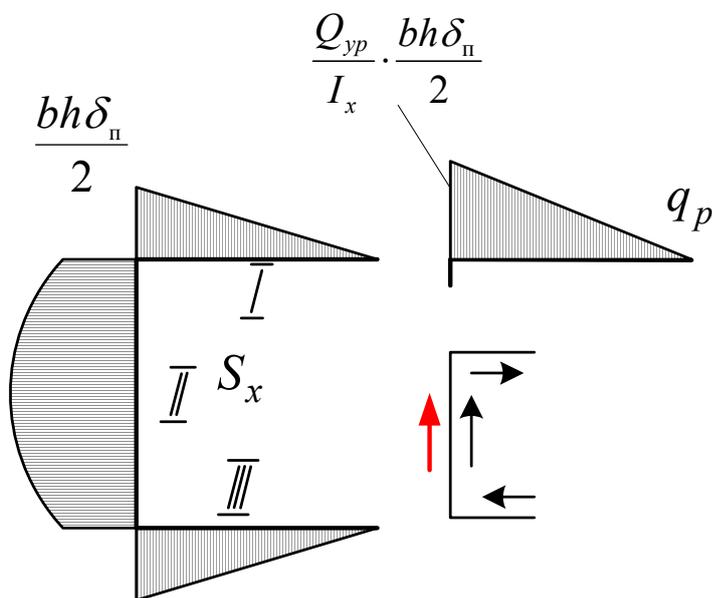


Рис. 3.2. Вид эпюр  $S_x(t)$  и  $q_p(t)$

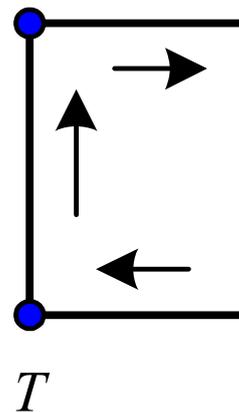


Рис. 3.3. Моментная точка

3). Произвольно выбирается моментная точка  $T$  (рис. 3.3) и правило знаков для моментов относительно этой точки; например, положительными считать моменты по часовой стрелке. Выбор моментной точки  $T$  нужно производить так, чтобы просто вычислялось значение  $M_T(q_p)$ .

4). Составляем условие статической эквивалентности моментов относительно точки  $T$ :

$$M_T(Q_y) = M_T(q_p).$$

Момент силы  $Q_y$  равен:

$$M_T(Q_y) = Q_y a_T,$$

где  $a_T$  – неизвестное пока расстояние от моментной точки до линии действия силы  $Q_y$ .

Момент от потока касательных сил равен

$$M_T(q_p) = \int_p q_p(t) dt \rho(t),$$

причем знак величины в правой части определяется в соответствии с принятым правилом знаков.  $\rho(t)$  – длина перпендикуляра, опущенного из моментной точки  $T$  на линию действия элементарной силы  $q_p(t)dt$ , т.е. на касательную к контурной линии в данной точке контура ( в примере  $\rho_1(t) = h$ ).

Если правая часть условия статической эквивалентности положительна, то расстояние

$$a_T = \frac{M_T(q_p)}{Q_y}$$

откладывается влево от моментной точки (направленная вверх сила  $Q_y$  должна быть расположена левее точки  $T$ , чтобы давать момент по часовой стрелке).

Подсчитаем для нашего примера:

$$M_T(q_p) = \int_p q_p(t) dt \rho(t) = h \int_0^b q_{p1}(t) dt = h \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{b^2 h \delta_{\pi}}{4}.$$

Сила  $Q_y$  лежит правее моментной точки; при  $a_T < 0$  левее.

$$a_T = \frac{h^2 b^2 \delta_{\pi}}{4 \cdot \frac{h^2}{2} \left( b \delta_{\pi} + \frac{1}{6} h \delta_{\text{ст}} \right)} = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{h \delta_{\text{ст}}}{b \delta_{\pi}} \right)}.$$

$$a_T = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{h \delta_{\text{ст}}}{b \delta_{\pi}} \right)} - \text{положение центра изгиба по оси } x \text{ определено.}$$

Приложим силу  $Q_x$  (поиск второй координаты)

Повернем сечение на  $90^\circ$ , проведем аналогичные действия и покажем эпюры  $S_y(t)$  и  $q_{py}(t)$  на рис. 3.4.

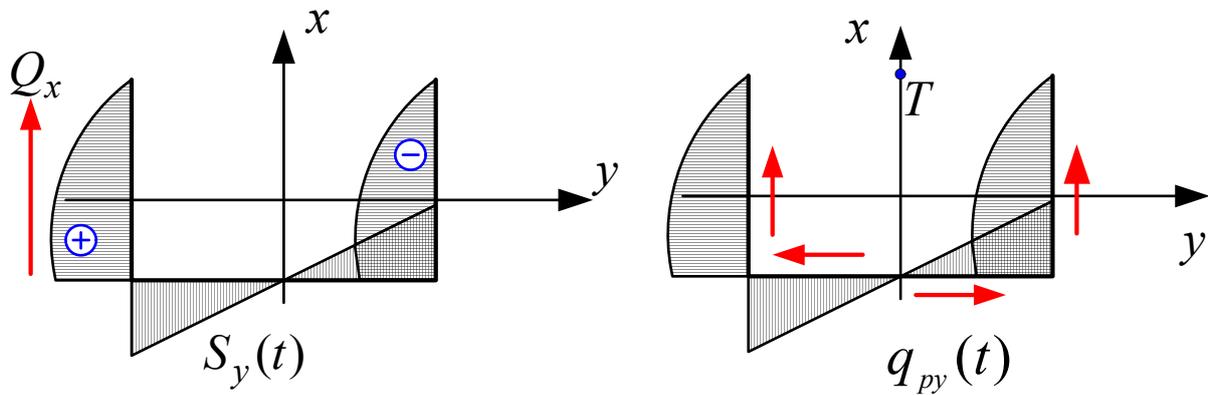


Рис. 3.4. Эпюры  $S_y(t)$  и  $q_{py}(t)$

Прилагаем фиктивную силу  $Q_x$  – вызываем  $q_{px}$ , предварительно вычислив  $I_y$ . Это путь аналогичен поиску первой координаты центра изгиба. Но в нашем примере присутствует симметрия.

Воспользуемся условиями симметрии. Заметим, что  $S_y$  – обратно симметрична функция. Тогда очевидно, что:  $M_T(Q_x) \equiv 0$ , а значит  $b_T \cdot Q_x = 0$ , т.е.  $b_T = 0$ , где  $b_T$  – расстояние от оси  $x$  до линии действия силы  $Q_x$ .

### 3.1. Правила для определения центра изгиба

- 1). Если сечение имеет ось симметрии, то центр изгиба лежит на этой оси (как в нашем примере).
- 2). Если сечение имеет две оси симметрии, то центр изгиба лежит в точке их пересечения.
- 3). Для сечений типа «сростки» («пучки») центр изгиба лежит в узле. (Сростки – прямолинейные ответвления без изломов) (рис. 3.5).

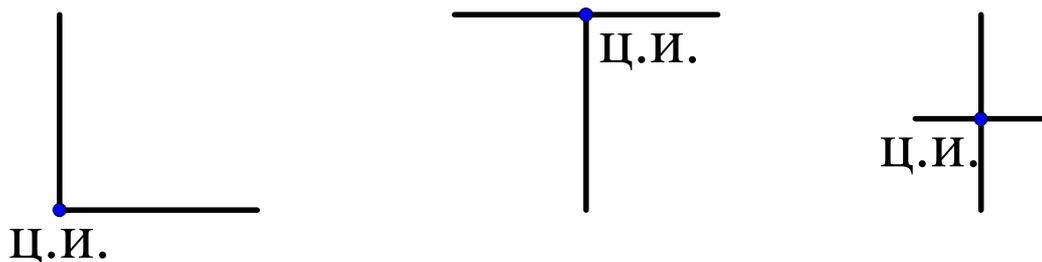


Рис. 3.5. Профили типа «сростки» («пучки»)

4). Центр изгиба обычно расположен вне открытого контура.

На рис. 3.6 «возможный» открытый контур обозначен штриховкой.

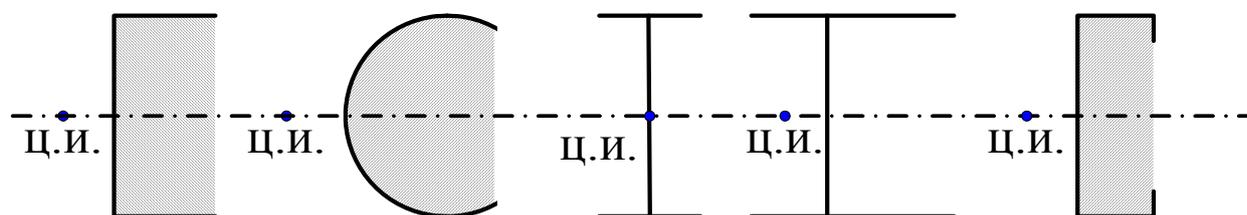


Рис. 3.6. Положение центра изгиба в сечениях

### 3.2. Процедура метода фиктивной силы

1). Исходные данные (табл. П.4).

Указать номер варианта. (На эскизе заданного сечения следует изображать только контурную линию; проверьте наличие симметрии относительно оси  $x$ .)

2). Если требуется в условиях, провести дискретизацию линейных участков

3). Вычислить  $J_x$  сечения.

4). Задать фиктивную силу  $Q_y = |J_x|$ ; считать ее направленной вверх.

5). Выбрать начальную точку отсчета контурной координаты на одном из свободных концов, причем так, чтобы координата  $t$  была направлена против часовой стрелки.

6). Выбрать моментную точку  $T$  и определить «плечи»  $\rho_i$  для каждого из участков. Если контурная линия состоит из прямолинейных отрезков, то моментную точку следует выбирать в точке пересечения максимального числа отрезков на вертикальной стенке. Если в сечении имеется кольцевой сектор, моментную точку следует брать в центре круга.

7). Используя методику, рассмотренную при решении предыдущей задачи, построить эпюру текущих статических моментов  $S_x(t)$ . При этом можно пропустить линейные участки, которым соответствуют нулевые «плечи».

8). Определить направления потоков  $q(t) = -S_x(t)$  на каждом из участков.

9). Вычислить момент, создаваемый потоками  $q_i$  относительно моментной точки  $T$ :

$$M_{Ti}(q_i) = \int_0^{b_i} q_i(t) \rho_i(t) dt.$$

где  $b_i$  – длина  $i$  – го участка.

Момент на участке считается положительным, если направлен против часовой стрелки.

На каждом из линейных участков эпюры  $q(t)$  величина  $M_{Ti}(q_i)$  может быть вычислена как  $F_i \rho_i$ , где  $F_i$  – равнодействующая потоков  $q$  на  $i$  – том участке:  $F_i = q_{i\text{cp}} b_i$  ( $q_{i\text{cp}}$  – средняя величина потока на участке).

Затем производится суммирование по всем участкам

$$M_T(q) = \sum M_{Ti}(q_i).$$

10). Вычислить расстояние  $a_T = \frac{M_T(q)}{Q_y}$ ; причем индекс « $T$ » при  $a$  указывает,

что найденное расстояние следует откладывать от выбранной моментной точки  $T$  до центра изгиба: если  $a_T > 0$ , то центр изгиба лежит справа от точки  $T$ ; если  $a_T < 0$  – слева.

11) На эскизе сечения указать положение центра изгиба и расстояние от точки  $T$  в сантиметрах.

## 4. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЗАМКНУТОМ ПРОФИЛЕ

### 4.1. Исходные данные

#### 4.1.1. Геометрические характеристики сечения

Рассматривается упрощенная схема (рис. 4.1) межлонжеронной части крыла, состоящая из двух лонжеронов (левого и правого) и двух обшивок (верхней и нижней).

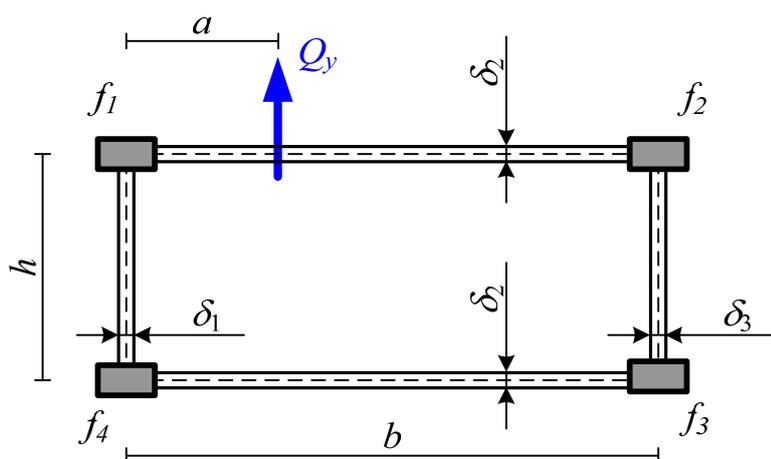


Рис. 4.1. Геометрия сечения

В примере:

высота сечения  $h = 20$  см;  
толщина стенки левого лонжерона  $\delta_1 = 0,2$  см;  
толщины обшивок  $\delta_2 = 0,25$  см;  
толщина стенки правого лонжерона  $\delta_3 = 0,3$  см;  
нижние и верхние пояса одинаковы:  $f_4 = f_1, f_3 = f_2$ .

Параметры  $b, f_1, f_2$  выбираются из таблицы варьируемых параметров по номеру индивидуального варианта (см. табл. П.5.1.)

#### 4.1.2. Материалы элементов сечения

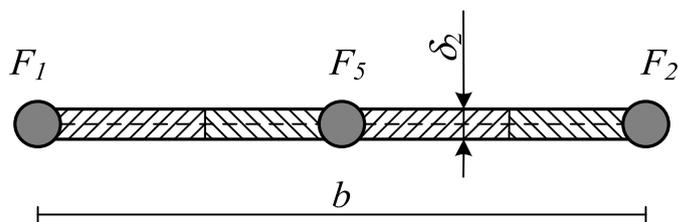
В рассматриваемом примере пояса лонжеронов ( $f_1, f_2, f_3, f_4$ ) и стенки ( $\delta_1, \delta_3$ ) – стальные:  $E_{ст} = 200$  ГПа; обшивка ( $\delta_2$ ) – дюралевая:  $E_{д} = 70$  ГПа.

#### 4.1.3. Нагружение сечения

В сечении действует направленная вертикально вверх перерезывающая сила  $Q_y$ , линия действия которой проходит на расстоянии  $a$  справа от стенки левого лонжерона. Величина силы и параметр  $a$  задаются преподавателем для всей группы.

## 4.2. Дискретизация и редуцирование сечения

Дискретизация сечения есть замена сплошных стенок (вертикальных и горизонтальных) сосредоточенными (дискретными) элементами.



В данной работе предлагается разделить обшивку на четыре равные части (рис. 4.2).

Рис. 4.2. Дискретизация сечения

Площадь каждой из четырех частей редуцируем к материалу поясов:

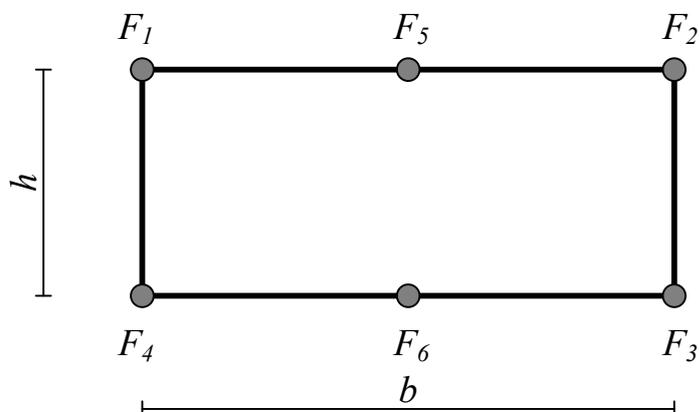
$$\Delta F_{\text{общ}} = \frac{1}{4} \cdot b \cdot \delta_2 \cdot \frac{E_d}{E_{\text{ст}}}. \quad (4.2)$$

Два средних участка верхней обшивки образуют фиктивный сосредоточенный элемент площадью (рис. 4.3)

$$F_5 = 2 \cdot \Delta F_{\text{общ}}; \quad (4.3)$$

Симметричный фиктивный элемент на нижней обшивке обозначим  $F_6$ .

Крайние участки обшивок присоединяются к поясам. Кроме того, к поясам присоединяются частично площади стенок: присоединяемые к поясам площади стенок определяются по формуле



$$\Delta F_{\text{ст}} = \frac{1}{6} \cdot h \cdot \delta_{\text{ст}}, \quad (4.4)$$

где индекс «ст» следует заменить цифрами «1» или «3».

Рис. 4.3. Дискретное редуцированное сечение

Таким образом, новые площади поясов с присоединенными площадями обшивок и стенок равны:

$$F_1 = F_4 = f_1 + \Delta F_{\text{обш}} + \frac{1}{6} \cdot h \cdot \delta_1; \quad (4.5)$$

$$F_2 = F_3 = f_2 + \Delta F_{\text{обш}} + \frac{1}{6} \cdot h \cdot \delta_3. \quad (4.6)$$

В новом сечении обшивка и стенки не участвуют в работе на нормальные напряжения:  $\delta_\sigma = 0$ .

### 4.3. Эпюра переменной части потока касательных сил $q_p$

#### 4.3.1. Момент инерции сечения

Вычисляется по формуле

$$J_x = \sum_{i=1}^6 F_i \cdot y_i^2 = (F_1 + F_2 + F_5) \cdot \frac{h^2}{2}. \quad (4.7)$$

в последнем равенстве использован тот факт, что сечение состоит из двух одинаковых половин и все продольные элементы находятся на одной высоте.

#### 4.3.2. Построение эпюры текущих статических моментов

Значение текущего статического момента в точке контура, положение которой определяется контурной координатой  $t$ , в общем случае вычисляется по формуле

$$S_x(t) = \int_0^t y(\tau) dF = \int_0^t y(\tau) \delta d\tau + \sum_{i=0}^{m(t)} y_i \cdot f_i, \quad (4.8)$$

которая в данном частном случае принимает вид

$$S_{xi} = \sum_{i=0}^{m(t)} y_i \cdot f_i, \quad (4.9)$$

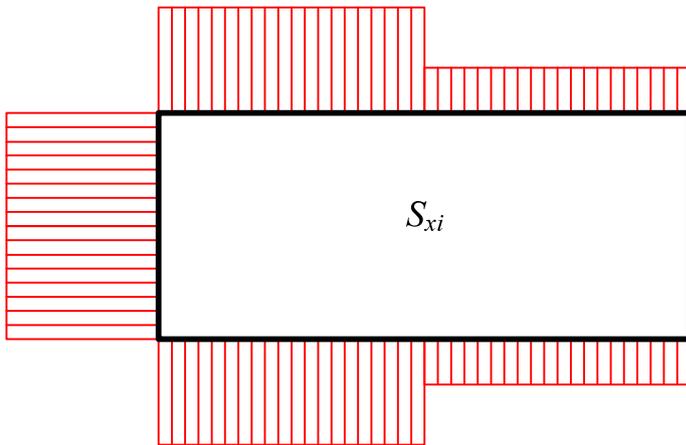
где  $m(t)$  – количество сосредоточенных продольных элементов, расположенных на участке контура от начала отсчета (от точки  $A$ ) до рассматриваемой точки на контуре. В случае дискретного сечения текущий статический момент на каждом участке постоянен:  $S_x(t) = S_{xi}$ .

На первом участке от точки  $A$  до элемента  $F_1$  статический момент равен нулю, так как здесь нет продольных элементов, а  $\delta_\sigma = 0$ :  $S_{x1} = 0$ .

На втором участке  $S_{x2} = F_2 \cdot y_2 = +F_2 \cdot \frac{h}{2}$ .

На третьем участке  $S_{x3} = F_2 \cdot \frac{h}{2} + F_5 \cdot \frac{h}{2}$ .

На четвертом участке  $S_4 = F_1 \cdot \frac{h}{2} + F_5 \cdot \frac{h}{2} + F_2 \cdot \frac{h}{2}$ .



Текущие статические моменты на нижней половине сечения симметричны (рис.4.5).

Рис. 4.5. Характер эпюры статических моментов

### 4.3.3. Значения и направления потоков $q_{pi}$

Значение переменной части потока касательных сил на  $i$ -том участке контура дискретного сечения определяется по формуле:

$$q_{pi} = -\frac{Q_y \cdot S_{xi}}{J_x}. \quad (4.10)$$

При положительных  $S_{xi}$  направления потоков  $q_{pi}$  противоположны направлениям контурной координаты  $t$  на каждом из участков (рис. 4.6). В рассматриваемом примере координата направлена против часовой стрелки, а потоки – по часовой стрелке.

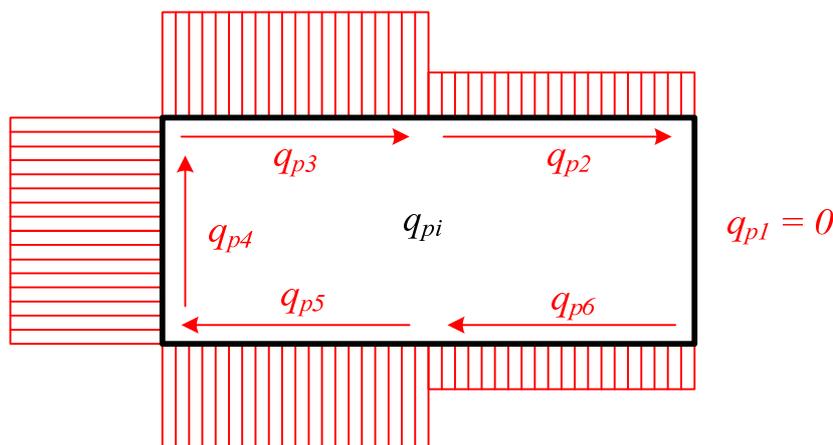


Рис. 4.6. Характер эпюры потоков  $q_{pi}$

#### 4.3.4. Проверка потоков $q_p$

Поток по стенке  $q_{p4}$  (рис. 4.6) должен давать силу, равную силе  $Q_y$ , то есть необходимо проверить равенство:

$$q_{p4} \cdot h = Q_y. \quad (4.11)$$

Если погрешность превышает 1%, расчеты  $q_{pi}$  сделаны неверно.

#### 4.4. Определение постоянной части потока касательных сил $q_0$

Постоянная часть потоков касательных сил  $q_0$  определяется из условия статической эквивалентности моментов: момент от суммарных потоков касательных сил  $(q_0 + q_{pi})$  должен равняться моменту от силы  $Q_y$  относительно любой точки.

Например, если в качестве моментной точки принять центр пояса 4, а моменты, направленные против часовой стрелки, считать положительными, то

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (a \cdot Q_y - \oint q_p \cdot \rho \cdot dt), \quad (4.12)$$

причем  $\Omega = 2bh$ ,  $\oint q_p \rho dt = 0,5 \cdot bh(q_{p2} + q_{p3})$ ,

и следует учесть, что потоки  $q_p$  отрицательны.

#### 4.5. Суммарные потоки касательных сил

Суммарные потоки касательных сил определяются по основной формуле расчета касательных напряжений в тонкостенных стержнях:

$$q(t) = q_0 + q_p(t), \quad (4.13)$$

которая в данном случае, когда  $\delta_\sigma = 0$ , принимает вид:

$$q_{\Sigma i} = q_0 + q_{pi}. \quad (4.14)$$

Для проверки правильности проведенных вычислений можно использовать условие эквивалентности моментов, выбрав моментную точку, отличную от той, которая была использована при вычислении потока  $q_0$ . Например, можно взять центр площади  $F_2$ . В этом случае должно выполняться равенство:

$$(a - b) \cdot Q_y = bh \cdot [q_{\Sigma 4} + \frac{1}{2}(q_{\Sigma 5} + q_{\Sigma 6})]. \quad (4.15)$$

Если погрешность превышает 3%, то вычисления содержат ошибку.

#### 4.6. Касательные напряжения

Касательное напряжение на  $i$  – том участке контура определяется формулой:

$$\tau_i = \frac{q_{\Sigma i}}{\delta_i}. \quad (4.16)$$

где  $\delta_i$  – действительная толщина стенки на  $i$  – том участке контура.

Следует вычислить  $\tau_i$  для  $i = 1, 2, 3, 4$  и сравнить их значения с пределами текучести при сдвиге для стали (500 МПа) и дюрала (180 МПа).

#### 4.7. Вывод

Следует указать стенку, в которой достигается наибольшее значение отношения действующего касательного напряжения к пределу текучести, и величину этого отношения.

## 5. ЦЕНТР ЖЕСТКОСТИ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ

Найденные в разделе 4 потоки касательных усилий в замкнутом, вызванные действием силы  $Q_y$ , можно использовать для определения положения центра жесткости методом фиктивного момента (расчет удобно вести в таблице – см. табл. 5.1):

1. Крутильная жесткость однозамкнутого профиля

$$GJ_{кр} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{dt}{G\delta}}, \quad (5.1)$$

причем для дискретного сечения интеграл в знаменателе вычисляется как сумма

$$\oint \frac{dt}{G\delta} = \sum_{j=1}^m \frac{\Delta t_j}{(G\delta)_j}, \quad (5.1a)$$

где  $m$  – количество участков на контуре;  $j$  – номер участка;  $\Delta t_j$  – длина  $j$ -го участка.

В табл. 5.1 вычислений используется сокращенное обозначение (строка 4):

$$P_j = \frac{\Delta t_j}{(G\delta)_j}. \quad (5.1b)$$

Модуль упругости второго рода принять: для стали –  $G_{ст} = 80$  ГПа; для дюрала –  $G_{д} = 27$  ГПа.

2. Относительный угол закручивания в сечении

$$\theta = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{q(t) \cdot dt}{G\delta}, \quad (5.2)$$

причем для дискретного сечения интеграл вычисляется как сумма

$$\oint \frac{q(t) \cdot dt}{G\delta} = \sum_{j=1}^m \frac{q_{\Sigma j} \cdot \Delta t_j}{G\delta_j}. \quad (5.2a)$$

При подсчете суммы (5.2a) в строке 6 табл. 5.1 следует учитывать знаки потоков  $q_j$ .

### 3. Крутящий момент

$$M_{кр} = \theta \cdot GJ_{кр}. \quad (5.3)$$

### 4. Расстояние от линии действия силы $Q_y$ до центра жесткости

$$c = \frac{M_{кр}}{Q_y}. \quad (5.4)$$

откладывается влево от  $Q_y$ , если  $M_{кр} > 0$  (рис. 5.1) или вправо, если  $M_{кр} < 0$  (рис. 5.2).

Вычислить расстояние от левой стенки до центра жесткости  $d = a - c$ .

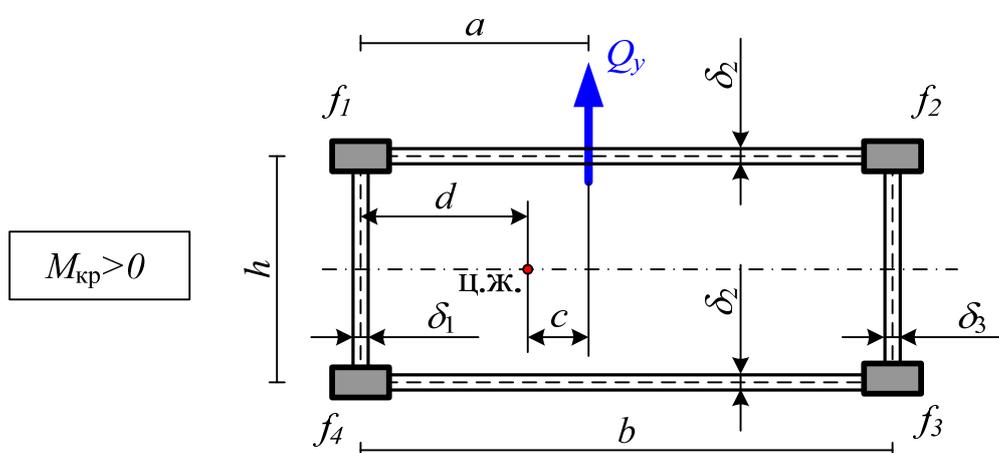


Рис. 5.1. Вариант расположения центра жесткости

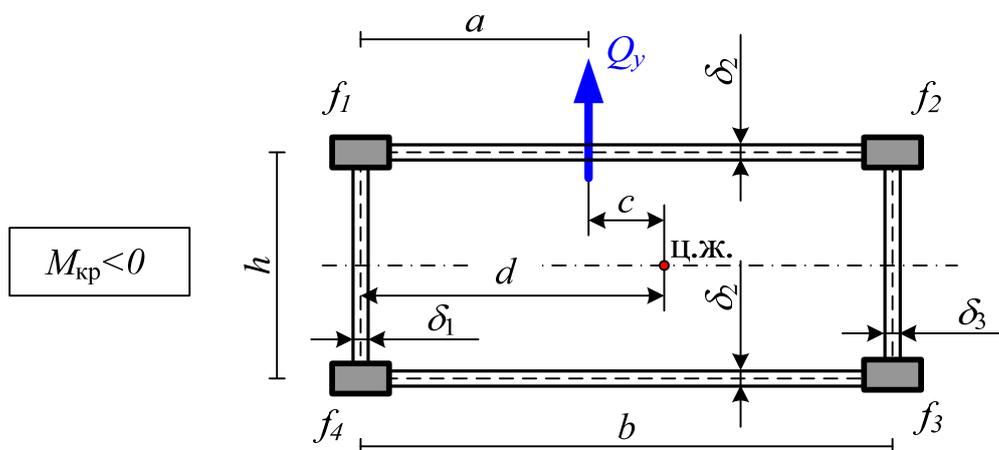


Рис. 5.2. Вариант расположения центра жесткости

Определение центра жесткости (таблица вычислений)

№ п/п	Параметры	Значение параметра на участке					
		Номера участков					
		1	2	3	4	5	6
1	$\Delta t_j, (\text{м})$						
2	$\delta_j, (\text{м})$						
3	$G_j, (\text{Н/м}^2)$						
4	$P_j, (\text{м}^2/\text{Н})$						
5	$q_j, (\text{Н/м})$						
6	$q_j \cdot P_j, (\text{м})$						

## 6. РАСЧЕТ ДВУХЗАМКНУТОГО КОНТУРА НА СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

### 6.1. Исходные данные и дополнительные параметры сечения

Исходные данные представлены в П.5.

Дополнительно следует подсчитать необходимые параметры сечения. Определите предварительно  $2\Omega_1, 2\Omega_2, J_x$  (используется методика расчета дискретного сечения. Обшивка и стенки не работают на нормальные напряжения ( $\delta_\sigma = 0$ ) и, следовательно, не учитываются при расчете  $J_x$  и  $S_{xi}$ ).

Разбейте двухзамкнутый контур на участки, пронумеруйте их и найдите для каждого из участков его длину  $\Delta t_i$  (рис. 6.1) и податливость

$$p_i = \left( \frac{\Delta t_i}{G\delta_1} \right). \quad (6.1)$$

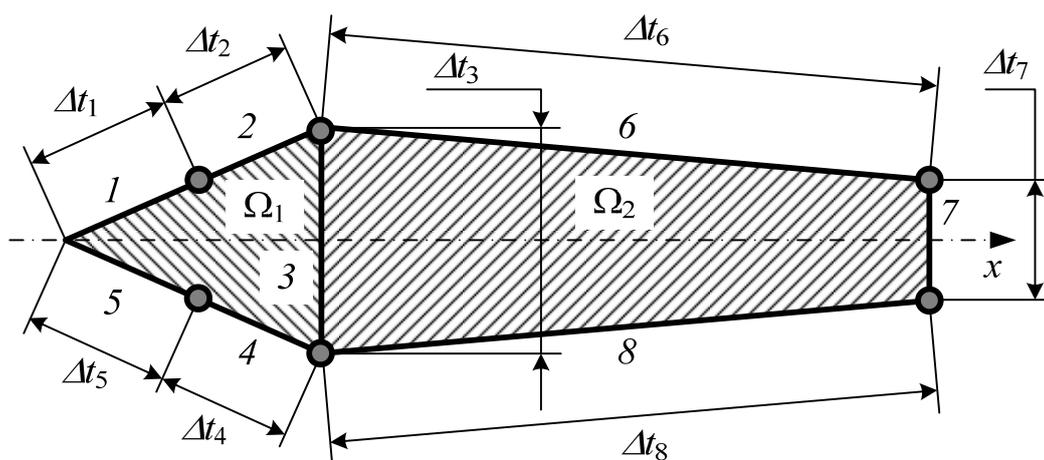
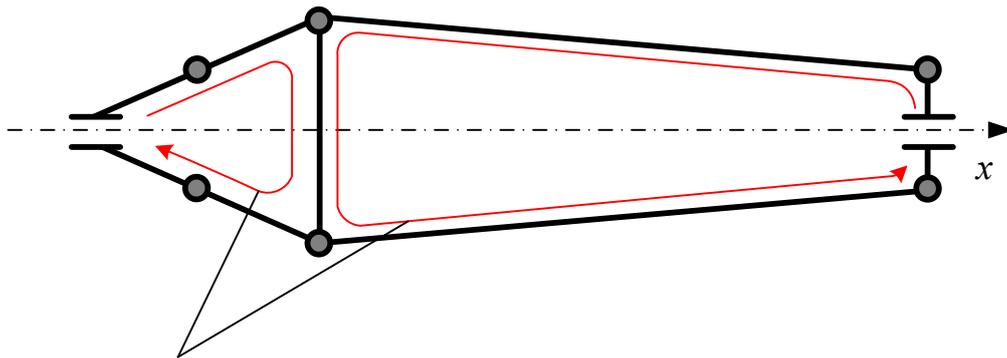


Рис. 6.1. Разбиение двухзамкнутого контура на участки

### 6.2. Выбор основной системы

Используется модифицированная процедура метода сил. Поэтому в качестве основной системы выбирается открытый контур. Введите точечные разрезы в двух стенках на оси симметрии, выбрав таким образом начальные точки в обоих контурах. Направления обходов следует выбрать так, чтобы на начальных участках обхода координата  $y$  была положительной, а на общем участке направления обходов совпадали (рис. 6.2).



Направления обхода

Рис. 6.2. Основная система и направления обхода

Лишними неизвестными являются крутящие моменты в контурах:  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 6.3).

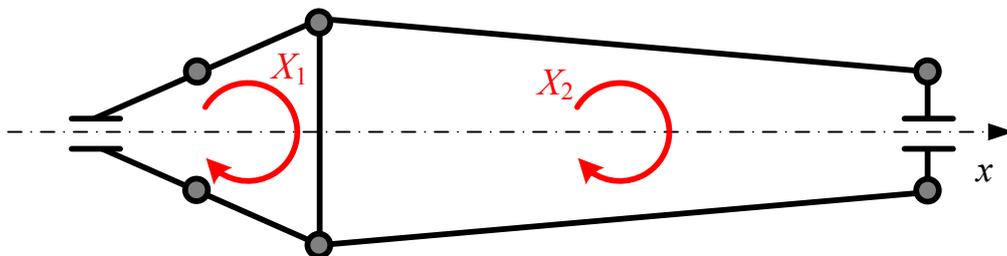


Рис. 6.3. Крутящие моменты в контурах

### 6.3. Грузовое состояние основной системы

Вычисляется  $S_{xi}$  для каждого участка на контуре (учитываются только сосредоточенные продольные элементы!). Подробно эта процедура рассмотрена в разделе 2. Строится эпюра  $S_{xi}$  (рис. 6.4).

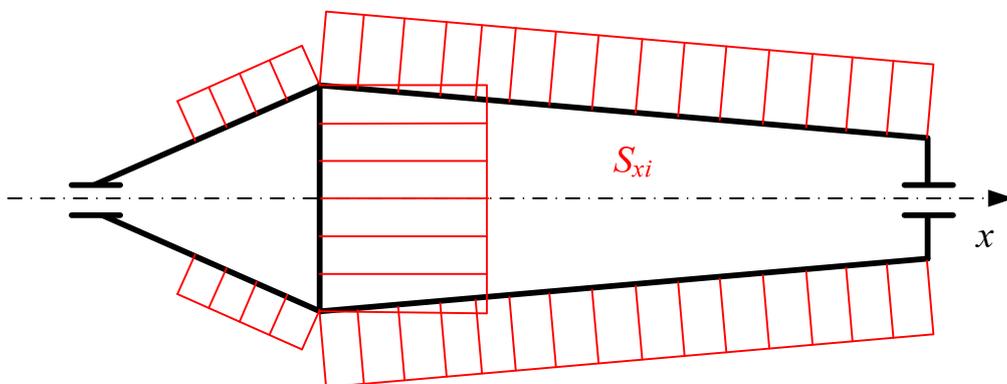


Рис. 6.4. Вид эпюры  $S_{xi}$

Находятся соответствующие значения потоков касательных сил на участках

$$q_{pi} = -\frac{Q_y}{J_x} \cdot S_{xi}, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (6.2)$$

Определяются направления потоков  $q_{pi}$  (см. раздел 2).

Строится эпюра  $q_{pi}$ ; ( $i = \overline{1, n}$ ). Вид этой эпюры представлен на рис. 6.5.

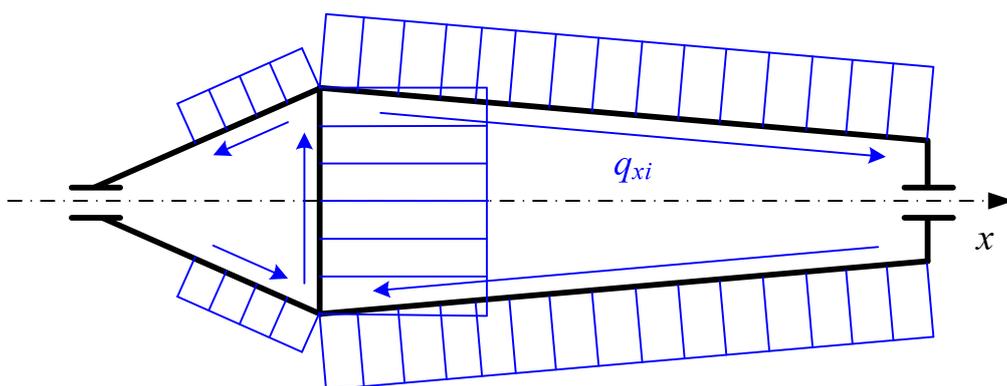


Рис. 6.5. Вид эпюры потоков  $q_{pi}$  и их направления

Проверяется выполнение первого условия статики:

$$\sum_{i=1}^n q_{pi} \cdot \Delta y_i = Q_y. \quad (6.3)$$

Здесь  $\Delta y_i$  – проекция  $\Delta t_i$  на ось  $y$  (рис. 6.6).

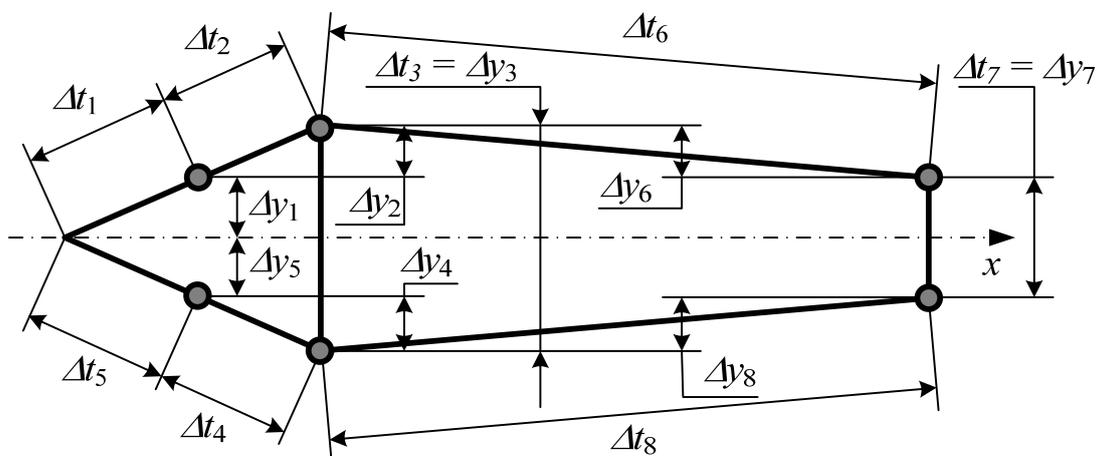


Рис. 6.6.  $\Delta y_i$  участков контура

## 6.4. Первое единичное состояние

Крутящий момент  $\bar{x}_1 = 1$  прикладывается в первом контуре (левом) по часовой стрелке (рис. 6.7). Определяется величина

$$\bar{q}_1 = \frac{1}{2\Omega_1}. \quad (6.4)$$

Строится эпюра потоков  $\bar{q}_1$  с указанием направления, вид которой представлен на рис. 6.8.

Вычисляются коэффициенты

$$\delta_{11} = \bar{q}_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{n_1} p_i \quad (6.5)$$

(здесь  $n_1$  - число участков первого контура);

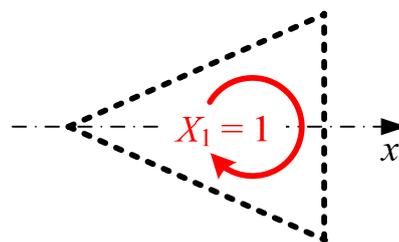


Рис. 6.7. Первое единичное состояние

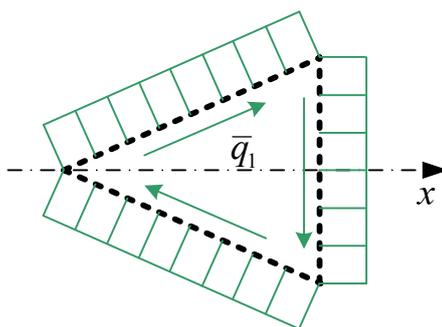


Рис. 6.8. Вид эпюры потоков  $\bar{q}_1$

$$\Delta_{1\rho} = \sum_{i=1}^{n_1} \bar{q}_1 \cdot q_{\rho i} \cdot p_i \quad (6.6)$$

(при не совпадении направлений потоков  $\bar{q}_1$  и  $q_{\rho i}$  их произведение отрицательно).

## 6.5. Второе единичное состояние

Крутящий момент  $\bar{x}_2 = 1$  прикладывается в первом контуре (правом) по часовой стрелке (рис. 6.9).

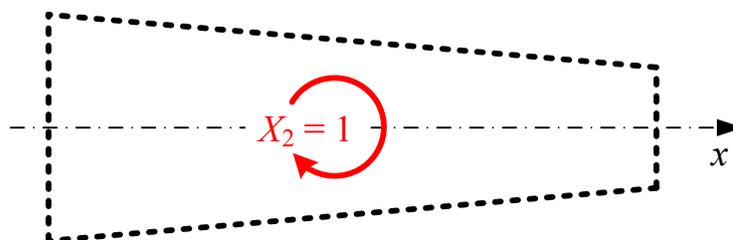


Рис. 6.9. Второе единичное состояние

Определяется величина

$$\bar{q}_2 = \frac{1}{2\Omega_2} \cdot \quad (6.7)$$

Строится эпюра потоков  $\bar{q}_2$  с указанием направлений во всех участках второго контура, вид которой представлен на рис. 6.10.

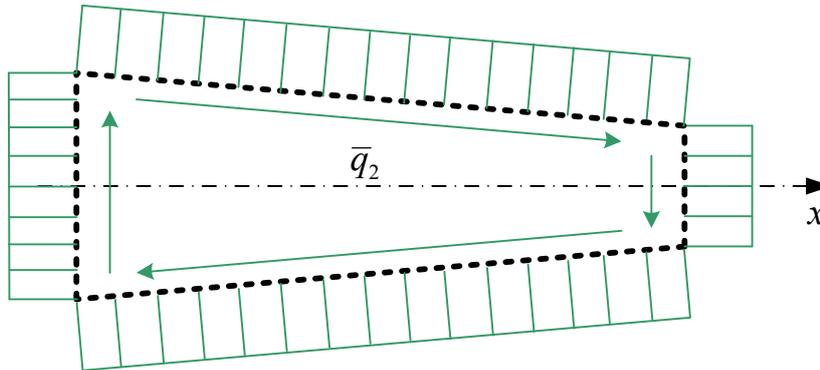


Рис. 6.10. Вид эпюры потоков  $\bar{q}_2$

Вычисляются коэффициенты:

$$\delta_{22} = \bar{q}_2^2 \cdot \sum_{i=1}^{n_2} p_i \quad (6.8)$$

(здесь  $n_2$  - число участков второго контура);

$$\Delta_{2p} = \sum_{i=1}^{n_2} \bar{q}_2 \cdot q_{pi} \cdot p_i ; \quad (6.9)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{i=1}^n \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 \cdot p_i = -\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 \cdot p_{ст}, \quad (6.10)$$

где  $p_{ст}$  - податливость стенки среднего лонжерона (знак "минус" учитывает несовпадение направлений потоков).

Суммирование в (6.8) и (6.9) распространяется на все участки второго контура. При несовпадении направлений потоков  $\bar{q}_2$  и  $q_{pi}$  в (6.9) их произведения отрицательны.

## 6.6. Сводная таблица коэффициентов

Удобно представить полученные результаты в виде таблицы (табл. 6.1).

Таблица 6.1

## Результаты расчета грузового и единичных состояний

$\delta_{11} =$	$\delta_{12} =$	$\Delta_{1p} =$
$\delta_{21} =$	$\delta_{22} =$	$\Delta_{2p} =$

## 6.7. Уравнения совместности деформаций

Записывается два уравнения равенства относительных углов закручивания контуров и сечения в целом:

$$\delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \Delta_{1p} = \varphi'_0; \quad (6.11)$$

$$\delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \Delta_{2p} = \varphi'_0, \quad (6.12)$$

с числовыми значениями найденных коэффициентов (табл. 6.1), а также уравнение метода сил

$$(\delta_{21} - \delta_{11})x_1 + (\delta_{22} - \delta_{12})x_2 + (\Delta_{2p} - \Delta_{1p}) = 0 \quad (6.13)$$

с числовыми значениями коэффициентов уравнение (6.13) является первым из двух разрешающих уравнений.

## 6.8. Уравнение статики

Моментная точка предпочтительно выбирается в нижнем поясе среднего лонжерона. Принимается правило знаков для моментов от сил: положительными считаем моменты, направленные по часовой стрелке, тогда условие статической эквивалентности моментов принимает вид:

$$x_1 + x_2 + M_T(q_{pi}) = M_T(Q_y). \quad (6.14)$$

При вычислении момента от потоков  $q_{pi}$

$$M_T(q_{pi}) = \sum_{i=1}^n q_{pi} \cdot r_i \cdot \Delta t_i \quad (6.15)$$

для определения "плеч"  $r_i$  можно использовать формулу

$$r_i = \frac{1}{\Delta t_i} \cdot \text{abs}[(y_T - y_1)(x_2 - x_1) - (x_T - x_1)(y_2 - y_1)], \quad (6.16)$$

по которой определяется длина перпендикуляра, опущенного из точки  $T$  на направление прямой, заданной концевыми точками отрезка  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . После вычисления значений  $M_T(q_{pi})$  и  $M_T(Q_y)$  уравнение статики запишите в виде

$$x_1 + x_2 = M_T(Q_y) - M_T(q_{pi}). \quad (6.17)$$

## 6.9. Лишние неизвестные

Разрешающие уравнения рассматриваемой задачи образуют систему линейных алгебраических уравнение (СЛАУ) второго порядка. Эта система может быть решена простым методом исключения неизвестных; однако рекомендуется применить более формализованный прием Крамера. В этом последнем случае СЛАУ представляется в таком виде:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 &= B_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 &= B_2, \end{aligned} \quad (6.18)$$

где коэффициенты  $a_{jk}$  и  $B_j$  определяются по соответствующим коэффициентам разрешающих уравнений (6.13) и (6.17). Вычисляются три определителя:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad D_1 = \begin{vmatrix} B_1 & a_{12} \\ B_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & B_1 \\ a_{21} & B_2 \end{vmatrix}. \quad (6.19)$$

Решение СЛАУ (18) – лишние неизвестные моменты в обоих контурах – определяются по "формулам Крамера":

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \quad (6.20)$$

Выполняется проверка полученного решения. Вычисленные значения  $x_j$  подставляются в оба уравнения системы (6.18). Относительные погрешности

$$\begin{aligned} d_1 &= \left| \frac{B_1 - a_{11} \cdot x_1 - a_{12} \cdot x_2}{B_1} \right| \cdot 100\%; \\ d_2 &= \left| \frac{B_2 - a_{21} \cdot x_1 - a_{22} \cdot x_2}{B_2} \right| \cdot 100\%. \end{aligned} \quad (6.21)$$

не должны превышать 3%. В противном случае проверяется вычисление определителей.

Обращается внимание на знаки полученных величин  $x_1$  и  $x_2$ : знак "+" подтверждает правильность первоначального предположения о направлениях моментов  $x_j$  (по часовой стрелке), знак "-" отвергает это предположение – и в этом случае момент  $x_j$  следует направить против часовой стрелки. В дальнейших расчетах следует учитывать фактические направления моментов и считать их положительными.

## 6.10. Угол закручивания сечения

Угол закручивания первого контура определяется подстановкой найденных  $x_j$  в формуле (6.11):

$$\varphi'_1 = \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \Delta_{1p};$$

аналогично для второго контура (12):

$$\varphi'_2 = \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \Delta_{2p}.$$

Теоретически эти значения должны быть равны, но из-за погрешностей округления полное совпадение значений не возможно.

Для дальнейших расчетов (центр жесткости) используется среднее:

$$\varphi'_{cp} = \frac{1}{2}(\varphi'_1 + \varphi'_2). \quad (6.22)$$

Здесь также проводится проверка. Относительная разность

$$\delta = \left| \frac{\varphi'_1 - \varphi'_2}{\varphi'_{cp}} \right| \cdot 100\% \quad (6.23)$$

не должна превышать 3%; в противном случае коэффициенты  $\delta_{j k}$ ,  $\Delta_{j p}$  или величина  $M_T(q_p)$  найдены не верно.

Выполнение данной проверки подтверждает выполнение условий сплошности.

## 6.11. Суммарные потоки касательных сил

Для многозамкнутых контуров, имеющих одну или несколько общих стенок, невозможно применение общего правила соответствия знаков и направлений потоков касательных сил (как это было в открытом или одно-

замкнутом контурах). Поэтому для каждого участка контура суммирование или вычитание составляющих суммарного потока производится в соответствии с их фактическими направлениями.

Хотя процедура сложения потоков в принципиальном смысле не является сложной, она часто является причиной ошибок, поэтому и выполнение требует внимания и аккуратности. Рекомендуется нарисовать схематически все четыре рассматриваемых состояния в таком масштабе, чтобы для каждого из участков можно было указать направление и величину потока касательных сил. Этими состояниями являются:

a) грузовое состояние основной системы (потоки  $q_{pi}$  в открытом контуре);

b) действие момента  $x_1$  в первом контуре

$$q_{1i} = \bar{q}_{1i} \cdot x_1; \quad (6.24)$$

c) действие момента  $x_2$  во втором контуре

$$q_{2i} = \bar{q}_{2i} \cdot x_2; \quad (6.25)$$

d) суммарные потоки касательных сил

$$q_i^\Sigma = \oplus q_{pi} \oplus q_{1i} \oplus q_{2i}, \quad (6.26)$$

где знак  $\oplus$  означает векторное сложение потоков. На каждом участке контура из слагаемых формулы (6.26) может иметь только одно из двух возможных направлений в зависимости от ориентации участка: для горизонтальных участков – вправо или влево, для вертикальных – вверх или вниз, для наклонных – снизу слева вверх направо или наоборот (либо сверху слева вниз направо или наоборот). В соответствии с этими направлениями можно ввести местное правило знаков для каждого из участков и проводить суммирование по формуле (6.26) в соответствии с этим (выбранным произвольно) местным правилом знаков.

Выполняется проверка. Если суммарные потоки найдены верно, то должно выполняться условие статической эквивалентности моментов не только относительно первой моментной точки  $T$  (см. пункт 6.8), но и относительно любой другой моментной точки  $T_1$  (например, нижний пояс заднего лонжерона):

$$M_{T_1}(q_i^\Sigma) = M_{T_1}(Q_y). \quad (6.27)$$

Если левая часть (6.27) отличается от правой не более, чем на 3%, то полученное решение следует признать правильным. Выполнение всех четырех проверок подтверждает выполнение как закона равновесия, так и закона сплошности, что является гарантией правильного решения задачи.

## 6.12. Максимальные касательные напряжения

Поскольку все участки обшивки имеют одинаковую толщину и сделаны из одного материала, для определения максимальных касательных напряжений в обшивке достаточно найти максимальный поток  $q_{\max}^{\text{обш}}$ , и разделить на толщину

$$\tau_{\max}^{\text{обш}} = \frac{q_{\max}^{\text{обш}}}{\delta_1}. \quad (6.28)$$

Коэффициент запаса прочности обшивки при сдвиге

$$n_{\text{обш}} = \frac{\tau_T(\text{Д16Т})}{q_{\max}^{\text{обш}}}, \quad (6.29)$$

где  $\tau_T(\text{Д16Т})$  - предел текучести при сдвиге материала Д16Т – около 200 МПа.

Для определения максимального касательного напряжения в стенках лонжеронов следует вычислить для каждой из стенок

$$\tau_i^{\text{ст}} = \frac{q_i^{\text{ст}}}{\delta_i^{\text{ст}}}, \quad (6.30)$$

где  $i$  – номер стенки.

Из найденных значений  $\tau_i^{\text{ст}}$  следует выбрать наибольшее по абсолютной величине и определить запас прочности при сдвиге материала стенок:

$$n_{\text{ст}} = \frac{\tau_T(30\text{ХГСН2А})}{\tau_{\max}^{\text{ст}}}, \quad (6.31)$$

где предел текучести при сдвиге материала стенок (стали 30ХГСН2А) – около 700 МПа.

## 6.13. Определение центра жесткости методом фиктивного момента

Метод фиктивного момента базируется на использовании двух подходов к определению крутящего момента:

– геометрический подход

$$M_{\text{кр}} = Q_y \cdot a_{\text{ж}}, \quad (6.32)$$

где  $a_{ж}$  – расстояние от центра жесткости до линии действия силы  $Q_y$ ;

– физический подход

$$M_{кр} = \varphi' \cdot GJ_{кр}, \quad (6.33)$$

где  $GJ_{кр}$  - крутильная жесткость сечения;  $\varphi'$  - действительное значение относительного угла закручивания сечения от известной нагрузки.

Метод фиктивного момента применяется в тех случаях, когда из предварительных расчетов уже известна величина  $\varphi'$ . Однако в случае многозамкнутых контуров (в отличие от однозамкнутого) не существует простой формулы для крутильной жесткости и ее величину приходится определять с помощью фиктивного момента.

При применении этого метода производится следующая последовательность действий.

К рассматриваемому сечению мысленно прикладывается безразмерный крутящий момент  $M_{\phi} = 1$ , направленный по часовой стрелке.

Разрешающая система уравнений получается из системы (13), (17) с учетом следующих особенностей кручения без изгиба:

– потоки  $q_{pi} \equiv 0$ ;

– момент  $M_T(q_{pi}) \equiv 0$ ;

– коэффициенты  $\Delta_{jp} \equiv 0$ ;

– вместо момента от силы  $Q_y$  в условии статической эквивалентности моментов учитывается фиктивный момент  $M_{\phi} = 1$ .

Кроме того, следует учитывать, что единичные состояния  $\bar{x}'_{1\phi} = 1$  и  $\bar{x}'_{2\phi} = 1$  ничем не отличаются от рассмотренных ранее в п.п. 6.4 и 6.5. Следовательно, коэффициенты  $\delta_{jk}$  уже известны – вычислены раньше по формулам (6.5), (6.8) и (6.10); размерность этих коэффициентов –  $(Н \cdot м^2)^{-1}$ .

Таким образом, разрешающая система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} (\delta_{21} - \delta_{11})x'_{1\phi} + (\delta_{22} - \delta_{12})x'_{2\phi} = 0, \\ x'_{1\phi} + x'_{2\phi} = 1. \end{cases} \quad (6.34)$$

Решение системы (6.34) дает безразмерные моменты в контурах  $x'_{1\phi}$  и  $x'_{2\phi}$ . Если  $x'_{j\phi} > 0$ , то он направлен по часовой стрелке.

Угол закручивания, вызванный действием фиктивного момента, определяется формулой

$$\varphi'_{ср.ф} = \frac{1}{2}(\varphi'_{1\phi} + \varphi'_{2\phi}), \quad (6.35)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi'_{1\phi} &= \delta_{11} \cdot x'_{1\phi} + \delta_{12} \cdot x'_{2\phi}, \\ \varphi'_{2\phi} &= \delta_{21} \cdot x'_{1\phi} + \delta_{22} \cdot x'_{2\phi}.\end{aligned}\tag{6.36}$$

как и раньше, следует проверить, что разность между этими двумя значениями не превышает 3%; иначе величины  $x'_{j\phi}$  определены неверно – см. формулу (6.23).

Размерность  $\varphi'_{\phi} - (\text{Н}\cdot\text{м}^2)^{-1}$ .

Определяется крутильная жесткость сечения

$$GJ_{\text{кр}} = \frac{M_{\phi}}{\varphi'_{\text{ср.}\phi}} = (\varphi'_{\text{ср.}\phi})^{-1}\tag{6.37}$$

Очевидно, что размерность крутильной жесткости –  $\text{Н}\cdot\text{м}^2 = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{(\text{рад} / \text{м})}$ .

Далее производят выделение крутящего момента из заданной нагрузки (разложение системы внутренних силовых факторов на изгиб и кручение):

$$M_{\text{кр}} = GJ_{\text{кр}} \cdot \varphi'_{\text{ср}},\tag{6.38}$$

причем относительный угол закручивания был вычислен ранее в п. 6.10 по формуле (6.22). Момент  $M_{\text{кр}}$  направлен так же, как и угол  $\varphi'_{\text{ср}}$ . Условимся считать  $M_{\text{кр}}$  положительным, если он направлен по часовой стрелке, и отрицательным в противном случае.

Затем устанавливается положение центра жесткости.

Расстояние от линии действия заданной силы  $Q_y$  до центра жесткости

$$a_1 = \frac{M_{\text{кр}}}{Q_y}.\tag{6.39}$$

Положительное  $a_1$  откладывается вправо от линии действия силы  $Q_y$ .

Расстояние от носика сечения до центра жесткости

$$x'_{\text{ц.ж.}} = c + a_1.\tag{6.40}$$

При сложении следует учитывать знак  $a_1$ .

## 6.14. Определение центра жесткости двухзамкнутого контура методом фиктивной силы

Метод фиктивной силы основан на том, что при прохождении линия действия приложенной к сечению перерезывающей силы через центр жесткости ее приложение не вызывает кручения:  $\varphi' = 0$ .

В этом случае центр жесткости определяется как точка, через которую проходит равнодействующая потоков касательных сил (изгиба без кручения).

Для того, чтобы найти положение равнодействующей, нужно вычислить момент потоков относительно произвольной моментной точки и разделить этот момент на величину равнодействующей, которая равна  $Q_y$ .

При использовании метода фиктивной силы к рассматриваемому сечению мысленно прикладывается фиктивная сила, причем предполагается, что линия ее действия проходит через центр жесткости. Рекомендуется в качестве фиктивной силы взять действующую силу  $Q_y$ , мысленно сместив ее к центру жесткости.

Далее рассматривают три состояния основной системы.

В грузовом состоянии возникают потоки  $q_{pi}$ , которые найдены ранее (см. п. 6.3). Лишние неизвестные – контурные моменты, которые можно обозначить в данном случае через  $x''_{1\phi}$  и  $x''_{2\phi}$ ; первоначально считаются направленными по часовой стрелке.

Первое и второе единичные состояния, а также коэффициенты  $\delta_{jk}$  и  $\Delta_{jp}$  не отличаются от найденных в п.п. 4, 5, 6.

Составляют разрешающую систему уравнений.

Для определения лишних неизвестных  $x''_{1\phi}$  и  $x''_{2\phi}$  в данном случае, когда  $\varphi' = 0$ , достаточно двух уравнений совместности деформаций (без условия статики):

$$\begin{aligned}\delta_{11} \cdot x''_{1\phi} + \delta_{12} \cdot x''_{2\phi} + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21} \cdot x''_{1\phi} + \delta_{22} \cdot x''_{2\phi} + \Delta_{2p} &= 0.\end{aligned}\tag{6.41}$$

Лишние неизвестные  $x''_{1\phi}$  и  $x''_{2\phi}$  определяются решением системы (6.41). В случае использования формул Крамера. Свободные члены следует перенести в правую часть с обратными значениями.

По знакам полученных величин следует уточнить их направления: если  $x_j > 0$ , то он направлен по часовой стрелке.

Далее устанавливают момент от потоков касательных сил.

В качестве моментной точки рекомендуется выбрать нижний пояс среднего лонжерона, как в п. 6.8. Тогда можно воспользоваться уже найден-

ным в п. 6.8 моментом  $M_T(q_{pi})$ . Если он направлен по часовой стрелке, приписываем ему знак "плюс".

Суммарный момент от потоков касательных сил составит:

$$M_T(q) = x''_{1\phi} + x''_{2\phi} + M_T(q_{pi}). \quad (6.42)$$

Если полученная величина положительна, момент  $M_T(q)$  направлен по часовой стрелке.

Затем определяется положение центра жесткости по методу фиктивной силы.

Расстояние от моментной точки до линии действия фиктивной силы  $Q_{y\phi}$ , проходящей через центр жесткости, определяется выражением:

$$a_2 = \frac{M_T(q)}{Q_y}. \quad (6.43)$$

При положительных  $M_T(q)$  и  $Q_y$  центр жесткости расположен слева от моментной точки.

Расстояние от носика сечения до центра жесткости определяется формулой:

$$x''_{ц.ж.} = a - a_2, \quad (6.44)$$

где  $a$  – расстояние от носика сечения до стенки среднего лонжерона.

Производится проверка: если относительная погрешность

$$\frac{|x''_{ц.ж.} - x'_{ц.ж.}|}{a + b} \cdot 100\% \quad (6.45)$$

не превышает 3%, то положение центра жесткости найдено правильно (с точностью до 3% хорды сечения).

Приложение № 1

Варианты исходных данных к задаче  
«Исследование нормальных напряжений изгиба  
в дискретном неоднородном сечении крыла»

Таблица П.1.1

Исходные данные

Параметры	Номера сосредоточенных элементов на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
$x_i^0$ (см)	0	50	100	100	50	0
$y_i^0$ (см)	<b>11</b>	13	9	- 8	- 12	- 10
$f_i$ (см <sup>2</sup> )	11	21	7	6	20	10
$\sigma_{Ti}$ (МПа)	1100	350	1100	350	1100	350
$E_i$ (ГПа)	200	70	200	70	200	70
$M_x = - 800\,000$ Нм; ( $M_y = N_z = 0$ )						

Таблица П.1.2

Исходные данные

Параметры	Номера сосредоточенных элементов на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
$x_i^0$ (см)	0	50	100	100	50	0
$y_i^0$ (см)	12	14	10	- 8	- 12	- 10
$f_i$ (см <sup>2</sup> )	12	22	8	6	20	10
$\sigma_{Ti}$ (МПа)	350	1100	350	1100	350	1100
$E_i$ (ГПа)	70	200	70	200	70	200
$M_x = - 450\,000$ Нм; ( $M_y = N_z = 0$ )						

Таблица П.1.3

## Исходные данные

Параметры	Номера сосредоточенных элементов на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
$x_i^0$ (см)	0	50	100	100	50	0
$y_i^0$ (см)	13	15	11	- 8	- 12	- 10
$f_i$ (см <sup>2</sup> )	15	23	9	16	20	10
$\sigma_{Ti}$ (МПа)	1100	350	1100	1100	350	1100
$E_i$ (ГПа)	200	70	200	200	70	200
$M_x = - 600\,000$ Нм; ( $M_y = N_z = 0$ )						

Таблица П.1.4

## Исходные данные

Параметры	Номера сосредоточенных элементов на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
$x_i^0$ (см)	0	50	100	100	50	0
$y_i^0$ (см)	14	16	12	- 8	- 12	- 10
$f_i$ (см <sup>2</sup> )	14	24	10	6	20	10
$\sigma_{Ti}$ (МПа)	1100	350	1100	1100	350	1100
$E_i$ (ГПа)	200	70	200	200	70	200
$M_x = - 550\,000$ Нм; ( $M_y = N_z = 0$ )						

Таблица П.1.5

## Исходные данные

Параметры	Номера сосредоточенных элементов на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
$x_i^0$ (см)	0	50	100	100	50	0
$y_i^0$ (см)	15	17	13	- 8	- 12	- 10
$f_i$ (см <sup>2</sup> )	15	35	11	16	20	10
$\sigma_{Ti}$ (МПа)	1100	350	1100	350	1100	350
$E_i$ (ГПа)	200	70	200	70	200	70
$M_x = - 650\,000$ Нм; ( $M_y = N_z = 0$ )						

Таблица П.1.6

## Исходные данные

Параметры	Номера сосредоточенных элементов на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
$x_i^0$ (см)	0	50	100	100	50	0
$y_i^0$ (см)	16	18	14	- 8	- 12	- 10
$f_i$ (см <sup>2</sup> )	16	26	12	16	20	20
$\sigma_{Ti}$ (МПа)	1100	350	1100	1100	350	1100
$E_i$ (ГПа)	200	70	200	200	70	200
$M_x = - 1\,450\,000$ Нм; ( $M_y = N_z = 0$ )						

Таблица П.1.7

## Исходные данные

Параметры	Номера сосредоточенных элементов на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
$x_i^0$ (см)	0	50	100	100	50	0
$y_i^0$ (см)	17	19	15	- 9	- 13	- 11
$f_i$ (см <sup>2</sup> )	16	36	6	16	30	10
$\sigma_{Ti}$ (МПа)	1100	350	1100	1100	350	1100
$E_i$ (ГПа)	200	70	200	200	70	200
$M_x = - 1\,500\,000$ Нм; ( $M_y = N_z = 0$ )						

Таблица П.1.8

## Исходные данные

Параметры	Номера сосредоточенных элементов на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
$x_i^0$ (см)	0	50	100	100	50	0
$y_i^0$ (см)	18	20	15	- 10	- 14	- 12
$f_i$ (см <sup>2</sup> )	15	25	11	10	20	10
$\sigma_{Ti}$ (МПа)	1100	350	1100	1100	350	350
$E_i$ (ГПа)	200	70	200	200	70	70
$M_x = - 1\,600\,000$ Нм; ( $M_y = N_z = 0$ )						

Таблица П.1.9

## Исходные данные

Параметры	Номера сосредоточенных элементов на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
$x_i^0$ (см)	0	50	100	100	50	0
$y_i^0$ (см)	18	20	16	- 11	- 15	- 13
$f_i$ (см <sup>2</sup> )	14	25	12	9	15	11
$\sigma_{Ti}$ (МПа)	750	1100	750	1100	750	1100
$E_i$ (ГПа)	100	200	100	200	100	200
$M_x = - 1\,700\,000$ Нм; ( $M_y = N_z = 0$ )						

Таблица П.1.10

## Исходные данные

Параметры	Номера элементов на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
$x_i^0$ (см)	0	50	100	100	50	0
$y_i^0$ (см)	6	10	5	- 4	- 10	- 5
$f_i$ (см <sup>2</sup> )	16	20	14	10	20	10
$\sigma_{Ti}$ (МПа)	1100	750	750	1100	750	750
$E_i$ (ГПа)	200	100	100	200	100	100
$M_x = - 360\,000$ Нм; ( $M_y = N_z = 0$ )						

Таблица П.1.11

## Исходные данные

Параметры	Номера сосредоточенных элементов на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
$x_i^0$ (см)	0	100	200	200	100	0
$y_i^0$ (см)	10	15	12	- 8	- 12	- 8
$f_i$ (см <sup>2</sup> )	16	18	20	22	24	26
$\sigma_{Ti}$ (МПа)	350	1100	350	1100	350	1100
$E_i$ (ГПа)	70	200	70	200	70	200
$M_x = - 650\,000$ Нм; ( $M_y = N_z = 0$ )						

Таблица П.1.12

## Исходные данные

Параметры	Номера сосредоточенных элементов на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
$x_i^0$ (см)	0	50	100	100	50	0
$y_i^0$ (см)	20	22	20	-10	-15	-10
$f_i$ (см <sup>2</sup> )	20	30	10	30	20	10
$\sigma_{Ti}$ (МПа)	1100	350	1100	1100	350	1100
$E_i$ (ГПа)	200	70	200	200	70	200
$M_x = -1\,600\,000$ Нм; ( $M_y = N_z = 0$ )						

Таблица П.1.13

## Исходные данные

Параметры	Номера сосредоточенных элементов на рис. П.1.1							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i^0$ (см)	0	35	70	100	100	70	35	0
$y_i^0$ (см)	10	15	20	8	-10	-20	-15	-8
$f_i$ (см <sup>2</sup> )	4	6	8	10	11	9	7	5
$\sigma_{Ti}$ (МПа)	1100	350	350	1100	750	350	350	750
$E_i$ (ГПа)	200	70	70	200	100	70	70	100
$M_x = -1\,500\,000$ Нм; ( $M_y = N_z = 0$ )								

Таблица П.1.14

Значения фиктивного модуля  
упругости

Вариант	$E_\phi$ , ГПа
1	200
2	100
3	50
4	160
5	80
6	64
7	128

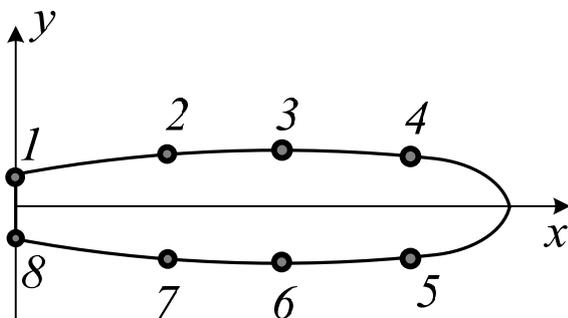


Рис. П.1.1. Схема сечения крыла

Варианты исходных данных к задаче  
«Касательные напряжения сдвига в открытом профиле»

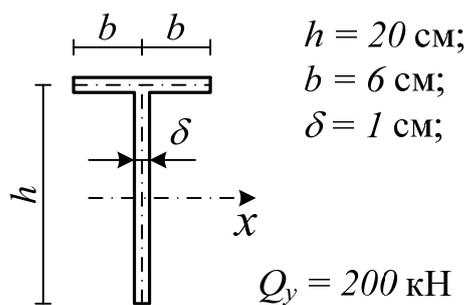


Рис. П.2.1

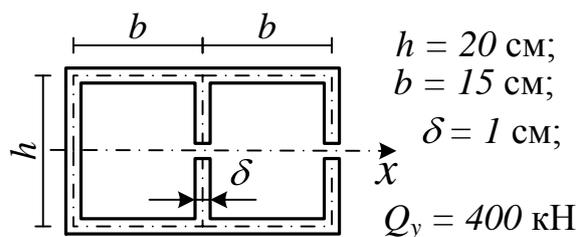


Рис. П.2.2

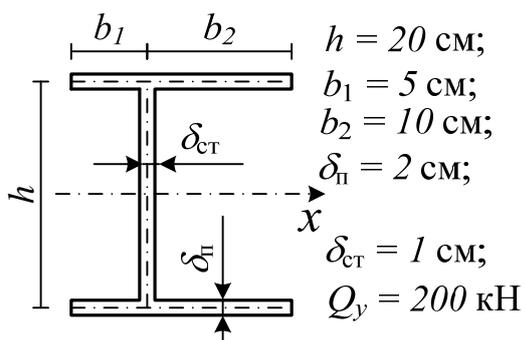


Рис. П.2.3

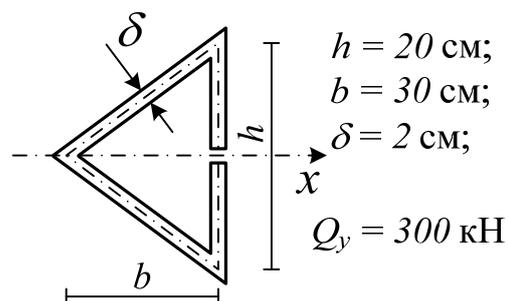


Рис. П.2.4

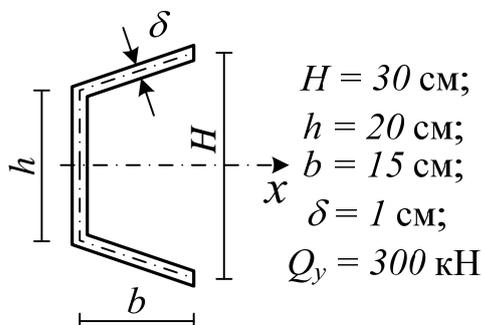


Рис. П.2.5

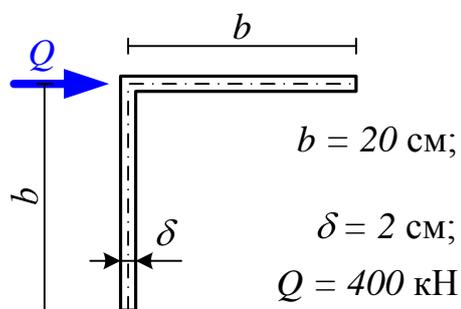


Рис. П.2.6

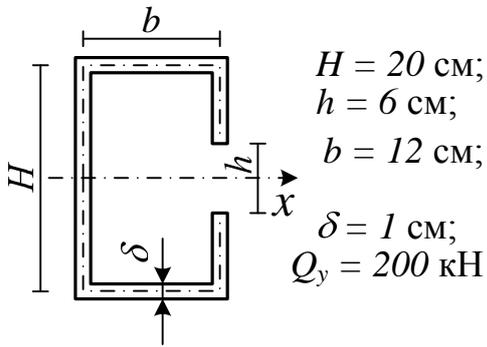


Рис. П.2.7

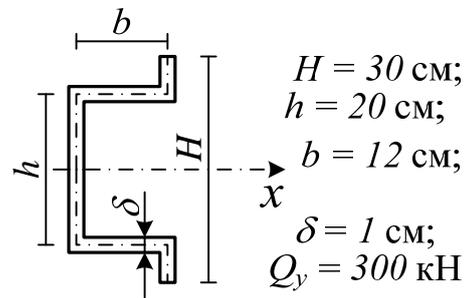


Рис. П.2.8

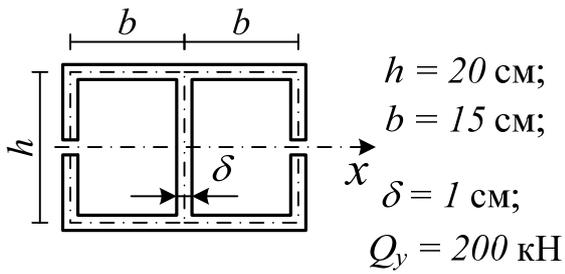


Рис. П.2.9

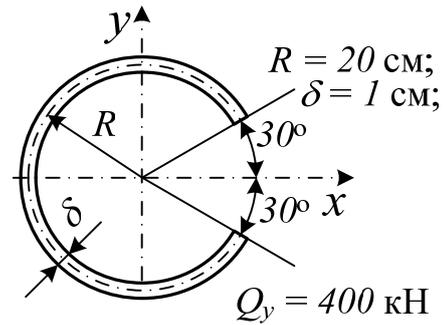


Рис. П.2.10

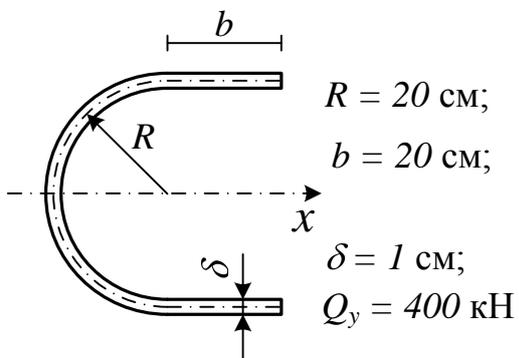


Рис. П.2.11

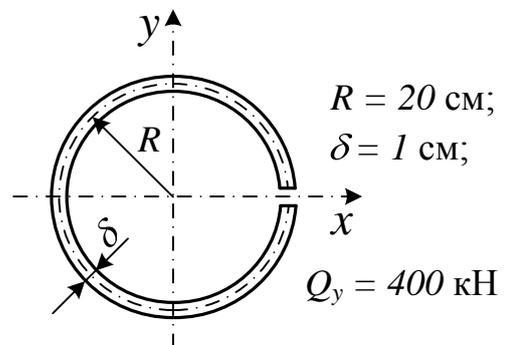


Рис. П.2.12

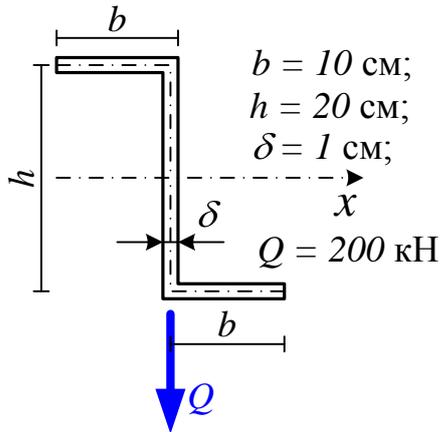


Рис. П.2.13

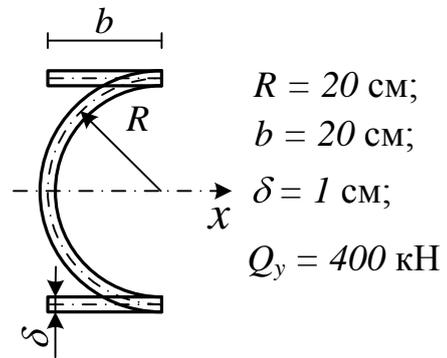


Рис. П.2.14

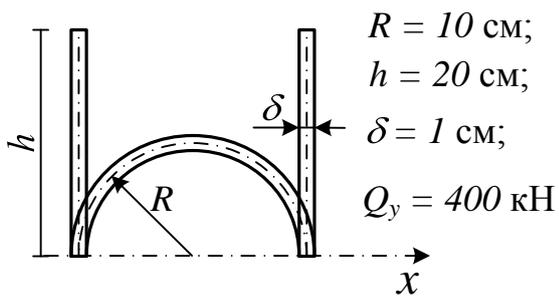


Рис. П.2.15

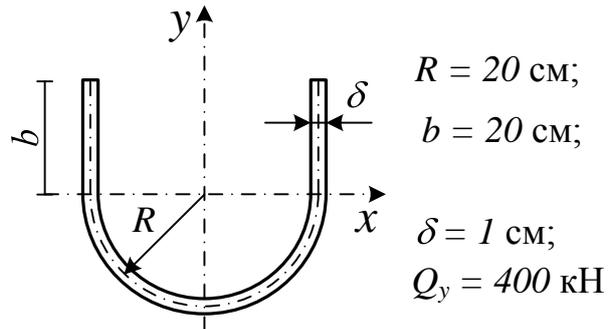


Рис. П.2.16

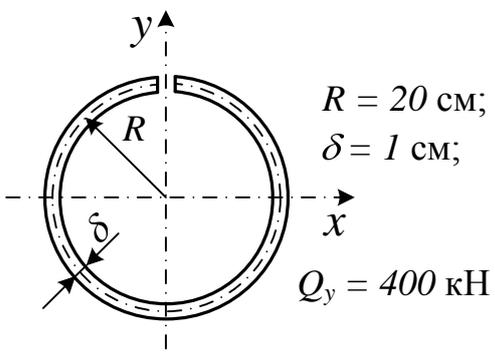


Рис. П.2.17

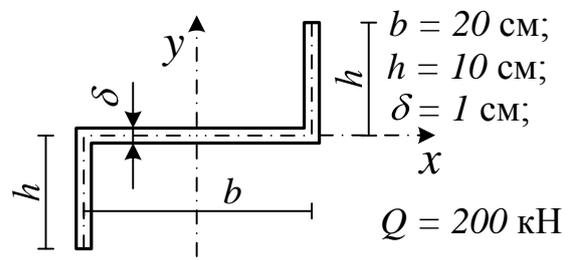


Рис. П.2.18

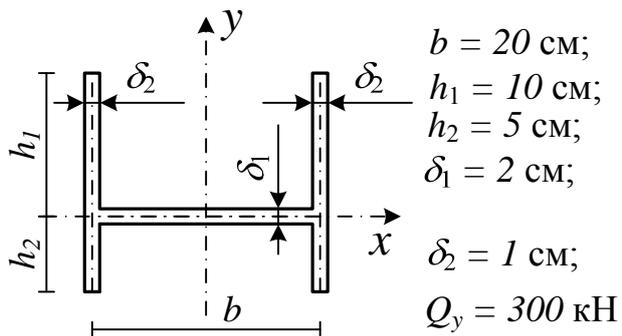


Рис. П.2.19

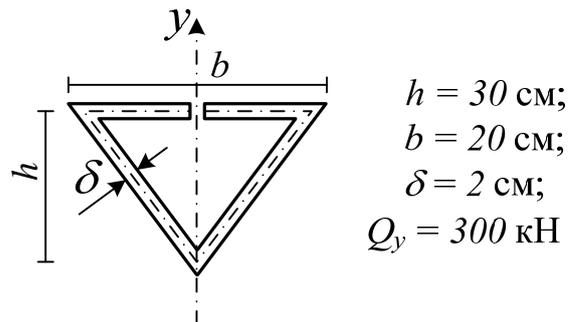


Рис. П.2.20

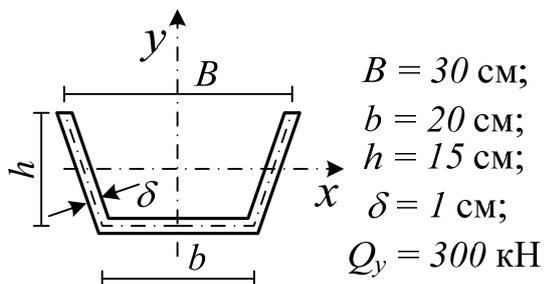


Рис. П.2.21

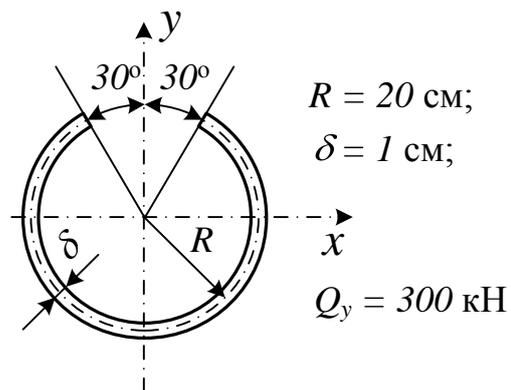


Рис. П.2.22

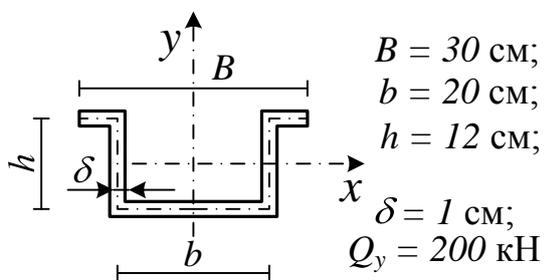


Рис. П.2.23

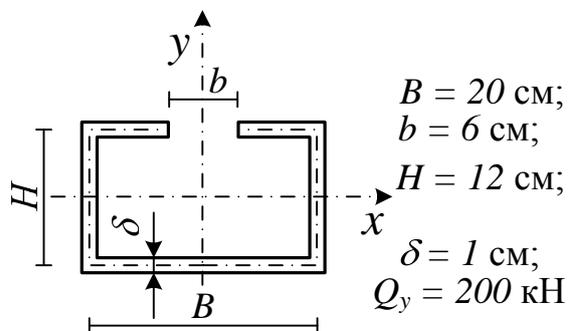


Рис. П.2.24

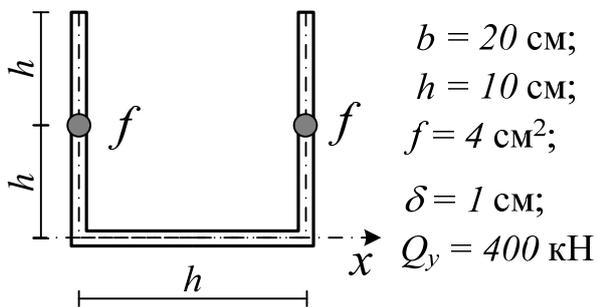


Рис. П.2.25

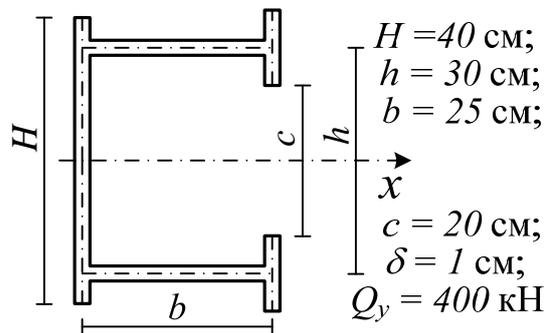


Рис. П.2.26

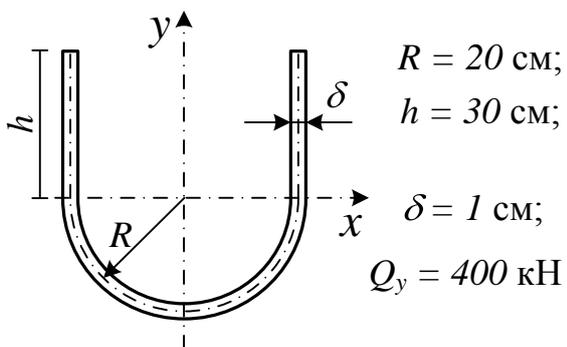


Рис. П.2.27

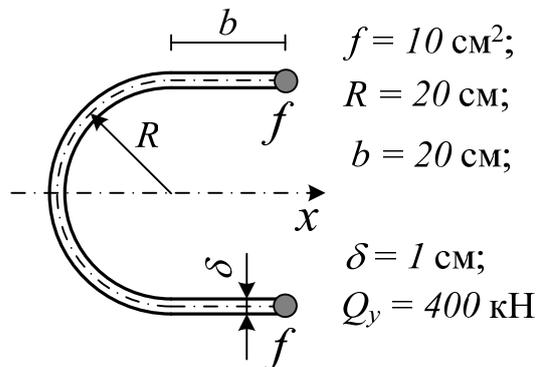


Рис. П.2.28

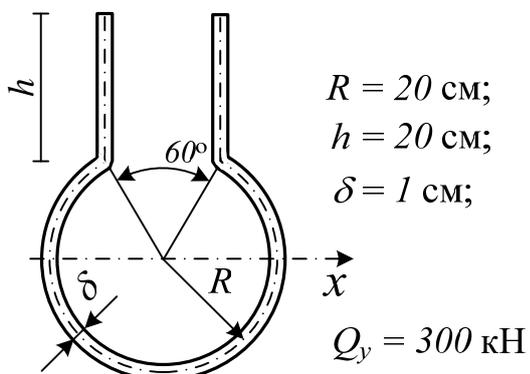


Рис. П.2.29

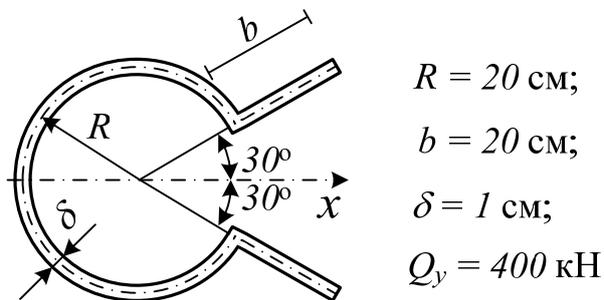


Рис. П.2.30

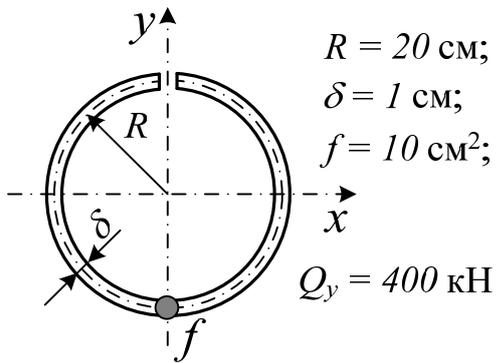


Рис. П.2.31

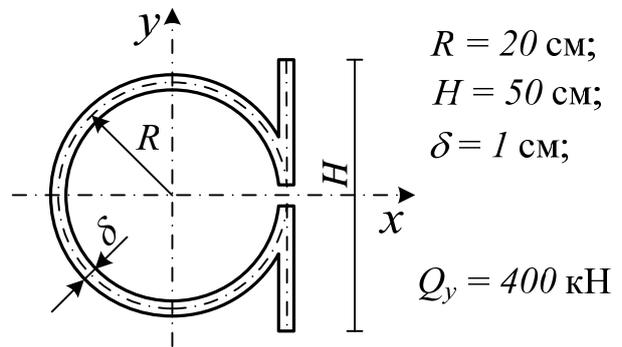


Рис. П.2.32

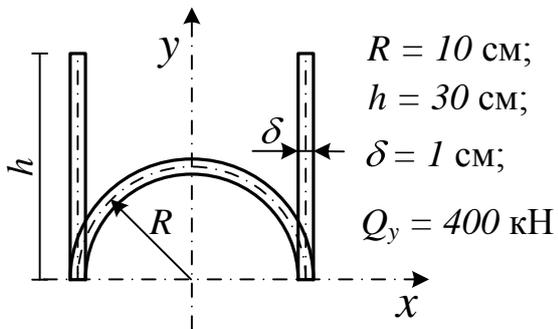


Рис. П.2.33

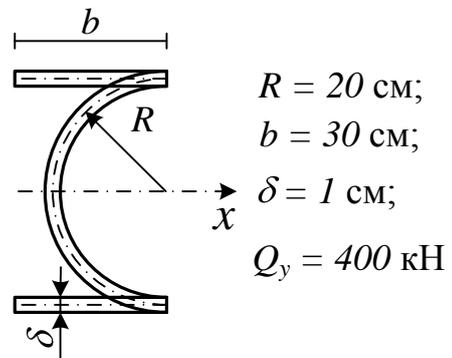


Рис. П.2.34

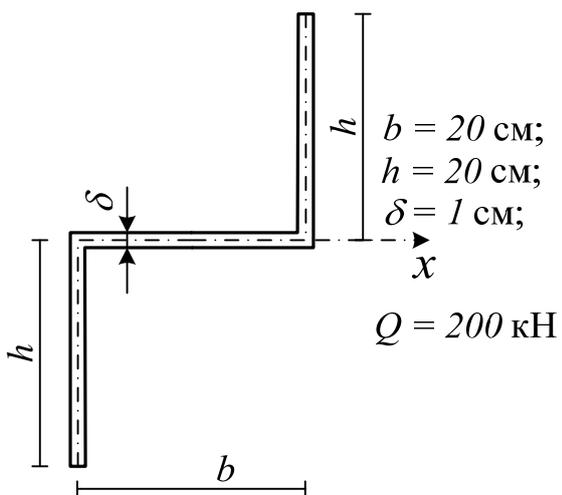


Рис. П.2.35

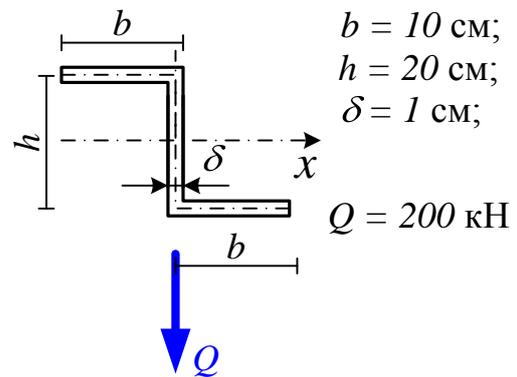


Рис. П.2.36

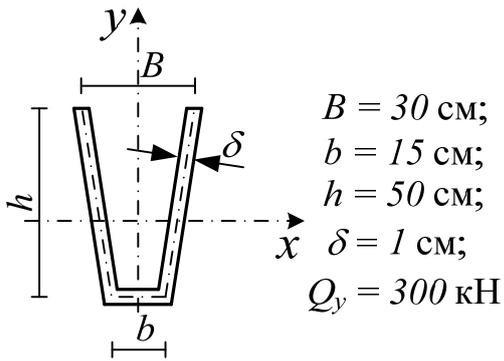


Рис. П.2.37

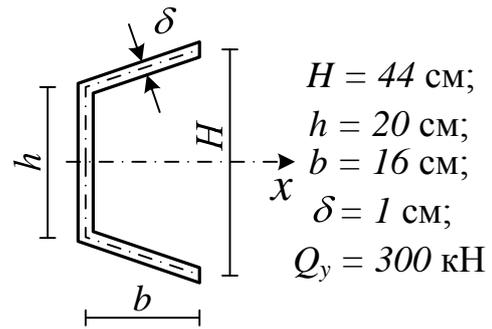


Рис. П.2.38

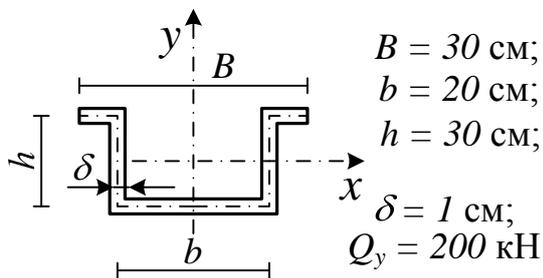


Рис. П.2.39

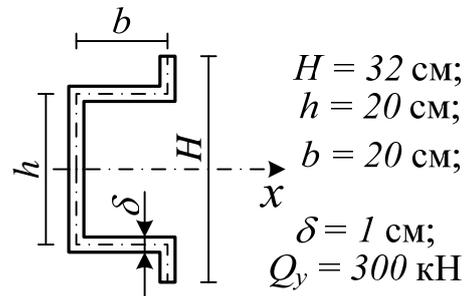


Рис. П.2.40

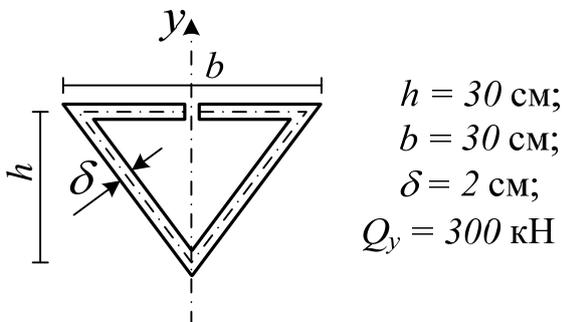


Рис. П.2.41

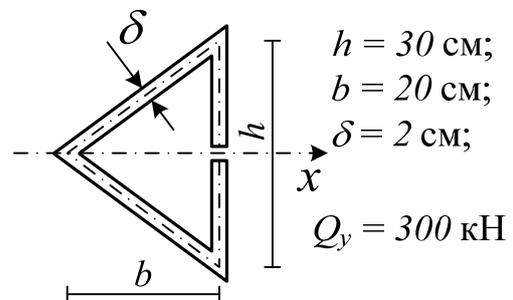


Рис. П.2.42

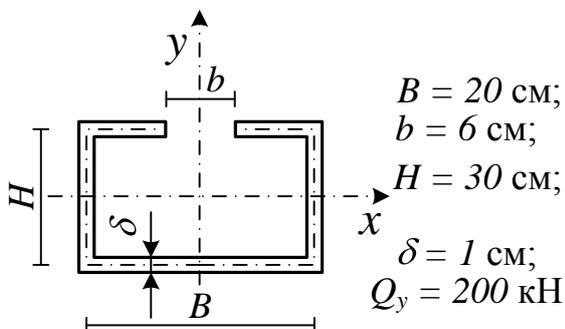


Рис. П.2.43

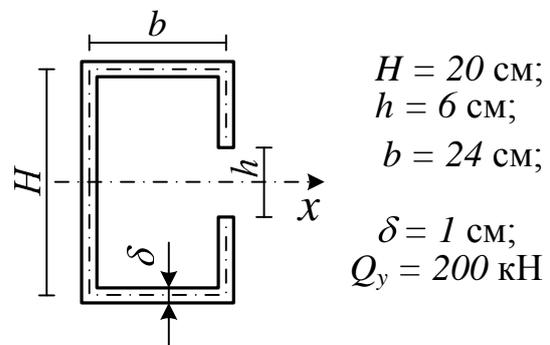


Рис. П.2.44

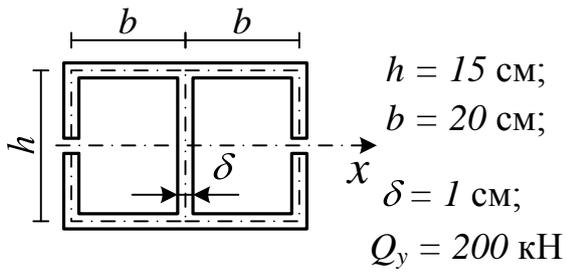


Рис. П.2.45

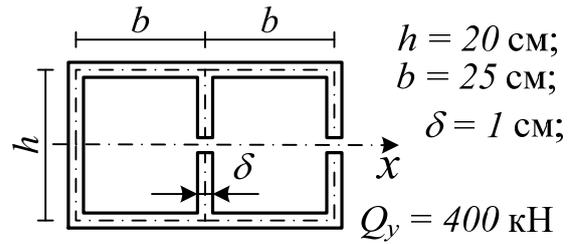


Рис. П.2.46

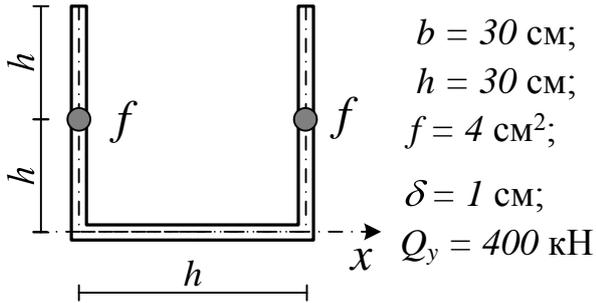


Рис. П.2.47

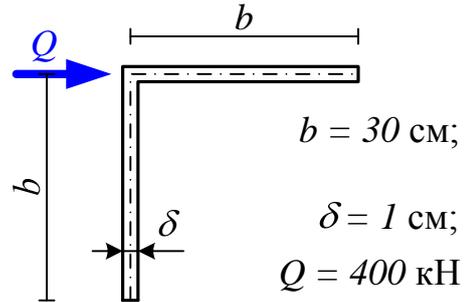


Рис. П.2.48

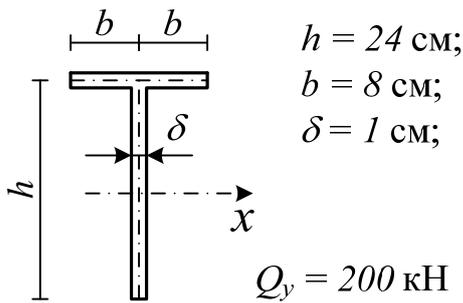


Рис. П.2.49

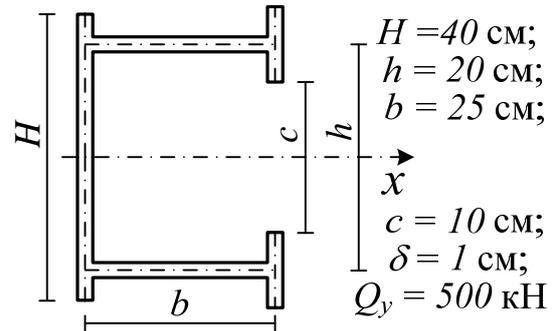


Рис. П.2.50

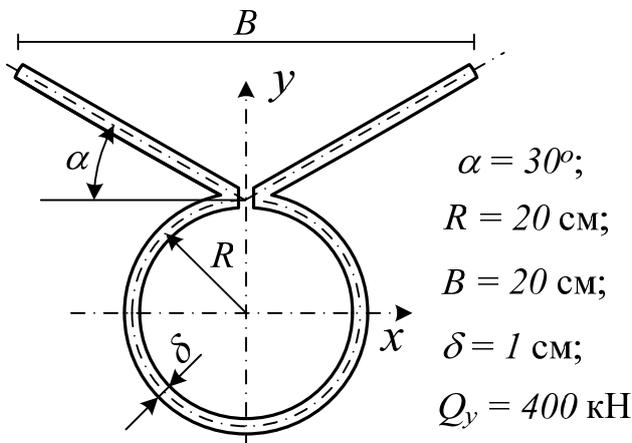


Рис. П.2.51

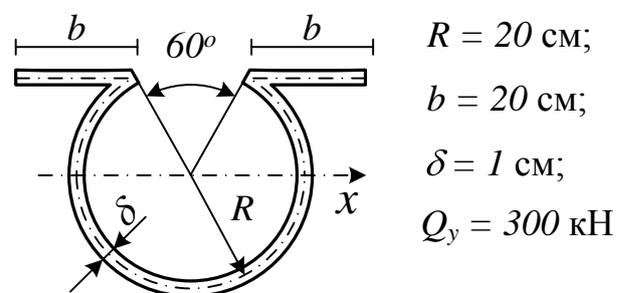


Рис. П.2.52

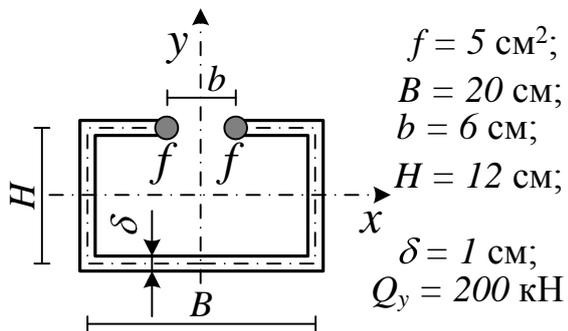


Рис. П.2.53

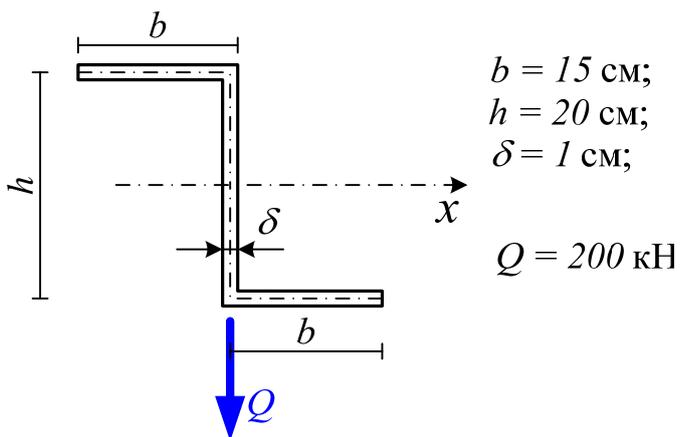


Рис. П.2.54

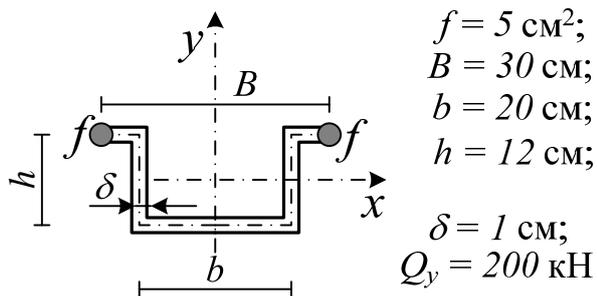


Рис. П.2.55

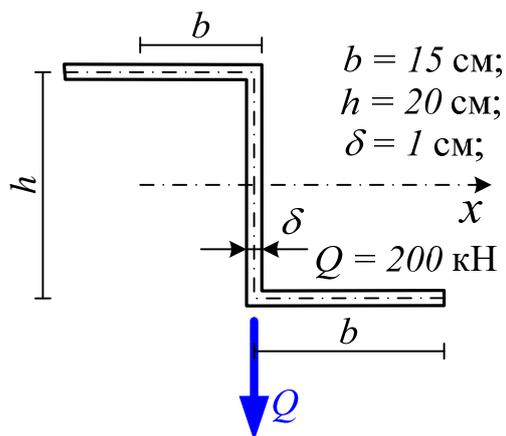


Рис. П.2.56

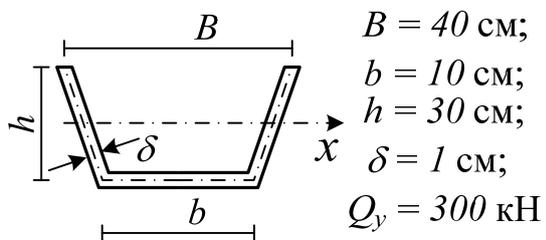


Рис. П.2.57

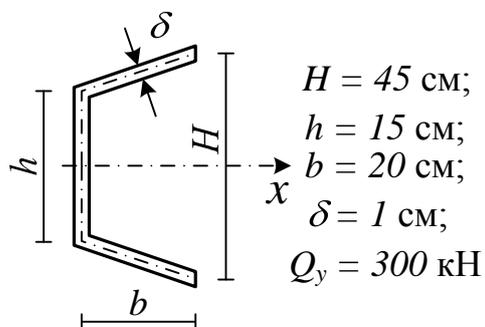


Рис. П.2.58

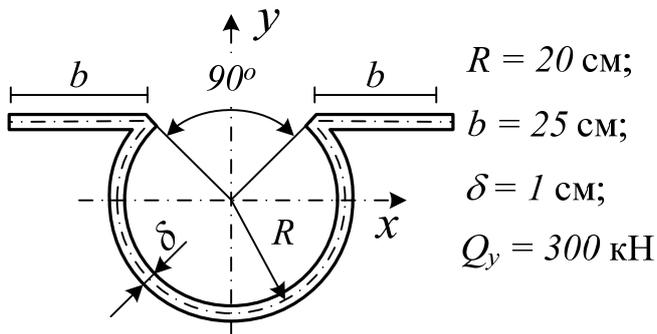


Рис. П.2.59

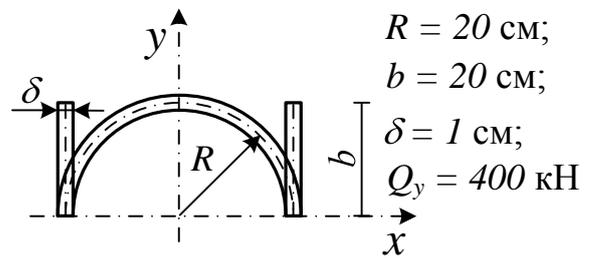


Рис. П.2.60

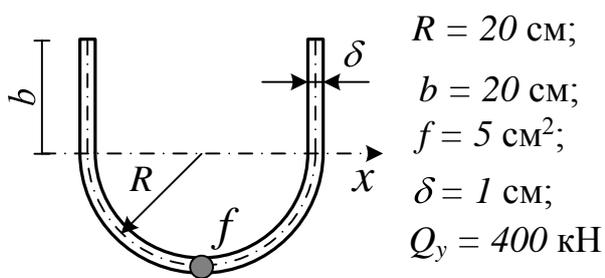


Рис. П.2.61

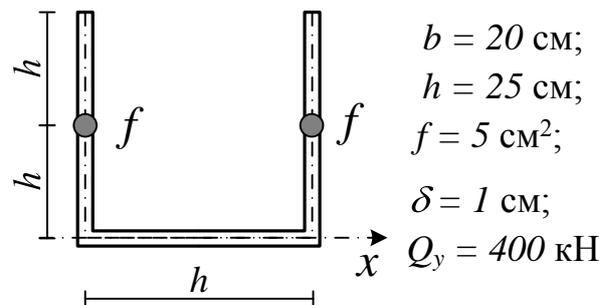


Рис. П.2.62

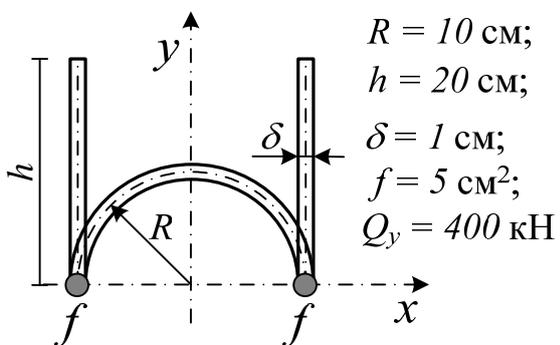


Рис. П.2.63

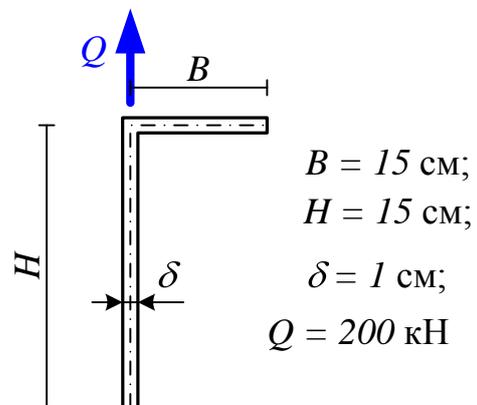


Рис. П.2.64

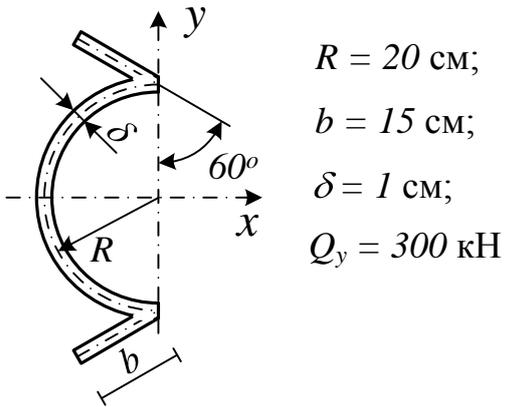


Рис. П.2.65

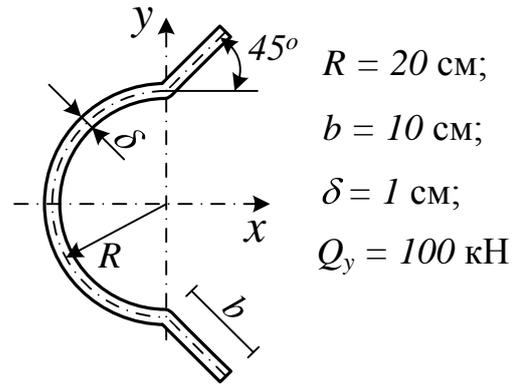


Рис. П.2.66

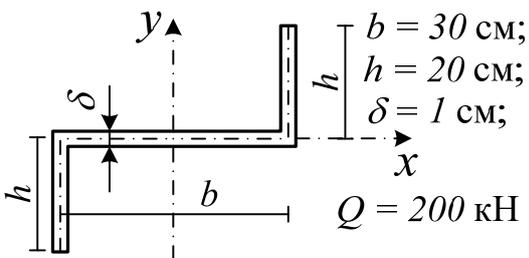


Рис. П.2.67

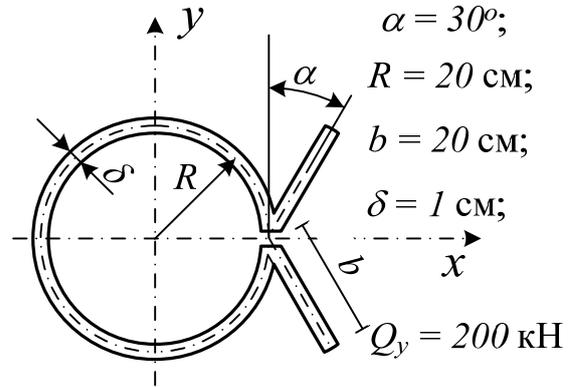


Рис. П.2.68

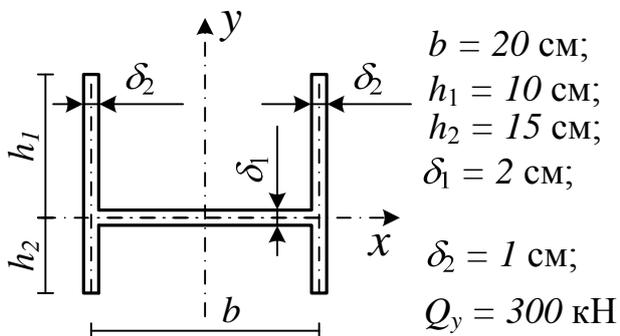


Рис. П.2.69

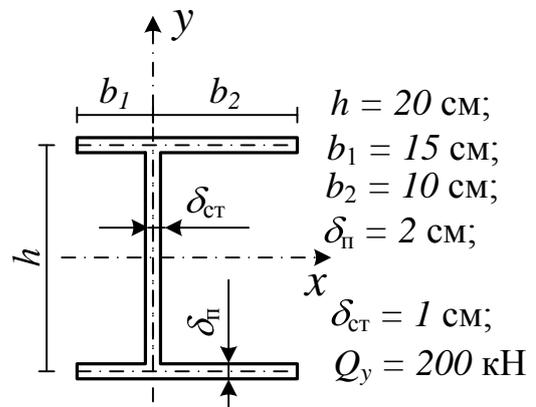


Рис. П.2.70

Пример решения задачи  
«Касательные напряжения сдвига в открытом профиле»

Рассматривается открытый простой профиль без разветвлений (рис. П.3.1), стенки которого работают на нормальные напряжения ( $\delta_\sigma \neq 0$ ). Профиль симметричен относительно оси  $x$ .

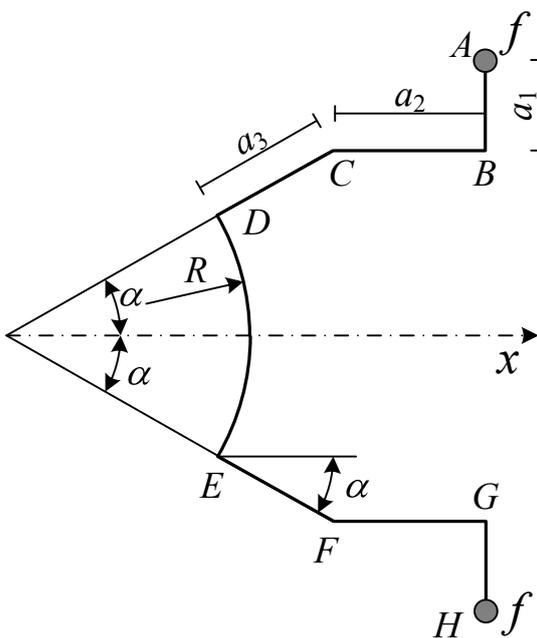


Рис. П.3.1. Профиль

Дано:

$$\delta = 1 \text{ см};$$

Толщина стенок  $\delta$  постоянна по всему контуру сечения. Приложена вверх сила  $Q_y = 200 \text{ кН}$ .

$$a_1 = 6 \text{ см};$$

$$a_2 = 10 \text{ см}; \quad a_3 = 8 \text{ см};$$

$$R = 16 \text{ см}; \quad \alpha = 30^\circ;$$

в концевых точках  $A$  и  $H$  расположены сосредоточенные площади  $f = 4 \text{ см}^2$ .

Найти: величину момента инерции сечения  $J_x$  и построить эпюру текущих статических моментов  $S_x(t)$ .

Решение

1. Главные оси

Ось  $x$  является осью симметрии, следовательно одной из двух взаимно перпендикулярных главных осей. Положение второй главной оси  $y$  в данной задаче определять не требуется. Координаты  $y_i$  любой точки на контурной линии можно вычислить по заданным геометрическим параметрам.

## 2. Момент инерции $J_x$

Теоретическое обоснование.

Формула для определения  $J_x$  в тонкостенном профиле имеет вид

$$J_x = \int_L y^2 dF \quad (\text{П.3.1})$$

или в развернутом виде

$$J_x = \sum_{i=1}^{n_y} \int_{l_i} y^2(t) \cdot \delta \cdot dt + \sum_{j=1}^{n_c} y^2 \cdot f_j, \quad (\text{П.3.2})$$

где  $n_y$  – количество участков, на которые разбивается контурная линия. Участком называется часть контура, в пределах которой функция  $y \cdot \delta = f(t)$  описывается одной формулой; в данном случае  $n_y=7$ ;

$n_c$  – количество сосредоточенных элементов в сечении (в данном случае  $n_c=2$ );

Дальнейшие вычисления реализуют формулу (2).

### 2.1. Сосредоточенный элемент в точке $A$

$$y_A = a_1 + a_3 \cdot \sin \alpha + R \cdot \sin \alpha = 6 + 8 \cdot 0,5 + 16 \cdot 0,5 = 18 \text{ см};$$

$$\Delta J_f = 4 \cdot 18^2 = 1296 \text{ см}^4.$$

Такой же вклад в момент инерции сечения дает элемент в точке  $H$ .

### 2.2. Участок $AB$

Момент инерции участка относительно собственной центральной оси, параллельной  $x$ , равен

$$J_{AB}^0 = \frac{\delta \cdot a_1^3}{12} = \frac{1 \cdot 6^3}{12} = 18 \text{ см}^4.$$

Координата центра участка  $AB$

$$y_{AB} = y_A - \frac{a_1}{2} = 18 - 3 = 15 \text{ см}.$$

Площадь участка

$$F_{AB} = \delta \cdot a_1 = 1 \cdot 6 = 6 \text{ см}^2.$$

Момент инерции участка  $AB$  относительно оси  $x$ :

$$\Delta J_{AB} = J_{AB}^0 + y_{AB}^2 \cdot F_{AB} = 18 + 15^2 \cdot 6 = 1368 \text{ см}^4.$$

Такой же вклад в момент сечения дает и участок  $GH$ .

### 2.3. Участок $BC$

Собственный момент инерции участка  $BC$  относительно горизонтальной оси, проходящей через центр участка, не учитывается:  $J_{BC}^0 \equiv 0$ . Остается только переносной момент.

Координата центра участка  $BC$

$$y_{BC} = y_A - a_1 = 18 - 6 = 12 \text{ см.}$$

Следовательно

$$\Delta J_{BC} = y_{BC}^2 \cdot F_{BC} = 12^2 \cdot 10 \cdot 1 = 1440 \text{ см}^4.$$

Такой же вклад в момент инерции сечения дает и участок  $FG$ .

### 2.4. Участок $CD$

Момент инерции участка относительно его собственной главной оси, перпендикулярной контуру:

$$J_{\eta}^0 = \frac{\delta \cdot a_3^3}{12} = \frac{1 \cdot 8^3}{12} \cong 42,67 \text{ см}^4.$$

Собственный момент инерции участка относительно горизонтальной оси определяем по формуле поворота осей:

$$J_{CD}^0 = J_{\eta}^0 \cdot \sin^2 \alpha \cong 10,67 \text{ см}^4.$$

Координата центра участка

$$y_{CD} = y_{BC} - \frac{a_3}{2} \cdot \sin \alpha = 12 - \frac{8}{2} \cdot 0,5 = 10 \text{ см};$$

Следовательно

$$\Delta J_{CD} = J_{CD}^0 + y_{CD}^2 \cdot F_{CD} = 10,67 + 10^2 \cdot 8 = 810,67 \text{ см}^4.$$

Такой же вклад в момент инерции сечения дает и участок  $EF$ .

## 2.5. Участок $DE$

Используется основная формула (П.3.2):

$$J_{DE} = \int_l y^2 \cdot \delta \cdot dt.$$

Поскольку контур участка является дугой окружности, вместо дуговой координаты  $t$  вводится угловая координата  $\psi$ , причем  $(-\alpha < \psi < \alpha)$ , то есть  $\psi$  отсчитывается от оси  $x$  вверх (против часовой стрелки). Теперь:

$$y = R \cdot \sin \psi ;$$

$$\alpha t = R \cdot d\psi ;$$

$$\begin{aligned} \Delta J_{DE} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cdot \sin^2 \psi \cdot \delta \cdot R \cdot d\psi = R^3 \cdot \delta \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \psi \cdot d\psi = R^3 \cdot \delta \cdot \left( \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) = \\ &= 16^3 \cdot 1 \cdot \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cong 371 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

## 2.6. Полный момент инерции сечения

$$\begin{aligned} J_x &= \Delta J_{DE} + 2 \cdot (\Delta J_f + \Delta J_{AB} + \Delta J_{BC} + \Delta J_{CD}) = \\ &= 371 + 2 \cdot (1296 + 1368 + 1440 + 810,67) \cong 10200 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

*В дальнейшем предполагается исследовать влияние сосредоточенных площадей на величины касательных напряжений в профиле. Для этого требуется величина момента инерции профиля без сосредоточенных площадей. Эта величина равняется*

$$J_{\text{Б.С.П.}} = J_x - 2\Delta J_f = 10200 - 2 \cdot 1296 = 7608 \text{ см}^4.$$

## 3. Эпюра текущих статических моментов

### 3.1. Теоретическое обоснование

Формула для текущего статического момента в контурной точке с координатой  $t$  имеет вид:

$$S_x(t) = \int_0^t y(\xi) \cdot dF(\xi). \quad (\text{П.3.3})$$

В отличие от формулы (П.3.1) в данном случае имеем переменный верхний предел интегрирования. В развернутом виде формула (П.3.3) также имеет переменные верхние пределы:

$$S_x(t) = \int_0^t y(\xi) \cdot \delta(\xi) \cdot d\xi + \sum_{j=1}^{m_c(t)} y_j \cdot f_j, \quad (\text{П.3.4})$$

здесь  $m_c(t)$  – количество сосредоточенных элементов, расположенных в интервале  $[0; t]$ .

$\xi$  – вспомогательная переменная интегрирования:  $(0 < \xi < t)$ .

Учитывая правило стыковки участков, эпюра текущего статического момента строится независимо на каждом из участков контурной линии по формуле:

$$S_i(t) = S_i^0 + \int_0^{t_i} y(\xi) \cdot \delta(\xi) \cdot d\xi,$$

где  $S_i^0$  – статический момент в начальной точке  $i$  – того участка контурной линии.

### 3.2. Начало отсчета дуговой координаты

В качестве начала отсчета дуговой координаты должна быть выбрана та из двух свободных точек контурной линии, которая находится в зоне положительных значений  $y$ . Поскольку в начальной точке рассматриваемого профиля (точка  $A$ ) находится сосредоточенная площадь  $f$ , а согласно правилу начального нуля текущий статический момент в начале отсчета должен быть равен нулю, вводим дополнительный фиктивный участок нулевой длины, так чтобы начало и конец этого участка (точка  $A_0$ ) располагались перед сосредоточенным элементом  $f$ . Ясно, что на этом участке статический момент равен нулю. Аналогичный фиктивный дополнительный участок создается (мысленно) и за сосредоточенным элементом  $f$  в точке  $H$ . Начальная точка этого участка (точка  $H_0$ ) расположена за сосредоточенным элементом  $f$ . Таким образом, дуговая координата  $t$  обходит точки контурной линии профиля в следующей последовательности:  $A_0 ABCDEFGHH_0$ .

### 3.3. Участок $AB$

а) Начальное значение  $S_1^0$  на участке  $AB$  определяется по правилу стыковки участков, которое гласит: начальное значение текущего статического момента на данном участке равно конечному значению текущего статиче-

ского момента на предыдущем участке плюс статический момент сосредоточенной площади на границе этих участков. В данном случае

$$S_1^0 = y_A \cdot f = 18 \cdot 4 = 72 \text{ см}^3.$$

Использование правила стыковки участков позволяет на каждом новом участке вводить новую дуговую координату с начальным значением  $t = 0$  в начальной точке рассматриваемого участка. Эта возможность используется в дальнейшем для всех участков контура.

б) Параметрическая зависимость

$$y(\xi) \cdot \delta(\xi) = (y_A - \xi) \cdot \delta.$$

в) Интегрирование приращения

$$\Delta S_1(t) = \int_0^t (y_A - \xi) \cdot \delta \cdot d\xi = 18t - \frac{t^2}{2}.$$

г) анализ функции

$$\frac{d}{dt}(\Delta S_1) = 18 - t.$$

На участке  $AB$  координата  $t$  изменяется в пределах  $[0; 6]$ . Следовательно, экстремум отсутствует, производная всюду положительна, т. е. функция монотонно возрастает.

Вторая производная

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Delta S_1) = -1,$$

т. е. всюду отрицательна. Следовательно, перегибов нет и функция всюду выпуклая.

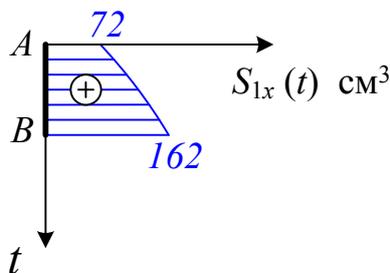


Рис. П.3.2. Эпюра  $S_{1x}(t)$

При построении графика функции  $S_x(t)$  в качестве нулевой линии будем использовать контурную линию профиля. Положительные значения функции условимся откладывать влево, если смотреть в направлении положительных  $t$  (правило "левой руки"). В этом случае выпуклость означает, что все точки кривой лежат левее касательной к ней в любой точке (рис. П.3.2).

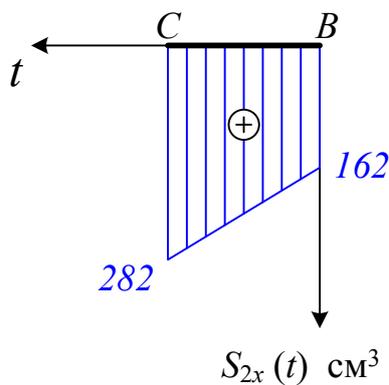
д) конечное значение приращения ( $t = 6$  см)

$$\Delta S_1^* = 18 \cdot 6 - \frac{6^2}{2} = 90 \text{ см}^3.$$

Конечное значение функции  $S_1^*$  на первом участке:

$$S_1^* = S_1^0 + \Delta S_1^* = 72 + 90 = 162 \text{ см}^3.$$

### 3.4. Участок BC (рис. П.3.3)



а) начальное значение  $S_2^0 = S_1^* = 162 \text{ см}^3$ ;

б) параметрическая зависимость

$$y_2(\xi) = y_B = +12 \text{ см} = \text{const};$$

в) интеграл приращения

$$\Delta S_2(t) = \int_0^t 12 \cdot 1 \cdot d\xi = 12 \cdot t;$$

г) анализ функции – линейная;

д) конечное значение приращения ( $t = 10$  см)

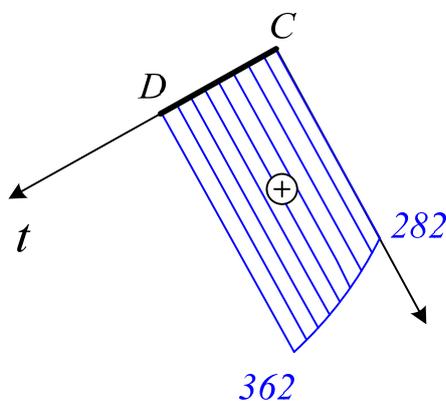
Рис. П.3.3. Эпюра  $S_{2x}(t)$

$$\Delta S_2^* = 12 \cdot 10 = 120 \text{ см}^2;$$

Текущий статический момент в конце участка

$$S_2^* = S_2^0 + \Delta S_2^* = 162 + 120 = 282 \text{ см}^3.$$

### 3.5. Участок CD (рис. П.3.4)



а) начальное значение  $S_3^0 = S_2^* = 282 \text{ см}^3$ ;

б) параметрическая зависимость

$$y_3(\xi) \cdot \delta(\xi) = (y_C - \xi \cdot \sin \alpha) \cdot \delta = 12 - \frac{1}{2} \xi \text{ см};$$

в) интеграл приращения

$$\Delta S_3(t) = \int_0^t \left( 12 - \frac{\xi}{2} \right) \cdot d\xi = 12 \cdot t - \frac{t^2}{4};$$

Рис. П.3.4. Эпюра  $S_{3x}(t)$

г) анализ функции – первая производная  $f' = 12 - \frac{t}{2}$ , при  $0 < t < 8$  производная всюду положительна, то есть функция монотонно возрастает; экстремум отсутствует. Вторая производная  $f'' = -\frac{1}{2}$  всюду отрицательна. Значит, перегибов нет, функция выпуклая вправо и вниз (рис. П.3.4);  
 д) конечное значение: приращения

$$\Delta S_3^* = 12 \cdot 8 - \frac{8^2}{4} = 80 \text{ см}^3.$$

Текущий статический момент в конце участка

$$S_3^* = 282 + 80 = 362 \text{ см}^3.$$

### 3.6. Участок DE (рис. П.3.5)

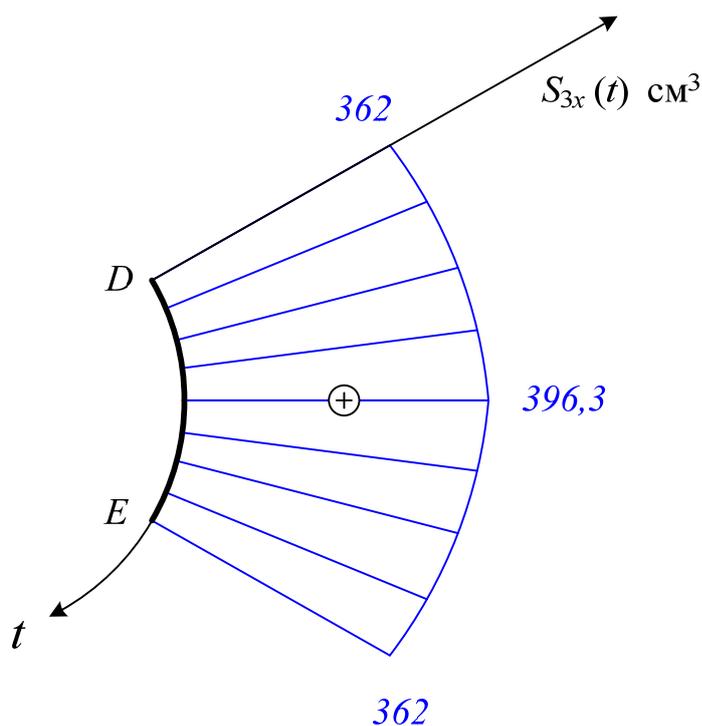


Рис. П.3.5. Эпюра  $S_{4x}(t)$

а) начальное значение

$$S_4^0 = S_3^* = 362 \text{ см}^3;$$

б) параметрическая зависимость. Поскольку участок DE является дугой окружности, неизбежно появятся тригонометрические функции, поэтому следует ввести условие координаты.

Обозначим:

$$t = R \cdot \beta, \text{ где } 0 < \beta < 2\alpha.$$

$$\psi = R \cdot \varphi, \text{ где } 0 < \varphi < \beta.$$

Тогда

$$y_4(\xi) = y_4(\varphi) = R \cdot \sin(\alpha - \varphi)$$

$$d\xi = R \cdot d\varphi;$$

в) интеграл приращения

$$\Delta S_4(\beta) = \int_0^\beta R \cdot \sin(\alpha - \varphi) \cdot \delta \cdot R \cdot d\varphi;$$

Используя стандартные тригонометрические соотношения и таблицу интегралов, находим

$$\Delta S_4(\beta) = R^2 \cdot \delta \cdot [\cos(\beta - \alpha) - \cos \alpha] = R^2 \cdot \delta \cdot f(\beta);$$

г) анализ функции.

Первая производная  $f'(\beta) = \sin(\alpha - \beta)$  равна нулю при  $\beta = \alpha$ . Здесь имеет место экстремум.

Вторая производная  $f''(\beta) = -\cos(\alpha - \beta)$  отрицательна во всем диапазоне возможных значений  $\beta: [-\alpha; +\alpha]$ . Следовательно, экстремум является максимумом. Числовое значение максимума приращения

$$\Delta S_{4\max} = R^2 \cdot \delta \cdot (1 - \cos \alpha) = 16^2 \cdot 1 \cdot 0,1340 \cong 34,3 \text{ см}^3$$

и соответствующее значение текущего статического момента

$$S_{4\max} = S_4^0 + \Delta S_{4\max} = 362 + 34,3 = 396,3 \text{ см}^3;$$

д) конечное значение приращения ( $\beta = 2\alpha$ )

$$\Delta S_4^* = R^2 \cdot \delta \cdot [\cos(2\alpha - \alpha) - \cos \alpha] = 0.$$

Следовательно

$$S_4^* = S_4^0 = 362 \text{ см}^3.$$

### 3.7. Участок EF (рис. П.3.6)

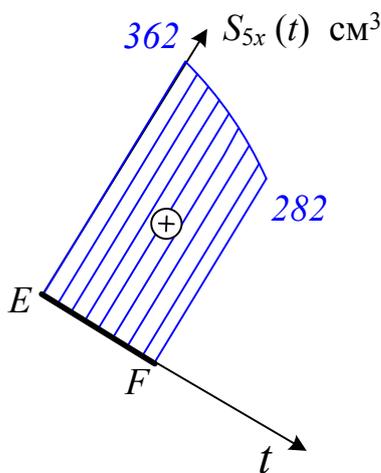


Рис. П.3.6. Эпюра  $S_{5x}(t)$

а) начальное значение

$$S_5^0 = S_4^* = 362 \text{ см}^3;$$

б) параметрическая зависимость

$$y_2(\xi) = y_E - \xi \cdot \sin \alpha = -8 - \frac{1}{2} \xi;$$

в) интегрирование

$$\Delta S_5(t) = -\int_0^t \left( 8 + \frac{1}{2} \xi \right) \cdot \delta \cdot d\xi = -8 \cdot t - \frac{t^2}{4};$$

г) анализ функции

$$\frac{d}{dt}(\Delta S_5) = -8 - \frac{t}{2}.$$

В диапазоне ( $0 < t < 8$ ) первая производная всюду отрицательна, следовательно, экстремума нет, функция монотонно убывает

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Delta S_5) = -\frac{1}{2},$$

перегибов нет, функция выпуклая.

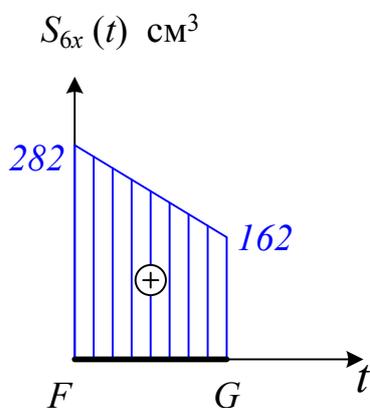
д) конечные значения: приращения ( $t = 10$  см)

$$\Delta S_5^* = -8 \cdot 8 - \frac{8^2}{4} = -80 \text{ см}^3$$

Текущий статический момент в конце участка

$$S_5^* = S_5^0 + \Delta S_5^* = 362 - 80 = 282 \text{ см}^3.$$

### 3.8. Участок $FG$ (рис. П.3.7)



а) начальное значение  $S_6^0 = S_5^* = +282 \text{ см}^3$ ;

б) параметрическая зависимость

$$y_6(\xi) = y_F = -12 \text{ см};$$

в) интегрирование приращения

$$\Delta S_6(t) = \int_0^t (-12) \cdot \delta \cdot d\xi = -12 \cdot t;$$

г) анализ функции – линейная;

д) конечное значение приращения ( $t = 10$  см)

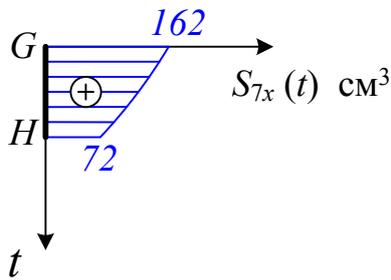
$$\Delta S_6^* = -120 \text{ см}^3$$

Текущий статический момент в конце участка

$$S_6^* = S_6^0 + \Delta S_6^* = 282 - 120 = +162 \text{ см}^3.$$

Рис. П.3.7. Эпюра  $S_{6x}(t)$

### 3.9. Участок GH (рис. П.3.8)



а) начальное значение  $S_7^0 = S_6^* = +162 \text{ см}^3$ ;

б) параметрическая зависимость

$$y_7(\xi) = y_G - \xi = -12 - \xi.$$

в) интеграл приращения

$$\Delta S_7(t) = \int_0^t (-12 - \xi) \cdot 1 \cdot d\xi = -12 \cdot t - \frac{t^2}{2};$$

Рис. П.3.8. Эпюра  $S_{7x}(t)$

г) анализ функции

Первая производная функция  $\frac{d}{dt}(\Delta S_7) = -12 - t$  отрицательна на всем участке  $GH$ . Экстремум отсутствует, функция монотонно убывает.

Вторая производная  $\frac{d^2}{dt^2}(\Delta S_7) = -1$  всюду отрицательна:

Перегибов нет, функция выпуклая.

д) конечное значение приращения ( $t = 6$ ) текущего статического момента

$$\Delta S_7^* = -12 \cdot 6 - \frac{36}{2} = -90.$$

Текущий статический момент в конце участка

$$S_7^* = S_7^0 + \Delta S_7^* = 162 - 90 = 72 \text{ см}^3.$$

### 3.10. Дополнительный участок HH<sub>0</sub>

Начальное значение  $S_8^0 = S_7^* + y_H \cdot f = 72 + (-18) \cdot 4 = 0$ .

Поскольку дополнительный участок не имеет ни длины, ни толщины, приращение отсутствует. Таким образом, получено нулевое значение в конечной точке контурной линии, что соответствует правилу "конечного нуля".

Сводная эпюра текущих статических моментов показана на рис. П.3.9.

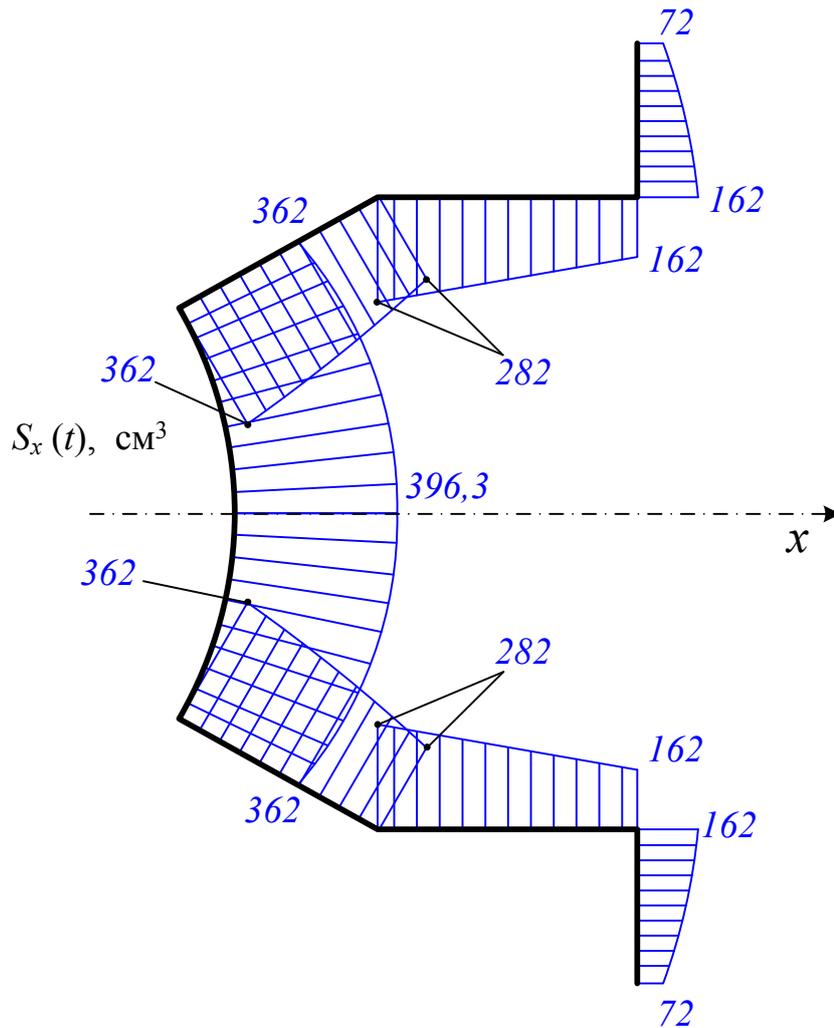


Рис. П.3.9. Эпюра  $S_x(t)$

Видно, что эпюра текущих статических моментов получилась симметричной относительно оси симметрии сечения. Этот факт соответствует общей теореме о симметрии: если сечение симметрично относительно оси  $x$ , то эпюра текущих статических моментов симметрична относительно оси  $x$ ; если сечение симметрично относительно оси  $y$ , то эпюра текущих статических моментов обычно симметрична относительно оси  $y$ .

Наибольшее значение функции  $S_x(t)$  (рис. П.3.9), а, следовательно, касательного напряжения достигаются в точке пересечения контура с осью симметрии.

#### 4. Исследование влияния сосредоточенных элементов

Для дальнейшего изложения представляет интерес значение  $S_{x\max}$  при отсутствии сосредоточенных элементов в точках  $A$  и  $H$ . Это значение равно

$$S_{x \max \text{ Б.С.П.}} = S_{x \max} - y_H \cdot f = 396,3 - 72 = 324,3 \text{ см}^3.$$

Отношение  $(S_{x \max} / J_x)$  для сечения с элементами  $f$  равно  $\frac{396,3}{10200} = 0,03885$ , а для сечения без элементов  $f - \frac{324,3}{7608} = 0,04263$ .

Таким образом, в данном примере введение сосредоточенных элементов, суммарная площадь которых около 12% от площади бесстрингерного профиля, снижает наибольшее касательное напряжение на 9%.

## 5. Определение направлений касательных сил и их величины в характерных точках

Общая формула для определения потоков касательных сил  $q$  – формула (2.2). Характерными точками в данном примере являются точки отмеченные на рис. П.3.1.

Точка  $A$  – крайняя верхняя точка:

$$q(t) = -\frac{Q_y}{J_x} \cdot S_x^A = -\frac{200}{10200} \cdot 72 = -0,1961 \cdot 72 = -1,41 \frac{\text{кН}}{\text{см}}.$$

Коэффициент  $\frac{Q_y}{J_x}$  является общим для всех точек сечения.

$$\text{Точка } B: q(t) = -0,1961 \cdot S_x^B = -0,1961 \cdot 162 = -3,18 \frac{\text{кН}}{\text{см}}.$$

$$\text{Точка } C: q(t) = -0,1961 \cdot S_x^C = -0,1961 \cdot 282 = -5,53 \frac{\text{кН}}{\text{см}}.$$

$$\text{Точка } D: q(t) = -0,1961 \cdot S_x^D = -0,1961 \cdot 362 = -7,10 \frac{\text{кН}}{\text{см}}.$$

$$\text{Точка } E: q(t) = -0,1961 \cdot S_x^E = -0,1961 \cdot 396,3 = -7,77 \frac{\text{кН}}{\text{см}}.$$

Точка  $E$  лежит на оси  $x$ . Эта ось является осью симметрии для сечения и эпюры  $q(t)$ .

Во всех точках контура  $q(t)$  получились одного знака – отрицательные; значит, во всех точках контура сохраняется одно и то же направление потоков касательных сил: по часовой стрелке.

Эпюра  $q(t)$  представлены на рис. П.3.10.

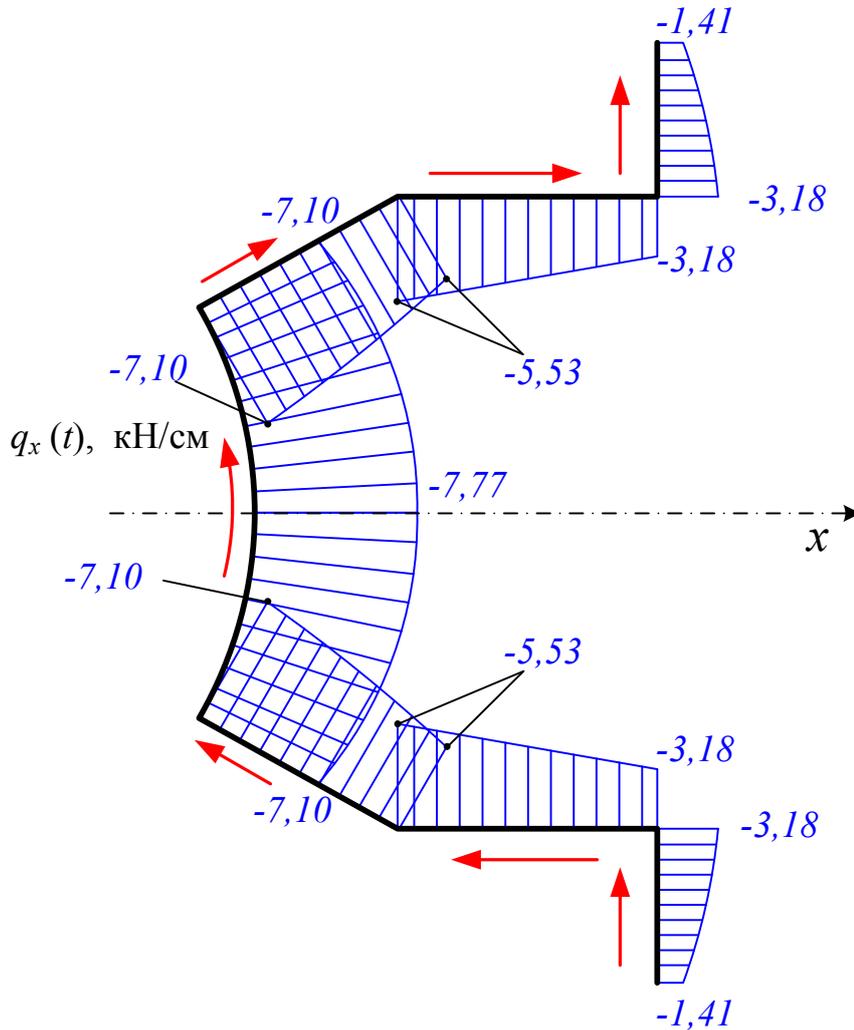


Рис. П.3.10. Эпюра  $q(t)$

## 6. Определение величины касательных напряжений в характерных точках

Общая формула для касательных напряжений – формула (2.1). Направление  $\tau(t)$  совпадает с направлением  $q(t)$ . Характерные точки остаются прежними, поскольку толщина постоянна по профилю.

Вычислим величины касательных напряжений в этих точках.

$$\tau_A = \frac{q_A}{\delta} = -\frac{1,41 \cdot 10^5}{0,01} = -14,1 \text{ МПа}; \quad \tau_B = \frac{q_B}{\delta} = -\frac{3,18 \cdot 10^5}{0,01} = -31,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_C = \frac{q_C}{\delta} = -\frac{5,53 \cdot 10^5}{0,01} = -55,3 \text{ МПа}; \quad \tau_D = \frac{q_D}{\delta} = -\frac{7,10 \cdot 10^5}{0,01} = -71,0 \text{ МПа};$$

$$\tau_E = \frac{q_E}{\delta} = -\frac{7,77 \cdot 10^5}{0,01} = -77,7 \text{ МПа}.$$

Точка  $E$  лежит на оси  $x$ . Эта ось является осью симметрии для сечения и эпюры  $\tau(t)$ .

Эпюра  $\tau(t)$  представлены на рис. П.3.11.

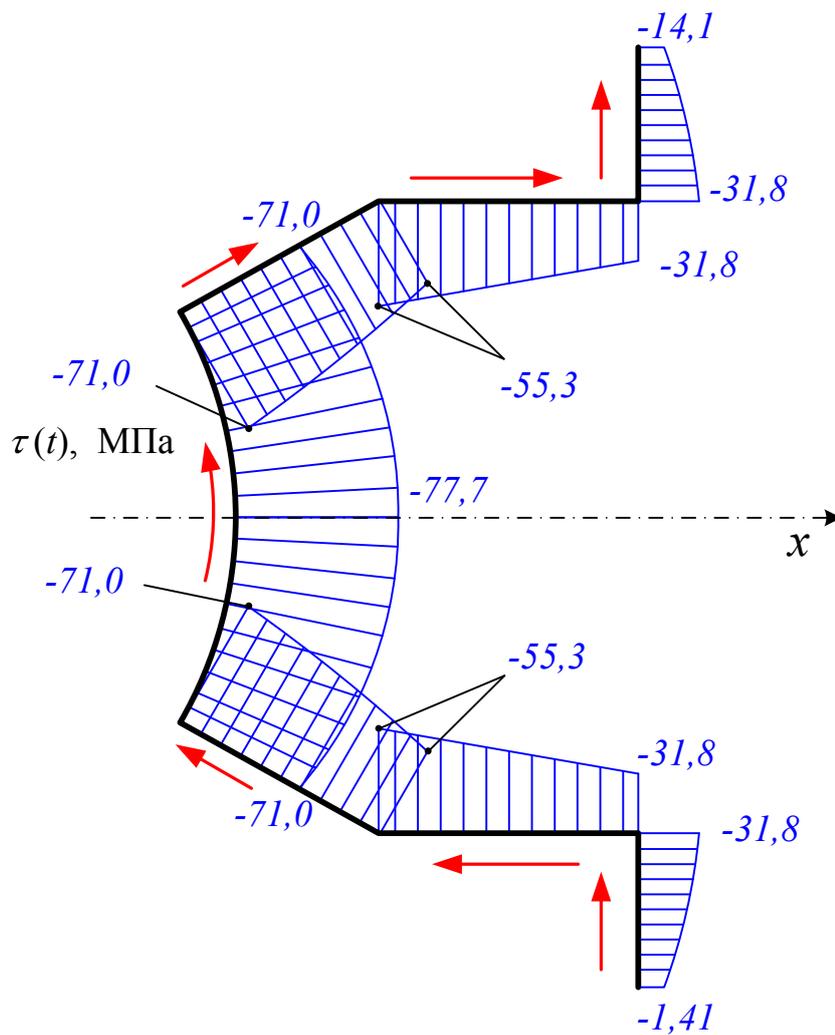


Рис. П.3.11. Эпюра  $\tau(t)$

Варианты исходных данных к задаче  
«Центр изгиба открытого профиля»

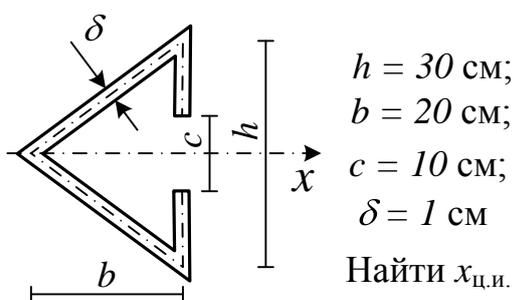


Рис. П.4.1

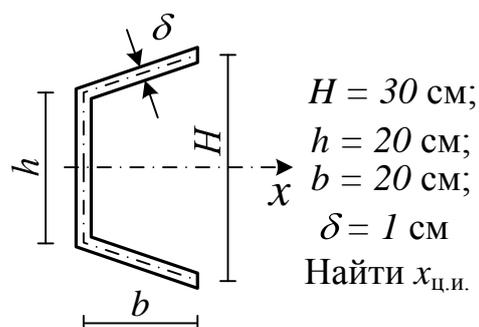


Рис. П.4.2

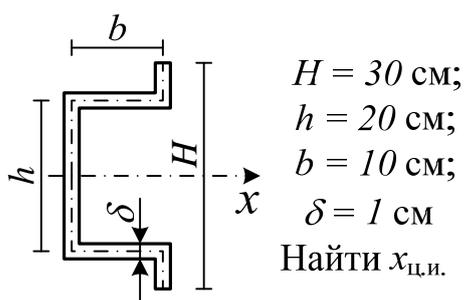


Рис. П.4.3

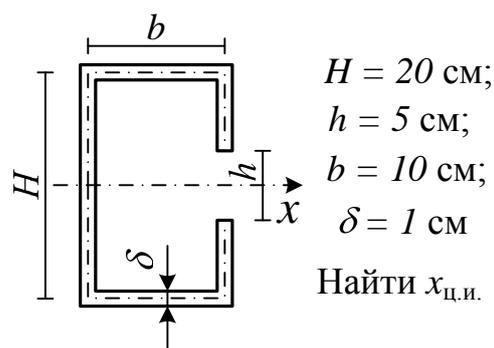


Рис. П.4.4

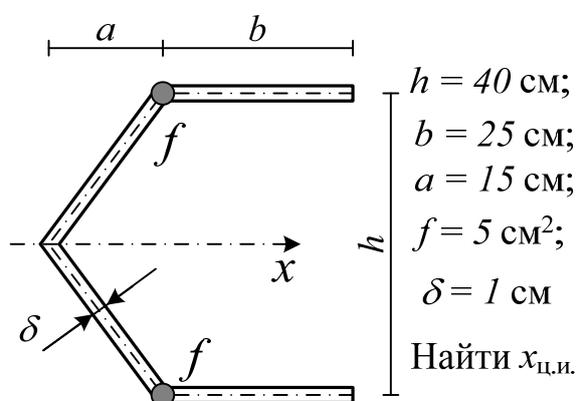


Рис. П.4.5

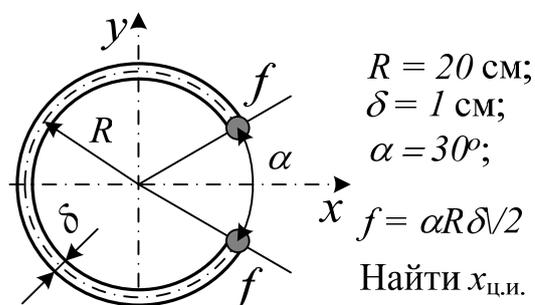


Рис. П.4.6

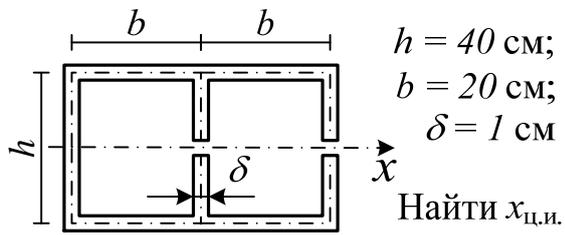


Рис. П.4.7

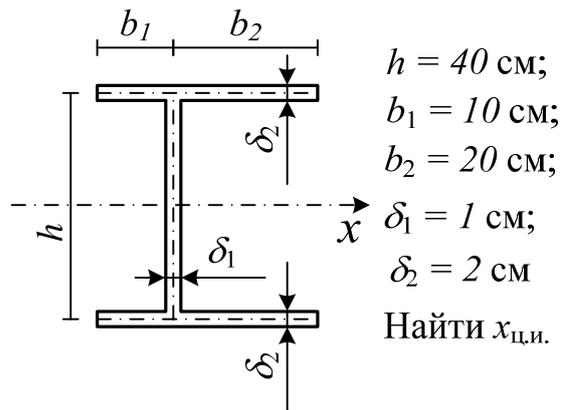


Рис. П.4.8

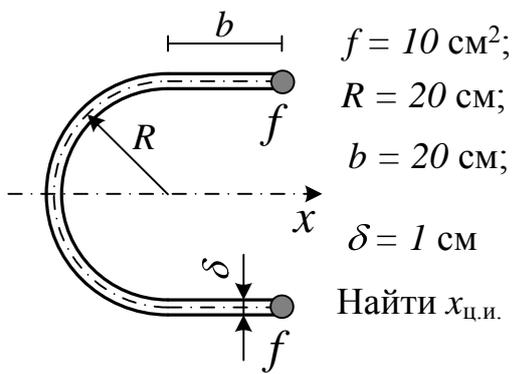


Рис. П.4.9

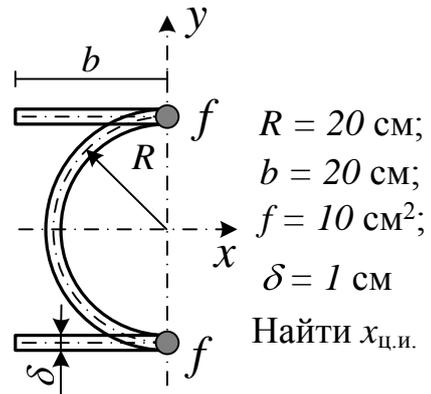


Рис. П.4.10

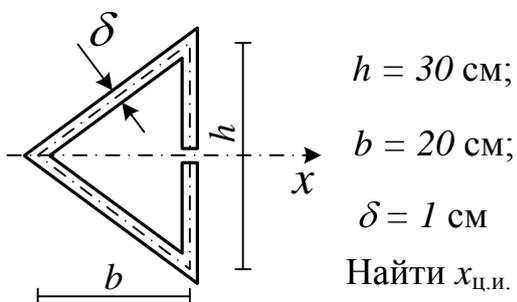


Рис. П.4.11

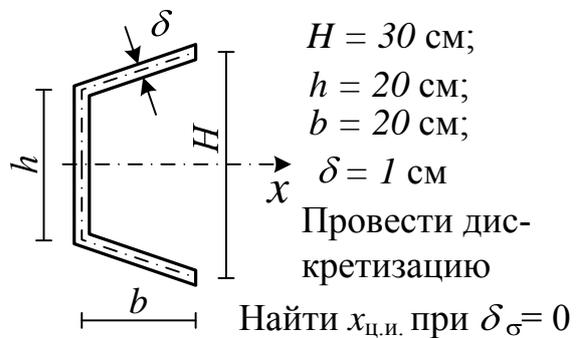


Рис. П.4.12

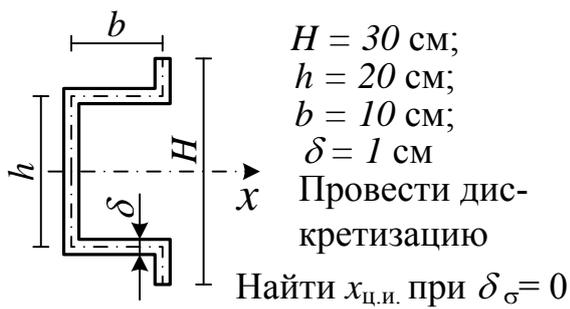


Рис. П.4.13

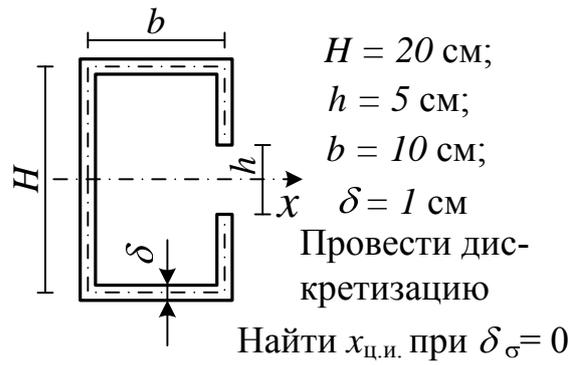


Рис. П.4.14

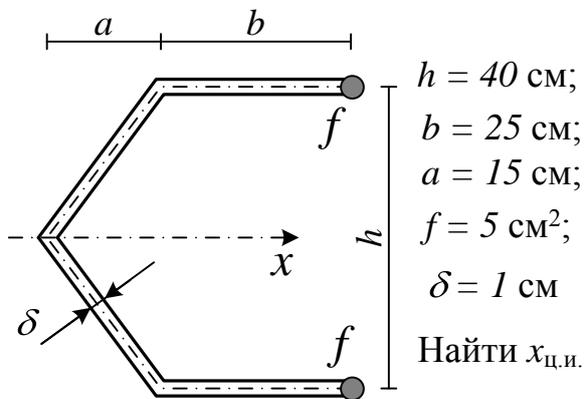


Рис. П.4.15

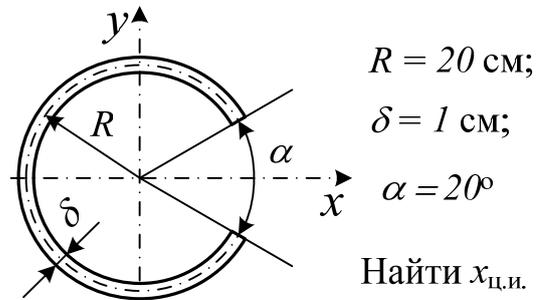


Рис. П.4.16

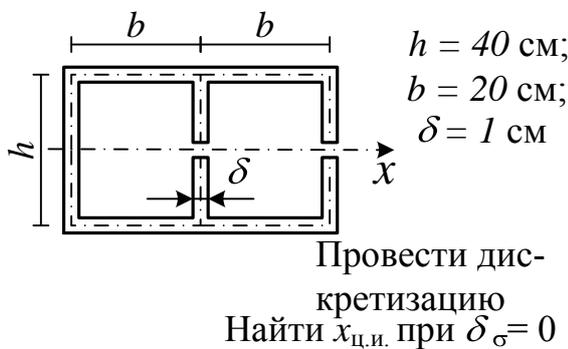


Рис. П.4.17

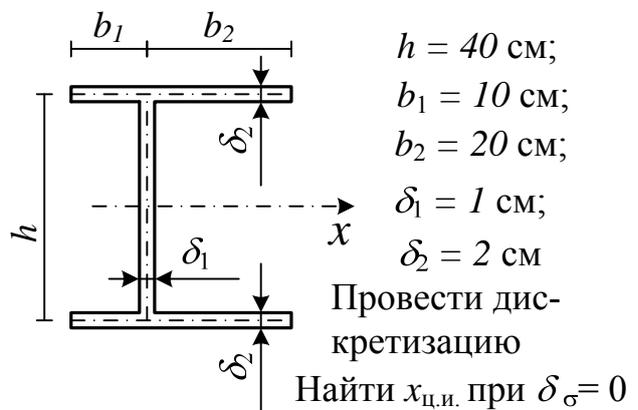


Рис. П.4.18

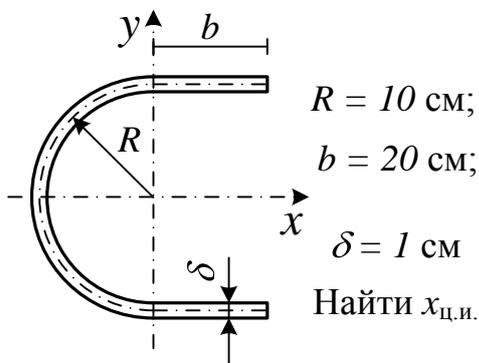


Рис. П.4.19

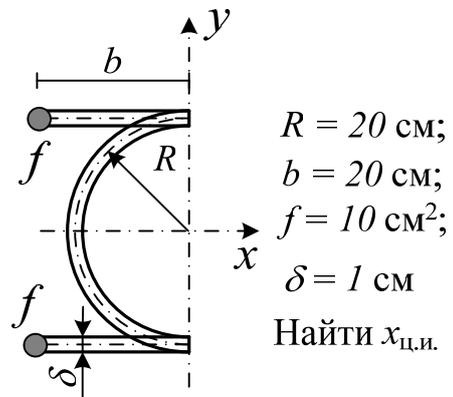


Рис. П.4.20

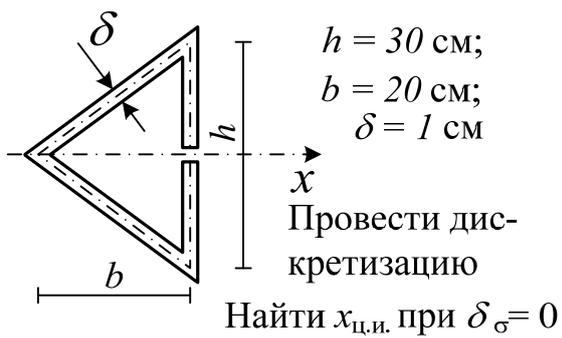


Рис. П.4.21

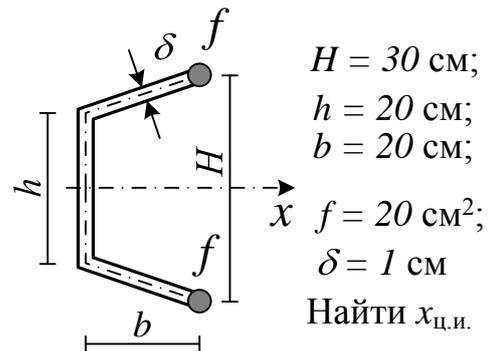


Рис. П.4.22

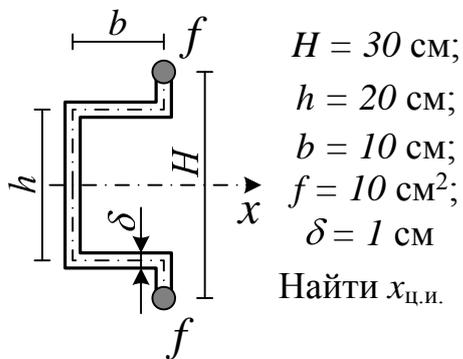


Рис. П.4.23

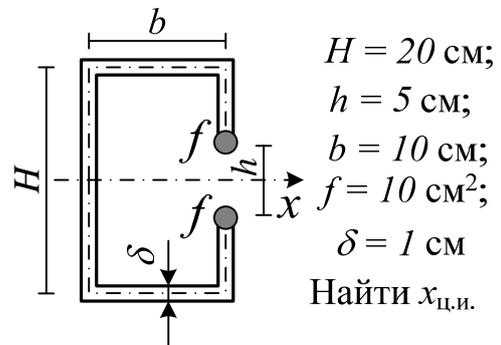


Рис. П.4.24

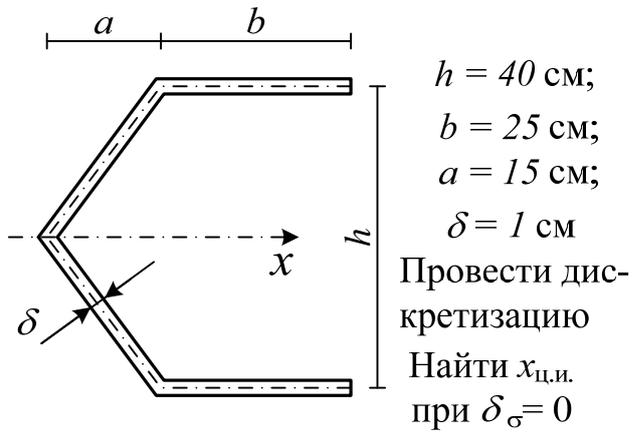


Рис. П.4.25

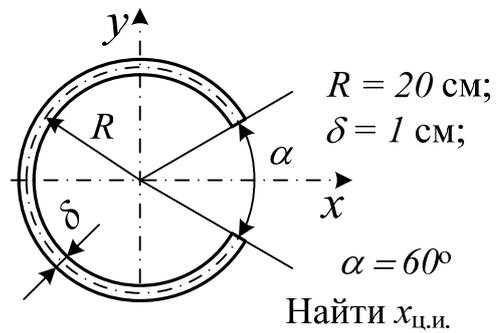


Рис. П.4.26

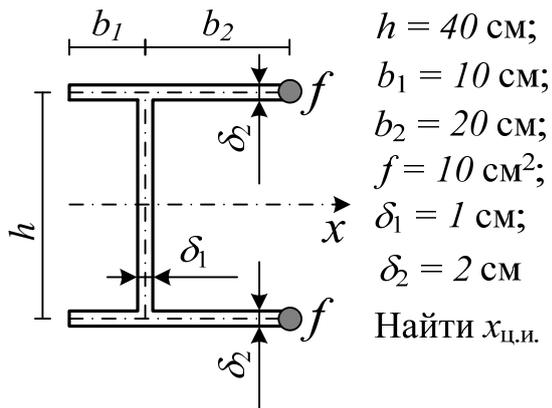


Рис. П.4.27

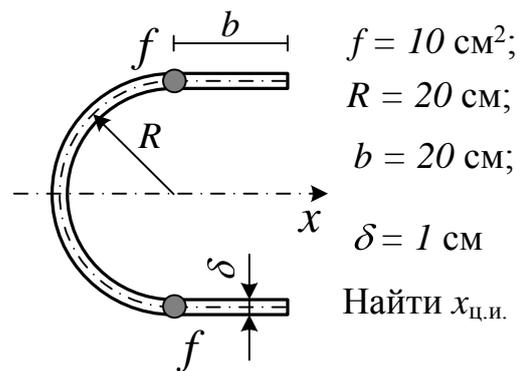


Рис. П.4.28

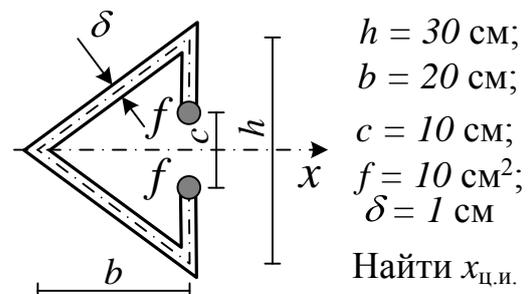
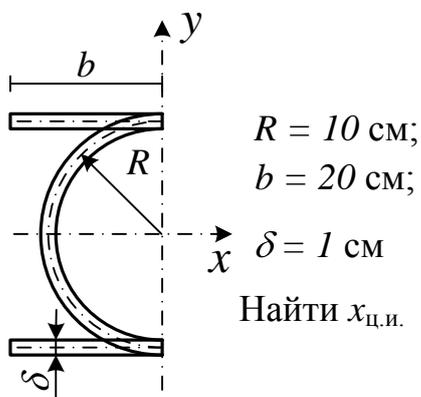


Рис. П.4.29

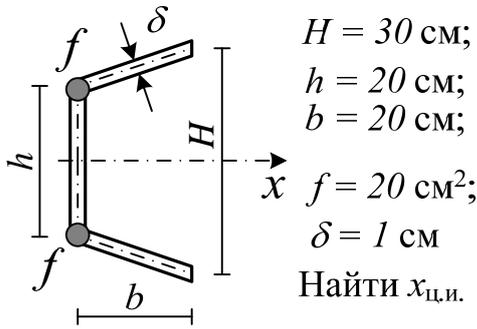


Рис. П.4.31

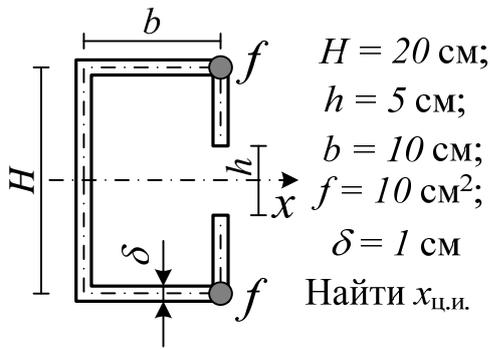


Рис. П.4.33

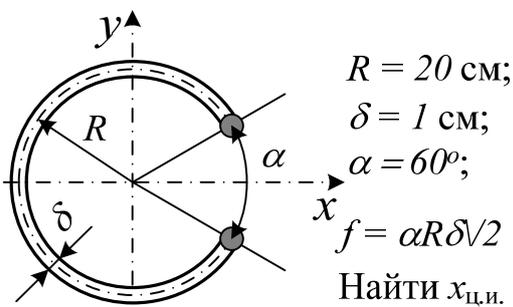


Рис. П.4.35

Рис. П.4.30

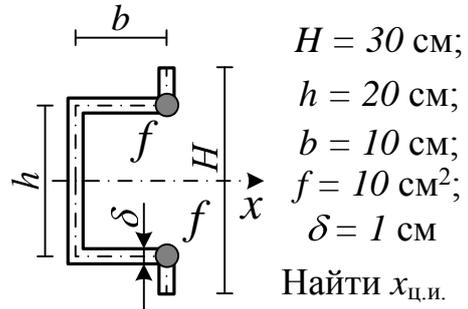


Рис. П.4.32

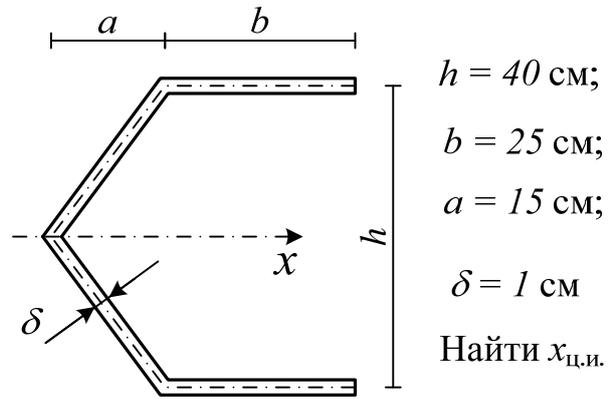
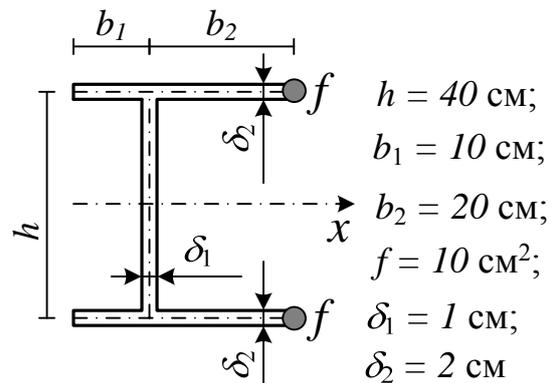


Рис. П.4.34



Провести дискретизацию  
Найти  $x_{ц.и.}$  при  $\delta_\sigma = 0$

Рис. П.4.36

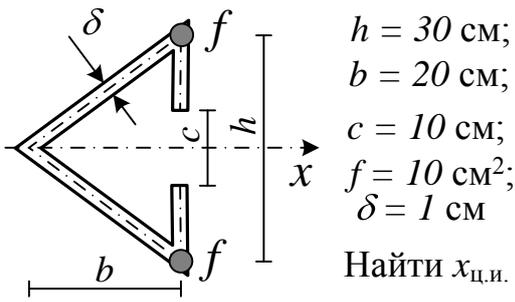


Рис. П.4.37

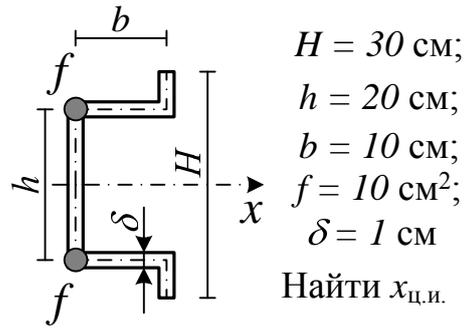


Рис. П.4.38

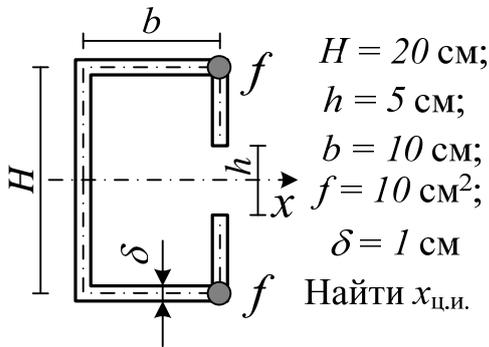


Рис. П.4.39

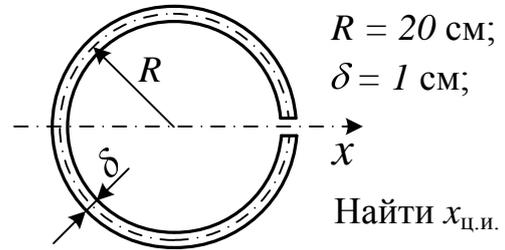
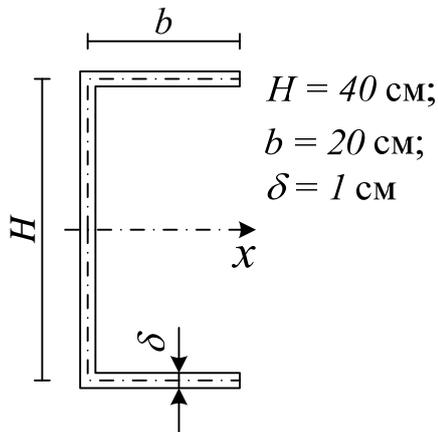


Рис. П.4.40



1. Найти  $x_{ц.и.}$  при  $\delta_{\sigma} \neq 0$ .
2. Провести дискретизацию и найти  $x_{ц.и.}$  при  $\delta_{\sigma} = 0$ .

Рис. П.4.41

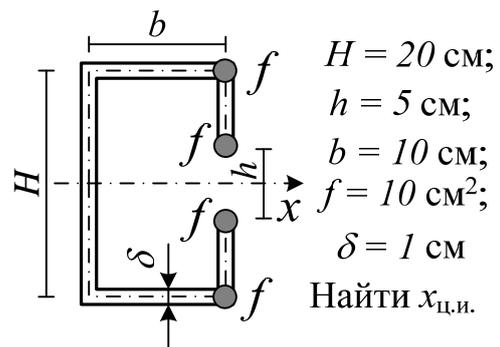


Рис. П.4.42

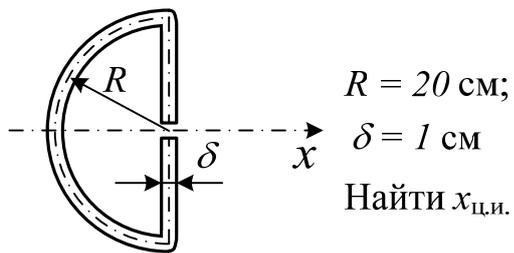


Рис. П.4.43

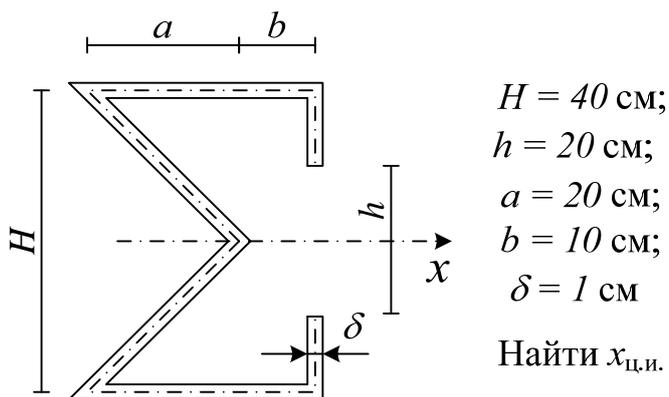


Рис. П.4.44

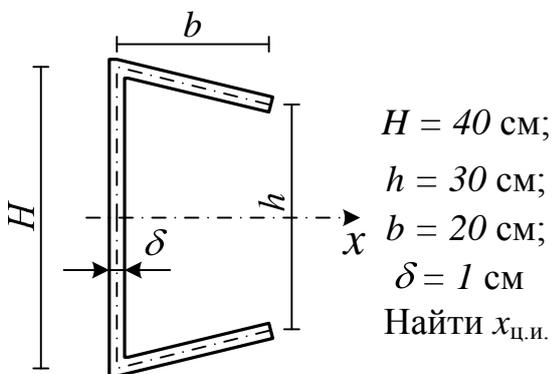


Рис. П.4.45

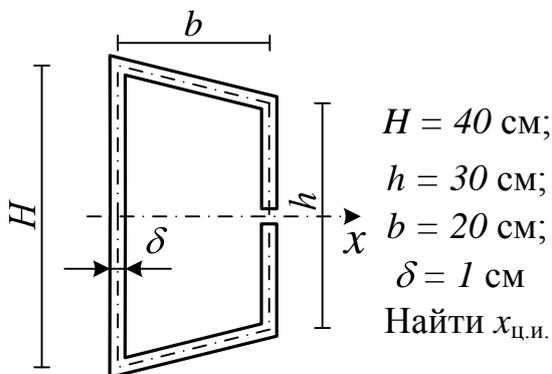


Рис. П.4.46

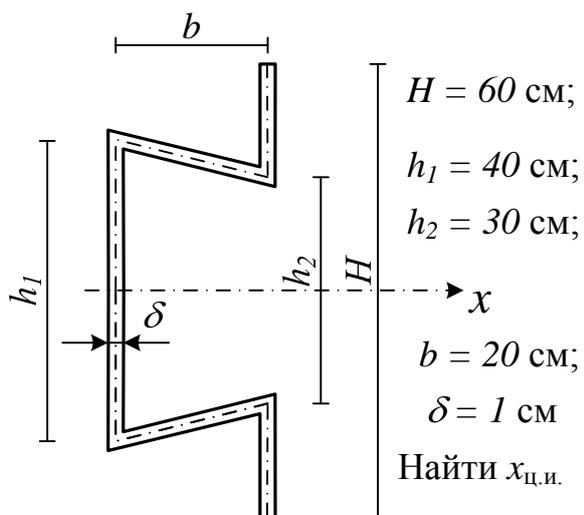


Рис. П.4.47

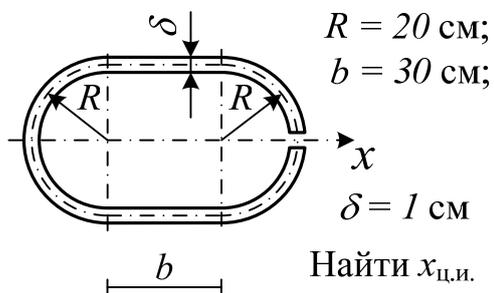


Рис. П.4.48

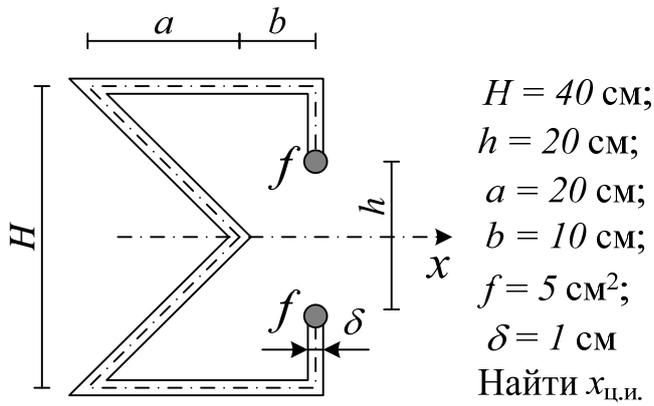


Рис. П.4.49

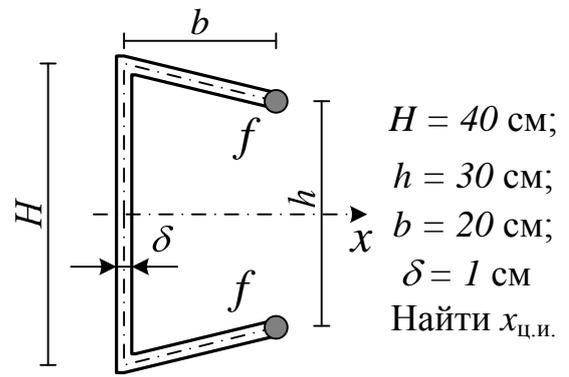


Рис. П.4.50

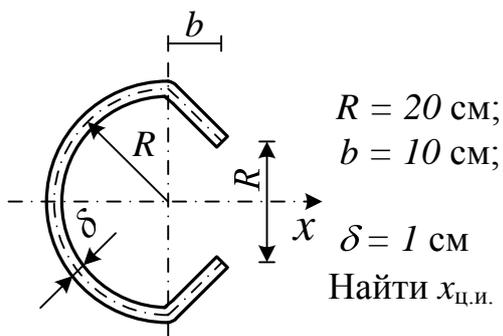


Рис. П.4.51

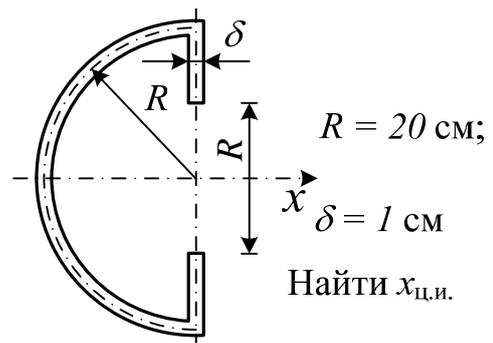


Рис. П.4.52

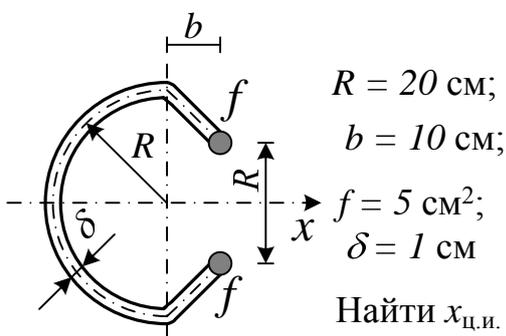


Рис. П.4.53

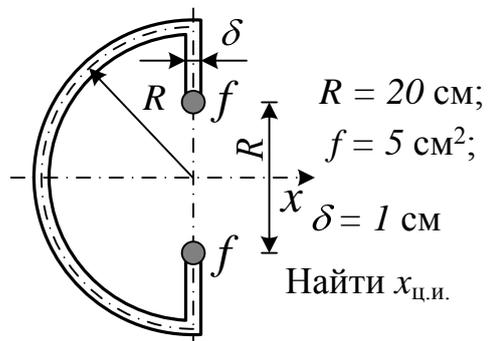


Рис. П.4.54

Варианты исходных данных к задаче  
«Касательные напряжения в замкнутом профиле»

Таблица П.5.1

Значения варьируемых параметров\*

Позиция цифры в номере варианта	Параметр, определяемый данной цифрой	Числовые значения параметра определяются цифрой на данной позиции номера варианта		
		1	2	3
Первая цифра	$b$ (см)	40	60	80
Вторая цифра	$f_1$ (см <sup>2</sup> )	4	6	8
Третья цифра	$f_2$ (см <sup>2</sup> )	5	7	9

\* Исходные данные следует выбирать так: если, например, вариант 231, то на первой позиции, определяющей параметр  $b$ , стоит цифра 2. Следовательно, величину  $b$  выбираем из столбца под цифрой 2:  $b = 60$  см.

На второй позиции, определяющей параметр  $f_1$ , стоит цифра 3. Следовательно, величину  $f_1$  выбираем из столбца под цифрой 3:  $f_1 = 8$  см<sup>2</sup>.

На третьей позиции, определяющей параметр  $f_2$ , стоит цифра 1. Следовательно, величину  $f_2$  выбираем из столбца под цифрой 1:  $f_2 = 5$  см<sup>2</sup>.

Варианты исходных данных к задаче  
«Расчет двухзамкнутого контура на сдвиг и кручение»

В соответствии с заданным вариантом определите индивидуальные (варьируемые) параметры сечения тонкостенного стержня:

- схему сечения (в соответствии с заданным номером рисунка – четыре варианта рис. П.5.1 – П.5.4);
- величину  $a$ , определяющую положение среднего (рис. П5.1 и П.5.3) или переднего (рис. П.5.2 и П.5.4) лонжерона;
- площади  $f_3$  поясов заднего лонжерона.

Таблица П.5.1

Исходные данные

Положение цифры в номере варианта	Параметр	Значение $i$ -той цифры в номере варианта			
		1	2	3	4
Первая цифра	Номер рисунка со схемой	1	2	3	4
Вторая цифра	$a$ (см)	20	30	40	50
Третья цифра	$f_3$ (см <sup>2</sup> )	3	4	5	6

Одинаковыми для всех вариантов являются следующие параметры:

- величина действующей в сечении силы  $Q_y = 500$  кН;
- расстояние  $c$ , характеризующее положение силы  $Q_y$  в сечении (задается преподавателем);
- хорда сечения  $a + b = 100$  см;
- площади поясов и продольных элементов  $f_1 = f_2 = 4$  см<sup>2</sup>;
- материал обшивки – дюраль Д16Т:  $E_d = 72 \cdot 10^9$  Па;  $G_d = 28 \cdot 10^9$  Па;
- материал продольных элементов, стенок и поясов лонжеронов – сталь 30ХГСН2А:  $E_{ст} = 200 \cdot 10^9$  Па;  $G_{ст} = 77 \cdot 10^9$  Па  $G_{ст} = 77 \cdot 10^9$  Па.

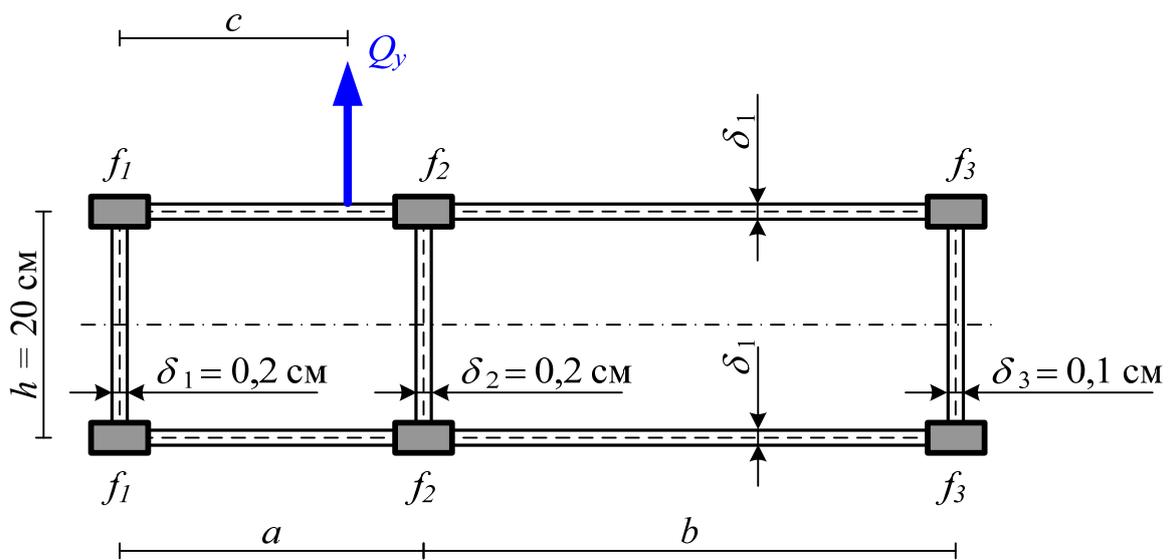


Рис. П.5.1

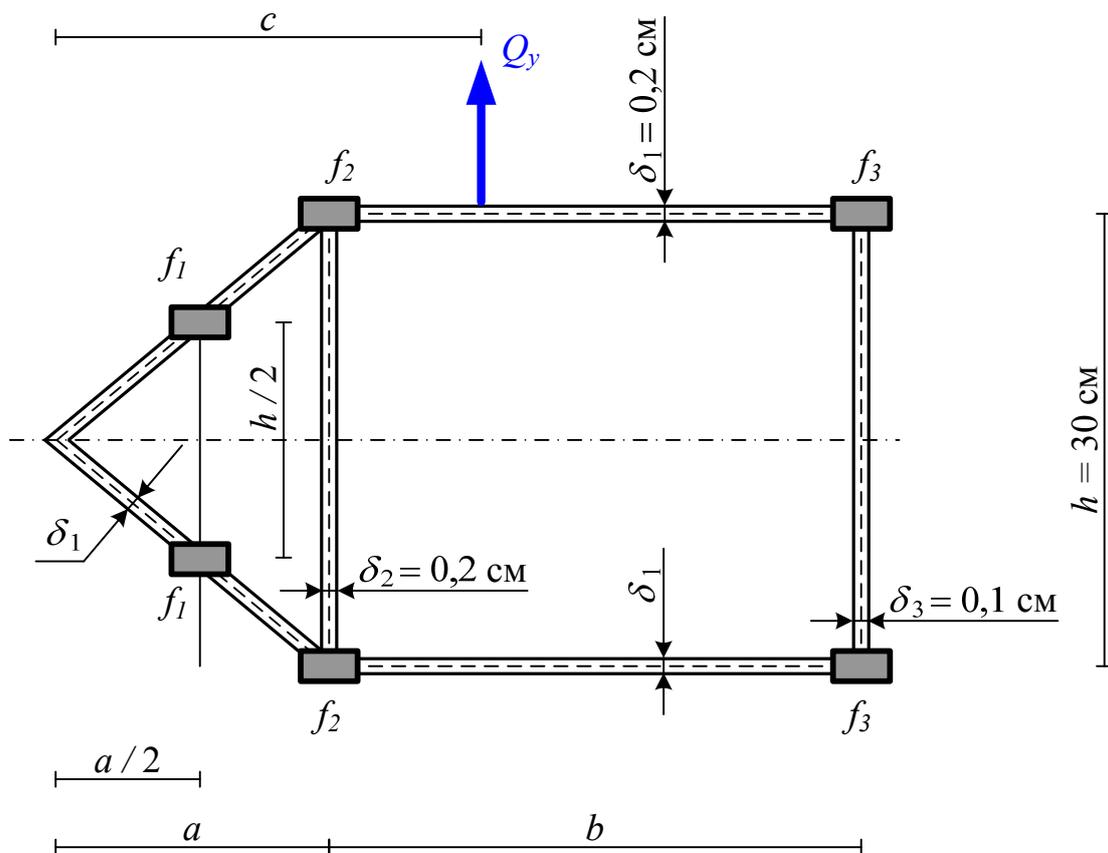


Рис. П.5.2

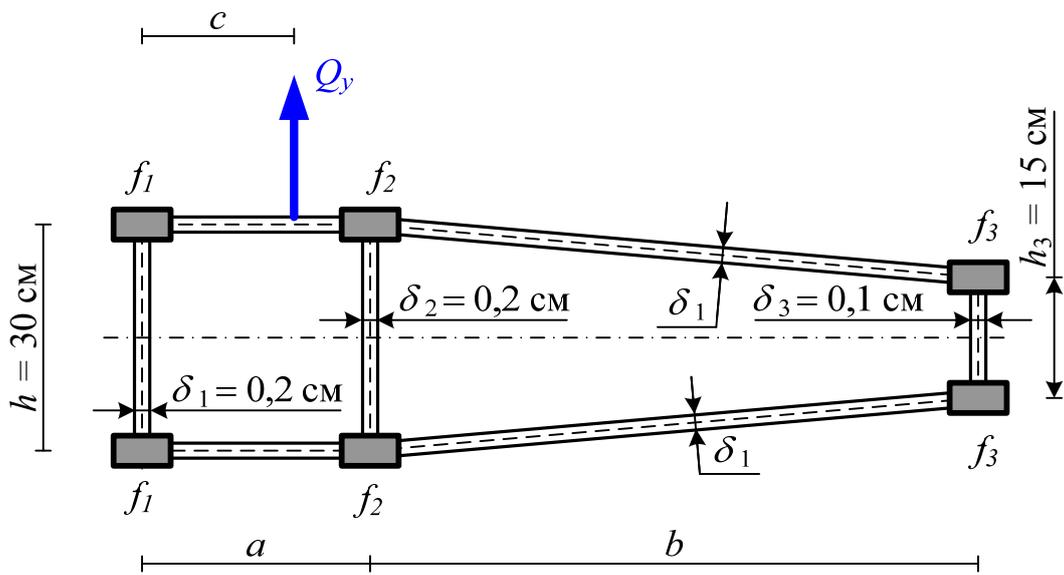


Рис. П.5.3

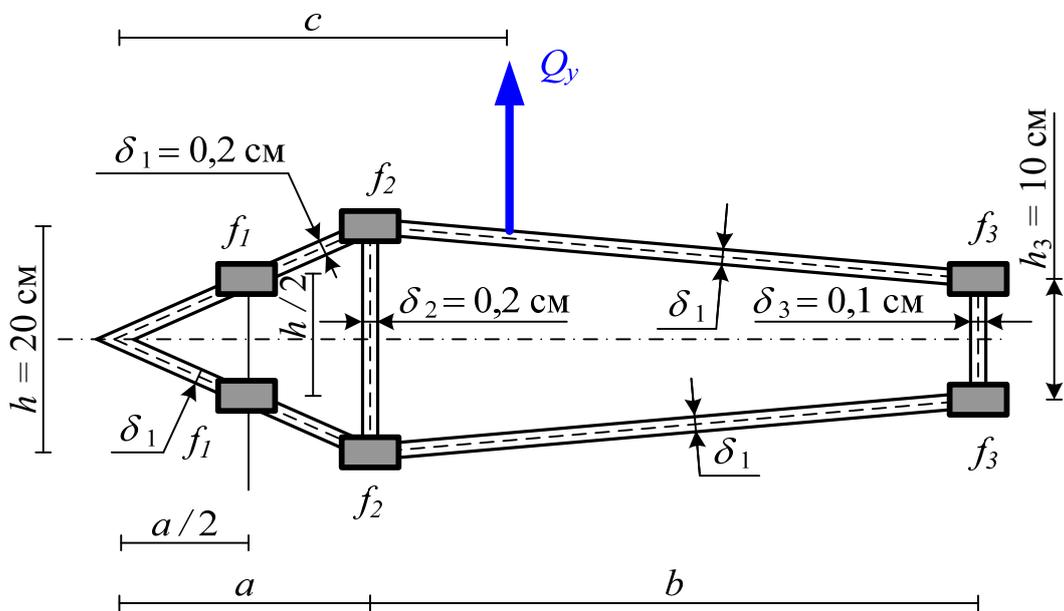


Рис. П.5.4

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Строительная механика летательных аппаратов: учеб. для авиационных специальностей вузов / И.Ф. Образцов, Л.А. Булычев, В.В. Васильев и др.; под ред. И.Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1986. – 536с.
2. Макеев А.И. Строительная механика тонкостенных элементов авиационных конструкций / А.И. Макеев, Б.И. Скопинцев. – Х.: ХАИ, 1987. – 103 с.
3. Петров Ю.П. Основы расчета на нормальные и касательные напряжения тонкостенных стержней открытого профиля / Ю.П. Петров. – Х.: ХАИ, 1984. – 100 с.
4. Скопинцев Б.И. Расчет тонкостенного стержня при изгибе и свободном кручении. Определение положения центра жесткости сечения / Б.И. Скопинцев, П.А. Фомичев – Х.: ХАИ, 1983. – 36 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
1. Исследование нормальных напряжений изгиба в дискретном неоднородном сечении крыла .....	4
2. Касательные напряжения сдвига в открытом профиле .....	9
2.1. Балочная формула сдвига открытого профиля .....	9
2.2. Главные оси сечения .....	9
2.3. Типы задач .....	9
2.4. Центр тяжести сечения .....	10
2.5. Осевой момент инерции сечения .....	12
2.6. Поворот центральных осей до совпадения с главными .....	15
2.7. Эпюры текущих статических моментов. Элементы теории .....	16
2.7.1. Общие положения .....	16
2.7.2. Выбор начальной точки и направления дуговой координаты .....	16
2.7.3. Разбиение контура на участки .....	18
2.7.4. Параметрические зависимости текущих координат точек на контуре .....	18
2.7.5. Общие правила .....	19
2.8. Эпюры текущих статических моментов. Процедура .....	20
2.8.1. Эпюра $S_x(t)$ на первом участке .....	20
2.8.2. Эпюра $S_x(t)$ на втором участке .....	20
2.8.3. Эпюра $S_x(t)$ на третьем участке .....	21
2.9. Построение эпюры касательных сил по контуру сечения ..	22
2.10. Определение направлений касательных сил .....	23
2.11. Вычисление касательных напряжений в характерных точках контура .....	23
3. Центр изгиба открытого профиля .....	25
3.1. Метод фиктивной силы .....	25
3.2. Правила для определения центра изгиба .....	28
3.3. Процедура метода фиктивной силы .....	29
4. Касательные напряжения в замкнутом профиле .....	31
4.1. Исходные данные .....	31
4.1.1. Геометрические характеристики сечения .....	31
4.1.2. Материалы элементов сечения .....	31
4.1.3. Нагружение сечения .....	31
4.2. Дискретизация и редуцирование сечения .....	32
4.3. Эпюра переменной части потока касательных сил $q_p$ .....	33
4.3.1. Момент инерции сечения .....	33

4.3.2. Построение эпюры текущих статических моментов .....	33
4.3.3. Значения и направления потоков $q_{pi}$ .....	34
4.3.4. Проверка потоков $q_p$ .....	35
4.4. Определение постоянной части потока касательных сил $q_0$ ..	35
4.5. Суммарные потоки касательных сил .....	36
4.6. Касательные напряжения .....	36
4.7. Вывод .....	36
5. Центр жесткости замкнутого профиля .....	37
6. Расчет двухзамкнутого контура на сдвиг и кручение .....	40
6.1. Исходные данные и дополнительные параметры сечения .....	40
6.2. Выбор основной системы .....	40
6.3. Грузовое состояние основной системы .....	41
6.4. Первое единичное состояние .....	43
6.5. Второе единичное состояние .....	43
6.6. Сводная таблица коэффициентов .....	44
6.7. Уравнения совместности деформаций .....	45
6.8. Уравнение статики .....	45
6.9. Лишние неизвестные .....	46
6.10. Угол закручивания сечения .....	47
6.11. Суммарные потоки касательных сил .....	47
6.12. Максимальные касательные напряжения .....	49
6.13. Определение центра жесткости методом фиктивного момента.....	49
6.14. Определение центра жесткости двухзамкнутого контура методом фиктивного силы .....	52
Приложения .....	54
Библиографический список .....	98

Львов Михаил Петрович  
Дибир Александр Геннадиевич

## РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Редактор

Св. план, 2011

Подписано в печать

Формат 60×84 1/16. Бум офс. № 2. Офс. печ.

Усл. печ. л. 4. Уч.-изд. л. . Т. 100 экз. Заказ. Цена свободная

---

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт»  
61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17  
<http://www.khai.edu>

Издательский центр «ХАИ»  
61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17  
[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)