

**Кафедра «Аэро-гидродинамика, прочность машин и сопротивление
материалов»**

Расчет прочности тонкостенного стержня открытого профиля

Методические указания к выполнению *расчетно-графической работы по курсу строительной механики машин, строительной механики летательных аппаратов и курсовой работы по курсу строительной механики самолета* для студентов Института Транспортных Систем (ИТС) направлений «Прикладная механика» и «Самолетостроение и вертолетостроение»

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр
Введение	3
1 Основные расчетные зависимости	3
2 Порядок расчета	6
3 Варианты заданий	6
4 Примеры расчета тонкостенного стержня	9

Введение

Предлагаемые методические указания предназначены для студентов факультета морской и авиационной техники при выполнении ими расчетно-графической и курсовой работы по курсам: «Строительная механика машин» и «Строительная механика самолета»; **содержат общие требования, задания и пример выполнения расчета** прочности тонкостенного стержня открытого профиля с пояснениями и теоретическими выкладками. Тонкостенные конструкции характерны для авиации и судостроения. Теория тонкостенных стержней открытого профиля была разработана с большой полнотой В.З.Власовым, поэтому эта теория называется еще теорией Власова.

1 Основные расчетные зависимости

Дифференциальное уравнение стесненного кручения относительно Θ имеет следующий вид:

$$GI_{\xi} \Theta - EI_{\omega} \Theta'' = M_{\xi},$$

или

$$\Theta'' - \alpha^2 \Theta = -\alpha^2 \frac{M_{\xi}}{GI_{\xi}}, \quad (1.1)$$

где E – модуль продольной упругости (модуль Юнга);

G – модуль сдвига;

I_k – момент инерции сечения при кручении;

I_{ω} – секториальный момент инерции;

$$\alpha = \sqrt{\frac{GI_{\xi}}{EI_{\omega}}} \quad (1.2)$$

называется изгибно-крутильной характеристикой поперечного сечения стержня. Для стандартных прокатных профилей значения α приводятся в справочной литературе.

Момент инерции сечения при кручении определяется по формуле

$$I_{\xi} = \frac{1}{3} \eta \sum b_i \delta_i^3, \quad (1.3)$$

где δ_i , b_i – короткие и длинные стороны прямоугольников или криволинейных элементов, из которых состоит поперечное сечение;

η – поправочный коэффициент, зависящий от вида профиля (для уголка $\eta = 1$; для швеллера $\eta = 1,12$; для тавра $\eta = 1,15$; для двутавра $\eta = 1,2$).

Секториальный момент инерции определяется по формуле

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA, \quad (1.4)$$

$$\text{где интеграл } \omega = \int_0^s h ds \text{ (см}^2\text{)} \quad (1.5)$$

называется *секториальной площадью*. Здесь h — расстояние от полюса до касательной к линии контура в рассматриваемой точке M , s — дуговая координата контура, отсчитываемая от начальной точки.

Общий интеграл уравнения (1.1) имеет вид

$$\Theta = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x + \bar{\Theta}, \quad (1.6)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий на торцах стержня (два условия).

Частное решение $\bar{\Theta}$ зависит от вида заданной нагрузки. Так, для случая, когда крутящий момент M_k по длине бруса постоянен, частное решение уравнения (1.1) имеет вид

$$\bar{\Theta} = \frac{M_{\bar{\epsilon}}}{GI_{\bar{\epsilon}}}. \quad (1.7)$$

Если стержень будет иметь несколько участков (рис. 1.1), то

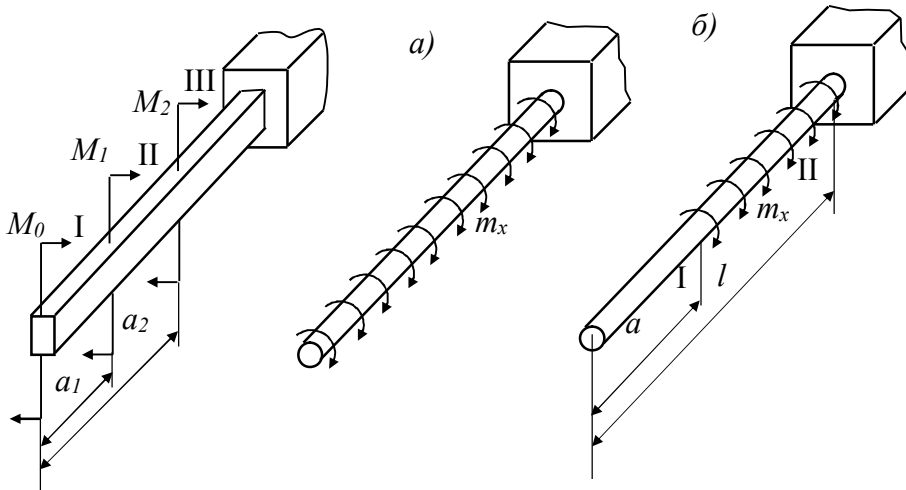


Рис.1.1

Рис.1.2

применяют метод начальных параметров, который позволяет свести число произвольных постоянных к двум [2]. Эти постоянные выражаются через так называемые начальные параметры, а именно, через относительный угол закручивания Θ_0 , бимомент B_0 и крутящий момент $M_{k0} = M_0$ в начальном сечении стержня. Так как из этих трех величин две обычно известны, то задача определения постоянных сведется к решению одного уравнения с одним неизвестным. Общее уравнение метода начальных параметров имеет вид (рис. 1.1):

$$\Theta = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x + \frac{M_0}{GI_{\bar{\epsilon}}} + \left|_{x \geq a} \frac{M_1}{GI_{\bar{\epsilon}}} [1 - \operatorname{ch}(x - a_1)] \right| + \left|_{x \geq a} \frac{M_2}{GI_{\bar{\epsilon}}} [1 - \operatorname{ch}(x - a_2)] \right| + \dots \quad (1.8)$$

При нагружении стержня внешним моментом, равномерно распределенным по длине (рис. 1.2 а), крутящий момент изменяется по закону $M_k = m_x x$. В этом случае частное решение будет иметь вид:

$$\bar{\Theta} = \frac{m_x x}{GI_{\bar{\epsilon}}}, \quad (1.9)$$

если же распределенный момент начинается на расстоянии a от торца (рис. 1.2 б), то его представляют в виде бесконечно большого числа бесконечно малых внешних моментов, при этом по аналогии с выражением (1.8) для угла Θ получим:

$$\Theta = C_1 sh\alpha x + C_2 ch\alpha x + \Big|_{x \geq a} \int_0^{x-a} \frac{m \cdot d\xi}{GI_{\dot{e}}} [1 - ch\alpha(x - \xi)]$$

или

$$\Theta = C_1 sh\alpha x + C_2 ch\alpha x + \Big|_{x \geq a} \frac{m}{GI_{\dot{e}}} \left[(x - a) - \frac{1}{\alpha} sh\alpha(x - a) \right]. \quad (1.10)$$

После определения относительных углов закручивания определяется крутящий момент свободного кручения по формуле

$$M_{\Theta} = GI_{\dot{e}} \Theta. \quad (1.11)$$

После однократного дифференцирования выражения для относительных углов закручивания определяются бимоменты по формуле

$$B = EI_{\omega} \Theta'. \quad (1.12)$$

Бимомент B измеряется в $\text{кН} \cdot \text{м}^2$ или $\text{Н} \cdot \text{м}^2$ и поскольку представляет собой внутренний силовой фактор, соответствующий самоуравновешенной системе внутренних нормальных напряжений, то не может быть найден методом сечений.

Затем вычисляется величина изгибно-крутящего момента M_{ω} по формуле [1]:

$$M_{\omega} = -\Theta'' EI_{\omega}. \quad (1.13)$$

Для опасных сечений вычисляются нормальные и касательные напряжения по формулам:

$$\text{Нормальные напряжения от изгиба } \sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z; \quad (1.14)$$

$$\text{Нормальные напряжения стесненного кручения } \sigma_{\omega} = \frac{B}{I_{\omega}} \omega; \quad (1.15)$$

$$\text{Касательные напряжения свободного кручения } \tau_{\Theta} = \frac{M_{\Theta} \delta}{I_{\dot{e}}} = G \Theta \delta; \quad (1.16)$$

$$\text{Касательные напряжения стесненного кручения } \tau_{\omega} = -\frac{M_{\omega} S_{\omega}^{\dot{i}\ddot{o}\ddot{n}}}{I_{\omega} \delta}; \quad (1.17)$$

$$\text{Касательные напряжения сдвига } \tau_V = -\frac{V_z S_y^{\dot{i}\ddot{o}\ddot{n}}}{I_y \delta}. \quad (1.18)$$

В опасных точках опасного сечения вычисляются суммарные напряжения и затем эквивалентные по 3 теории прочности по формулам:

$$\sigma_{\Sigma} = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B}{I_{\omega}} \omega; \quad (1.19)$$

$$\tau_{\Sigma} = \tau_{\Theta} + \tau_{\omega} + \tau_V = \frac{M_{\Theta} \delta}{I_{\dot{e}}} - \frac{M_{\omega} S_{\omega}^{\dot{i}\ddot{o}\ddot{n}}}{I_{\omega} \delta} + \frac{V_z S_y^{\dot{i}\ddot{o}\ddot{n}}}{I_y \delta}. \quad (1.20)$$

2 Порядок расчета

. Расчет тонкостенных стержней, испытывающих стесненное кручение, производят в такой последовательности:

- 1) определяют геометрические характеристики сечения, найдя предварительно центр изгиба (он же центр кручения; он же главный полюс);
- 2) составляют и решают дифференциальное уравнение относительных углов закручивания и определяют функцию Θ ;

- 3) находят крутящий момент свободного кручения по формуле (1.11)

$$M_{\Theta} = GI_{\kappa}\Theta;$$

- 4) дифференцируют функцию Θ один раз по x , после этого находят бимомент по формуле (1.12)

$$B = EI_{\omega} \Theta';$$

- 5) дифференцируют второй раз и получают изгибно-крутящий момент по формуле (1.13)

$$M_{\omega} = -EI_{\omega} \Theta'';$$

момент M_{ω} может быть найден также через момент M_{κ} по выражению

$$M_{\omega} = M_{\kappa} - M_{\Theta};$$

- 6) вычисляют нормальные и касательные напряжения по формулам (1.14), (1.15), (1.16 - 1.18), , а также суммарные по формулам (1.19 - 1.20);

- 7) производят необходимые расчеты на прочность.

3 Варианты заданий

Для заданного поперечного сечения (рис.3.1, таблица 3.2), схемы закрепления и нагрузки тонкостенного стержня (рис.3.2, таблица 3.3) выполнить оценку его прочности, приняв $\sigma_{\tau}=235$ МПа, а допускаемые эквивалентные напряжения равными $[\sigma] = 0,75 \sigma_{\tau}$. Нагрузка приложена в плоскости стенки. Расстояние от плоскости стенки до линии центров изгиба (линии центров кручения или линии главных полюсов) s (определяется из расчета секториальных характеристик поперечного сечения).

Для этого:

- определить положения центра тяжести сечения и центра кручения;
- вычислить геометрические и секториальные характеристики поперечного сечения;
- записать решение дифференциального уравнения стесненного кручения по методу начальных параметров;
- записав граничные условия на концах стержня определить произвольные постоянные общего решения;
- используя полученное решение вычислить значения ВСФ в отдельных сечениях стержня и построить эпюры этих ВСФ (V , M_y , M_{κ} , M_{Θ} , M_{ω} , B , θ , φ);
- определить опасные сечения, в которых определить опасные точки. Для этих точек выполнить проверку прочности по

эквивалентным напряжениям и дать заключение о прочности тонкостенного стержня.

Вариант задания выдается преподавателем.

Обозначение варианта задания состоит из варианта числовых данных для поперечного сечения тонкостенного стержня и варианта нагрузки. На основе числовых данных строится поперечное сечение профиля. Все размеры приведены по средним линиям профиля. Схема обозначения варианта задания приведена в таблице 3.1.

Таблица 3.1 Структура варианта задания

Вариант данных по сечению		Вариант нагрузки
XX	-	XX
1 - 30		1 - 30
Табл. 12-15		Табл. 11

Например: Вариант 12-09 означает, что поперечное сечение профиля соответствует схеме с числовыми данными по варианту 12 в табл.3.2, вариант нагрузки соответствует варианту 9 таблицы 3.

Нагрузки по таблице 3.3 определяются следующим образом :

Распределенные нагрузки определяются по формуле

$$q_i = k_i \cdot q_0, \text{ где } i=1, 2, 3, 4.$$

Сосредоточенные нагрузки определяются по формуле

$$P_i = m_i \cdot P_0, \text{ где } i=1, 2, 3, 4, \text{ а } P_0 = q_0 \cdot l \cdot m.$$

Сосредоточенный момент определяется по формуле

$$M_1 = n_1 \cdot M_0, \text{ где } M_0 = q_0 \cdot l^2 \cdot n \text{ или } M_1 = n_1 \cdot q_0 \cdot l^2 \cdot n.$$

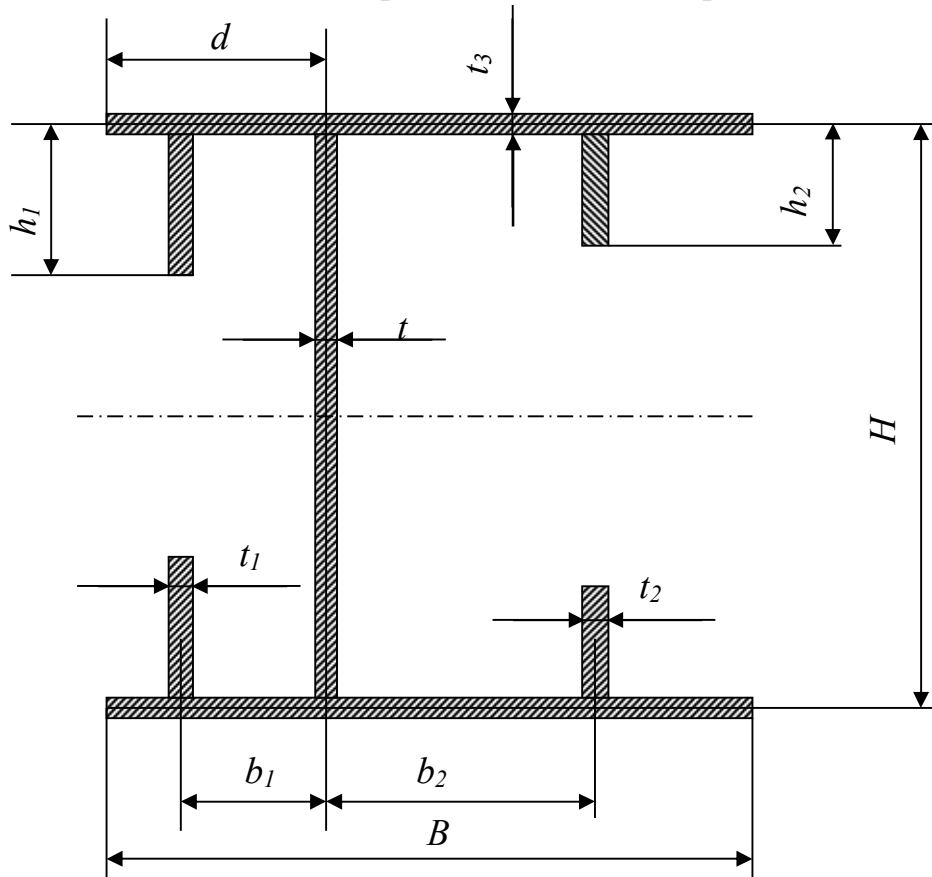


Рисунок 3.1 – Поперечное сечение тонкостенного стержня (при взгляде в направлении оси x)

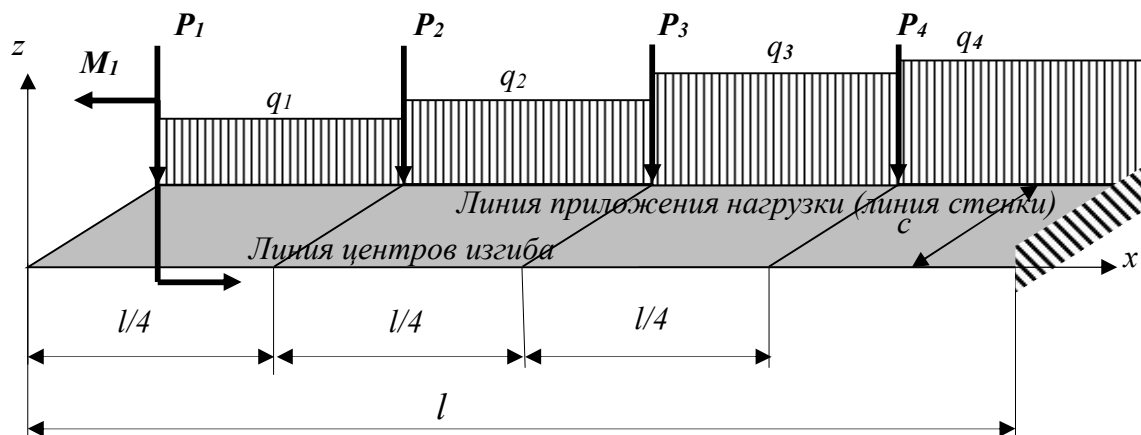


Рисунок 3.2 - Расчетная схема консольного тонкостенного стержня

Таблица 3.2

Варианты поперечного сечения стержня (сечение по рис.3.1)

Вариант	Толщины, мм				Размеры поперечного сечения, мм						
	t	t_1	t_2	t_3	H	B	h_1	h_2	b_1	b_2	d
1	4	0	0	4	240	120	0	0	0	0	0
2	5	0	0	5	260	120	0	0	0	0	120
3	5	0	0	5	280	160	0	0	0	0	40
4	6	0	0	6	300	160	0	0	0	0	120
5	6	0	6	6	320	180	0	50	0	90	90
6	4	4	0	4	200	100	40	0	50	0	50
7	3	0	3	3	180	100	0	50	0	100	0
8	3	3	0	3	160	100	50	0	100	0	100
9	3	0	3	3	140	100	0	40	0	50	0
10	3	3	0	3	120	100	40	0	50	0	100
11	4	0	0	4	200	120	0	0	0	0	0
12	4	0	0	4	210	100	0	0	0	0	100
13	5	0	0	5	220	140	0	0	0	0	40
14	5	0	0	5	230	120	0	0	0	0	80
15	5	0	5	5	240	140	0	50	0	70	70
16	4	4	0	4	250	120	50	0	60	0	60
17	5	0	5	5	260	120	0	60	0	120	0
18	6	6	0	6	270	100	60	0	100	0	100
19	6	0	6	6	280	120	0	50	0	60	0
20	6	6	0	6	300	120	50	0	60	0	120
21	3	0	0	3	120	80	0	0	0	0	0
22	3	0	0	3	140	90	0	0	0	0	90
23	3	0	0	3	160	100	0	0	0	0	20
24	4	0	0	4	280	140	0	0	0	0	100
25	5	0	0	5	270	140	0	0	0	0	40
26	5	0	5	5	260	130	0	40	0	110	20
27	4	0	4	4	240	130	0	30	0	80	30
28	5	0	5	5	280	180	0	40	0	60	30
29	5	5	0	5	250	150	30	0	50	0	100
30	5	5	0	5	270	120	30	0	30	0	90
31	5	0	5	5	260	120	0	60	0	120	0

Таблица 3.3

Варианты длины стержня и его нагрузки (схема нагрузки по рис.3.2)

Вариант	$l, м$	$q_0,$ кН/м	m	n	$m_1=$ P_1/P_0	$m_2=$ P_2/P_0	$m_3=$ P_3/P_0	$m_4=$ P_4/P_0	$k_1=$ q_1/q_0	$k_2=$ q_2/q_0	$k_3=$ q_3/q_0	$k_4=$ q_4/q_0	$n_1=$ M_1/M_0
1	2	5	1	1	0	3	0	0	1	2	-2	-4	-1
2	2,4	2	1	1	0	-1	0	0	2	2	2	2	0
3	1,6	2	1	1	-2	0	0	0	3	3	3	3	0
4	1,8	2	1	1	3	0	3	0	0	0	0	0	1
5	1,4	2	1	1	0	2	0	4	0	0	0	0	-2
6	2,2	2	1	1	0	0	0	0	2	2	2	4	0
7	2,4	2	1	1	3	3	0	0	0	0	0	0	0
8	1,2	2	1	1	0	0	0	0	2	2	3	5	0
9	2	2	1	1	0	0	0	0	0	2	2	2	-1
10	2,16	2	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
11	2,28	2	1	1	2	2	-2	-2	0	0	0	0	0
12	2,52	2	1	1	-3	-1	2	4	0	0	0	0	0
13	2,64	2	1	1	0	0	0	0	1	2	3	4	0
14	2,8	2	1	1	0	0	0	0	-2	-2	-2	-2	3
15	1,32	2	1	1	2	0	0	0	-3	-3	-3	-3	0
16	1,42	2	1	1	0	0	0	-4	4	3	0	0	0
17	1,76	2	1	1	0	0	0	0	4	4	2	2	0
18	1,84	2	1	1	4	0	0	4	0	0	0	0	0
19	1,68	2	1	1	3	3	0	0	0	0	0	0	0
20	2,12	2	1	1	3	0	6	0	0	0	0	0	0
21	2,88	2	1	1	0	0	0	0	2	2	2	0	0
22	2,48	2	1	1	0	2	2	0	0	0	0	0	-4
23	2,44	2	1	1	0	0	0	0	4	4	-2	-2	0
24	1,88	2	1	1	0	-3	0	2	0	0	0	0	2
25	1,28	2	1	1	0	0	0	0	4	3	2	1	0
26	1,72	2	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	-2
27	2,08	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5	1
28	2,04	2	1	1	2	0	4	0	0	0	0	0	0
29	1,92	2	1	1	0	0	0	0	0	0	2	2	0
30	2,0	2	1	1	0	0	-2	0	1	1,5	0	0	-0,5

4 Примеры расчета тонкостенного стержня

4.1 Пример №1 (вариант 31-30).

4.1.1 Исходные данные

Расчет выполнен по варианту 31-30. Размеры элементов сечения приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 Исходные данные поперечного сечения из таблицы 3.2

Вариант	Толщины, мм				Размеры поперечного сечения, мм						
	t	t_1	t_2	t_3	H	B	h_1	h_2	b_1	b_2	d
31	5	0	5	5	260	120	0	60	0	120	0

Используя данные таблицы 4.1, рис. 3.1 преобразуется к виду, указанному на рисунке 4.1. Обозначения характерных точек сечения показаны на рис. 4.2.

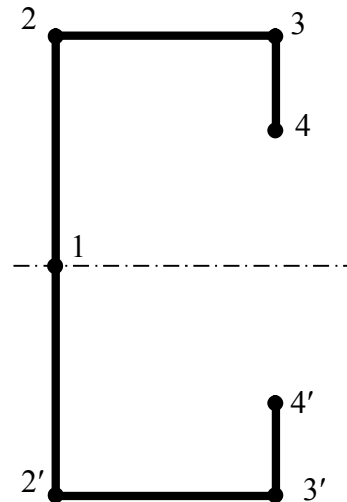
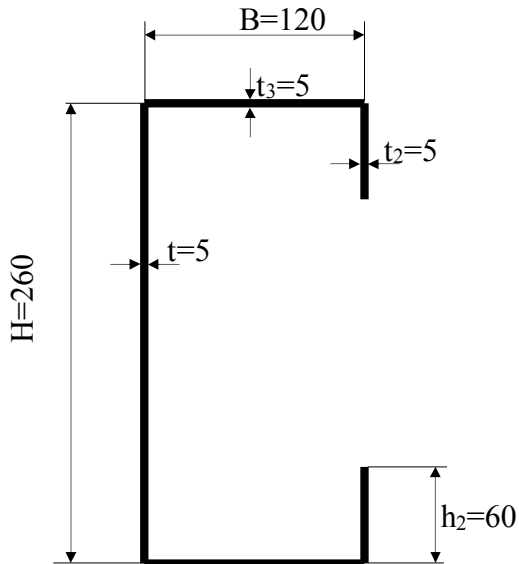


Рисунок 4.1- Поперечное сечение профиля

Рисунок 4.2- Обозначения точек сечения

Данные по нагрузке, соответствующие варианту 30 приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 Исходные данные по нагрузке

Вариант	$l, м$	$q_0, кН/м$	m	n	$m_1 = P_1/P_0$	$m_2 = P_2/P_0$	$m_3 = P_3/P_0$	$m_4 = P_4/P_0$	$k_1 = q_1/q_0$	$k_2 = q_2/q_0$	$k_3 = q_3/q_0$	$k_4 = q_4/q_0$	$n_1 = M_1/M_0$
30	2,0	2	1	1	0	0	-2	0	1	1,5	0	0	-0,5

Нагрузки по таблице 3.3 определяются следующим образом :

Распределенные нагрузки

$$q_1 = k_1 \cdot q_0 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН/м};$$

$$q_2 = k_2 \cdot q_0 = 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ кН/м};$$

$$q_3 = q_4 = 0 \text{ кН/м};$$

Сосредоточенные нагрузки

$$P_0 = q_0 \cdot l \cdot m = 2 \cdot 2,0 \cdot 1 = 4 \text{ кН}, \quad P_3 = m_3 \cdot P_0 = -2 \cdot 4 = -8 \text{ кН} \quad P_1 = P_2 = P_4 = 0, \quad .$$

Сосредоточенный момент определяется по формуле

$$M_1 = n_1 \cdot q_0 \cdot l^2 \cdot n = (-0,5) \cdot 2 \cdot 2,0^2 \cdot 1 = -4 \text{ кНм}.$$

Расчетная схема стержня примет вид, показанный на рис.4.3

(направление нагрузок указано на схеме с учетом полученных знаков).

4.1.2 Определение центра тяжести сечения

Площадь сечения: $A = H \cdot t + 2Bt_3 + 2ht_2 = 26 \cdot 0,5 + 2 \cdot 12 \cdot 0,5 + 2 \cdot 6 \cdot 0,5 = 31,0 \text{ м}^2$.

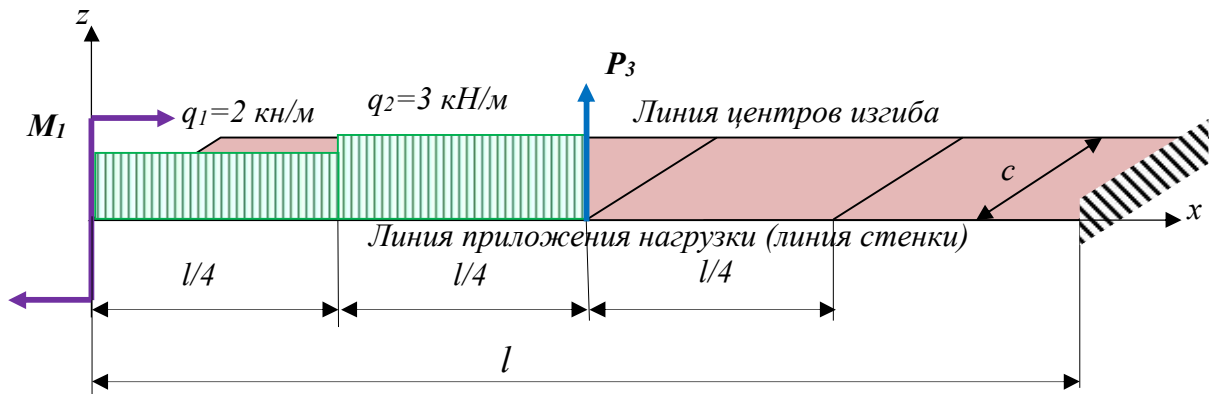


Рисунок 4.3 Схема нагружения тонкостенного стержня

Координата центра тяжести (при расположении оси сравнения в центре тяжести стенки):

$$y_c = \frac{2(B \cdot t_3 \cdot B/2) + 2(h \cdot t_2 \cdot B)}{A} = \frac{2(12 \cdot 0,5 \cdot 12/2) + 2(6 \cdot 0,5 \cdot 12)}{31,0} = 4,548 \text{ м} .$$

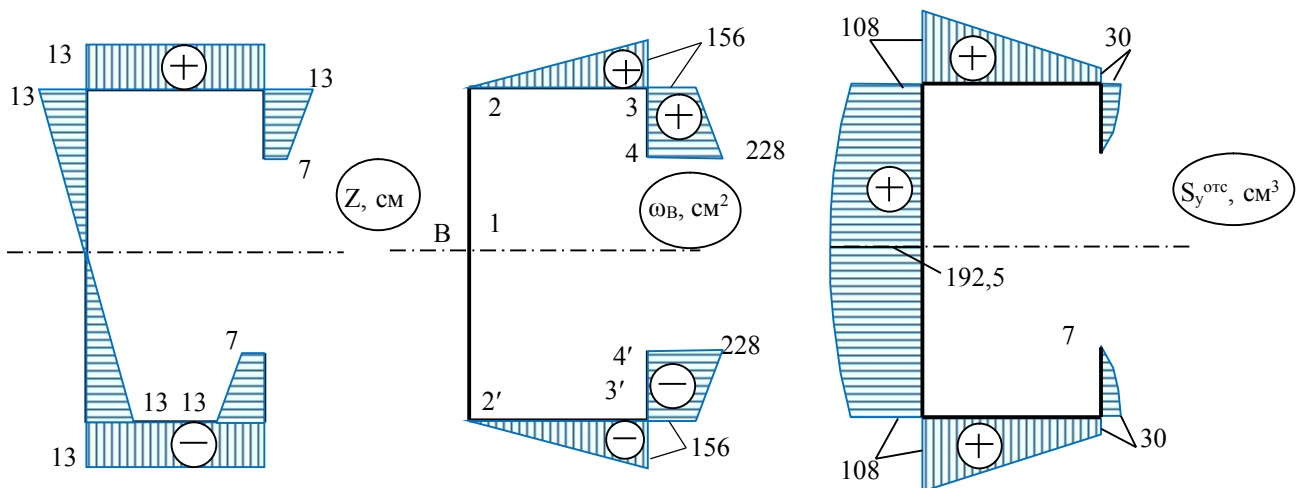


Рисунок 4.4 – Эпюра координаты z

Рисунок 4.5 – Эпюра вспомогательной секториальной площади ω_B

Рисунок 4.6 – Эпюра статического момента

4.1.3 Определение осевого момента инерции I_y

Для данного сечения строим эпюру координаты z (рис.4.4).

Момент инерции вычисляется способом Верещагина, умножая эпюру z «саму на себя».

$$I_y = \int_A z^2 dA = 2 \cdot 0,5 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 13 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 13 + (13 \cdot 12) \cdot 13 + \frac{5}{6} \left(2 \cdot 13^2 + 2 \cdot 7^2 + 7 \cdot 13 + 13 \cdot 7 \right) \right] = 3378 \text{ м}^4$$

4.1.4 Определение отсеченного статического момента S_y для характерных точек контура

Статический момент относительно оси y для характерных точек сечения определяем по формуле $S_y^{\text{отс}} = \int_0^s z dA$.

Для вычисления используем правило Верещагина при вычислении интеграла по эпюре z .

$$S_y^{(4)} = 0;$$

$$S_y^{(3)} = \frac{z_3 + z_4}{2} \cdot h_2 \cdot t_2 = \frac{13 + 7}{2} \cdot 6,0 \cdot 0,5 = 30,0 \text{ см}^3;$$

$$S_y^{(2)} = S_y^{(3)} + \frac{H}{2} \cdot B \cdot t_3 = 30,0 + \frac{26}{2} \cdot 12,0 \cdot 0,5 = 108,0 \text{ см}^3;$$

$$S_y^{(1)} = S_y^{(2)} + \frac{H}{2} \cdot \frac{H}{2} \cdot t = 108,0 + \frac{26}{2} \cdot \frac{26}{2} \cdot 0,5 = 192,5 \text{ см}^3. \text{ По результатам расчета строим эпюру } S_y^{\text{отс}}, \text{ приведенную на рисунке 4.6.}$$

4.1.5 Определение положения главного полюса

Для определения положения главного полюса выбираем вспомогательный полюс B . Вычисляем секториальные площади ω_B относительно выбранного полюса и строим эпюру вспомогательной секториальной площади ω_B (рис.4.5). Для симметричного сечения рекомендуется выбирать полюс B в точке пересечения оси симметрии с контуром поперечного сечения.

$$\omega_{A1} = \omega_{A2} = 0$$

$$\omega_{A3} = B \cdot \frac{H}{2} = 12 \cdot \frac{26}{2} = 156 \text{ м}^2$$

$$\omega_{A3} = \omega_{A2} + h_2 \cdot B = 156 + 6 \cdot 12 = 228 \text{ м}^2$$

Центробежный секториальный момент инерции вычисляем способом Верещагина, умножив эпюру z на эпюру ω_B

$$I_{y\omega_A} = \int_A z \omega_A dA = 2 \cdot 0,5 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 156 \cdot 12 \right) \cdot 13 - \frac{6}{6} (2 \cdot 228 \cdot 7 + 2 \cdot 156 \cdot 13 + 13 \cdot 228 + 156 \cdot 7) \right] = 23472 \text{ м}^4.$$

Определение координат главного полюса

$$y_A - y_B = -\frac{J_{y\omega_B}}{J_y} = -\frac{23472}{3378} = -6,948 \text{ м} - \text{относительно стенки сечения.}$$

4.1.6 Определение главных секториальных площадей

Для вычисления главных секториальных площадей используем формулу

$$\omega_i = \omega_{Bi} + z_i \cdot (y_A - y_B)$$

Результаты вычислений приведены в таблице 4.3

Таблица 4.3

Номера точек	ω_{Bi} , см ²		z_i , см	$y_A - y_B$, см	ω_i , см ²
1	ω_{B1}	0	0,0	-6,948	0
2	ω_{B2}	0	13,0	-6,948	-90,32
3	ω_{B3}	156	13,0	-6,948	65,68
4	ω_{B4}	228	7,0	-6,948	179,4

Эпюра главных секториальных площадей, построенная по приведенным в таблице 4.3 значениям приведена на рис.4.7.

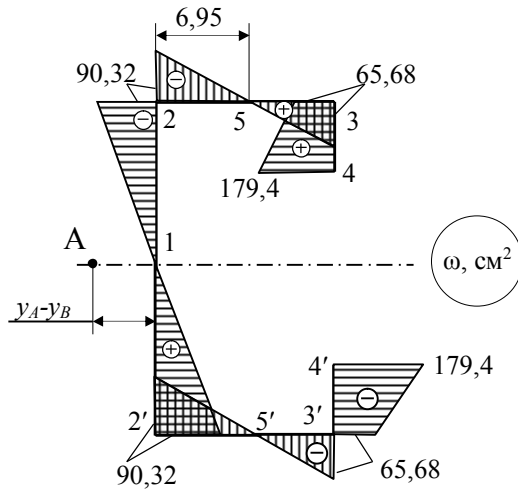


Рисунок 4.7 - Эпюра главной секториальной площади

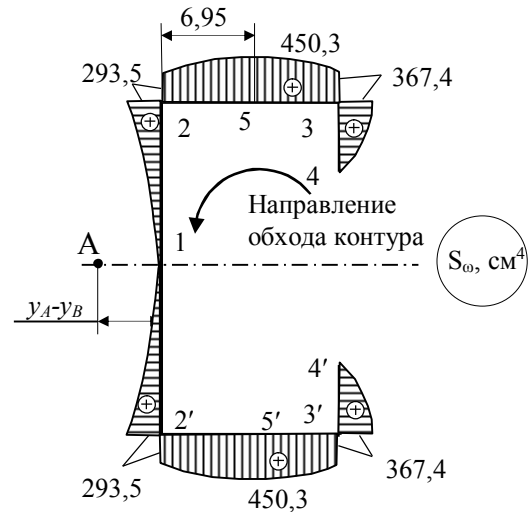


Рисунок 4.8 - Эпюра секториального статического момента

4.1.7 Определение секториального статического момента

Для вычисления секториальных статических моментов направление обхода принимаем против часовой стрелки от точки 4 контура

$$S_{\omega} = \int_A \omega dA, \quad S_{\omega 4} = 0, \quad S_{\omega 3} = t_2 \cdot \Omega_{4-3} = 0,5 \cdot \frac{179,27 + 65,68}{2} \cdot 6 = 367,4 \quad \text{нм}^4,$$

$$S_{\omega 2} = S_{\omega 3} + t_3 \cdot \Omega_{3-2} = 367,4 + 0,5 \cdot \frac{-90,32 + 65,68}{2} \cdot 12 = 293,5 \quad \text{нм}^4,$$

$$S_{\omega 1} = S_{\omega 2} + t \cdot \Omega_{2-1} = 293,5 - 0,5 \cdot \frac{90,32 \cdot 13}{2} = -0,04 \quad \text{нм}^4,$$

$$S_{\omega 5} = S_{\omega 3} + t_3 \cdot \Omega_{3-5} = 367,4 + 0,5 \cdot \frac{65,68 \cdot (12 - 6,95)}{2} = 450,3 \quad \text{нм}^4.$$

По полученным значениям строим эпюру секториальных статических моментов, которая приведена на рис.4.8.

4.1.8 Определение секториального момента инерции

Секториальный момент инерции вычисляем способом Верещагина, умножив эпюру ω «саму на себя»

$$J_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = 2 \cdot 0,5 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 90,32 \cdot 13 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 90,32 + \left(\frac{1}{2} \cdot 90,32 \cdot 6,95 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 90,32 + \left(\frac{1}{2} \cdot 65,68 \cdot 5,05 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 65,68 + \frac{6}{6} \left(2 \cdot 65,68^2 + 2 \cdot 179,4^2 + 65,68 \cdot 179,4 \cdot 2 \right) \right] = 158040 \quad \text{нм}^6.$$

4.1.9 Определение момента инерции при кручении

$$J_k = \frac{1}{3} \sum_i S_i \cdot t_i^3 = \frac{1}{3} \cdot (H \cdot t^3 + 2 \cdot B \cdot t_3^3 + 2 \cdot h_2 \cdot t_2^3) = \frac{1}{3} (26 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 6) \cdot 0,5^3 = 2,58 \quad \text{нм}^4.$$

4.1.10 Определение изгибно-крутильной характеристики

$$\alpha = \sqrt{\frac{G \cdot J_k}{E \cdot J_{\omega}}} = \sqrt{\frac{0,78 \cdot 10^5 \cdot 2,58}{2 \cdot 10^5 \cdot 158040}} = 2,52 \cdot 10^{-3} \quad \frac{1}{\text{нм}} = 0,252 \frac{1}{i}.$$

4.2 Составление и решение дифференциального уравнения относительного угла закручивания

4.2.1 Разбиение схемы нагружения

Общую схему нагружения представим в виде отдельных расчетных схем при изгибе и кручении.

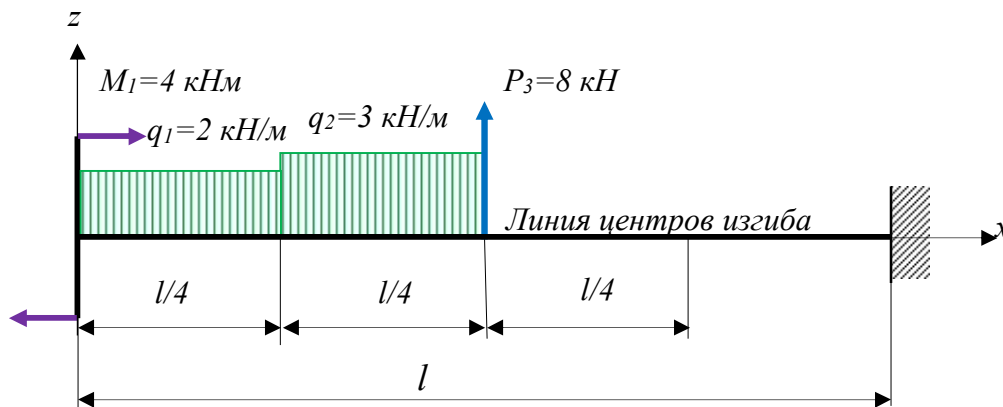


Рисунок 4.9 Схема нагружения при изгибе

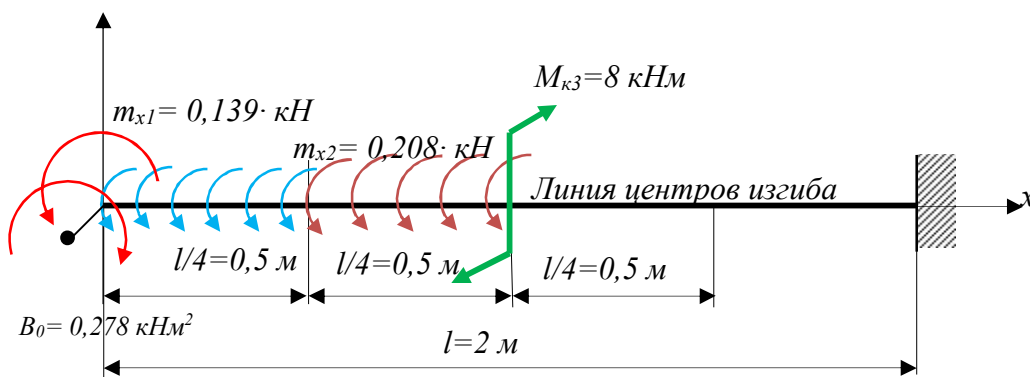


Рисунок 4.10 Схема нагружения при кручении

Расчетная схема при изгибе приведена на рис.4.9, а при кручении на рис. 4.10. Вычислим расчетные нагрузки при кручении:

Расстояние от плоскости нагрузки до линии центров кручения по абсолютной величине равно $c = |y_A - y_B| = |-6,948| \text{ м} = 6,95 \text{ м} = 0,0695 \text{ м}$.

Интенсивность крутящего момента на первом участке

$$m_{x1} = q_1 \cdot c = 2 \cdot 0,0695 = 0,139 \text{ кН};$$

на втором участке

$$m_{x2} = q_2 \cdot c = 3 \cdot 0,0695 = 0,208 \text{ кН};$$

на третьем и четвертом участке

$$m_{x3} = m_{x4} = 0.$$

Сосредоточенные крутящие моменты равны

$$M_{k1} = M_{k2} = M_{k4} = 0; \quad M_{k3} = P_3 \cdot c = 8 \cdot 0,0695 = 0,556 \text{ кНм}.$$

Сосредоточенный бимомент $B_0 = M_1 \cdot c = 4 \cdot 0,0695 = 0,2779 \text{ кНм}^2$

4.2.2 Решение дифференциального уравнения стесненного кручения по методу начальных параметров

Для данной нагрузки решение будет иметь вид

$$\theta = C_1 \cdot sh\alpha x + C_2 \cdot ch\alpha x + \frac{m_{x1} \cdot \tilde{\delta}}{G \cdot J_K} - \left| \frac{m_{x1}}{G \cdot I_K} \left[\left(x - \frac{l}{4} \right) - \frac{1}{\alpha} sh\alpha \left(x - \frac{l}{4} \right) \right] \right| +$$

$$+ \left| \frac{m_{x2}}{G \cdot I_K} \left[\left(x - \frac{l}{4} \right) - \frac{1}{\alpha} sh\alpha \left(x - \frac{l}{4} \right) \right] \right| - \left| \frac{m_{x2}}{G \cdot I_K} \left[\left(x - \frac{l}{2} \right) - \frac{1}{\alpha} sh\alpha \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] \right| - \left| \frac{M_{k3}}{G \cdot I_K} \left[1 - ch\alpha \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] \right|$$

Производная относительного угла закручивания

$$\theta' = C_1 \cdot \alpha \cdot ch\alpha x + C_2 \cdot \alpha \cdot sh\alpha x + \frac{m_{x1}}{G \cdot J_K} - \left| \frac{m_{x1}}{G \cdot J_K} \left[1 - ch\alpha \left(x - \frac{l}{4} \right) \right] \right| + \left| \frac{m_{x2}}{G \cdot I_K} \left[1 - ch\alpha \left(x - \frac{l}{4} \right) \right] \right| -$$

$$- \left| \frac{m_{x2}}{G \cdot I_K} \left[1 - ch\alpha \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] \right| + \left| \frac{M_{k3}\alpha}{G \cdot I_K} sh\alpha \left(x - \frac{l}{2} \right) \right|$$

4.2.3 Граничные условия

Из граничных условий определим значения произвольных постоянных

При $x=0$ бимомент равен $B_1 = 0,2779 \hat{e}\hat{l}\hat{i}^2 = EI_\omega \theta'$. Откуда относительный

угол закручивания будет равен $\theta' = \frac{B_1}{E \cdot J_\omega}$.

$$\frac{B_1}{E \cdot J_\omega} = \alpha \tilde{N}_1 + \frac{m_{x1}}{G \cdot J_K} \text{ откуда } \tilde{N}_1 = -\frac{m_{x1}}{\alpha \cdot G \cdot J_K} \left(1 - \frac{B\alpha^2}{m_{x1}} \right).$$

Величина $G \cdot I_k = 0,78 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 2,58 \cdot 10^{-8} = 2,015 \hat{e}\hat{l}\hat{i}^2$,

величина $E \cdot I_\omega = 2,0 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 158040 \cdot 10^{-12} = 31,61 \hat{e}\hat{l}\hat{i}^4$.

$$\text{Тогда } \tilde{N}_1 = -\frac{0,139}{0,252 \cdot 2,015} \left(1 - \frac{0,2779 \cdot 0,252^2}{0,139} \right) = -0,238 \frac{1}{i}.$$

При $x=l$ относительный угол закручивания равен нулю, то есть $\theta = 0$

$$0 = C_1 \cdot sh\alpha l + C_2 \cdot ch\alpha l + \frac{m_{x1} \cdot l}{G \cdot J_K} - \frac{m_{x1}}{G \cdot J_K} \left[\left(\frac{3l}{4} \right) - \frac{1}{\alpha} sh\alpha \left(\frac{3l}{4} \right) \right] + \frac{m_{x2}}{G \cdot I_K} \left[\left(\frac{3l}{4} \right) - \frac{1}{\alpha} sh\alpha \left(\frac{3l}{4} \right) \right] -$$

$$- \frac{m_{x2}}{G \cdot I_K} \left[\left(\frac{l}{2} \right) - \frac{1}{\alpha} sh\alpha \left(\frac{l}{2} \right) \right] - \frac{M_{k3}}{G \cdot I_K} \left[1 - ch\alpha \left(\frac{l}{2} \right) \right]$$

Вычислим входящие в выражение величины

$$sh\alpha l = sh(0,252 \cdot 2,0) = 0,5266$$

$$ch\alpha l = ch(0,252 \cdot 2,0) = 1,1302$$

$$sh\alpha \left(\frac{3l}{4} \right) = sh \left[0,252 \left(\frac{3 \cdot 2,0}{4} \right) \right] = 0,3878$$

$$ch\alpha \left(\frac{3l}{4} \right) = ch \left[0,252 \left(\frac{3 \cdot 2,0}{4} \right) \right] = 1,073$$

$$sh\alpha \left(\frac{l}{2} \right) = sh \left[0,252 \left(\frac{2,0}{2} \right) \right] = 0,2551$$

$$ch\alpha \left(x - \frac{l}{2} \right) = ch \left[0,252 \left(\frac{2,0}{2} \right) \right] = 1,032$$

$$0 = -0,238 \cdot 0,5266 + C_2 \cdot 1,130 + \frac{0,139 \cdot 2,0}{2,015} - \frac{0,139}{2,015} \left[\left(\frac{3 \cdot 2,0}{4} \right) - \frac{1}{0,252} 0,3878 \right] +$$

$$+ \frac{0,208}{2,015} \left[\left(\frac{3 \cdot 2,0}{4} \right) - \frac{1}{0,252} 0,3878 \right] - \frac{0,208}{2,015} \left[\left(\frac{2,0}{2} \right) - \frac{1}{0,252} 0,2551 \right] - \frac{0,556}{2,015} [1 - 1,032]$$

Откуда $C_2 = -0,0187$ 1/м.

Выражение для θ

$$\theta = -0,238 \cdot sh \alpha x - 0,0187 \cdot ch \alpha x + 0,069x - \Big|_{x \geq 0,5} 0,069[(x - 0,5) - 3,968 \cdot sh \alpha(x - 0,5)] +$$

$$+ \Big|_{x \geq 0,5} 0,1034[(x - 0,5) - 3,968 sh \alpha(x - 0,5)] - \Big|_{x \geq 1} 0,1034 \left[(x - 1) - \frac{1}{\alpha} sh \alpha(x - 1) \right] - \Big|_{x \geq 1} 0,2758 [1 - ch \alpha(x - 1)]$$

После упрощения получим

$$\theta = -0,238 \cdot sh \alpha x - 0,0187 \cdot ch \alpha x + 0,069x - \Big|_{x \geq 0,5} 0,0344[(x - 0,5) - 3,968 \cdot sh \alpha(x - 0,5)] -$$

$$- \Big|_{x \geq 1} 0,1034[(x - 1) - 3,968 \cdot sh \alpha(x - 1)] - \Big|_{x \geq 1} 0,2758 [1 - ch \alpha(x - 1)] \quad (4.1)$$

Производная от относительного угла закручивания

$$\theta' = -0,238 \cdot 0,252 \cdot ch \alpha x + 0,0187 \cdot 0,252 \cdot sh \alpha x + 0,069 - \Big|_{x \geq 0,5} 0,069 [1 - ch \alpha(x - 0,5)] +$$

$$+ \Big|_{x \geq 0,5} 0,1034 [1 - ch \alpha(x - 0,5)] - \Big|_{x \geq 1} 0,1034 [1 - ch \alpha(x - 1)] + \Big|_{x \geq 1} 0,2758 sh \alpha(x - 1)$$

После упрощения получим

$$\theta' = -0,0602 \cdot ch \alpha x - 0,00471 \cdot sh \alpha x + 0,069 - \Big|_{x \geq 0,5} 0,0344 [1 - ch \alpha(x - 0,5)] - \Big|_{x \geq 1} 0,1034 [1 - ch \alpha(x - 1)] +$$

$$+ \Big|_{x \geq 1} 0,2758 sh \alpha(x - 1) \quad (4.2)$$

4.2.4 Вычисление ВСФ

Выражение для срезающей силы

$$V(x) = q_1 x + \Big|_{x \geq \frac{l}{4}} (q_2 - q_1) \left(x - \frac{l}{4} \right) - \Big|_{x \geq \frac{l}{2}} (q_2 - q_1) \left(x - \frac{l}{2} \right) - \Big|_{x \geq \frac{l}{2}} P_3. \quad (4.3)$$

Выражение для изгибающего момента

$$M(x) = \frac{1}{2} q_1 x^2 + \Big|_{x \geq \frac{l}{4}} \frac{1}{2} (q_2 - q_1) \left(x - \frac{l}{4} \right)^2 - \Big|_{x \geq \frac{l}{2}} \frac{1}{2} (q_2 - q_1) \left(x - \frac{l}{2} \right)^2 - \Big|_{x \geq \frac{l}{2}} P_3 \left(x - \frac{l}{2} \right). \quad (4.4)$$

Выражение для бимомента

$$B = EI_\omega \theta' = -1,902 \cdot ch \alpha x - 0,149 \cdot sh \alpha x + 0,0939 - \Big|_{x \geq \frac{l}{4}} 0,468 [1 - ch \alpha(x - 0,5)] -$$

$$- \Big|_{x \geq \frac{l}{2}} 1,407 [1 - ch \alpha(x - 1)] + \Big|_{x \geq \frac{l}{2}} 3,754 sh \alpha(x - 1) \quad (4.5)$$

Выражение для момента свободного кручения

$$M_\theta = GI_k \theta = -0,48 \cdot sh \alpha x - 0,0376 \cdot ch \alpha x + 0,139x - \Big|_{x \geq \frac{l}{4}} 0,0693 [(x - 0,5) - 3,968 \cdot sh \alpha(x - 0,5)] -$$

$$- \Big|_{x \geq \frac{l}{2}} 0,208 \left[(x - 1) - \frac{1}{\alpha} sh \alpha(x - 1) \right] - \Big|_{x \geq \frac{l}{2}} 0,556 [1 - ch \alpha(x - 1)] \quad (4.6)$$

Выражение для крутящего момента

$$M_k = m_{x1} x + \Big|_{x \geq \frac{l}{4}} (m_{x2} - m_{x1}) \left(x - \frac{l}{4} \right) - \Big|_{x \geq \frac{l}{2}} (m_{x2} - m_{x1}) \left(x - \frac{l}{2} \right) - \Big|_{x \geq \frac{l}{2}} M_{k3} \quad (4.7)$$

Изгибно-крутящий момент определяется по выражению

$$M_{\omega} = M_k - M_{\theta} \quad (4.8)$$

Угол закручивания сечения

$$\varphi = \int \theta dx + D = -0,944 \cdot ch\alpha x - 0,074 \cdot sh\alpha x + 0,0345 \cdot x^2 - \left. 0,0172[(x-0,5)^2 - 31,38 \cdot ch\alpha(x-0,5)] \right|_{x \geq 0,5} - \left. 0,0517[(x-1)^2 - 31,38 \cdot sh\alpha(x-1)] \right|_{x \geq 1} + \left. 0,2758[(x-1) - ch\alpha(x-1)] \right|_{x \geq 1} + D \quad (4.9)$$

Произвольную постоянную D определим из граничного условия: при $x=l$ $\varphi=0$. После подстановки и всех вычислений получим $D=-0,117$ рад.

Разделив всю длину балки на 8 частей, вычислим для каждой координаты x значения ВСФ по формулам (4.1) – (4.9). Вычисленные значения ВСФ приведены в таблице 4.4, а эпюры, построенные по этим значениям приведены на рис. 4.10. Из анализа эпюр определяем, что опасным сечением является сечение при $x=l=2$ м. Для этого сечения ВСФ равны: $V_z=5,5$ кН, $M_y=8,375$ кНм, $B=0,539$ кНм², $M_{\theta}=0$ кНм, $M_{\omega}=0,3821$ кНм.

Таблица 4.4 Расчет значений ВСФ

Параметры	x, м								
	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
αx	0	0,0631	0,1262	0,1893	0,2524	0,3155	0,3786	0,4418	0,5049
$sh(\alpha x)$	0	0,063	0,127	0,190	0,255	0,321	0,388	0,456	0,5266
$ch(\alpha x)$	1	1,002	1,008	1,018	1,032	1,050	1,073	1,099	1,1302
$sh\alpha(x-0,5)$	0	0	0	0,063	0,127	0,190	0,255	0,321	0,3878
$sh\alpha(x-1)$	0	0	0	0	0	0,063	0,127	0,190	0,2551
$ch\alpha(x-0,5)$	1	1	1	1,002	1,008	1,018	1,032	1,050	1,073
$ch\alpha(x-1)$	1	1	1	1	1	1,002	1,008	1,018	1,0320
θ , рад/м	-0,0187	-0,0165	-0,0145	-0,0127	-0,0112	-0,0095	-0,0070	-0,0039	0,0000
θ' , рад/м ²	0,0088	0,0084	0,0077	0,0067	0,0054	0,0082	0,0111	0,0141	0,0171
M_{θ} , кНм	-0,0376	-0,0333	-0,0292	-0,0256	-0,0225	-0,0191	-0,0142	-0,0078	0,0000
B , кНм ²	0,278	0,265	0,244	0,213	0,170	0,261	0,352	0,445	0,539
M_k , кНм	0,0000	0,0347	0,0695	0,1216	$\frac{0,1737}{-0,3821}$	-0,3821	-0,3821	-0,3821	-0,3821
M_{ω} , кНм	0,0376	0,0680	0,0987	0,1472	$\frac{0,1962}{-0,3596}$	-0,3631	-0,3679	-0,3743	-0,3821
$\varphi \cdot 10^3$, рад	21,190	16,794	12,920	9,526	6,552	3,960	1,883	0,502	0,000
V_z , кН	0,000	0,500	1,00	1,75	$\frac{2,50}{-5,50}$	-5,50	-5,50	-5,50	-5,50
M_y , кНм	-4,000	-3,938	-3,750	-3,406	-2,875	-4,250	-5,625	-7,000	-8,375

Из анализа эпюр определяем, что опасным сечением является сечение при $x=l=2$ м. Для этого сечения ВСФ равны: $V_z=5,5$ кН, $M_y=8,375$ кНм, $B=0,539$ кНм², $M_{\theta}=0$ кНм, $M_{\omega}=0,3821$ кНм.

Нормальные напряжения от изгиба по формуле (1.14) равны

$$\sigma_{xi} = \frac{M_y}{I_y} z_i = \frac{0,539 \cdot 10^{-3}}{3378 \cdot 10^{-8}} z_i \cdot 10^{-2} = 2,479 \cdot z_i \text{ МПа, где } z_i \text{ в см.}$$

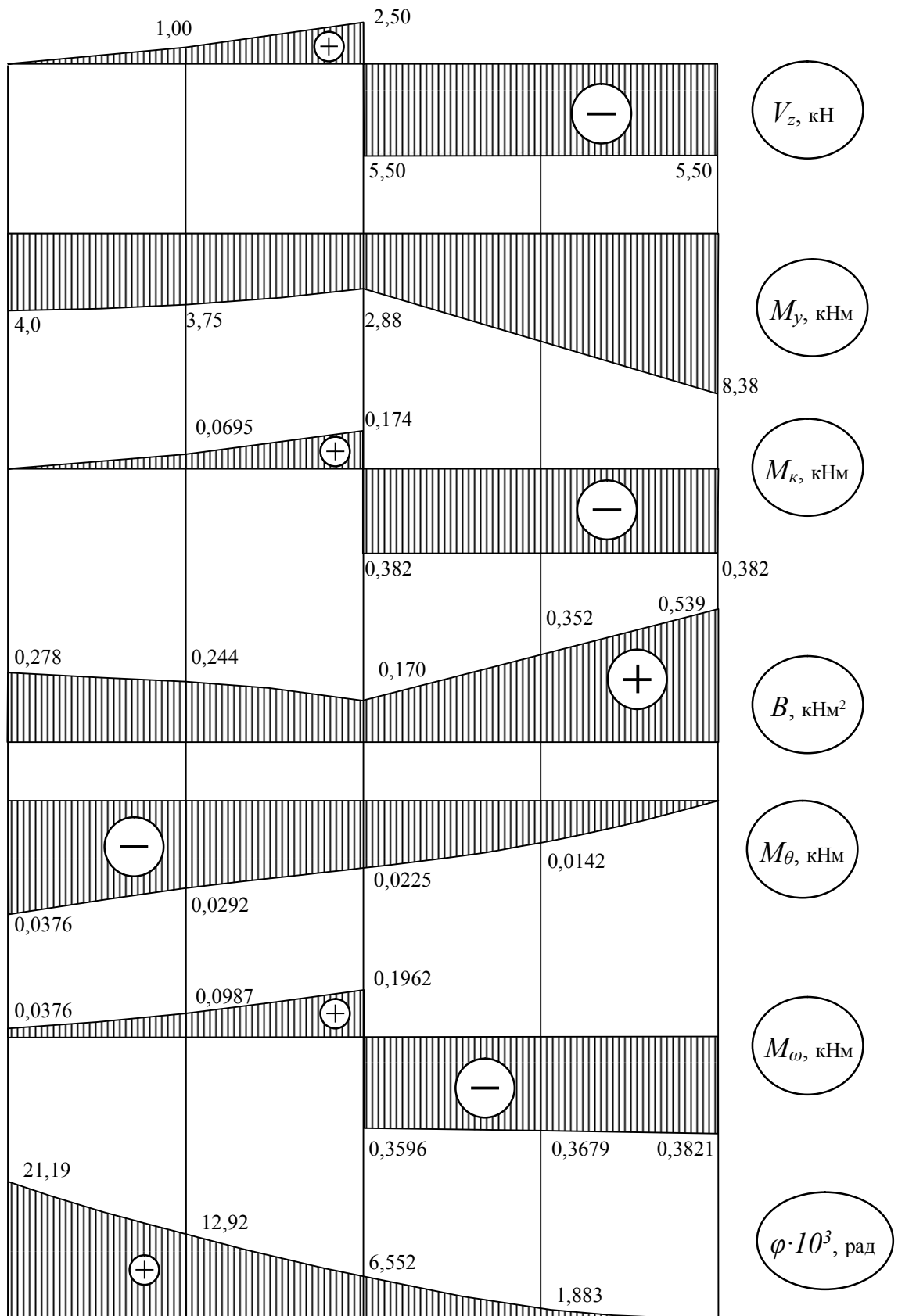


Рисунок 4.10 Эпюры внутренних силовых факторов

Нормальные напряжения стесненного кручения по формуле (1.15) для

точек контура равны

$$\sigma_{\omega i} = \frac{B}{I_{\omega}} \omega_i = \frac{8,375 \cdot 10^{-3}}{158040 \cdot 10^{-12}} \omega_i \cdot 10^{-4} = 5,299 \cdot \omega_i \text{ МПа, где } \omega_i \text{ в см}^2.$$

Касательные напряжения свободного кручения равны $\tau_{\theta} = 0$ МПа.

Касательные напряжения стесненного кручения по формуле (1.17) равны

$$\tau_{\omega i} = -\frac{M_{\omega} S_{\omega}^{\text{отс}}}{I_{\omega} \delta_i} = -\frac{-0,3821 \cdot 10^{-3}}{158040 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{S_{\omega}^i}{\delta_i} \cdot 10^{-6} = 24,18 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{S_{\omega}^i}{\delta_i} \text{ МПа, где } S_{\omega}^i \text{ в см}^4, \text{ а } \delta_i \text{ в см.}$$

Касательные напряжения сдвига по формуле (1.18) равны

$$\tau_V = \frac{V_z S_y^{\text{отс}}}{I_y \delta_i} = \frac{-5,5 \cdot 10^{-3}}{3378 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{S_y^i}{\delta_i} \cdot 10^{-4} = -16,28 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{S_y^i}{\delta_i} \text{ МПа.}$$

В таблице 4.5 приведены значения нормальных и касательных напряжений, вычисленных по приведенным формулам.

Таблица 4.5 Нормальные и касательные напряжения

точки	z, см	ω , см ²	Нормальные, МПа			S_y^i	S_{ω}^i	δ_i	Касательные, МПа		
			σ_x	σ_{ω}	$\sigma_{\text{сум}}$				τ_V	τ_{ω}	$\tau_{\text{сум}}$
1	0	0	0	0	0	192,5	-0,04	0,5	-6,27	0	-6,27
2	13,0	-90,32	-32,23	-30,8	-63,0	108,0	293,5	0,5	-1,76	1,42	0,34
3	13,0	65,68	-32,23	22,4	-9,8	30,0	367,4	0,5	-0,49	1,78	1,29
4	7,0	179,4	-17,35	61,2	43,8	0	0	0,5	0	0	0

Из анализа суммарной эпюры нормальных напряжений получаем, что наиболее опасной точкой является точка 2 контура. В опасной точке 2 опасного сечения вычисляются эквивалентные и выполняется оценка по 3 теории прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_{\text{сум}}^2 + 4\tau_{\text{сум}}^2} = \sqrt{63,0^2 + 4 \cdot 0,34^2} \approx 63,0 \text{ МПа.}$$

Условие прочности $\sigma_{\text{ЭКВ}} = 63,0 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 0,75\sigma_T = 0,75 \cdot 235 = 176 \text{ МПа}$ выполняется.

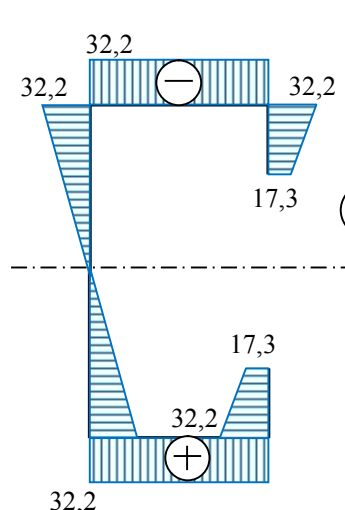


Рисунок 4.11 – Эпюра нормальных напряжений изгиба

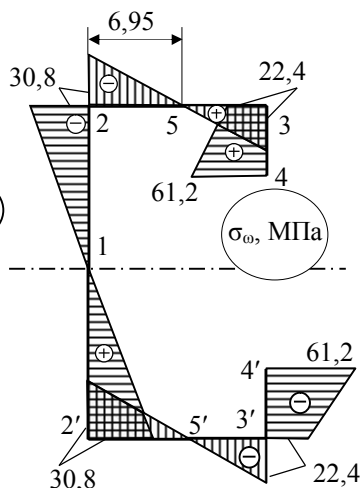


Рисунок 4.12 - Эпюра нормальных напряжений стесненного кручения

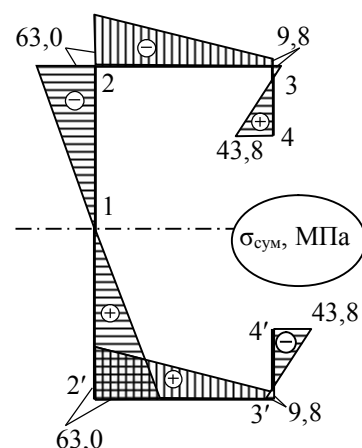


Рисунок 4.13 - Эпюра суммарных нормальных напряжений

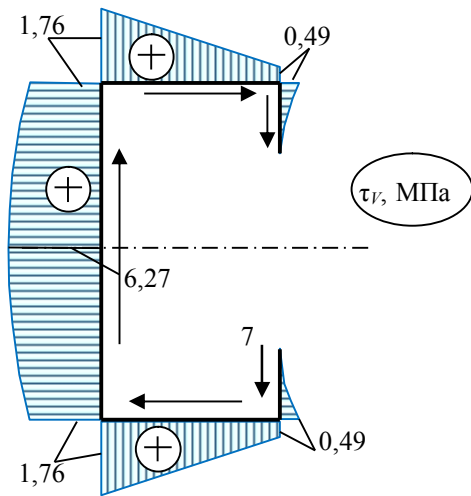


Рисунок 4.14 – Эпюра касательных напряжений среза

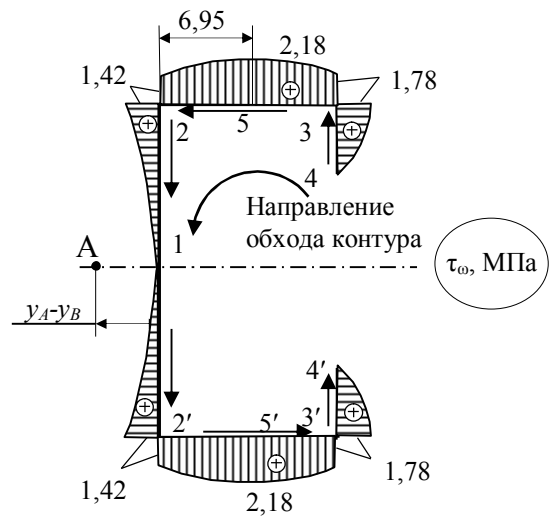


Рисунок 4.15 - Эпюра секториальных касательных напряжений

Составитель:
Доцент, к.т.н. В.Д.Вешуткин