

**Уфимский государственный авиационный  
технический университет**

**Кафедра сопротивления материалов**

**КУРСОВАЯ РАБОТА  
по сопротивлению материалов**

**Тема: Расчет стержневых систем на прочность  
и жесткость**

	Должность / группа	Ф.И.О.	Дата	Подпись
Выполнил				
Проверил				
Принял				

г. Уфа.  
2006 г.



## 1. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

### 1.1. Выбор материала и допускаемых напряжений

#### 1.1.1. Расчет физико-механических характеристик материала

Диаграмма растяжения титанового сплава ВТЗ изображена на рис. 1.1. Образец длиной  $l_0 = 80$  мм и диаметром  $d_0 = 8$  мм разрушился с образованием шейки  $d_1 = 6,7$  мм, что свидетельствует о том, что материал пластичный.

Площадь поперечного сечения образца до испытаний:

$$A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} = \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 50,24 \text{ мм}^2;$$

после разрушения:

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 6,7^2}{4} = 35,2 \text{ мм}^2.$$

Относительное остаточное удлинение

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} \cdot 100\% = \frac{12,2}{80} \cdot 100\% = 15\%.$$

Относительное остаточное сужение

$$\Psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\% = \frac{50,24 - 35,20}{50,24} \cdot 100\% = 29,9\%.$$

Определим основные характеристики прочности.

Предел пропорциональности

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{F_{\text{пц}}}{A_0} = \frac{44 \cdot 10^3}{50,24} = 875 \text{ МПа}.$$

Условный предел текучести

$$\sigma_{0,2} = \frac{F_{0,2}}{A_0} = \frac{46 \cdot 10^3}{50,24} = 916 \text{ МПа}.$$

Предел прочности (временное сопротивление  $\sigma_B$ )

$$\sigma_{\text{пч}} = \frac{F_{\text{max}}}{A_0} = \frac{55 \cdot 10^3}{50,24} = 1095 \text{ МПа}.$$

#### 1.1.2. Расчет допускаемых напряжений

Допускаемое напряжение  $[\sigma]$  выбираем, как некоторую долю предельного напряжения  $\sigma_{\text{пред}}$ , то есть

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n},$$

где  $n$  – коэффициент запаса прочности.

Рекомендуемые значения  $n = 1,5 \div 2,5$ . Примем  $n = 1,5$ , тогда

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n} = \frac{\sigma_{0,2}}{n} = \frac{916}{1,5} = 611 \text{ МПа}.$$

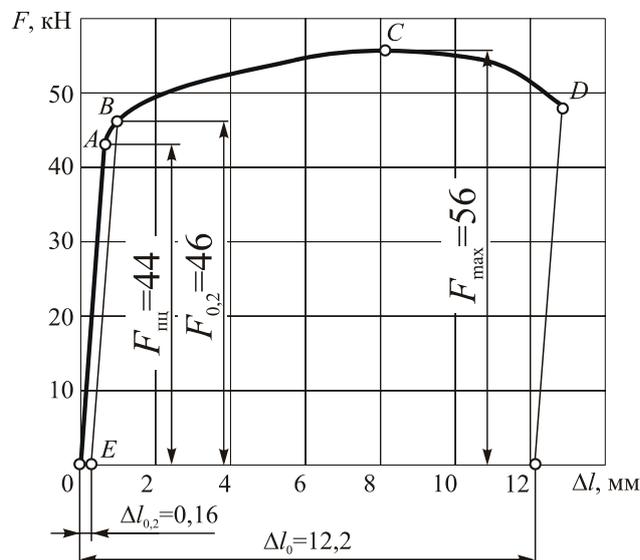


Рис. 1.1

## 1.2. Проектировочный расчет на прочность ступенчатого стержня

Для ступенчатого стержня представленного на рис. 1.2 необходимо построить эпюру продольных сил, построить эпюру напряжений, отнесенную к площади  $A_0$ , найти  $A_0$  из условия прочности.

### 1.2.1. Построение эпюры продольных сил

Составим уравнение равновесия системы (рис. 1.3, а):

$$\sum F_z = R_A - q(l_1 + l_3) - F_1 = 0,$$

откуда

$$R_A = q(l_1 + l_3) + F_1 = 22(0,3 + 0,4) + 20 = 35,4 \text{ кН.}$$

Разобьем стержень на 3 участка  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ , проведем на каждом из них произвольные сечения 1-1, 2-2, 3-3 с координатами  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  (рис. 1.3, а).

Участок  $AB$  ( $0 \leq z_1 \leq l_3 = 0,4 \text{ м}$ ) (рис. 1.4, а). Из равновесия оставленной верхней части следует, что

$$N(z_1) = R_A = 35,4 \text{ кН.}$$

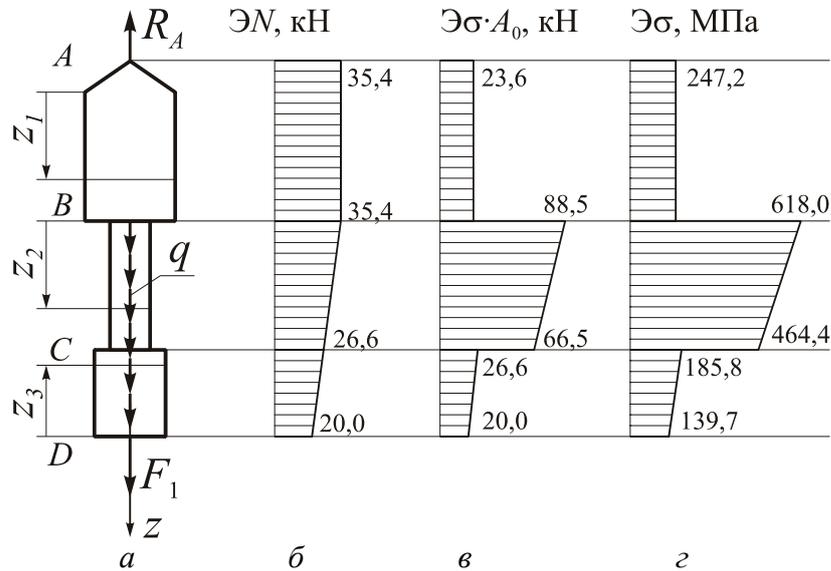
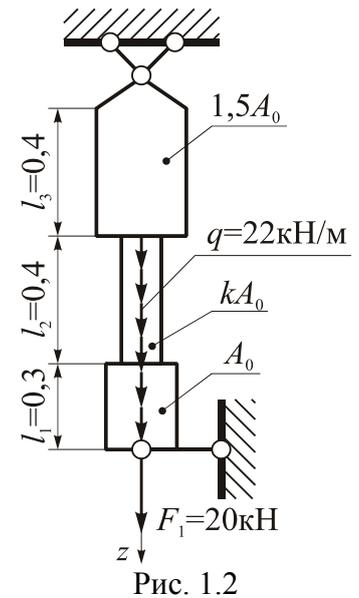


Рис. 1.3

На участке  $BC$  ( $0 \leq z_2 \leq l_2 = 0,4 \text{ м}$ ) (рис. 1.4, б). Из условия равновесия получим

$$N(z_2) = R_A - q \cdot z_2$$

Значение  $N(z_2)$  в начале участка, точка  $B$ , и в конце участка, точка  $C$   $N(z_2=0) = R_A = 35,4 \text{ кН}$ ; и  $N(z_2=l_3) = R_A - q \cdot l_2 = 35,4 - 22 \cdot 0,4 = 26,6 \text{ кН}$ .

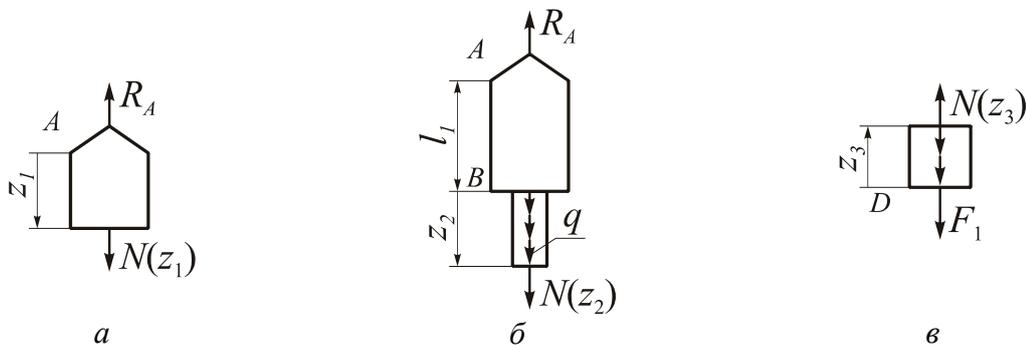


Рис. 1.4

На участке  $CD$  ( $0 \leq z_3 \leq l_1 = 0,3\text{м}$ ) (рис. 1.4, в). Отбросим верхнюю часть, ее действие заменим продольной силой  $N(z_3)$ . Из уравнения равновесия следует

$$N(z_3) = F_1 + qz_3.$$

Функция  $N(z_3)$  представляет линейную зависимость. Значение  $N(z_3)$  в начале (точка  $D$ ) и в конце (точка  $C$ ) участка  $N(z_3=0) = F_1 = 20\text{кН}$ , и  $N(z_3=l_1) = F_1 + q \cdot l_1 = 20 + 22 \cdot 0,3 = 26,6\text{кН}$ .

По полученным данным строим эпюру  $N$  (рис. 1.3, б). Эпюра показывает, что на всех участках стержня – растяжение. Скачок в сечении  $A$  равен реакции  $R_A = 35,4\text{кН}$ , в сечении  $D$  – силе  $F_1 = 20\text{кН}$ , приложенной в этом сечении.

### 1.2.2. Построение эпюры напряжений

Нормальные напряжения  $\sigma(z)$  распределяются равномерно по сечению:

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{A(z)},$$

где  $N(z)$  – продольная сила,  $A(z)$  – площадь поперечного сечения.

Для определения положения опасного сечения стержня, в котором возникают максимальные напряжен, определим напряжения в долях  $1/A_0$ .

Участок  $AB$  ( $0 \leq z_1 \leq l_1 = 0,4\text{м}$ ), нормальные напряжения

$$\sigma(z_1) = \frac{N(z_1)}{1,5 A_0} = \frac{35,4}{1,5 A_0} = \frac{23,6}{A_0}.$$

На участке  $BC$  ( $0 \leq z_2 \leq l_2 = 0,4\text{м}$ ):

$$\sigma(z_2) = \frac{N(z_2)}{0,4 A_0} = \frac{R_A - qz_2}{0,4 A_0} = \begin{cases} z_2 = 0 : \frac{35,4 - 0}{0,4 A_0} = \frac{88,5}{A_0}; \\ z_2 = l_2 : \frac{35,4 - 22 \cdot 0,4}{0,4 A_0} = \frac{66,5}{A_0}. \end{cases}$$

Участок  $CD$  ( $0 \leq z_3 \leq l_1 = 0,3\text{м}$ ):

$$\sigma(z_3) = \frac{N(z_3)}{A_0} = \frac{F_1 + qz_3}{A_0} = \begin{cases} z_3 = 0 : \frac{20 + 0}{A_0} = \frac{20}{A_0}; \\ z_3 = l_1 : \frac{20 + 22 \cdot 0,3}{A_0} = \frac{26,6}{A_0}. \end{cases}$$

По полученным данным построим  $\text{Э}\sigma_{A_0}$  (рис. 1.3, в).

### 1.2.3. Расчет на прочность. Подбор сечения

По эпюре напряжений видно, что опасным является сечение  $B$

$$|\sigma|_{\max} = \frac{88,5}{A_0}.$$

Условие прочности при растяжении (сжатии) имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N(z)}{A(z)} \right|_{\max} \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение, которое определено выше для материала ВТЗ и равно  $[\sigma] = 611\text{МПа}$ .

Тогда условие прочности примет вид

$$\frac{88,5}{A_0} \leq [\sigma],$$

откуда  $A_0$ :

						Лист
						4
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

$$A_0 \geq \frac{88,5}{[\sigma]} = \frac{88,5 \cdot 10^3}{611} = 145 \text{ мм}^2.$$

При этом  $A_1=1,5A_0=1,5 \cdot 145=217,5 \text{ мм}^2$ ;  $A_2=0,4A_0=0,4 \cdot 145=58 \text{ мм}^2$ ;  $A_3=A_0=145 \text{ мм}^2$ .  
 Определим напряжения, действующие в сечениях при выбранном значении  $A_0$ .

Участок  $AB$ :  $\sigma = \frac{23,6}{A_0} = \frac{23,6 \cdot 10^3}{145} = 163 \text{ МПа}$ .

Участок  $BC$ :  $\begin{cases} \sigma(z_2 = 0) = \frac{88,5}{A_0} = \frac{88,5 \cdot 10^3}{144} = 610 \text{ МПа}; \\ \sigma(z_2 = l_3) = \frac{66,5}{A_0} = \frac{66,5 \cdot 10^3}{145} = 459 \text{ МПа}. \end{cases}$

Участок  $CD$ :  $\begin{cases} \sigma(z_3 = 0) = \frac{26,6}{A_0} = \frac{26,6 \cdot 10^3}{145} = 183 \text{ МПа}; \\ \sigma(z_3 = l_1) = \frac{20}{A_0} = \frac{20 \cdot 10^3}{145} = 138 \text{ МПа}. \end{cases}$

По полученным данным строим эпюру действующих в стержне нормальных напряжений (рис. 1.3,  $z$ ).

### 1.3. Расчет на жесткость стержня постоянного сечения

Для стержня из стали 40Х, площадью сечения  $A=6 \text{ см}^2$ , представленного на рис.1.5, необходимо построить эпюры продольных сил и осевых перемещений, выполнить расчет на жесткость.

#### 1.3.1. Построение эпюр продольных сил и перемещений

Построение эпюры продольных сил. Направим вдоль оси стержня ось  $z$  (рис. 1.5). Составим уравнение равновесия системы:

$$\sum F_z = R_A - ql_1 - 2F_1 + F_1 = 0,$$

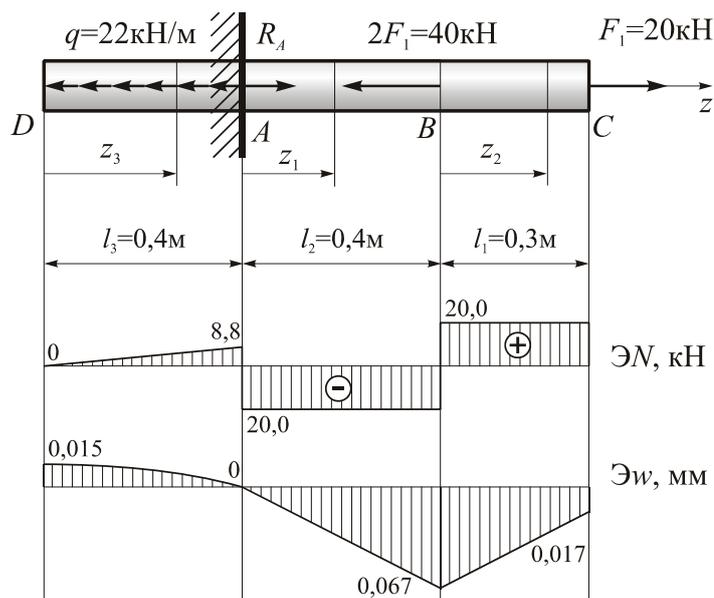


Рис.1.5.

откуда

$$R_A = ql_1 + 2F_1 - F_1 = \\ = 22 \cdot 0,4 + 2 \cdot 20 - 20 = 28,8 \text{ кН.}$$

Разобьем стержень на 3 участка  $DA$ ,  $AB$  и  $BC$ , проведем на каждом из них произвольные сечения 1-1, 2-2, 3-3 с заданными координатами этих сечений  $z_1, z_2, z_3$ .

На участке  $AB$  ( $0 \leq z_1 \leq l_2 = 0,4 \text{ м}$ ) Отбросим правую часть, ее действие заменим продольной силой  $N(z_1)$ :

$$N(z_1) = ql_1 - R_A = 22 \cdot 0,4 - 28,8 = -20 \text{ кН.}$$

Участок  $BC$  ( $0 \leq z_2 \leq l_1 = 0,3 \text{ м}$ ):

$$N(z_2) = ql_1 - R_A + 2F_1 = 22 \cdot 0,4 - 28,8 + 40 = 20 \text{ кН.}$$

Участок  $DA$  ( $0 \leq z_3 \leq l_3 = 0,4 \text{ м}$ ):

$$N(z_3) = qz_3.$$

Значение функции  $N(z_3)$  в сечении  $D$  и в сечении  $A$  участка –  $N(z_3 = 0) = 0$ ; и  $N(z_3 = l_3) = ql_3 = 22 \cdot 0,4 = 8,8 \text{ кН}$ .

По полученным данным строим эпюру  $\Delta N$  (рис. 1.5).

Построение эпюры перемещений. Запишем уравнения для перемещений  $w(z)$  сечений, считая площади сечений известными:

$$w(z) = w_0 + \Delta l(z),$$

где  $w_0$  – перемещение в начале участка, определяемое начальными условиями;  $\Delta l(z)$  – удлинение участка (абсолютная деформация участка стержня).

Если продольная сила  $N(z)$  зависит от координат сечения  $z$ , то:

$$\Delta l(z) = \int_l \frac{N(z) dz}{EA}$$

Для стали 40X  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ . В расчетах примем жесткость сечения при растяжении-сжатии  $EA = 2 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^2 = 12 \cdot 10^7 \text{ Н} = 12 \cdot 10^4 \text{ кН}$ .

Рассмотрим участок  $DA$  ( $0 \leq z_3 \leq l_3 = 0,4 \text{ м}$ ). Перемещения произвольного сечения  $z_3$

$$w(z_3) = w_D - \int_0^{z_3} \frac{N(z_3) dz_3}{EA} = w_D - \int_0^{z_3} \frac{qz_3}{EA} dz_3 = w_D - \frac{qz_3^2}{2EA},$$

Функция  $w(z_3)$  – квадратичная парабола. Так как в сечении  $A$  заделка, то есть  $w(z_3 = l_1) = w_D - \frac{ql_1^2}{2EA} = w_D - \frac{22 \cdot 0,4^2 \cdot 10^3}{2 \cdot 12 \cdot 10^4} = w_D - 0,015 \text{ мм} = 0$ . Тогда  $w_D = 0,015 \text{ мм}$ .

Так в пределах участка  $DA$  продольная сила  $N(z_3)$  не меняет знака, то парабола в пределах участка не имеет экстремума. Функция  $w(z_3)$  выпуклая, так как  $w''(z_3) < 0$ .

Участок  $AB$  ( $0 \leq z_1 \leq l_2 = 0,4 \text{ м}$ ). Перемещения произвольного сечения  $z_1$

$$w(z_1) = w_A + \frac{N(z_1)z_1}{EA} = -\frac{F_1 z_1}{EA}.$$

Функция  $w(z_1)$  – линейная. При  $z_1 = 0$   $w(z_1 = 0) = 0$ ; при  $z_1 = l_2 = 0,4 \text{ м}$   $w_B(z_2 = 0,4 \text{ м}) = -\frac{F_1 l_2}{EA} = -\frac{20 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^4} = -0,067 \text{ мм}$ .

Участок  $BC$  ( $0 \leq z_2 \leq l_1 = 0,3 \text{ м}$ ). Перемещения произвольного сечения  $z_2$

$$w(z_2) = w_B + \frac{N(z_2)z_2}{EA} = w_B + \frac{F_1 z_2}{EA}$$

Функция  $w(z_2)$  – линейная. При  $z_2 = 0$   $w(z_2 = 0) = w_B = -0,067 \text{ мм}$ ; при  $z_2 = l_3 = 0,3 \text{ м}$ ,  $w_C(z_2 = 0,3 \text{ м}) = w_B + \frac{F_1 l_2}{EA} = -0,067 + \frac{20 \cdot 0,3 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^4} = -0,017 \text{ мм}$ .

По полученным данным строим эпюру перемещений  $\Delta w$  (рис. 1.5).

					Лист
					6
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	

### 1.3.2. Расчет на жесткость

Условие жесткости при растяжении–сжатии

$$\Delta L \leq [l],$$

где  $\Delta L$  –удлинение стержня,  $[l]$  – допускаемое удлинение. В данном случае условие жесткости должно выполняться для участков  $AB$  и  $BD$ :

$$\Delta L_{AC} \leq [l]_{AC}, \quad \Delta L_{DA} \leq [l]_{DA}$$

Величина  $[l] = 0,001L$  принимается в долях от суммарной длины  $L$ ,

$$[l]_{AC} = 0,001(l_2 + l_3) = 0,001 \cdot (0,4 + 0,3) = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,7 \text{ мм},$$

$$[l]_{DA} = 0,001l_1 = 0,001 \cdot 0,4 = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,4 \text{ мм}.$$

Запишем условие жесткости

$$|\Delta L_{DA}| = 0,015 \text{ мм} < [l]_{DA} = 0,4 \text{ мм};$$

$$|\Delta L_{AC}| = 0,067 \text{ мм} < [l]_{DA} = 0,7 \text{ мм}.$$

Условие жесткости выполняется.

						Лист
						7
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

#### 1.4. Расчет на прочность статически неопределимой стержневой системы при растяжении – сжатии

Стержневая система, состоящая из жесткого стержня  $BC$  и двух упругих стержней  $DC$  и  $KC$ , нагружена силой  $F=60\text{кН}$  (рис.1.6). Определить коэффициент запаса прочности стержневой системы, если  $\alpha=45^\circ$ ,  $\beta=15^\circ$ ,  $l_1=0,8\text{м}$ ,  $l_2=0,6\text{м}$ ,  $A=200\text{мм}^2$ ,  $k=0,8$ , материал – сталь 40X с пределом текучести  $\sigma_T=650\text{МПа}$ .

При известной площади сечения выполняется проверочный расчет на прочность по напряжениям. Величина фактического коэффициента запаса  $n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}}$ , где  $\sigma_{\text{пред}}$  – предельное значение

напряжения для заданного материала.  $\sigma_{\text{max}}$  – максимальное рабочее напряжение, возникающее в заданной стержневой системе, от приложенных нагрузок. Сталь 40X пластичный материал, тогда  $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_T$ , следовательно

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{max}}}$$

напряжения для заданного материала.  $\sigma_{\text{max}}$  – мак-

симальное рабочее напряжение, возникающее в заданной стержневой системе, от приложенных нагрузок. Сталь 40X пластичный материал, тогда  $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_T$ , следовательно

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{max}}}$$

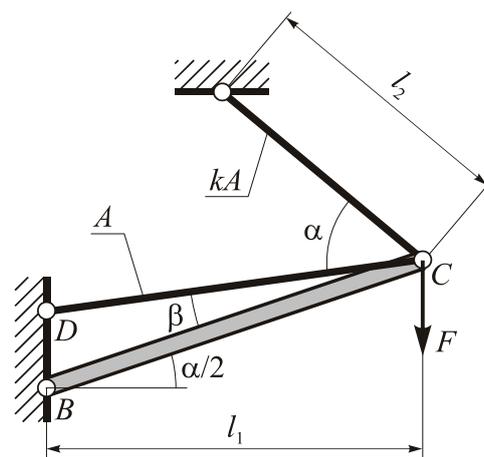


Рис.1.6.

##### 1.4.1. Уравнения равновесия.

Составим уравнения статического равновесия (рис.1.7):

$$R_{BN} - N_{DC} \cos \beta - N_{KC} \cos(\alpha + \beta) = 0; \quad (1)$$

$$R_{BQ} + N_{DC} \sin \beta + N_{KC} \sin(\alpha + \beta) = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma \text{mom}_B = N_{DC} \left( \frac{l_1}{\sin \alpha/2} \right) \sin \beta + \quad (3)$$

$$+ N_{KC} \left( \frac{l_1}{\sin \alpha/2} \right) \sin(\alpha + \beta) - Fl_1 = 0.$$

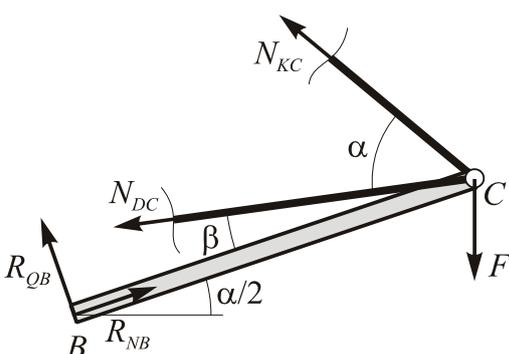


Рис.1.7.

Для дальнейшего решения применяем уравнение (3), так как реакции опоры В для оценки прочности не нужны. Преобразуем (3), подставляя значения углов и длин, получим

$$0,259N_{DC} + 0,866N_{KC} = 0,383F. \quad (4)$$

Полученное уравнение содержит две неизвестные продольные силы  $N_{DC}$  и  $N_{KC}$ . Составляем дополнительное уравнение, которое вытекает из условия совместности перемещений.

##### 1.4.2. Уравнения совместности деформаций

Составим уравнения совместности деформаций (рис.1.8):  $C_1C_2 = \Delta l_{DC}$ ;  $C_1C_3 = \Delta l_{KC}$ ; Из  $\Delta CC_1C_2$  имеем  $CC_1 = \frac{C_1C_2}{\sin \beta}$ ; из  $\Delta CC_1C_3$  получим

$$CC_1 = \frac{C_1C_3}{\sin(\alpha + \beta)}, \text{ приравняем отрезки}$$

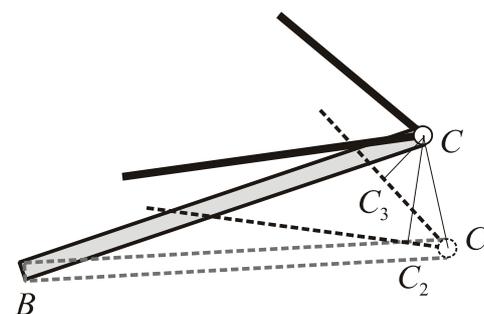


Рис.1.8.

$$\frac{C_1 C_2}{\sin \beta} = \frac{C_1 C_3}{\sin(\alpha + \beta)} \text{ или } \frac{\Delta l_{DC}}{\sin \beta} = \frac{\Delta l_{KC}}{\sin(\alpha + \beta)},$$

подставив данные углы, получим

$$\Delta l_{DC} = 0,299 \Delta l_{KC} \quad (5)$$

- уравнение совместности перемещений.

### 1.4.3. Физические уравнения

Составим физические уравнения. По закону Гука  $\Delta l_{DC} = \frac{N_{DC} l_{DC}}{E_{DC} A_{DC}}$ ;  $\Delta l_{KC} = \frac{N_{KC} l_{KC}}{E_{KC} A_{KC}}$ .

Подставляя в уравнение совместности перемещений, с учетом длин стержней, соотношений площадей и материала, получим

$$\frac{N_{DC} l_1}{\cos(\alpha/2 - \beta) EA} = 0,299 \frac{N_{KC} l_2}{EkA},$$

умножим на  $EA$  и подставим данные

$$\frac{N_{DC} 0,8}{\cos(22,5^\circ - 15^\circ)} = 0,299 \frac{N_{KC} 0,6}{0,8},$$

после вычислений получим

$$N_{DC} = 0,278 N_{KC}. \quad (6)$$

### 1.4.4. Расчет усилий в стержнях

Статическое уравнение (4) и дополнительное преобразованное уравнение (6) совместности перемещений дают систему разрешающих уравнений:

$$\begin{cases} 0,259 N_{DC} + 0,866 N_{KC} = 0,383 F; \\ N_{DC} = 0,278 N_{KC}. \end{cases}$$

Из решения системы уравнений получим  $N_{KC} = 0,408 F$ ;  $N_{DC} = 0,114 F$ .

### 1.4.5. Расчет на прочность

Напряжения в стержнях

$$\sigma_{KC} = \frac{N_{KC}}{kA} = \frac{0,408 F}{0,8 A} = \frac{0,51 F}{A} = \frac{0,51 \cdot 60 \cdot 10^3}{200} = 153 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{DC} = \frac{N_{DC}}{A} = \frac{0,114 F}{A} = \frac{0,114 \cdot 60 \cdot 10^3}{200} = 34,2 \text{ МПа}.$$

Видно, что максимальные напряжения возникают в стержне  $KC$ :

$$\sigma_{\max} = \sigma_{KC} = 153 \text{ МПа}.$$

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n};$$

где  $n$  – коэффициент запаса прочности. Для сталей  $n = 1,5 \div 2,5$ , примем  $n = 2$ .

Тогда допускаемые напряжения  $[\sigma] = \frac{650}{2} = 325 \text{ МПа}$ .

Условие прочности для заданной стержневой системы выполняется:

$$\sigma_{\max} = 153 \text{ МПа} < [\sigma] = 325 \text{ МПа}.$$

						Лист
						9
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

## 1.5. РАСЧЕТ МОНТАЖНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЕ И ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ

При сборке стержневой системы (рис.1.9) обнаружено несоответствие длин стержней (зазор равен  $\Delta$ ). Сборка была произведена путем принудительного совмещения шарниров. Определить напряжения в стержнях после сборки (монтажные напряжения) и оценить прочность при следующих данных:  $l_1=0,8\text{м}$ ;  $l_2=1,2\text{м}$ ;  $k=0,6$ ;  $\Delta=0,8\text{мм}$ ; стержни стальные  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_T = 650 \text{ МПа}$ ;  $\alpha=30^\circ$ ;  $\beta=45^\circ$ .

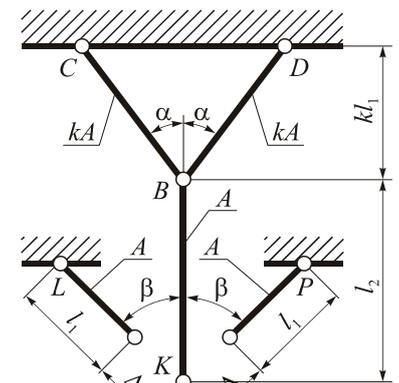


Рис.1.9.

### 1.5.1. Уравнения равновесия.

Для узла B (рис.1.10):

$$\Sigma F_x = -N_{BD} \sin \alpha + N_{BC} \sin \alpha = 0; \quad N_{BC} = N_{BD};$$

$$\Sigma F_y = N_{BK} - N_{BC} \cos \alpha - N_{BD} \cos \alpha = 0;$$

$$N_{BK} = 2N_{BC} \cos \alpha = 2N_{BC} \cos 30 = \sqrt{3}N_{BC}.$$

Для узла K (рис.1.11):

$$\Sigma F_x = N_{PK} \sin \beta - N_{KL} \sin \beta = 0; \quad N_{PK} = N_{KL};$$

$$\Sigma F_y = -N_{BK} + N_{KL} \cos \beta + N_{PK} \cos \beta = 0;$$

$$N_{BK} = 2N_{KL} \cos \beta = 2N_{KL} \cos 45 = \sqrt{2}N_{KL}.$$

Получили два уравнения

$$N_{BK} = \sqrt{3}N_{BC}; \quad (1)$$

$$N_{BK} = \sqrt{2}N_{KL}. \quad (2)$$

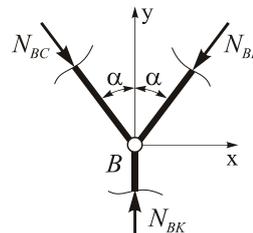


Рис.1.10.

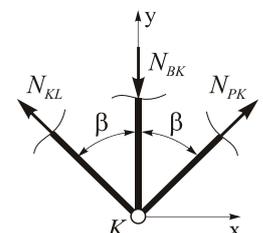


Рис.1.11.

### 1.5.2. Уравнения совместности деформаций.

Стержневая система получает некоторые деформации (рис.1.12), которые взаимосвязаны друг с другом:  $KK_1=\Delta$ ;  $K_1K_3=\Delta l_{KL}$ ;  $KK_3=KK_1-K_1K_3=\Delta-\Delta l_{KL}$ ;  $BB_2=\Delta l_{BC}$ ;  $\Delta l_{BK}=KK_2-BB_1$ ;

$BB_1 = \frac{BB_2}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_{BC}}{\sin \alpha}$ , получаем уравнение совместности деформаций:

$$\Delta l_{BK} = \frac{\Delta - \Delta l_{KL}}{\cos \beta} - \frac{\Delta l_{BC}}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

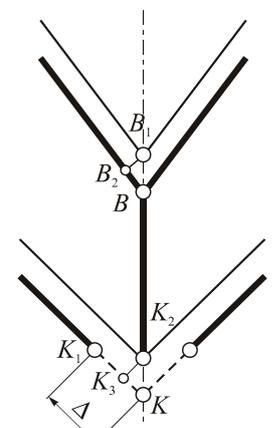


Рис.1.12.

### 1.5.3. Физические уравнения

По закону Гука, удлинения стержней равны:

$$\Delta l_{BK} = \frac{N_{BK} l_{BK}}{E_{BK} A_{BK}} = \frac{N_{BK} l_2}{EA},$$

$$\Delta l_{KL} = \frac{N_{KL} l_{KL}}{E_{KL} A_{KL}} = \frac{N_{KL} l_1}{EA},$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{E_{BC} A_{BC}} = \frac{N_{BC} k l_1}{EkA \cos \alpha}.$$

Подставляя значения перемещений в уравнение 3, получим:

$$\frac{N_{BK} l_2}{EA} = \frac{\Delta - \frac{N_{KL} l_1}{EA}}{\cos \beta} - \frac{N_{BC} l_1}{EA \cos \alpha},$$

откуда в результате преобразований и подстановки числовых данных получим:

$$1,2N_{BK} + 1,13N_{KL} + 1,39N_{BC} = 1,41EA\Delta. \quad (4)$$

#### 1.5.4. Расчет усилий в стержнях.

Решаем совместно систему уравнений 1, 2 и 4:

$$\begin{cases} N_{BK} = \sqrt{3}N_{BC}; \\ N_{BK} = \sqrt{2}N_{KL}; \\ 1,2N_{BK} + 1,13N_{KL} + 1,39N_{BC} = 1,41EA\Delta. \end{cases}$$

Находим силы действующие в стержнях. Стержень  $BC$ :

$$N_{BC} = \frac{1,41EA\Delta}{4,86} = \frac{1,41 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ А} \cdot 0,8}{4,86 \cdot 10^3} = 46,42 \text{ А}.$$

Стержень  $BK$ :

$$N_{BK} = 1,23\sqrt{2}N_{BC} = 80,74 \text{ А}.$$

Стержень  $KL$ :

$$N_{KL} = 1,23N_{BC} = 57,10 \text{ А}.$$

#### 1.5.5. Расчет на прочность.

Определим напряжения в стержнях. Для стержнях  $BC$ :

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{kA} = \frac{46,42 \text{ А}}{0,6 \text{ А}} = 77,37 \text{ МПа}.$$

Для стержнях  $BK$ :

$$\sigma_{BK} = \frac{80,74 \text{ А}}{A} = 80,74 \text{ МПа}.$$

Для стержнях  $KL$ :

$$\sigma_{KL} = \frac{57,10 \text{ А}}{A} = 57,10 \text{ МПа}.$$

Максимальные напряжения возникают в стержне  $BK$   $\sigma_{\max} = 80,74 \text{ МПа}$ .

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n};$$

где  $n$  – коэффициент запаса прочности. Для сталей  $n = 1,5 \div 2,5$ , примем  $n = 2$ . Тогда допускаемые напряжения  $[\sigma] = \frac{650}{2} = 325 \text{ МПа}$ .

Условие прочности для заданной стержневой системы выполняется:

$$\sigma_{\max} = 80,74 \text{ МПа} < [\sigma] = 325 \text{ МПа}.$$

						Лист
						11
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

## 2. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

### 2.1. Проектировочный расчет на прочность ступенчатого стержня

Для ступенчатого стержня, представленного на рис. 2.1, необходимо построить эпюру крутящих моментов, эпюру условных касательных напряжений как функцию параметра сечения  $d$ , из условия прочности найти искомое значение  $d$ , в расчетах использовать материал, представленный кривой деформирования, в соответствии с вариантом задания.

#### 2.1.1. Построение эпюры крутящих моментов

Направим вдоль оси стержня ось  $z$  (рис. 2.2, а). Запишем условие равновесия стержня  $AD$  в виде

$$\sum_{i=1}^n \text{mom}_z T_i = 0;$$

$$T_1 - T_2 - tl_2 - T_4 + T_3 = 0.$$

Из условия равновесия находим значение  $T_4$ :

$$\begin{aligned} T_4 &= T_1 - T_2 - tl_2 + T_3 = \\ &= 25 - 0 - 24 \cdot 1 + 14 = 15 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Для определения внутренних силовых факторов, воспользуемся методом сечений. Разобьем стержень на 3 участка  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ , проведем на каждом из них произвольные сечения 1-1, 2-2, 3-3 и зададим координаты этих сечений  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ .

Рассмотрим участок  $AB$  ( $0 \leq z_1 \leq l_1 = 0,4 \text{ м}$ ):

$$\sum \text{mom}_x T(z_1) = 0; \quad T(z_1) = -T_1.$$

На участке  $AB$  (рис. 2.3, а) крутящий момент  $T(z_1) = -T_1 = -25 \text{ кНм}$ .

Рассмотрим участок  $BC$  ( $0 \leq z_2 \leq l_2 = 1,0 \text{ м}$ ) (рис. 2.3, б):

$$\sum \text{mom}_x T(z_2) = 0;$$

$$T(z_2) = -T_1 + T_2 + tz_2 = 0.$$

Рассчитаем значение крутящего момента в точках  $B$  и  $C$ . В точке  $B$ :

$$T(z_2 = 0) = -25 + 0 + 24 \cdot 0 = -25 \text{ кНм}.$$

В точке  $C$ :

$$T(z_2 = l_2) = -25 + 0 + 24 \cdot 1 = -1 \text{ кНм}.$$

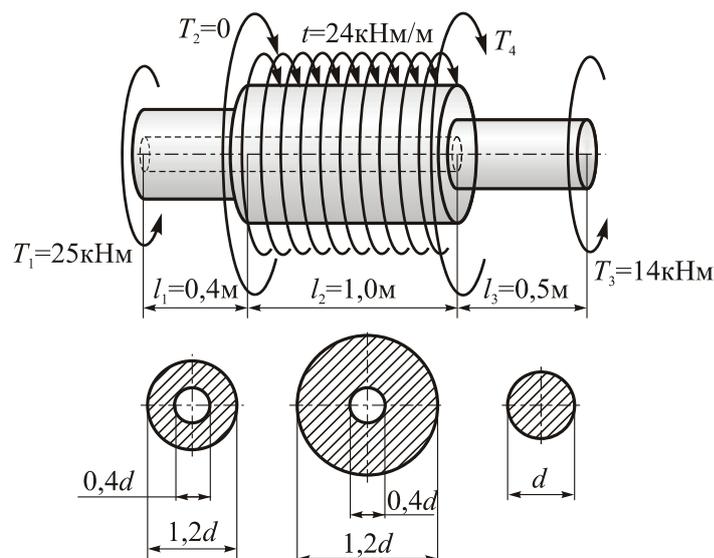


Рис. 2.1

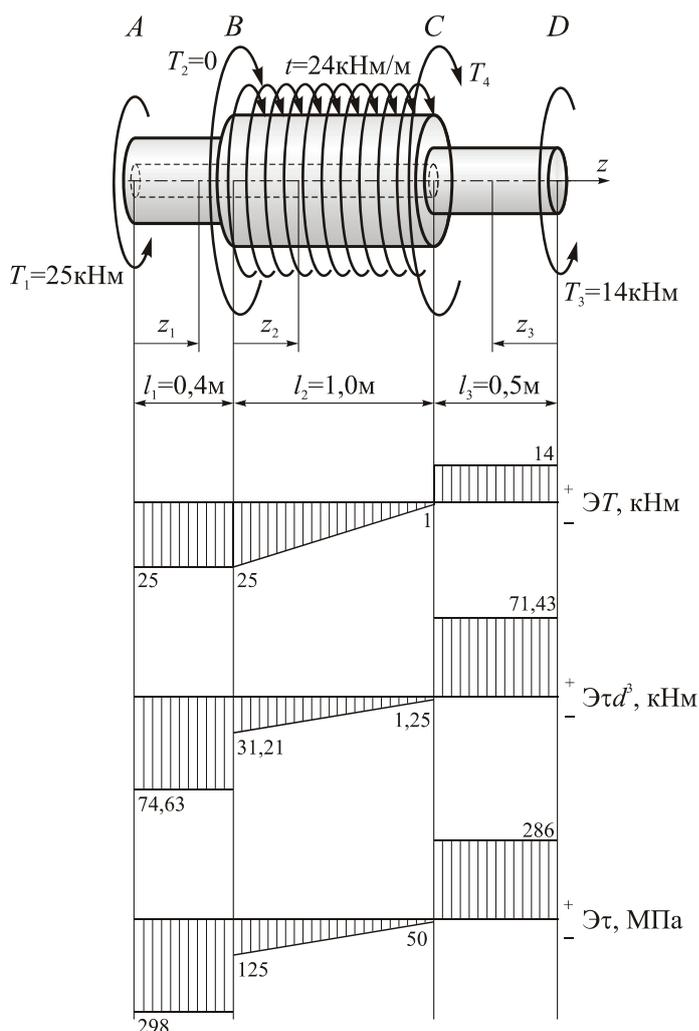


Рис. 2.2

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата
------	------	----------	---------	------

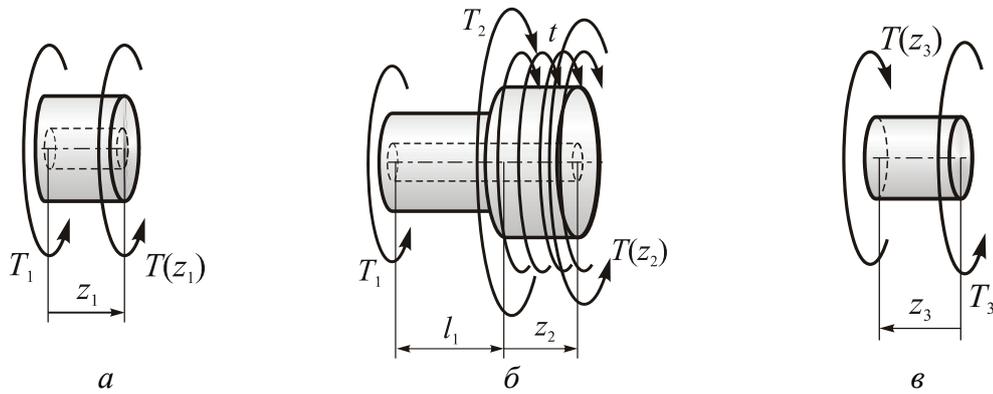


Рис. 2.3

Рассмотрим участок  $DC$  ( $0 \leq z_3 \leq l_3 = 0,5$  м) (рис. 2.3, в):

$$\sum \text{mom}_x T(z_3) = 0; \quad T(z_3) = T_3.$$

В пределах всего участка крутящий момент  $T(z_3) = T_3 = 14$  кНм.

По полученным данным построим эпюру крутящих моментов (рис. 2.2).

### 2.1.2. Построение эпюры напряжений

Наибольшие напряжения при кручении возникают на внешних волокнах и определяются как

$$\tau = \frac{T(z)}{W_p(z)},$$

где  $W_p = \frac{I_p}{r_{\max}}$  – полярный момент сопротивления,  $I_p$  – полярный момент инерции сечения,  $r_{\max}$  – максимальный радиус. Определим геометрические характеристики сечений.

Участок  $AB$

$$I_{p1} = \frac{\pi}{32} \left( (1,2d)^4 - (0,4d)^4 \right) = 0,201d^4; \quad W_{p1} = \frac{0,201d^4}{0,6d} = 0,335d^3.$$

Участок  $BC$

$$I_{p2} = \frac{\pi}{32} \left( (1,6d)^4 - (0,4d)^4 \right) = 0,641d^4; \quad W_{p2} = \frac{0,641d^4}{0,8d} = 0,801d^3.$$

Участок  $CD$

$$I_{p3} = \frac{\pi}{32} d^4 = 0,098d^4; \quad W_{p3} = \frac{\pi d^3}{16} = 0,196d^3.$$

Определим опасное сечение стержня, в котором возникают максимальные напряжения, в долях  $1/d^3$ .

$$\text{Участок } AB \quad (0 \leq z_1 \leq l_1): \quad \tau(z_1 = 0) = \tau_1(z_1 = l_1) = \frac{T(z_1)}{W_{p1}} = \frac{-25}{0,335d^3} = \frac{-74,63}{d^3}.$$

Участок  $BC$  ( $0 \leq z_2 \leq l_2$ ):

$$\tau(z_2 = 0) = \frac{T(z_2 = 0)}{W_{p2}} = \frac{-25}{0,801d^3} = \frac{-31,21}{d^3},$$

$$\tau(z_2 = l_2) = \frac{T(z_2 = l_2)}{W_{p2}} = \frac{-1}{0,801d^3} = \frac{-1,25}{d^3}.$$

$$\text{Участок } CD \quad (0 \leq z_3 \leq l_3): \quad \tau(z_3 = 0) = \tau(z_3 = l_3) = \frac{T_3}{W_{p3}} = \frac{14}{0,196d^3} = \frac{71,43}{d^3}.$$

По полученным данным строим  $\text{Эт}d^3$  (рис. 2.2).

					Лист
					13
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	

### 1.2.3. Расчет на прочность. Подбор сечения

Из эпюры  $\tau d^3$  видно, что опасными являются сечение на участке  $AB$ , где действуют наибольшие напряжения

$$|\tau|_{\max} = \frac{74,63}{d^3}.$$

Условие прочности при кручении имеет вид:

$$\tau_{\max} = \left| \frac{T(z)}{W(z)} \right|_{\max} \leq [\tau],$$

где  $[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

Примем для материала ВТЗ  $[\tau] = 0,5[\sigma] = 0,5 \cdot 611 \approx 305$  МПа.

Тогда условие прочности примет вид

$$\frac{74,63 \cdot 10^3}{d^3} \leq [\tau]$$

Из условия прочности находим оптимальное значение диаметра:

$$\frac{74,63 \cdot 10^3}{d^3} \leq [\tau] = 305 \text{ МПа} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{74,63 \cdot 10^3}{305}} = 62,55 \text{ мм.}$$

Примем (из ряда Ra40 по ГОСТ 6636-86)  $d=63$  мм.

Определим напряжения, действующие в сечениях при выбранном значении  $d$ .

$$\text{Участок } AB: \tau = \frac{-74,63 \cdot 10^6}{63^3} = -298 \text{ МПа.}$$

$$\text{Участок } BC: \tau(z_2) = \begin{cases} \tau(z_2 = 0) = \frac{-31,21 \cdot 10^6}{63^3} = -125 \text{ МПа;} \\ \tau(z_2 = l_2) = \frac{-1,25 \cdot 10^6}{63^3} = -50 \text{ МПа.} \end{cases}$$

$$\text{Участок } CD: \tau(z_3) = \frac{71,43 \cdot 10^6}{63^3} = 286 \text{ МПа.}$$

По полученным данным строим эпюру действующих на валу касательных напряжений  $\tau$  (рис. 2.2).

					Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	14

## 2.2. Расчет на жесткость стержня постоянного сечения.

Для стержня постоянного сечения (рис. 2.4), необходимо построить эпюру углов закручивания и из условия жесткости найти искомое значение диаметра стержня  $d$ . Материал стержня – сталь,  $G=80\text{ГПа}$ .

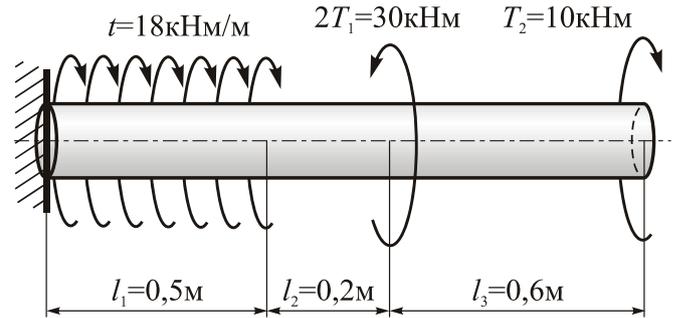


Рис. 2.4

### 2.2.1. Построение эпюры углов закручивания.

Разобьем стержень на участки  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  (рис. 2.5). В пределах каждого участка возьмем произвольные сечения  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  соответственно.

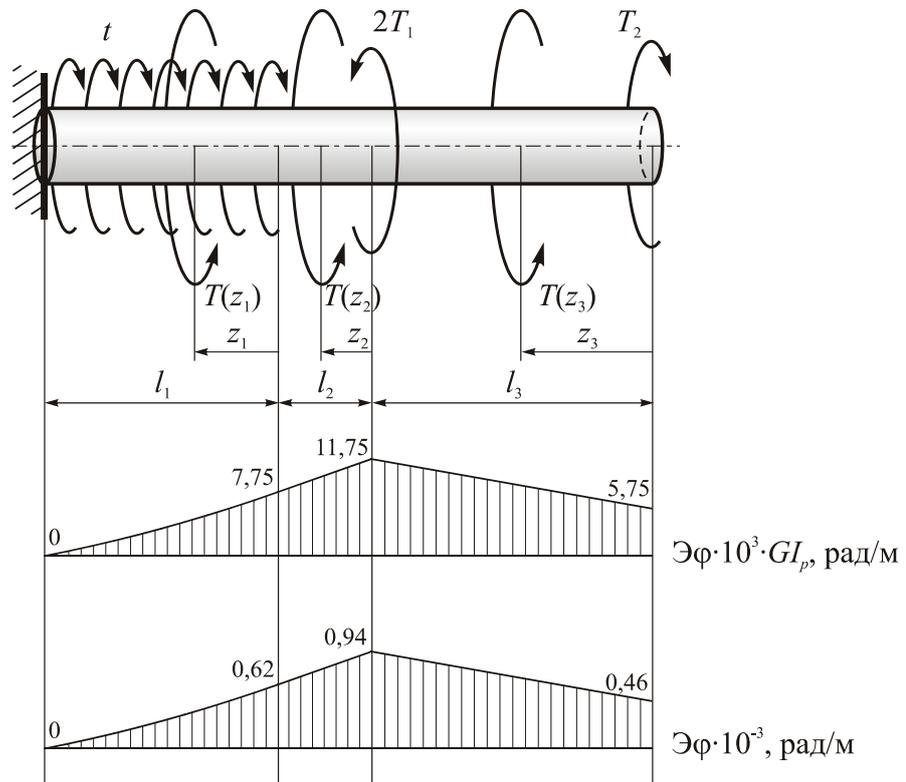


Рис. 2.5

На участке  $AB$  ( $0 \leq z_1 \leq l_1 = 0,5\text{м}$ ):

$$\Sigma T(z) = 0: T(z_1) = tz_1 - 2T_1 + T_2 = 18z_1 - 2 \cdot 15 + 10 = 18z_1 - 20 \text{ (кНм)}.$$

На участке  $BC$  ( $0 \leq z_2 \leq l_2 = 0,2\text{м}$ ):

$$\Sigma T(z) = 0: T(z_2) = -2T_1 + T_2 = -2 \cdot 15 + 10 = -20 \text{ (кНм)}.$$

На участке  $CD$  ( $0 \leq z_3 \leq l_3 = 0,6\text{м}$ ):

$$\Sigma T(z) = 0: T(z_3) = T_2 = 10 \text{ (кНм)}.$$

Находим углы закручивания в долях  $1/GI_p$ . На участке  $AB$ :

$$\varphi(z_1) = \int_0^{z_1} \frac{18z_1 - 20}{GI_p} dz_1 = \frac{18z_1^2}{2GI_p} - \frac{20z_1}{GI_p} + \varphi_0 =$$

$$= \begin{cases} \varphi(z_1 = 0) = \varphi_0; \\ \varphi(z_1 = l_1) = \frac{18 \cdot 0,5^2}{2GI_p} - \frac{20 \cdot 0,5}{GI_p} + \varphi_0 = -\frac{7,75 \cdot 10^3}{GI_p} + \varphi_0 \text{ (рад/м)}. \end{cases}$$

Так как  $\varphi(z_1 = l_1) = 0$ , ввиду наличия заделки в точке  $A$ , то  $\varphi_0 = \varphi_B = \frac{7,75 \cdot 10^3}{GI_p}$ .

Окончательно получаем, в точке  $A$   $\varphi_A = 0$ ; и в точке  $B$   $\varphi_B = \frac{7,75 \cdot 10^3}{GI_p}$ .

Функцией угла закручивания на участке  $AB$  является парабола, вторая производная от которой положительна, следовательно, парабола вогнутая.

На участке  $BC$ :

$$\varphi(z_2) = \int_0^{l_2} \frac{-20dz_2}{GI_p} = \frac{-20z_2}{GI_p} + \varphi_C = \begin{cases} \varphi(z_2 = 0) = \varphi_C; \\ \varphi(z_2 = l_2) = \varphi_B = \frac{-20 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{GI_p} + \varphi_C = -\frac{4 \cdot 10^3}{GI_p} + \varphi_C \text{ (рад/м)}. \end{cases}$$

Находим угол поворота в точке  $C$   $\varphi_C = \varphi_B + \frac{4 \cdot 10^3}{GI_p} = \frac{7,75 \cdot 10^3}{GI_p} + \frac{4 \cdot 10^3}{GI_p} = \frac{11,75 \cdot 10^3}{GI_p}$ .

На участке  $CD$ :

$$\varphi(z_3) = \int_0^{l_3} \frac{10dz_3}{GI_p} = \frac{10z_3}{GI_p} + \varphi_D = \begin{cases} \varphi(z_3 = 0) = \varphi_D; \\ \varphi(z_3 = l_3) = \varphi_C = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{GI_p} + \varphi_D = \frac{6 \cdot 10^3}{GI_p} + \varphi_D \text{ (рад/м)}. \end{cases}$$

Находим угол поворота в точке  $D$   $\varphi_D = \varphi_C - \frac{6 \cdot 10^3}{GI_p} = \frac{11,75 \cdot 10^3}{GI_p} - \frac{6 \cdot 10^3}{GI_p} = \frac{5,75 \cdot 10^3}{GI_p}$ .

По полученным значениям строим эпюру углов закручивания  $\Delta\varphi$  в долях от  $GI_p$  (рис. 2.5).

### 2.2.1. Расчет на жесткость.

По условию жесткости, максимальный угол поворота не должен превышать допустимый  $[\theta] = 0,001 \text{ рад/м}$ , т.е.  $\varphi_{\max} \leq [\theta]$ . Из эпюры углов поворота, построенной в долях от  $GI_p$ , видно, что максимальный угол поворота находится в сечении  $C$   $\varphi_{\max} = \frac{11,75 \cdot 10^3}{GI_p}$ .

Полярный момент сечения  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ , откуда найдем диаметр стержня:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{11,75 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi G [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{11,75 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,001}} = 196,6 \text{ мм.}$$

Примем (из ряда Ra40 по ГОСТ 6636-86)  $d=200$  мм.

Окончательно рассчитывая углы поворота в каждом сечении, получаем  $\varphi_A = 0$ ;  $\varphi_B = 0,62 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}$ ;  $\varphi_C = 0,94 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}$ ; и  $\varphi_D = 0,46 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}$ .

					Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	16

### 3. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ БАЛОК И РАМ

#### 3.1. Проектировочный расчет чугуновой балки

##### 3.1.1. Расчет геометрических характеристик поперечного сечения

Для заданной формы поперечного сечения балки (рис. 3.1, а) необходимо определить положение центра тяжести сечения, положения главных центральных осей и вычислить значения главных моментов инерции сечения в долях величины  $a$ .

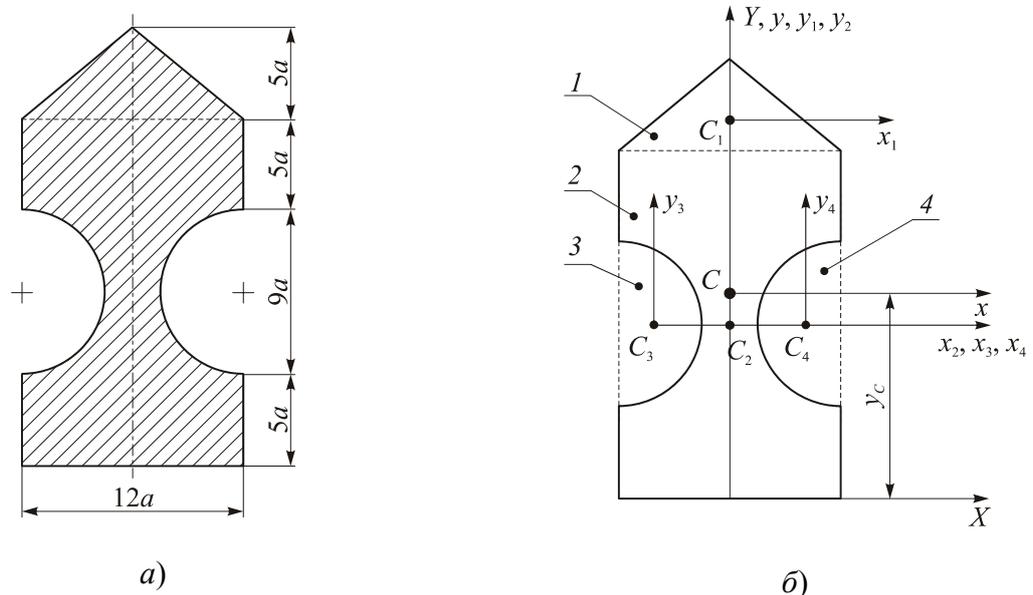


Рис. 3.1

Свяжем с сечением систему координат  $X, Y$  (рис. 3.1, б). Разобьем фигуру на составляющие: треугольник 1, прямоугольник 2 и два полукруга 3, 4. Определим для них в выбранной системе координат положение центров тяжести  $C_1, C_2, C_3, C_4$  и значения их площадей  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$ .

Для треугольника 1:

$$x_{C1} = 0; \quad y_{C1} = 2 \cdot 5a + 9a + \frac{5a}{3} = 20,67a; \quad A_1 = \frac{12a \cdot 5a}{2} = 30a^2.$$

Для прямоугольника 2:

$$x_{C2} = 0; \quad y_{C2} = \frac{2 \cdot 5a + 9a}{2} = 9,5a; \quad A_2 = 12a \cdot (2 \cdot 5a + 9a) = 228a^2.$$

Для полукругов 3 и 4:

$$x_{C3} = -\left(\frac{12a}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{9a}{2\pi}\right) = -4,09a; \quad y_{C3} = 5a + \frac{9a}{2} = 9,5a; \quad A_3 = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi \cdot (9a)^2}{8} = 31,8a^2;$$

$$x_{C4} = -x_{C3} = 4,09a; \quad y_{C4} = y_{C3} = 9,5a; \quad A_4 = A_3 = 31,8a^2.$$

Определим положение центра тяжести фигуры

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_{Ci} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_{Ci} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}.$$

В нашем случае суммирование ведется по четырем составляющим ( $n=4$ ), тогда

$$x_C = \frac{x_{C1} \cdot A_1 + x_{C2} \cdot A_2 + x_{C3} \cdot A_3 + x_{C4} \cdot A_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} = \frac{0 + 0 - 4,09a(-31,8a^2) + 4,09a(-31,8a^2)}{30a^2 + 228a^2 - 31,8a^2 - 31,8a^2} = 0;$$

$$y_C = \frac{y_{C1} \cdot A_1 + y_{C2} \cdot A_2 + y_{C3} \cdot A_3 + y_{C4} \cdot A_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} = \frac{20,67a \cdot 30a^2 + 9,5a \cdot 228a^2 + 2 \cdot 9,5a(-31,8a^2)}{30a^2 + 228a^2 - 2 \cdot 31,8a^2} = 11,22a.$$

Проведем через центр тяжести фигуры  $C(x_C, y_C)$  оси  $x$  и  $y$ , которые являются центральными, главными осями инерции. Вычислим осевой момент инерции составного сечения

$$I_{xc} = \sum_{n=1}^4 (I_{xci}^{(i)} + a_i^2 \cdot A_i),$$

где  $I_{xci}^{(i)}$  – осевые моменты инерции составляющих фигур относительно своих центральных осей  $x_{ci}$ ,  $a_i = y_C - y_{Ci}$  – расстояние между осями  $x_{ci}$  и  $x$ . В данном случае

$$a_1 = y_{C1} = y_C = 20,67a - 11,22a = 9,45a;$$

$$a_2 = y_C - y_{C2} = 11,22a - 9,5a = 1,72a;$$

$$a_3 = a_4 = a_2 = 1,72a.$$

Вычислим значения осевых моментов инерции  $I_{xc1}^{(1)}$ ,  $I_{xc2}^{(2)}$ ,  $I_{xc3}^{(3)}$  и  $I_{xc4}^{(4)}$ :

$$I_{xc1}^{(1)} = \frac{12a \cdot (5a)^3}{36} = 41,7a^4;$$

$$I_{xc2}^{(2)} = \frac{12a \cdot (2 \cdot 5a + 9a)^3}{12} = 6859a^4;$$

$$I_{xc3}^{(3)} = I_{xc4}^{(4)} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi \cdot (9a)^4}{128} = 161a^4.$$

Таким образом, осевой момент инерции относительно главной центральной оси  $x$ :

$$I_{xc} = [41,7a^4 + (9,45a)^2 \cdot 30a^2] + [6859a^4 + (1,72a)^2 \cdot 228a^2] - 2 \cdot [161a^4 + (1,72a)^2 \cdot 31,8a^2] = 9541a^4.$$

### 3.1.2. Построение эпюр внутренних силовых факторов.

Исходные данные для расчета чугунной балки показаны на рис. 3.2.

Разобьем стержень на участки  $AC$ ,  $CD$ ,  $BD$  и определим реакции в заделке  $R_B$  и  $M_B$ :

$$\Sigma F_y = 0: R_B - P - ql_2 - P = 0;$$

$$R_B = P + ql_2 + P = 20 + 22 \cdot 0,4 + 20 = 48,8 \text{ кН};$$

$$\Sigma \text{mom}_B(F_i) = 0:$$

$$-M + P(l_2 + l_3) + ql_2 \left( l_3 + \frac{l_2}{2} \right) + Pl_3 - M_B = 0;$$

$$M_B = -M + P(l_2 + l_3) + ql_2 \left( l_3 + \frac{l_2}{2} \right) + Pl_3 = -16 + 20(0,4 + 0,5) + 22 \cdot 0,4 \left( 0,5 + \frac{0,4}{2} \right) + 20 \cdot 0,5 = 18,16 \text{ кНм}.$$

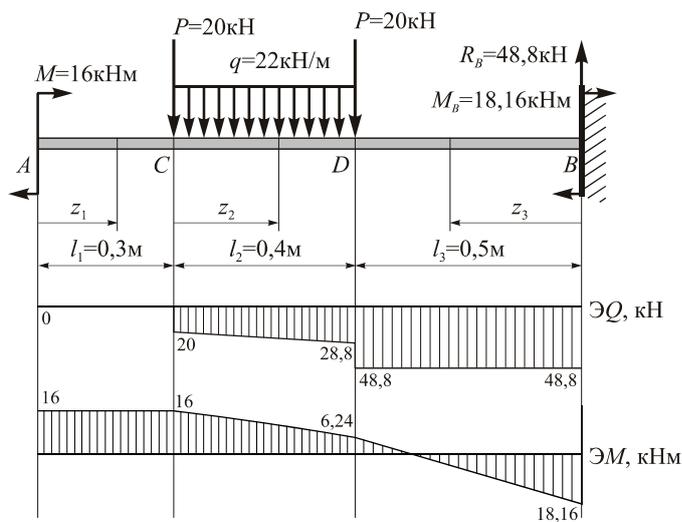


Рис. 3.2

Для построения эпюр внутренних силовых факторов, возьмем произвольные сечения  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  в

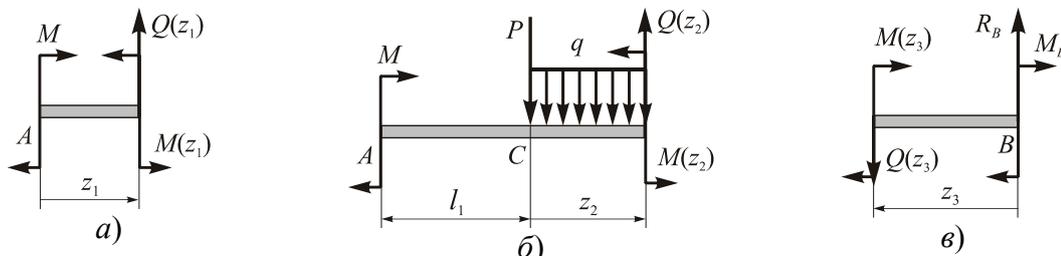


Рис. 3.3

пределах выбранных участков.

На участке  $AB$  ( $0 \leq z_1 \leq l_1$ ) (рис. 3.3, а):

$$Q(z_1) = 0; \quad M(z_1) = M = 16 \text{ кНм.}$$

На участке  $CD$  ( $0 \leq z_2 \leq l_2$ ) (рис. 3.3, б):

$$Q(z_2) = -P - qz_2 = \begin{cases} Q(z_2 = 0) = -P = -20 \text{ кН}; \\ Q(z_2 = l_2) = -P - ql_2 = -20 - 22 \cdot 0,4 = -28,8 \text{ кН}; \end{cases}$$

$$M(z_2) = M - Pz_2 - qz_2 \frac{z_2}{2} = \begin{cases} M(z_2 = 0) = M = 16 \text{ кНм}; \\ M(z_2 = l_2) = M - Pl_2 - q \frac{l_2^2}{2} = 16 - 20 \cdot 0,4 - 22 \frac{0,4^2}{2} = 6,24 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Функцией момента на данном участке является парабола, вторая производная от которой отрицательна, следовательно, функция выпуклая.

На участке  $DB$  ( $0 \leq z_3 \leq l_3$ ) (рис. 3.3, в):

$$Q(z_3) = -R_B = -48,8 \text{ кН};$$

$$M(z_3) = -M_B + R_B z_3 = \begin{cases} M(z_3 = 0) = -M_B = -18,16 \text{ кНм}; \\ M(z_3 = l_3) = -M_B + R_B l_3 = -18,16 + 48,8 \cdot 0,5 = 6,24 \text{ кНм}. \end{cases}$$

По полученным значениям строим эпюры перерезывающих сил  $EQ$  и изгибающих моментов  $EM$  (рис. 3.2).

### 3.1.3. Расчет на прочность.

Материал балки чугун, допускаемые напряжения для чугуна  $[\sigma] = 30 \dots 80 \text{ МПа}$ , примем  $[\sigma] = 75 \text{ МПа}$ . Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_{xc}} y_{\max} \leq [\sigma],$$

где  $\sigma_{\max}$  – максимальные напряжения возникающие в балке,  $M_{\max}$  – максимальный изгибающий момент,  $y_{\max}$  – максимально удаленная точка по оси  $y$  от нейтральной линии балки.

Высота сечения балки  $24a$ , положение нейтральной оси относительно низа сечения  $y_C = 11,22a$ , следовательно, расстояние до максимально удаленной точки:

$$y_{\max} = 24a - 11,22a = 12,78a.$$

Максимальный изгибающий момент находится в сечении  $B$  –  $M_{\max} = 18,16 \text{ кНм}$ .

Исходя из условия прочности, найдем параметр  $a$ :

$$a = \sqrt[3]{\frac{12,78 M_{\max}}{9541 [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{12,78 \cdot 18,16 \cdot 10^3}{9541 \cdot 75 \cdot 10^6}} = 6,87 \text{ мм.}$$

					Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	19

### 3.2. Проверочный расчет балки из прокатных профилей.

#### 3.2.1. Расчет геометрических характеристик сечения.

Исходные данные для расчета балки из прокатных профилей показаны на рис. 3.4. Сечение балки изображено на рис. 3.5.

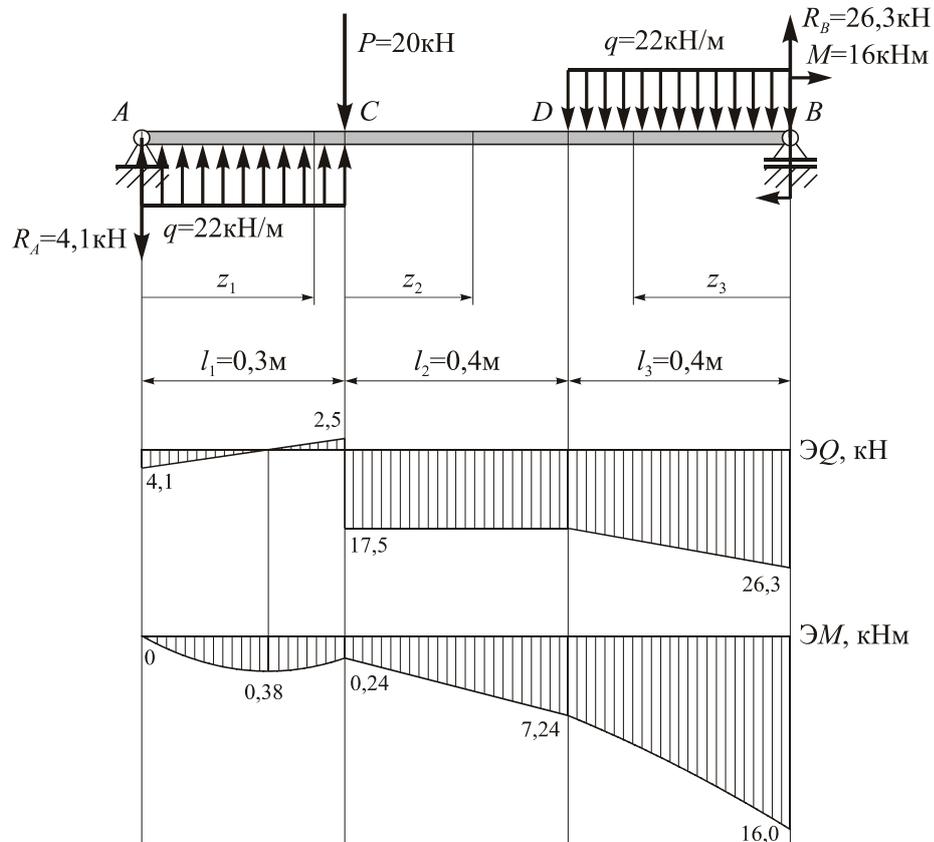


Рис. 3.4

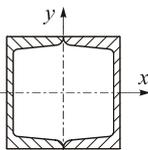


Рис. 3.5

Рассчитаем геометрические характеристики сечения. Осевой момент инерции для профиля №8  $I_x = 89,4 \text{ см}^4$  (по ГОСТ 8240-89), тогда для составного сечения

$$I_x^\Sigma = 2I_x = 2 \cdot 89,4 \text{ см}^4 = 178,8 \text{ см}^4.$$

Осевой момент сопротивления  $W_x = 22,4 \text{ см}^3$  (по ГОСТ 8240-89), тогда для составного сечения

$$W_x^\Sigma = 2W_x = 2 \cdot 22,4 = 44,8 \text{ см}^3.$$

#### 3.2.2. Построение эпюр внутренних силовых факторов.

Найдем реакции в опорах A и B (рис. 3.4):

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0: R_A(l_1 + l_2 + l_3) - ql_1\left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3\right) + P(l_2 + l_3) + ql_3\frac{l_3}{2} - M &= 0; \\ R_A = \frac{22 \cdot 0,3\left(\frac{0,3}{2} + 0,4 + 0,4\right) - 20(0,4 + 0,4) - 22 \cdot 0,4\frac{0,4}{2} + 16}{0,3 + 0,4 + 0,4} &= 4,1 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\Sigma M_A = 0: ql_1 \frac{l_1}{2} - Pl_1 - ql_3 \left( \frac{l_3}{2} + l_2 + l_1 \right) + R_B (l_1 + l_2 + l_3) - M = 0;$$

$$R_B = \frac{-22 \cdot 0,3 \frac{0,3}{2} + 20 \cdot 0,3 + 22 \cdot 0,4 \left( \frac{0,4}{2} + 0,4 + 0,3 \right) + 16}{0,3 + 0,4 + 0,4} = 26,3 \text{ кН.}$$

Построим эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов. Возьмем произвольное сечение на первом участке  $AC$  ( $0 \leq z_1 \leq l_1$ ). Запишем уравнения для перерезывающей силы и изгибающего момента в произвольном сечении в пределах этого участка и рассчитаем их значения в характерных точках:

$$Q_y(z) = -R_A + qz_1 = \begin{cases} \text{при } z_1 = 0: -4,1 + 0 = -4,1 \text{ кН;} \\ \text{при } z_1 = 0,3: -4,1 + 22 \cdot 0,3 = 2,5 \text{ кН.} \end{cases}$$

$$M_x(z) = -R_A z_1 + qz_1 \frac{z_1}{2} = \begin{cases} \text{при } z_1 = 0: 0 \text{ кНм;} \\ \text{при } z_1 = 0,3: -4,1 \cdot 0,3 + 22 \cdot 0,3 \frac{0,3}{2} = -0,24 \text{ кНм.} \end{cases}$$

На данном участке перерезывающая сила меняет свой знак, поэтому функция изгибающего момента, представляющая собой параболу, имеет экстремум в сечении  $z = R_A / q = 4,1 / 22 = 0,18 \text{ м}$ . Величина изгибающего момента в данном сечении  $M = -4,1 \cdot 0,18 + 22 \cdot 0,18 \frac{0,18}{2} = -0,38 \text{ кНм}$ .

Возьмем произвольное сечение на участке  $CD$  ( $0 \leq z_2 \leq l_2$ ). На данном участке:

$$Q_y(z) = -R_A + ql_1 - P = -4,1 + 22 \cdot 0,3 - 20 = -17,5 \text{ кН.}$$

$$M_x(z) = -R_A (l_1 + z_2) + ql_1 \left( \frac{l_1}{2} + z_2 \right) - Pz_2 =$$

$$= \begin{cases} \text{при } z_2 = 0: -4,1(0,3 + 0) + 22 \cdot 0,1 \left( \frac{0,3}{2} + 0 \right) - 0 = -0,24 \text{ кНм;} \\ \text{при } z_2 = 0,4: -4,1(0,3 + 0,4) + 22 \cdot 0,1 \left( \frac{0,3}{2} + 0,4 \right) - 20 \cdot 0,4 = -7,24 \text{ кНм.} \end{cases}$$

Для участка  $BD$  ( $0 \leq z_3 \leq l_3$ ), уравнения имеют следующий вид:

$$Q_y(z) = -R_B + qz_3 = \begin{cases} \text{при } z_3 = 0: -26,3 + 0 = -26,3 \text{ кН;} \\ \text{при } z_3 = 0,4: -26,3 + 22 \cdot 0,4 = -17,5 \text{ кН.} \end{cases}$$

$$M_x(z) = R_B z_3 - qz_3 \frac{z_3}{2} - M = \begin{cases} \text{при } z_3 = 0: -16 \text{ кНм;} \\ \text{при } z_3 = 0,4: 26,3 \cdot 0,4 - 22 \cdot 0,4 \frac{0,4}{2} - 16 = -7,24 \text{ кНм.} \end{cases}$$

По полученным значениям построим эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов (рис. 3.4).

### 3.2.3. Расчет на прочность.

Материал швеллера Ст3. Допускаемые напряжения  $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$ . Рассчитаем максимальные напряжения возникающие в балке, они находятся в сечении, где изгибающий момент достигает наибольшего значения  $M_{\max} = 16 \text{ кНм}$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x^\Sigma} = \frac{16 \text{ кНм}}{44,8 \text{ см}^3} = 357,14 \text{ МПа.}$$

						Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		21

Условие прочности имеет вид  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ . Условие прочности не выполняется  $\sigma_{\max} = 357,14 \text{ МПа} > [\sigma] = 200 \text{ МПа}$ . Необходимо взять профиль больших размеров. Для этого, исходя из условия прочности, определим необходимое минимальное значение осевого момента сопротивления

$$W_x^\Sigma \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{16 \text{ кНм}}{200 \text{ МПа}} = 80 \text{ см}^3$$

Выберем швеллер – ближайший из ряда швеллер №12,  $W_x = 50,6 \text{ см}^3$ , тогда  $W_x^\Sigma = 2W_x = 2 \cdot 50,6 = 101,2 \text{ см}^3$ . Откуда максимальные напряжения  $\sigma_{\max} = \frac{16 \text{ кНм}}{101,2 \text{ см}^3} = 158,10 \text{ МПа} < [\sigma] = 200 \text{ МПа}$  – условие прочности выполнено.

### 3.3. Расчет на жесткость балки из прокатных профилей.

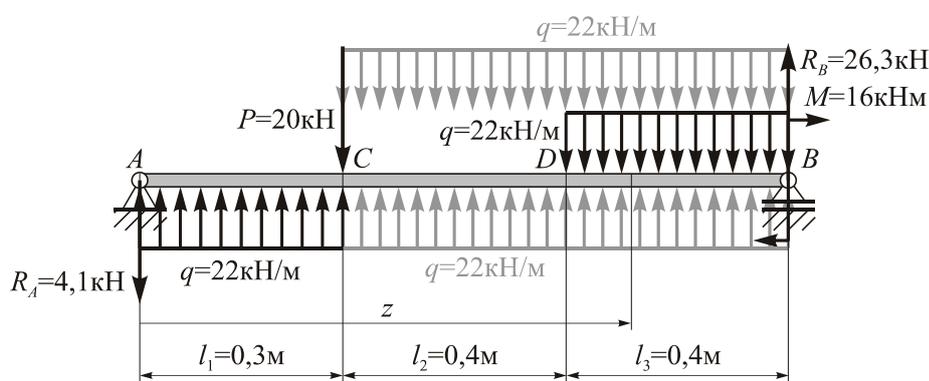


Рис. 3.6

Исходные данные и расчетная схема балки из прокатных профилей представлена на рис. 3.6. Возьмем произвольное сечение  $z$ , как показано на рисунке. При этом продлим распределенную нагрузку на участке  $AC$  до конца балки, а ее действие на участке  $CB$ , компенсируем аналогичной распределенной нагрузкой противоположного знака (выделены на рисунке серым цветом). Составим уравнение упругой линии балки:

$$EI_x^\Sigma y(z) = y_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI_x^\Sigma} \left[ -R_A \frac{z^3}{3!} + q \frac{z^4}{4!} - P \frac{(z-l_1)^3}{3!} - q \frac{(z-l_1)^4}{4!} - q \frac{(z-l_1-l_2)^4}{4!} \right].$$

Начальными условиями будут прогиб в точке  $A$  –  $y_0 = y_A = 0$ , а также прогиб в точке  $B$  –  $y_B = 0$ . Чтобы определить начальный угол поворота  $\theta_0$  подставим в уравнение  $z = l_1 + l_2 + l_3$ , соответствующее  $y_B = 0$ , откуда  $\theta_0 = 0,063 \text{ рад}$ . После подстановки всех известных значений, уравнение упругой линии балки примет вид

$$EI_x^\Sigma y(z) = 0,063z + \frac{1}{2432} \left[ -0,683z^3 + 0,917z^4 - 3,333(z-0,3)^3 - 0,917(z-0,3)^4 - 0,917(z-0,7)^4 \right].$$

Вычислим прогибы и углы поворота в сечениях  $A$ ,  $C$ ,  $D$  и  $B$ . В сечении  $D$ , прогиб

$$EI_x^\Sigma y_D = 0,063 \cdot 0,7 + \frac{1}{2432} \left[ -0,683 \cdot 0,7^3 + 0,917 \cdot 0,7^4 - 3,333 \cdot (0,7-0,3)^3 - 0,917 \cdot (0,7-0,3)^4 \right] = 0,001 \text{ м}.$$

Угол поворота

$$EI_x^{\Sigma} Q(z)_D = \theta_0 + \frac{1}{EI_x^{\Sigma}} \left[ -R_A \frac{z^2}{2!} + q \frac{z^3}{3!} - P \frac{(z-l_1)^2}{2!} - q \frac{(z-l_1)^3}{3!} \right] =$$
$$= 0,063 + \frac{1}{2432} \left[ -2,05 \cdot 0,7^2 + 3,667 \cdot 0,7^3 - 10(0,7-0,3)^2 - 3,667(0,7-0,3)^3 \right] = -0,002 \text{ рад.}$$

Аналогично рассчитываем перемещения и углы поворота в сечениях  $A$ ,  $C$  и  $B$ , они будут равны соответственно  $y_A = 0$ ;  $\theta_A = 0,063$  рад;  $y_C = 0,001$  м;  $\theta_C = 0,059$  рад; и  $y_B = 0$ ;  $\theta_B = -0,188$  рад.

Допускаемые перемещения и углы поворота в опорах определяются из условия жесткости

$$[f] = (1,0 \cdot 10^{-4}) l_{\Sigma} = (1,0 \cdot 10^{-4}) \cdot (0,3 + 0,4 + 0,4) = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ м;}$$

$$[\theta] = 0,001 \div 0,005 \text{ рад.}$$

Условие жесткости по перемещениям в сечениях  $C$  и  $D$  и по углам поворота на опорах  $A$  и  $B$  не выполняется. Необходимо произвести мероприятия по увеличению жесткости конструкции.

									Лист
									23
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата					

### 3.4. Проектировочный расчет на прочность плоской рамы

#### 3.4.1. Построение эпюр внутренних силовых факторов.

Исходные данные для расчета плоской рамы представлены на рис. 3.7. Расчетная схема плоской рамы также представлена на рис. 3.7. Определим реакции, возникающие в заделке:

$$\Sigma X = 0 : R_{Ax} = 0;$$

$$\Sigma Y = 0 : R_{Ay} - ql_1 = 0; R_{Ay} = ql_1 = 22 \cdot 0,3 = 6,6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_A - ql_1 \frac{l_1}{2} = 0; M_A = q \frac{l_1^2}{2} = 22 \cdot \frac{0,3^2}{2} = 0,99 \text{ кНм}.$$

Для построения эпюр внутренних силовых факторов рассмотрим три произвольных сечения на участках  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  (рис. 3.8).

На участке  $AB$  ( $0 \leq z_1 \leq l_1$ ) (рис. 3.8, а):

$$\Sigma X = 0 : N_z(z_1) = R_{Ax} = 0;$$

$$\Sigma Y = 0 : Q_y(z_1) = R_{Ay} = 6,6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_x(z_1) = -M_A + R_{Ay}z_1.$$

Вычисляя значение момента в точках  $A$  и  $B$ , получим  $M_x(z_1 = 0) = -M_A = -0,99 \text{ кНм}$  и  $M_x(z_1 = l_1) = -M_A + R_{Ay}l_1 = -0,99 + 6,6 \cdot 0,3 = 0,99 \text{ кНм}.$

На участке  $BC$  ( $0 \leq z_2 \leq \frac{l_1}{\cos 45}$ ) (рис. 3.8, б):

$$\Sigma X = 0 : N_z(z_2) = -R_{Ax} \cos 45 + R_{Ay} \cos 45 = 0 + 6,6 \cos 45 = 4,67 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 : Q_y(z_2) = -R_{Ax} \cos 45 - R_{Ay} \cos 45 = 0 - 6,6 \cos 45 = -4,67 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_x(z_2) = -M_A + R_{Ay}(l_1 - z_2 \cos 45).$$

В точке  $B$  и  $C$  значение момента

$$M_x(z_2 = 0) = -M_A + R_{Ay}(l_1 - z_2 \cos 45) = -0,99 + 6,6(0,3 - 0) = 0,99 \text{ кНм};$$

$$M_x(z_2 = \frac{l_1}{\cos 45}) = -M_A + R_{Ay} \left( l_1 - \frac{l_1}{\cos 45} \cos 45 \right) = -0,99 + 6,6(0,3 - 0,3) = -0,99 \text{ кНм};$$

На участке  $DC$  ( $0 \leq z_3 \leq l_1$ ) (рис. 3.8, в):

$$\Sigma X = 0 : N_z(z_3) = 0;$$

$$\Sigma Y = 0 : Q_y(z_3) = qz_3;$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_x(z_3) = -qz_3 \frac{z_3}{2}.$$

В точке  $D$  и  $C$  значение перерезывающей силы и момента соответственно  $Q_y(z_3 = 0) = 0;$

$$M_x(z_3 = 0) = 0; \text{ и } Q_y(z_3 = l_1) = ql_1 = 6,6 \text{ кН}; M_x(z_3 = l_1) = -ql_1 \frac{l_1}{2} = -22 \cdot 0,3 \frac{0,3}{2} = 6,6 \text{ кНм}.$$

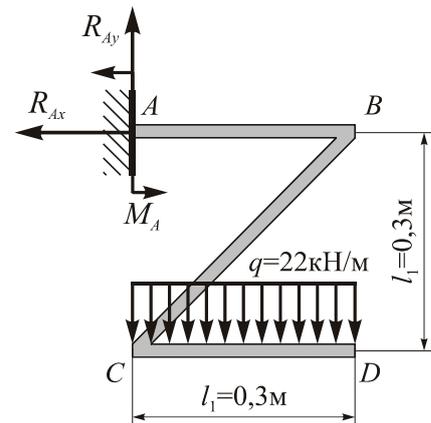
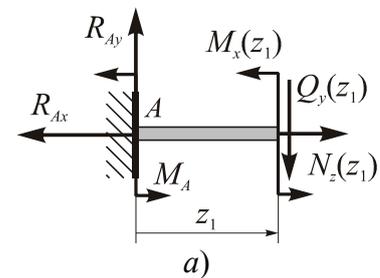
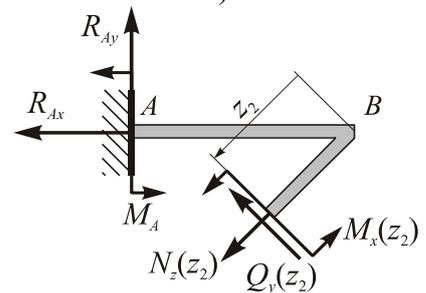


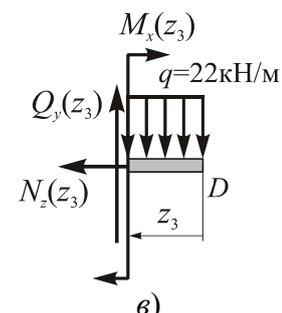
Рис. 3.7



а)



б)



в)

Рис. 3.8

По полученным значениям построим эпюры продольной силы, перерезывающей силы и изгибающего момента (рис. 3.9).

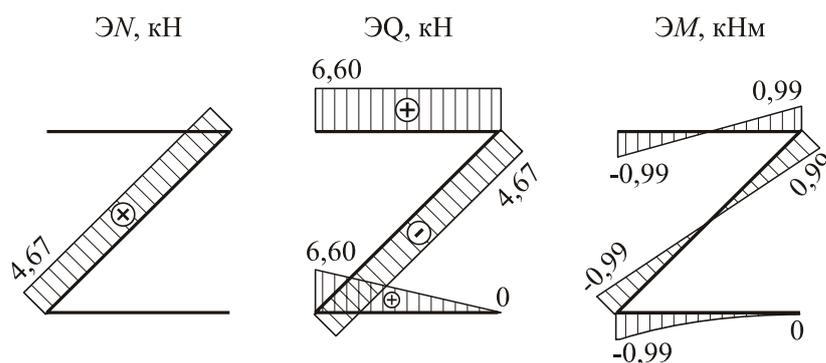


Рис. 3.9

### 3.4.2. Расчет на прочность.

Рассчитаем диаметр стержней, исходя из условия прочности, при этом  $M_{\max} = 0,99$  кНм, материал стержня Ст3, допускаемые напряжения  $[\sigma] = 200$  МПа, тогда диаметр стержня:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,99}{\pi \cdot 200}} = 36,9 \text{ мм.}$$

Принимаем диаметр стержней по ряду Ra20, согласно ГОСТ 6636-86  $d = 40$  мм.

#### 4. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.В. Сопротивление материалов. –М.: Высшая школа, 2002.
2. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986.
3. Гафаров Р.Х., Жернаков В.С. Что нужно знать о сопротивлении материалов? – М.: Машиностроение, 2001.
4. Костенко Н.А. Сопротивление материалов. –М.: Высшая школа, 2004.
5. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. – Киев: Вища школа, 1986.
6. Писаренко Г.С. и др. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1988.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 2003.

						Лист
						26
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		