

# В

ДЛЯ ВУЗОВ

---

*Б.В.Заславский*

## КРАТКИЙ КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Допущено Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР  
в качестве учебника для студентов  
авиационных специальностей вузов



---

МОСКВА  
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»  
1986

ББК 30 121  
336  
УДК 629.7 : 639.3/6

Рецензент: кафедра сопротивления материалов МАТИ им. К. Э. Циолковского

**Заславский Б. В.**

336 Краткий курс сопротивления материалов. Учебник для авиационных специальностей вузов. М.: Машиностроение, 1986. — 328 с., ил.

В пер.: 1 р.

Изложены основные термины и определения теории сопротивления материалов. Рассмотрены растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб, удар, колебания, устойчивость элементов и систем, статически определимые и неопределимые системы. Приведены методы расчетов: на прочность, за пределами упругости и др. Даны примеры расчетов. Материал изложен в соответствии с учебной программой авиационных специальностей вузов.

3  $\frac{2105000000-11}{038 (01)-86}$  11-86

ББК 30.121  
605

© Издательство «Машиностроение», 1986 г.

### 1.1. ВВЕДЕНИЕ

Созданию любой новой конструкции или машины всегда предшествует разработка ее проекта, так как конструктор еще до изготовления проектируемого объекта должен установить рациональную форму, выбрать размеры и материал каждой детали этого объекта. Для решения указанной задачи необходимо произвести различного рода расчеты, включая расчеты на прочность, жесткость и устойчивость.

Разработка методов расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и машин является основной задачей науки о сопротивлении материалов.

Теоретические положения курса сопротивления материалов опираются на законы и теоремы общей механики и, в первую очередь, на законы статики. Используются также некоторые выводы и решения теории упругости и пластичности. Необходимость учитывать в расчетах свойства реальных материалов связывает курс сопротивления материалов с материаловедением.

Имея целью создание инженерных методов расчета, курс сопротивления материалов стремится решать свои задачи с привлечением сравнительно простого математического аппарата. Для упрощения решений вводятся основанные на опыте допущения и гипотезы. Естественно, что полученные таким путем решения являются приближенными и могут быть использованы только в пределах применимости исходных гипотез.

Весьма важным направлением науки о сопротивлении материалов является экспериментальное исследование поведения материалов и элементов сооружений под нагрузкой и использование результатов экспериментов для построения и проверки новых расчетных методов.

Развитие науки о сопротивлении материалов связано с работами выдающихся механиков, математиков и инженеров. Значительная роль в ее развитии принадлежит русским и советским ученым.

### 1.2. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Конечной целью расчетов в курсе сопротивления материалов является определение размеров деталей сооружений и машин, обеспечивающих их необходимую, но не излишнюю прочность, жесткость и устойчивость.

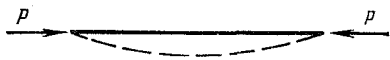


Рис. 1.1

Под **прочностью** понимается способность твердого тела сопротивляться воздействию приложенных к нему сил и выдерживать эти силы, не разрушаясь.

Реальные тела не являются абсолютно твердыми и под действием приложенных к ним сил в той или иной степени изменяют свою первоначальную форму и размеры, или, как говорят, **деформируются**.

Опыт показывает, что в одних случаях тела после удаления внешних сил полностью восстанавливают свою первоначальную форму и размеры, в других случаях деформации полностью не исчезают. Деформации тела, исчезающие после разгрузки, называются **упругими**, а не исчезающие — **остаточными**, или **пластическими**. Детали различных конструкций работают, как правило, в пределах упругих деформаций. Значительные пластические деформации имеют место, например, при ковке, штамповке и прокатке.

Определение размеров деталей, при которых исключается возможность появления недопустимых с точки зрения нормальной работы конструкции деформаций этих деталей, является содержанием расчета на жесткость.

Некоторые элементы конструкций в процессе их нагружения могут изменять первоначальную форму равновесия — терять устойчивость. Так, длинный тонкий прямой стержень, подвергнутый продольному сжатию (рис. 1.1), при некотором значении сжимающих сил может внезапно изогнуться, т. е. перейти из прямолинейной формы равновесия в криволинейную. Это явление может привести к разрушению стержня. С целью предотвратить потерю устойчивости отдельных элементов или конструкции в целом в необходимых случаях проводят расчеты на устойчивость\*.

### 1.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ВНЕШНИХ СИЛ

Внешние силы, воспринимаемые конструкциями и их частями, принято называть **нагрузками**. Классификация нагрузок производится по различным признакам.

Различают силы **поверхностные**, приложенные к точкам поверхности тела, и силы **объемные**, действующие на все точки объема, занимаемого телом.

Примером объемных сил являются силы тяжести, силы магнитного притяжения, центробежные силы и т. д. Объемные силы, непрерывно распределенные по всему телу, характеризуются их интенсивностью в каждой точке тела. Пусть  $\Delta \bar{R}$  — вектор объемной силы, приходящейся на элементарный объем  $\Delta V$ . Тогда вектор

$$\bar{p} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta V} \quad (1.1)$$

\* Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в гл. 17 и 18.

будет представлять собой интенсивность объемной силы в точке, к которой стягивается поверхность, ограничивающая объем  $\Delta V$ . Интенсивность объемной силы имеет размерность силы, деленной на объем.

Поверхностные силы являются результатом взаимодействия твердых тел или воздействия на них внешней среды, например воздуха на крыло самолета в полете и т. п. Эти силы могут быть приложены ко всей поверхности тела или к отдельным ее частям и распределены по поверхности их действия самым различным образом.

Поверхностные силы характеризуются интенсивностью — силой, приходящейся на единицу площади поверхности тела. Обозначим через  $\Delta P$  равнодействующую поверхностных сил, передающихся через площадку  $\Delta F$ . Интенсивность поверхностной силы в точке, находящейся внутри контура площадки, будет определена вектором

$$\bar{K} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F} \quad (1.2)$$

при условии стягивания контура, ограничивающего площадку, к рассматриваемой точке. Интенсивность поверхностной силы имеет размерность силы, деленной на площадь.

Иногда площадка действия нагрузки имеет вид вытянутого прямоугольника, высота которого значительно больше основания. В таких случаях интенсивность поверхностной нагрузки рассчитывается на единицу длины и называется **погонной** нагрузкой. Погонная нагрузка имеет размерность силы, деленной на длину.

Если размеры площадки действия внешних сил очень малы по сравнению с размерами поверхности тела, то в расчетах такие распределенные поверхностные силы принято заменять их равнодействующей — **сосредоточенной силой**. Но это лишь приближенное представление действительных сил, так как через точку никаких сил передать нельзя. В природе сосредоточенных сил не существует, потому что в зоне контакта твердые тела деформируются, и поэтому сила их взаимодействия будет передаваться не через точку, а через площадку пусть малых, но обязательно конечных размеров.

По характеру приложения нагрузки подразделяются на статические и динамические.

Нагрузки, медленно возрастающие от нуля до своего конечного значения, называются статическими. Под «медленным» понимается такое возрастание сил, при котором вызываемые ими ускорения частиц тела настолько незначительны, что этими ускорениями можно пренебречь и считать тело находящимся в состоянии равновесия в любой момент процесса нагружения.

Нагрузки, быстро достигающие своего конечного значения и вызывающие заметные ускорения частиц тела, называются **динамическими**. Для характеристики динамической нагрузки существенным является не только ее максимальное значение, но и скорость возрастания во времени. Примером динамических нагрузок являются различного рода ударные нагрузки.

Нагрузки могут быть как постоянными, так и переменными во времени. Примером последних являются нагрузки, возникающие при колебаниях конструкции.

В дальнейшем везде, где это не оговорено, предполагается, что нагрузки прикладываются к телу статически и длительно действуют на конструкцию. Динамические и переменные нагрузки рассматриваются в специальном разделе курса сопротивления материалов.

#### 1.4. ФОРМЫ ТЕЛ, РАССМАТРИВАЕМЫХ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Реальные детали имеют самую разнообразную конфигурацию. Однако каждая деталь в зависимости от соотношения ее трех основных измерений может быть отнесена к одному из следующих четырех типов: брусу, пластине, оболочке или массиву.

**Брусом** называется тело, два измерения которого малы по сравнению с третьим (рис. 1.2). Его можно представить себе как тело, образованное движением плоской фигуры, центр тяжести которой перемещается по некоторой линии — оси бруса, а плоскость фигуры остается все время нормальной к этой оси. Образующую брус фигуру называют его поперечным сечением. Если размеры и конфигурация фигуры в процессе ее перемещения не изменяются, брус называется брусом постоянного сечения, а при изменении ее размеров и конфигурации — брусом переменного сечения. Ось бруса может быть прямой, а также плоской или пространственной кривой линией. Соответственно этому брусья разделяются на прямые и кривые, плоские и пространственные. Тонкий длинный прямой брус часто называют стержнем.

**Оболочкой** принято называть тело, одно измерение которого мало по сравнению с двумя другими (рис. 1.3). Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной поверхностью. Подобное тело, срединная поверхность которого до нагружения представляет собой плоскость, называется **пластиной** (рис. 1.4).

Тела, все три измерения которых одного порядка, называются **массивами**.

В сопротивлении материалов основным объектом изучения являются тела, имеющие форму бруса. Рассматриваются также некоторые задачи из теории пластин и оболочек. Детали, имеющие форму массива, в сопротивлении материалов вообще не рассматриваются, они являются объектом изучения в теории упругости.

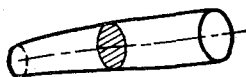


Рис. 1.2

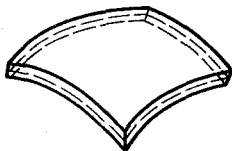


Рис. 1.3

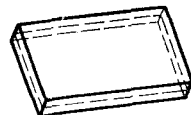


Рис. 1.4

## 1.5. ОПОРНЫЕ УСТРОЙСТВА. ОПОРНЫЕ РЕАКЦИИ

Пространственное твердое тело имеет шесть степеней свободы перемещений — три поступательных движения и три вращательных вокруг трех взаимно перпендикулярных осей. Плоское тело имеет только три степени свободы — два поступательных движения в направлении двух осей и вращение вокруг третьей оси.

Опорные устройства препятствуют тем или иным из указанных перемещений тела или вообще исключают всякое его движение. Опорные устройства классифицируются по числу связей, накладываемых на перемещения опорных точек (узлов) тела. Связь обычно представляют в виде стержня, соединяющего тело с опорной поверхностью. Если нет специального указания, опорные связи и поверхности считаются абсолютно жесткими.

При нагружении тела на него со стороны опорных связей начинают действовать силы, называемые опорными реакциями. Опорные реакции находятся из уравнений равновесия тела, у которого опорные связи мысленно удалены и заменены силами, направленными вдоль снятых связей.

Для плоского тела, и в частности для плоского бруса, основными видами опор являются шарнирно-подвижная, шарнирно-неподвижная и защемляющая неподвижная.

**Шарнирно-подвижная, или, иначе, катковая опора** исключает перемещение опорного узла  $A$  в направлении, перпендикулярном опорной поверхности, но не препятствует вращению тела вокруг опорной точки и поступательному перемещению параллельно опорной поверхности. Такой опоре соответствует одна опорная реакция, направленная перпендикулярно опорной поверхности. Схематические изображения катковой опоры представлены на рис. 1.5. Там же показано направление опорной реакции.

**Шарнирно-неподвижная, или, короче, шарнирная опора** исключает всякое поступательное движение опорного узла  $A$ , но не препятствует вращению тела вокруг опорной точки. Реакцию такой опоры, направление которой заранее неизвестно, принято раскладывать на две составляющие  $R_x$  и  $R_y$ , направленные по касательной и нормали к опорной поверхности, как показано на рис. 1.6. На этом же рисунке представлены схематические изображения шарнирных опор.

**Защемляющая неподвижная опора, или, иначе, заделка** (рис. 1.7) исключает поступательные и вращательные движения тела. В соответствии с тремя связями, накладываемыми на тело, реакциями заделки являются силы  $R_x$  и  $R_y$  и опорный момент  $M$ .

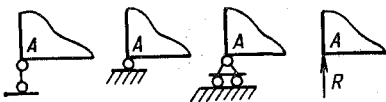


Рис. 1.5



Рис. 1.6

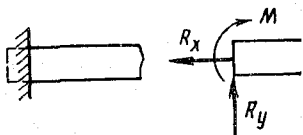


Рис. 1.7

Конструктивное оформление опорных устройств каждого из указанных типов отличается большим разнообразием. В приведенных на рис. 1.5, 1.6 и 1.7 общепринятых схематических изображениях опор подчеркиваются их самые характерные особенности.

### 1.6. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ О СВОЙСТВАХ МАТЕРИАЛА

Реальные материалы обладают разнообразными физическими свойствами и характерной для каждого из них структурой: металлы — кристаллической, дерево и некоторые пластмассы — волокнистой.

Попытка учесть в расчетах все многообразие свойств материала и его действительное строение привела бы к исключительным математическим трудностям. Поэтому в сопротивлении материалов сознательно отбрасываются второстепенные и сохраняются лишь основные для рассматриваемого круга вопросов свойства материалов.

Основным допущением является гипотеза о **сплошности** материала. Предполагается, что материал непрерывен и полностью заполняет объем, занятый телом. Дискретная, атомистическая структура, наличие пустот на границах зерен и волокон, различного рода трещины и т. п. во внимание не принимаются. Ценность этой гипотезы состоит в том, что она позволяет использовать математический аппарат анализа бесконечно малых величин и особенно возможность предельного перехода.

Материал считается **идеально однородным**, т. е. обладающим одинаковыми свойствами во всех без исключения точках тела независимо от его размеров.

Вводит предположение об **идеальной упругости** материала, заключающейся в способности деформируемого тела полностью восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки. Способность материала получать заметные остаточные деформации называется **пластичностью**.

Свойством упругости обладают в той или иной степени почти все материалы, но только в определенных пределах величин нагрузок их можно считать идеально упругими.

Предполагается, как правило, что материал является **изотропным**, т. е. обладает одинаковыми механическими свойствами по всем направлениям, исходящим из данной точки. Изотропными являются аморфные материалы, такие как стекло и смолы. Материалы, обладающие различными свойствами по разным направлениям, называются **анизотропными**. Примерами последних являются текстолит, стеклотекстолит и т. п.

Металлы являются поликристаллическими телами, состоящими из большого количества зерен, размеры которых очень малы (порядка 0,01 мм). Каждое зерно анизотропно, но вследствие малых размеров зерен и беспорядочного их расположения металлы в достаточно больших объемах проявляют свойство изотропии.



## 1.7. ПОНЯТИЕ О РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ

Расчетная схема является упрощенным представлением реальной детали, где сознательно не учитывается ряд менее важных с точки зрения проводимого расчета факторов, относящихся к конструктивным особенностям, характеру нагружения и закрепления этой детали. Так, сложный по своей конфигурации шатун двигателя внутреннего сгорания рассматривается как прямой брус, а коленчатый вал — как пространственный брус. Также упрощением является замена распределенной нагрузки сосредоточенной силой, замена реальной опоры катковой, шарнирной и т. п.

Необходимость схематизации объясняется тем, что расчет сравнительно простой детали с учетом всех конструктивных факторов даже в тех случаях, когда он принципиально возможен, практически не всегда приемлем ввиду громоздкости и сложности.

Иногда при расчетах одного и того же объекта пользуются расчетными схемами различной сложности, что позволяет произвести уточнение расчета, проведенного на основе более грубой схемы. В то же время одной и той же расчетной схеме может соответствовать много различных по своей конструкции и назначению реальных деталей.

Выбор расчетной схемы представляет важную и ответственную часть практического расчета. Вопросы выбора расчетной схемы рассматриваются в курсах деталей машин, проектирования и расчета на прочность самолетов, двигателей и т. д.

В курсе сопротивления материалов рассматриваются заранее выбранные расчетные схемы определенного вида, под которые могут быть подведены различные детали, имеющие форму бруса, и в некоторых случаях пластины и оболочки.

## 1.8. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Сохранение формы твердого тела и его прочность обеспечиваются силами межатомного взаимодействия. Эти силы изменяются при приложении к телу внешних сил вследствие взаимного перемещения частиц материала в процессе деформации.

Дополнительные силы взаимодействия между частицами материала, возникающие в телах при их деформации, называются **внутренними** силами.

Внутренние силы возрастают с ростом внешних сил и при некоторой величине внешних сил могут превысить силы сцепления частиц материала, что приведет к его разрушению. Опыт показывает, что разрушение начинается в том месте, где внутренние силы достигают наибольшей величины, и это место не обязательно будет там, где приложены внешние нагрузки. Например, нить неравномерной толщины при растяжении всегда разрывается в том месте, где она тоньше.

Из сказанного следует, что для решения вопроса о прочности детали необходимо определить внутренние силы, возникающие в этой

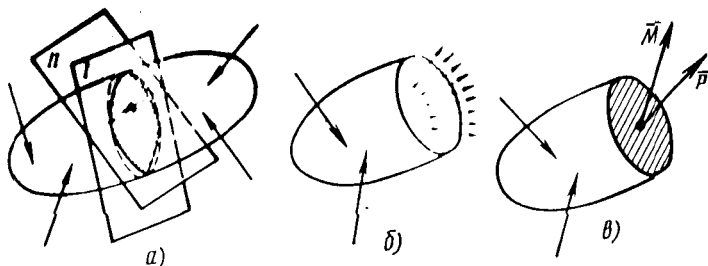


Рис. 1.8

детали при приложении к ней заданной внешней нагрузки. Эта задача решается с помощью приема, именуемого методом сечений. Сущность метода состоит в следующем.

Допустим, что твердое тело находится в равновесии под действием некоторой системы внешних сил (рис. 1.8, а). Очевидно, в состоянии равновесия будут находиться и любые его части. Разрежем мысленно это тело какой-либо поверхностью, например плоскостью, на две части и также мысленно удалим одну из них. Система внешних сил, действующих на оставшуюся часть тела, в общем случае уже не будет уравновешенной. Она уравновесится силами взаимодействия рассматриваемой и отброшенной частей тела, распределенными непрерывно согласно гипотезе сплошности материала по всей поверхности сечения (рис. 1.8, б). Эти силы для всего тела являются искомыми **внутренними**, а для каждой из двух частей его — **внешними**.

Таким образом, идея метода сечений заключается в том, чтобы представить силы внутренние для всего тела как силы внешние, но только для части этого тела. Делается это для того, чтобы можно было воспользоваться уравнениями равновесия статики, относящимися, по существу, только к системе всех внешних сил, действующих на незакрепленное (свободное) твердое тело.

Для отсеченной части тела можно составить шесть уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & \sum Y &= 0; & \sum Z &= 0; \\ \sum m_x &= 0; & \sum m_y &= 0; & \sum m_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Этих уравнений недостаточно для определения внутренних сил во всех точках сечения, но вполне достаточно для определения шести проекций на оси координат равнодействующих внутренних сил в сечении — главного вектора  $\bar{P}$  и главного момента  $\bar{M}$ .

Итак, метод сечений позволяет определить только равнодействующие внутренних сил в сечении, но не сами силы в каждой точке сечения.

При определении главного вектора и главного момента внутренних сил в сечении безразлично, равновесие какой из двух частей рассматривать — оставшейся или отброшенной. Объясняется это

тем, что внутренние силы в точках поверхности соприкосновения этих частей по закону о равенстве действия и противодействия равны по величине и противоположно направлены.

При применении метода сечений не обязательно разрезать тело на две части, а можно выделить элемент внутри или около поверхности тела и рассмотреть его равновесие. Элемент, выделенный внутри тела, будет находиться в равновесии только под действием сил взаимодействия с окружающими его частями, т. е. внутренних сил (и объемных сил, если они имеются).

### 1.9. НАПРЯЖЕНИЕ. ПОНЯТИЕ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Внутренние силы, как и всякие распределенные нагрузки, характеризуются интенсивностью, т. е. величиной силы, передающейся через единицу площади сечения.

Пусть  $\Delta P$  — равнодействующая внутренних сил, передающихся через площадку  $\Delta F$ , выделенную около точки  $A$  поверхности сечения (рис. 1.9).

Отношение  $\frac{\Delta P}{\Delta F} = K_{ср}$  называется средним напряжением в точке  $A$ . Оно получено в предположении равномерного распределения внутренних сил по площадке  $\Delta F$ . В общем случае внутренние силы распределены по этой площадке неравномерно. Поэтому для определения истинной интенсивности внутренних сил в точке сечения надо контур площадки стянуть к точке  $A$ , т. е. перейти в выражении для  $K_{ср}$  к пределу при  $\Delta F \rightarrow 0$ . Предельный переход возможен, так как согласно гипотезе о сплошности материала внутренние силы распределены непрерывно по всему сечению.

Вектор

$$\bar{K} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta F} \quad (1.4)$$

называется напряжением в точке  $A$  сечения.

В системе СИ единицей измерения напряжений является паскаль ( $\text{Н}/\text{м}^2$ ). В практических расчетах удобнее измерять напряжения в мегапаскалях  $\text{МПа} = 10^6 \text{ Н}/\text{м}^2 = \text{Н}/\text{мм}^2$ . В технике еще часто измеряют напряжения в килограммах силы на квадратный сантиметр ( $\text{кгс}/\text{см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа}$ ) или квадратный миллиметр ( $\text{кгс}/\text{мм}^2 \approx 10 \text{ МПа}$ ).

Если тело расечь другой поверхностью, проходящей через ту же точку  $A$  (см. рис. 1.8,  $a$ ), а затем найти аналогичным путем

$$\bar{K}_1 = \lim_{\Delta F_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}_1}{\Delta F_1},$$

то этот вектор также будет напряжением в точке  $A$ , но только на другой площадке.

Следовательно, напряжение всегда связано с точкой тела и с ориентировкой площадки его действия. На различно ориентированных

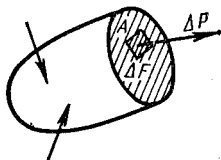


Рис. 1.9

площадках, проходящих через одну и ту же точку, напряжения будут различны как по величине, так и по направлению. Таких площадок через точку можно провести бесчисленное множество. Поэтому следует говорить не просто о напряжении в точке тела, а о **напряженном состоянии в данной точке**. Если же речь идет о конкретном напряжении в точке тела, то обязательно должна быть указана площадка его действия.

Совокупность напряжений на всех площадках, проходящих через данную точку, называется **напряженным состоянием** в этой точке.

### 1.10. НОРМАЛЬНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Вектор полного напряжения  $K$  принято раскладывать на нормальное напряжение  $\sigma$ , перпендикулярное плоскости его действия, и касательное напряжение  $\tau$ , действующее в плоскости площадки (рис. 1.10).

Касательное напряжение  $\tau$ , в свою очередь, может быть разложено по двум взаимно перпендикулярным направлениям в плоскости площадки.

Напряжения как векторные величины суммируются по правилам сложения векторов. Поэтому величина полного напряжения определяется соотношением

$$K = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (1.5)$$

Из самого определения напряжений как меры внутренних сил на данной конкретной площадке, проходящей через определенную точку тела, следует, что **суммировать можно только напряжения, действующие на одной и той же площадке, проходящей через одну и ту же точку**. Суммирование напряжений, действующих на разных площадках или в разных точках тела, лишено смысла и недопустимо.

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет определенный физический смысл. Нормальные силы, мерой которых является  $\sigma$ , стремятся сблизить или отдалить частицы материала друг от друга, что может привести к разрушению тела в результате отрыва частиц. Касательные внутренние силы, мерой которых является  $\tau$ , вызывают сдвиг частиц материала друг относительно друга, что может привести к разрушению тела в результате сдвига частиц.

### 1.11. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ В БРУСЕ

Рассмотрим внутренние силы в сечениях, нормальных оси бруса, т. е. в поперечных сечениях.

При определении главного вектора и главного момента в поперечном сечении бруса обычно выбирают естественную для него систему осей координат. Начало координат совмещают с центром тяжести поперечного сечения, ось  $x$  направляют вдоль оси бруса, а оси  $y$  и  $z$  располагают определенным образом в плоскости сечения.

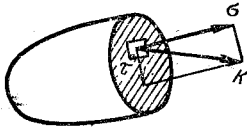


Рис. 1.10

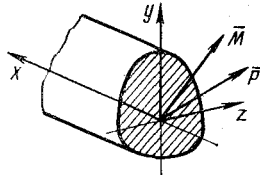


Рис. 1.11

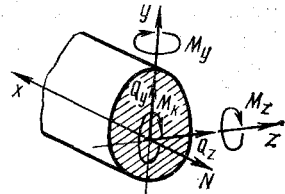


Рис. 1.12

Если сечение имеет ось симметрии, то одну из координатных осей, например  $y$ , совмещают с этой осью (рис. 1.11).

Составляющие главного вектора  $\bar{P}$  и главного момента  $\bar{M}$  внутренних сил в сечении по указанным трем осям называются **внутренними силовыми факторами**. Иногда их называют также усилиями в сечениях бруса.

Для каждого из шести внутренних силовых факторов (рис. 1.12) установлены определенные наименования и обозначения:  $N$  — нормальная или осевая сила;  $Q_y, Q_z$  — поперечные или перерезывающие силы;  $M_x$  — крутящий момент;  $M_y, M_z$  — изгибающие моменты.

Величина каждого из силовых факторов может быть выражена через значения внешних сил и пар. Для этого надо составить соответствующее уравнение равновесия (1.3) отсеченной части бруса в указанной выше системе координат. Например, для определения численного значения нормальной силы  $N$  надо составить уравнение  $\sum X = 0$ , а для определения значения крутящего момента  $M_x$  — уравнение  $\sum m_x = 0$  и т. д. В развернутом виде эти уравнения представлены в соответствующих разделах курса.

Внутренние силовые факторы в поперечном сечении бруса удобнее представлять не как проекции на оси координат главного вектора  $\bar{P}$  и главного момента  $\bar{M}$ , а как суммы внутренних нормальных или касательных сил и моментов этих сил относительно выбранных осей  $x, y$  и  $z$ .

Внутреннюю элементарную силу  $\Delta P$ , действующую на элементарную площадку  $\Delta F$  сечения бруса, всегда можно представить как сумму элементарной нормальной внутренней силы  $\sigma_x \Delta F$  и двух элементарных касательных сил  $\tau_{xy} \Delta F$  и  $\tau_{xz} \Delta F$ , параллельных соответственно осям  $y$  и  $z$  (рис. 1.13).

Индекс  $x$  в обозначении нормального напряжения определяет ориентировку площадки действия напряжения, показывая, что эта площадка перпендикулярна оси  $x$ . Для касательных напряжений надо указывать помимо площадки их действия еще и направление вектора напряжения в этой площадке. Поэтому вводится второй индекс. Итак, первый индекс  $y$  показывает, какой оси координат перпендикулярна площадка его действия, а второй индекс показывает, какой оси параллелен

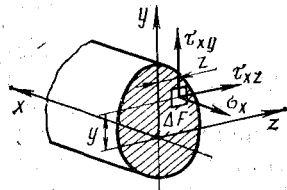


Рис. 1.13

вектор этого напряжения. Например,  $\tau_{xy}$  есть напряжение на площадке, перпендикулярной оси  $x$ , направленное параллельно оси  $y$  \*.

Суммируя последовательно все действующие в рассматриваемом сечении элементарные внутренние нормальные  $\sigma_x \Delta F$  силы, а затем касательные  $\tau_{xy} \Delta F$ ,  $\tau_{xz} \Delta F$  силы и моменты этих сил  $y\sigma_x \Delta F$ ,  $z\sigma_x \Delta F$ ,  $z\tau_{xy} \Delta F$ ,  $y\tau_{xz} \Delta F$  относительно осей координат (см. рис. 1.13) и находя пределы этих сумм при  $\Delta F \rightarrow 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_F \sigma_x dF &= N, & \int_F \tau_{xy} dF &= Q_y, & \int_F \tau_{xz} dF &= Q_z, \\ \int_F y\sigma_x dF &= M_z, & \int_F z\sigma_x dF &= M_y, & & \\ \int_F (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) dF &= M_k. & & & & \end{aligned} \quad (1.6)$$

В зависимости от характера нагружения бруса в его сечениях могут иметь место не все силовые факторы, а только некоторые из них или только один, например, только нормальная сила, только крутящий момент и т. д.

## 1.12. ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ БРУСА

Внутренние силовые факторы имеют ярко выраженный физический смысл. Каждому из них соответствует определенный вид деформации бруса. Осевым силам  $N$  соответствует растяжение или сжатие бруса, перерезывающим силам  $Q_y$  и  $Q_z$  — сдвиг (срез), крутящим моментам  $M_k$  — кручение, а изгибающим моментам  $M_y$  и  $M_z$  — изгиб бруса.

Перечисленные четыре вида деформаций называются простыми, а их возможные сочетания — сложными деформациями бруса.

Изучение курса сопротивления материалов принято начинать с рассмотрения простых деформаций и, в первую очередь, с изучения центрального растяжения и сжатия прямого бруса.

---

\* Для записи расчетных уравнений в матричной форме используют для нормальных напряжений обозначения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ , а для касательных —  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zx}$ .

## ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА

---

Центральное, или одноосное растяжение и сжатие прямого бруса вызывается системами внешних поверхностных и объемных сил, равнодействующие которых совпадают с осью бруса. Эти равнодействующие изображаются на схеме бруса в виде сосредоточенных и распределенных сил, как показано на рис. 2.1. Распределенные нагрузки измеряются их интенсивностью  $q$ , называемой погонной нагрузкой и имеющей размерность Н/м, Н/см. В реальных конструкциях такие нагрузки могут быть осуществлены самыми различными способами.

### 2.1. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Из шести внутренних силовых факторов в поперечном сечении прямого бруса при одноосном растяжении (или сжатии) отлична от нуля только нормальная сила  $N$ , величина которой зависит от сил, приложенных к брусу, и положения сечения. Эту функциональную зависимость можно представить в аналитическом виде, определяя методом сечений нормальную силу  $N(x)$  в текущем сечении каждого участка бруса.

Рассмотрим брус, изображенный на рис. 2.1. Проводя последовательно сечения на расстоянии  $x$  от начала каждого участка и проектируя на ось  $x$  все внутренние и внешние силы, действующие на отсеченную часть бруса, получаем для первого участка

$$N_1(x) + P_1 = 0,$$

а для второго

$$N_2(x) + P_1 - P_2 = 0.$$

Отсюда

$$N_1(x) = -P_1, \quad N_2(x) = P_2 - P_1.$$

Остальные пять уравнений равновесия отсеченной части дают

$$Q_y(x) = 0, \quad M_y(x) = 0, \quad M_x(x) = 0,$$

$$Q_z(x) = 0, \quad M_z(x) = 0.$$

Если на отсеченную часть бруса действует распределенная нагрузка с переменной в общем случае интенсивностью  $q = q(x)$ , как это имеет место на третьем участке рассматриваемого примера,

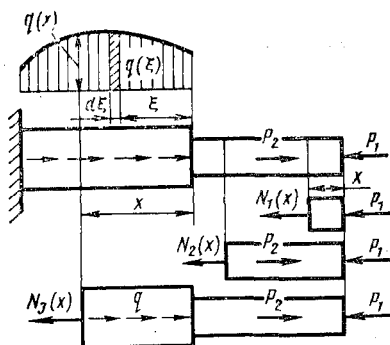


Рис. 2.1

то в уравнение равновесия отсеченной части будет входить равнодействующая  $R$  этой нагрузки, равная пределу суммы всех действующих на эту часть элементарных продольных сил  $q(\xi) d\xi$ :

$$R = \int_0^x q(\xi) d\xi.$$

Следовательно, уравнение равновесия отсеченной части для третьего участка запишется так:

$$N_3(x) = P_2 - P_1 + \int_0^x q(\xi) d\xi.$$

Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла равнодействующая распределенной нагрузки численно равна площади графика погонной нагрузки  $q(x)$  на интервале интегрирования (см. рис. 2.1).

Уравнение для третьего участка можно обобщить на случай действия на отсеченную часть  $m$  сосредоточенных и  $k$  распределенных нагрузок. Тогда

$$N(x) = \sum_1^m P_i + \sum_1^k \int_l q(x) dx. \quad (2.1)$$

Здесь интегралы берутся по длине участка действия распределенных нагрузок, приходящихся на отсеченную часть; при решении конкретных задач пределы каждого интеграла проставляются в соответствии с выбранным началом отсчета координаты  $x$  (см. разд. 2.20).

Для нормальных сил принято определенное правило знаков. Условились растягивающую силу  $N$  считать положительной, а сжимающую — отрицательной.

Уравнение (2.1) можно сформулировать в виде удобного для практических целей правила: **нормальная сила в поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме всех продольных внешних (активных и реактивных) сил, расположенных по одну (любую) сторону от сечения.** Силы, направленные от рассматриваемого сечения (растягивающие), берутся со знаком плюс, а направленные на сечение (сжимающие) — со знаком минус.

Зависимость (2.1), характеризующая закон изменения нормальных сил по длине бруса, может быть изображена графически в виде эпюры нормальных сил. Правила построения эпюр приведены в разд. 2.20.

## 2.2. ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ БРУСА

При растяжении брус удлиняется, а его поперечные размеры уменьшаются. Изменение линейных размеров бруса в направлении действия внешней силы называется продольной деформацией,



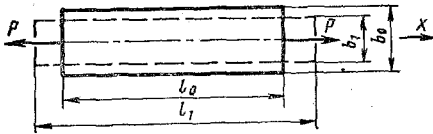


Рис. 2.2

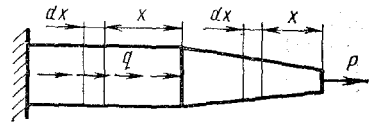


Рис. 2.3

а в перпендикулярном направлении — поперечной деформацией. Разность между длиной бруса после деформации  $l_1$  и до деформации  $l_0$  (рис. 2.2)  $\Delta l = l_1 - l_0$  называется **абсолютным удлинением**, а отношение  $\Delta l$  к первоначальной длине бруса  $l_0$

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.2)$$

— **относительным удлинением**.

Относительное удлинение  $\epsilon_x$  является величиной безразмерной; часто ее измеряют в процентах от первоначальной длины бруса.

Относительное удлинение  $\epsilon_x$  можно рассматривать как абсолютное удлинение части бруса, длина которой до деформации была равна единице измерения длины. Индекс  $x$  при  $\epsilon_x$  показывает, что деформация происходит в направлении оси  $x$ .

Отношение абсолютного поперечного сжатия  $\Delta b = b_1 - b_0$  к первоначальному поперечному размеру  $b_0$  (см. рис. 2.2) называется **относительным поперечным сжатием**  $\epsilon_y = \frac{\Delta b}{b_0}$ ; относительное поперечное сжатие в направлении оси  $z$  определяется аналогично и обозначается  $\epsilon_z$ . Деформации в поперечном направлении при одноосном растяжении (сжатии) противоположны по знаку деформациям в продольном направлении.

При растяжении бруса постоянного сечения силами, приложенными к торцам (рис. 2.2), все части бруса находятся в равных условиях, и поэтому  $\epsilon$  для всего бруса будет величиной постоянной, а абсолютное удлинение такого бруса  $\Delta l = \epsilon l$ .

В брус переменного сечения, как и в случае действия распределенной нагрузки (рис. 2.3), различные его части находятся в различных условиях, и поэтому относительное удлинение  $\epsilon = \epsilon(x)$  изменяется по длине бруса. Абсолютное удлинение бруса при переменном  $\epsilon$  равно пределу суммы абсолютных удлинений  $\epsilon(x) \Delta x$  всех его малых элементов  $\Delta x$ , т. е. равно интегралу, взятому по длине бруса  $l$ :

$$\Delta l = \int_l \epsilon(x) dx. \quad (2.3)$$

### 2.3. КОЭФФИЦИЕНТ ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ (КОЭФФИЦИЕНТ ПУАССОНА)

Продольные и поперечные деформации при одноосном растяжении бруса являются следствием одних и тех же нагрузок и, как показывает опыт, их отношение в пределах упругих деформаций

есть постоянная для каждого материала величина, называемая коэффициентом поперечной деформации, или коэффициентом Пуассона:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right|. \quad (2.4)$$

Здесь  $\varepsilon_y$  — относительное поперечное сжатие;  $\varepsilon_x$  — относительное продольное растяжение.

Поперечные деформации изотропного материала во всех направлениях одинаковы. Следовательно, учитывая знаки деформаций,

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \varepsilon_x. \quad (2.5)$$

Безразмерный коэффициент  $\mu$  является физической константой материала и определяется экспериментальным путем. Для металлов величина  $\mu$  находится в пределах 0,25 ... 0,33. Наименьшее значение ( $\mu \approx 0$ ) имеет пробка, а наибольшее ( $\mu \approx 0,47$ ) — каучук.

Для изотропных материалов  $\mu$  вообще не может быть больше 0,5 (см. разд. 2.26). Коэффициент  $\mu$  не может быть и отрицательной величиной, так как при  $\mu < 0$  поперечные размеры бруса в случае растяжения должны были бы увеличиваться, что противоречит опыту.

#### 2.4. НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ

Нормальная сила в поперечном сечении бруса, численное значение которой находится из уравнения (2.1), является равнодействующей внутренних нормальных сил упругости в этом сечении:

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) позволяет определить напряжения в каждой точке сечения, если известен закон их распределения по сечению. Однако установить аналитическим путем закон, по которому изменяются напряжения от точки к точке сечения, чрезвычайно трудно, а иногда просто невозможно из-за непреодолимой пока математической сложности задачи. Поэтому в сопротивлении материалов принято вводить основанные на опыте и упрощающие аналитическое решение задачи гипотезы о характере распределения напряжений или деформаций по плоскости сечения.

Опытным путем установлено, что при одноосном растяжении прямого бруса нанесенные на его поверхности в поперечном направлении параллельные линии (рис. 2.4, а) не искривляются и остаются параллельными, а расстояния между ними увеличиваются.

Достаточно правильно и в то же время просто объясняет это явление гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли). Согласно гипотезе все точки бруса, которые до дефор-

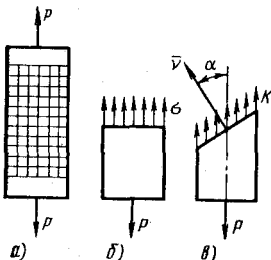


Рис. 2.4

мации находились в одной плоскости, и после деформации располагаются в одной плоскости, или, иначе, сечение плоское до деформации остается плоским и после деформации.

Гипотеза плоских сечений играет важную роль, и практически почти все выводы в сопротивлении материалов основаны на этой гипотезе.

Применяя гипотезу плоских сечений и учитывая, что поперечные сечения, перемещаясь друг относительно друга, остаются параллельными, приходим к заключению об одинаковом удлинении всех продольных волокон бруса, а отсюда и о равномерном распределении внутренних нормальных сил упругости по плоскости сечения (рис. 2.4, б).

Понятие волокна для кристаллического материала условно, но весьма удобно для рассуждений. Волокном принято называть совокупность частиц материала, расположенных на линии, параллельной оси бруса. Полагая в уравнении (2.6) напряжение  $\sigma$  постоянным при интегрировании по площади сечения, т. е. считая  $\sigma$  функцией только координаты  $x$ , получаем

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{F(x)}. \quad (2.7)$$

Из формулы (2.7) видно, что напряжения в сечениях бруса не зависят от материала, из которого он сделан, а зависят лишь от нагрузки на брус и площади его поперечного сечения.

Расчетное уравнение для нормальных напряжений при растяжении (2.7), как и весь ход рассуждений при его выводе, справедливо и в случае сжатия коротких прямых брусев. Отличие заключается лишь в знаке нормальной силы  $N$ . Для брусев, длины которых значительно больше их поперечных размеров, это положение справедливо только до определенного значения сжимающих сил, так как при больших нагрузках может произойти потеря устойчивости. В последнем случае продольные силы будут не только сжимать, но и изгибать брус, причем эффект изгиба может превзойти эффект сжатия.

Для нормальных напряжений принято такое же правило знаков, как и для нормальных сил, т. е. растягивающие напряжения считаются положительными, а сжимающие — отрицательными.

Отметим, что в сопротивлении материалов рассматриваются, как правило, сечения, находящиеся на некотором расстоянии от мест приложения сосредоточенных сил и мест резкого изменения поперечных размеров бруса. Объясняется это тем, что вблизи мест приложения нагрузки, как и мест резкого изменения поперечных размеров, распределение напряжений по сечению значительно отличается от равномерного, зависит от способа осуществления нагрузки и характера изменения поперечных размеров и может быть исследовано только методами теории упругости. Однако неравномерность распределения напряжений быстро затухает, и на некотором расстоянии (порядка ширины сечения) от места ее возникновения распределение напряжений практически не отличается от равномерного.

Отмеченное свойство является частным случаем принципа Сен-Венана. Этот принцип может быть сформулирован так: замена системы сил, действующих на малую часть поверхности тела, статически эквивалентной ей системой сил, приложенных к той же части поверхности, практически не изменяет напряжений в точках тела, достаточно удаленных от места приложения нагрузки.

Все решения сопротивления материалов предполагают, по существу, справедливость принципа Сен-Венана. Именно это обстоятельство и позволяет заменить действительные нагрузки их равнодействующими.

## 2.5. НАПРЯЖЕНИЯ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ

Определим нормальные и касательные напряжения в сечении, нормаль к которому составляет с осью бруса угол  $\alpha$  (рис. 2.4, в). Площадь этого сечения  $F_\alpha = F/\cos \alpha$ , где  $F$  — площадь поперечного сечения.

При растяжении бруса наклонные сечения, как и поперечные, остаются плоскими и параллельными. Следовательно, внутренние силы распределены по наклонным сечениям равномерно (см. рис. 2.4, в). Равнодействующая этих сил направлена вдоль оси бруса и равна нормальной силе в поперечном сечении. Поэтому полное напряжение в наклонном сечении

$$K = \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N}{F} \cos \alpha$$

или

$$K = \sigma \cos \alpha, \quad (2.8)$$

где  $\sigma$  — напряжение в поперечном сечении, проходящем через ту же точку оси бруса, что и рассматриваемое наклонное.

Нормальные и касательные напряжения в наклонном сечении (рис. 2.5):

$$\sigma_\alpha = K \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = K \sin \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha,$$

или окончательно

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.9)$$

Таким образом, напряжения в точке бруса изменяются с изменением наклона сечения, т. е. являются функциями угла  $\alpha$ . Тем самым на конкретном примере подтверждается отмеченная в разд. 1.9 зависимость напряжений в точке тела от ориентировки площадки их действия.

Анализ формул (2.9) показывает, что при одноосном растяжении бруса нормальные напряжения  $\sigma$  достигают наибольших значений в поперечных сечениях ( $\alpha = 0$ ), а касательные напряжения  $\tau_\alpha$  — в сечении, наклонном к оси бруса под углом  $\alpha = 45^\circ$ , причем

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}. \quad (2.10)$$

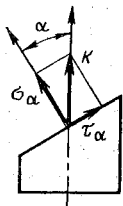


Рис. 2.5

В продольном сечении ( $\alpha = 90^\circ$ ) касательные и нормальные напряжения равны нулю.

Интересно отметить, что сумма нормальных напряжений на двух любых ортогональных площадках есть величина постоянная, а касательные напряжения на этих площадках равны по величине. Действительно, на площадке, наклоненной под углом  $\alpha$ ,

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha,$$

а на площадке, наклоненной под углом  $\alpha + 90^\circ$ ,

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma \cos^2 (\alpha + 90^\circ) = \sigma \sin^2 \alpha;$$

$$\tau_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ) = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

Следовательно

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma;$$

$$\tau_\alpha = -\tau_{\alpha+90^\circ}.$$

В последнем равенстве проявляется весьма важное и общее свойство касательных напряжений, называемое свойством парности касательных напряжений. Ниже оно будет доказано для общего случая нагружения тела.

## 2.6. ЗАКОН ГУКА ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ. ПРИНЦИП НЕЗАВИСИМОСТИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ

Экспериментальным путем установлено, что для большинства материалов до определенного значения растягивающих и сжимающих брус сил напряжения прямо пропорциональны деформациям:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.11)$$

Эта линейная зависимость между напряжениями и деформациями называется законом Гука при одноосном растяжении. Назван он так по имени английского исследователя Роберта Гука, обнаружившего прямую пропорциональную зависимость удлинения струны от величины подвешенного на ней груза.

Коэффициент пропорциональности  $E$  является физической константой материала и называется модулем упругости первого рода. Его размерность в системе СИ, как и напряжения,  $\text{Н/м}^2$ .

Модули упругости углеродистых и легированных сталей находятся в пределах  $(2 \dots 2,2) \cdot 10^5$  МПа, а у различных марок дюралюминия  $(0,7 \dots 0,8) \cdot 10^5$  МПа. Практически модули упругости от марок сталей и дюралюминия не зависят.

Модуль упругости  $E$  характеризует способность материала сопротивляться деформации, так как при постоянном  $\sigma$  с увеличением  $E$  уменьшается  $\varepsilon$ . Следовательно, модуль  $E$  можно рассматривать как характеристику жесткости материала при растяжении и сжатии.

Записывая закон Гука в виде  $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$  и подставляя сюда  $\sigma(x) = \frac{N(x)}{F(x)}$ , получаем для относительного удлинения при одноосном растяжении формулу

$$\epsilon(x) = \frac{N(x)}{EF(x)}. \quad (2.12)$$

Тогда, согласно уравнению (2.3), абсолютное удлинение бруса

$$\Delta l = \int_l \frac{N(x)}{EF(x)} dx. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.13) представляет собой интегральную форму записи закона Гука при одноосном растяжении (сжатии) прямого бруса.

В частном случае, когда нормальные силы  $N$  постоянны по длине бруса и размеры поперечного сечения бруса не изменяются, закон Гука принимает наиболее простой вид:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}. \quad (2.14)$$

Произведение  $EF$  называется жесткостью при растяжении и сжатии.

Закон Гука является приближенным. Для одних материалов, таких как сталь, до определенного значения напряжений его можно считать достаточно точным, а для других, — например для чугуна, его можно принять только в грубом приближении даже при сравнительно небольших напряжениях.

В случае линейной зависимости между нагрузками и вызванными ими перемещениями напряжения, деформации и перемещения, возникающие в упругом теле при действии на него системы нагрузок, равны суммам напряжений, деформаций и перемещений, возникающих в этом теле от каждой из нагрузок в отдельности. Это свойство линейных систем называется **принципом независимости действия сил**. Часто его называют также принципом суммирования или принципом суперпозиции. При нелинейной зависимости между нагрузками и перемещениями этот принцип, естественно, несправедлив.

В сопротивлении материалов, как правило, рассматриваются системы, подчиняющиеся принципу независимости действия сил.

## 2.7. УДЛИНЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Деформации бруса характеризуются величиной его абсолютного удлинения  $\Delta l$ , а перемещения сечений — величиной смещения центра тяжести сечения относительно неподвижного сечения или сечения, условно принятого за неподвижное.

Перемещения и удлинения взаимно связаны. Перемещение какого-либо сечения  $\delta$  относительно неподвижного равно удлинению  $\Delta l$  части бруса, заключенной между неподвижным и рассматриваемым

сечением (на рис. 2.6 эта часть заштрихована). Следовательно, можно записать, что

$$\delta(x) = \int_0^x \varepsilon(x) dx$$

или

$$\delta(x) = \int_0^x \frac{N(x)}{EF(x)} dx. \quad (2.15)$$

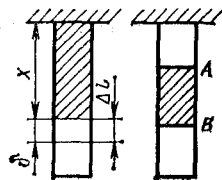


Рис. 2.6

Относительное перемещение двух сечений *A* и *B* бруса равно удлинению части бруса, заключенной между этими сечениями (рис. 2.6). В некоторых системах, например в фермах, зависимость между перемещениями и удлинениями может быть более сложной (см. разд. 2.21).

## 2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Расчеты прочности и жесткости конструкций и их деталей невозможно осуществить, если неизвестны механические свойства реальных материалов и их числовые характеристики, которые могут быть определены только экспериментальным путем.

Важность экспериментальных исследований объясняется еще и тем, что все решения сопротивления материалов являются приближенными. Поэтому их достоверность и пределы применимости могут быть установлены лишь экспериментально.

Механические свойства материалов при различных видах деформаций (растяжении, сжатии, кручении и т. д.) изучаются путем испытания на специальных машинах брусков простейшей формы, называемых **образцами**. Испытания проводятся обычно при комнатной температуре. В последнее время большое внимание уделяется исследованию свойств материалов при повышенных температурах. Наибольшей простотой и надежностью результатов отличаются испытания на растяжение. Испытательные машины снабжены динамометрами для замеров нагрузки на образец, а деформации образцов измеряются специальными приборами — тензометрами, устанавливаемыми непосредственно на образцах.

Применяются круглые и плоские образцы. Их размеры и конфигурация стандартизованы. Характерной особенностью образцов является наличие на концах усиленных частей — головок под захват машины и плавного перехода к более тонкой рабочей части постоянного сечения (рис. 2.7). Такая форма образца позволяет обеспечить однородное напряженное состояние в его рабочей части.

В процессе испытания изучается зависимость между нагрузками и вызванными ими удлинениями. Эту зависимость принято представлять

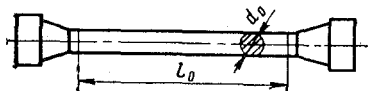


Рис. 2.7

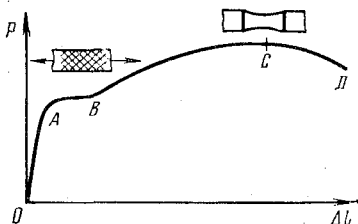


Рис. 2.8



Рис. 2.9

в виде диаграмм растяжения. Как правило, испытательные машины оборудованы специальными приспособлениями для автоматической записи таких диаграмм.

При построении диаграмм растяжения по оси абсцисс откладываются удлинения  $\Delta l$  рабочей части образца, а по оси ординат — соответствующие им значения растягивающей силы  $P$ .

На рис. 2.8 представлена диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали. Эту диаграмму можно разделить на три характерных участка.

На участке  $OA$ , соответствующем стадии упругости образца, деформации материала подчиняются закону Гука.

На участке  $AB$  рост нагрузки замедляется, а затем почти прекращается при одновременном росте удлинений. Явление значительного роста удлинений без заметного увеличения нагрузки называется **текучестью**, а горизонтальный (или почти горизонтальный) участок диаграммы растяжения называется **площадкой текучести**.

На стадии общей текучести полированная поверхность образца покрывается сеткой тонких линий (см. рис. 2.8), называемых **линиями сдвига**, или линиями Чернова, по фамилии русского металлурга, впервые заметившего их. Эти линии являются следами плоскостей скольжения (сдвига) частиц материала друг относительно друга. Они наклонены к оси бруса под углом, близким к  $45^\circ$ , и практически совпадают с плоскостями действия максимальных касательных напряжений (см. разд. 2.5).

Многие материалы, например легированные стали, дюралюминий, обнаруживают пластические свойства, но площадки текучести не имеют. Характер диаграмм растяжения для дюралюминия и легированной стали представлен на рис. 2.9.

На участке  $BC$ , называемом **зоной упрочнения**, материал вновь приобретает свойство оказывать сопротивление нагрузке, но с ростом удлинения образца нагрузка возрастает значительно медленнее, чем на упругом участке. В зоне упрочнения равномерное до этого уменьшение поперечных размеров рабочей части образца нарушается появлением местного утоньшения — шейки (см. рис. 2.8). Деформация образца приобретает местный характер течения материала в области шейки, и в связи с быстрым уменьшением сечения образца в этом месте для развития деформаций требуется меньшая нагрузка. Этим, главным образом, и объясняется падение нагрузки за точкой  $C$  диаграммы. Точка  $D$  диаграммы соответствует разрушению образца.



## 2.9. ДИАГРАММЫ УСЛОВНЫХ И ИСТИННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Диаграмма растяжения в осях  $\Delta l$  и  $P$  является по существу характеристикой образца из данного материала, так как при одном и том же значении силы  $P$  величина удлинения  $\Delta l$  зависит от поперечных и продольных размеров образца. Чтобы исключить влияние размеров образца и получить характеристику материала, диаграмму растяжения строят в координатах  $\sigma - \epsilon$ .

При переходе от нагрузок  $P$  к напряжениям  $\sigma$  и от абсолютных удлинений  $\Delta l$  к относительным  $\epsilon$  обычно пренебрегают изменением площади сечения образца в процессе растяжения, а также неравномерностью распределения деформаций по длине его рабочей части после образования шейки. Подсчитывают  $\sigma$  делением нагрузки  $P$  на первоначальную площадь  $F_0$  сечения образца, а  $\epsilon$  — делением удлинения всей его рабочей части на ее первоначальную длину  $l_0$ . Полученная таким путем диаграмма называется диаграммой условных напряжений, по характеру она не отличается от диаграммы в осях  $P$  и  $\Delta l$ .

Диаграмма условных напряжений для малоуглеродистой стали показана на рис. 2.10. Уравнение линейного участка этой диаграммы на начальной стадии нагружения  $\sigma = E\epsilon$  представляет собой уже известную математическую запись закона Гука при одноосном растяжении (см. разд. 2.6). Следовательно, численно модуль упругости  $E$  равен тангенсу угла  $\alpha$  наклона к оси абсцисс прямолинейного участка диаграммы растяжения.

Диаграмма растяжения, по оси ординат которой откладывается напряжение, полученное делением силы  $P$  на наименьшую площадь сечения образца, а по оси абсцисс — наибольшее удлинение в данный момент нагружения, называется диаграммой истинных напряжений. Эта диаграмма показана на рис. 2.10 пунктиром. Здесь падения напряжений за точкой  $C$  не наблюдается, так как площадь сечения в шейке уменьшается быстрее, чем падает нагрузка, поэтому средние напряжения\* в этом месте возрастают.

Различие диаграмм условных и истинных напряжений становится значительным только после образования шейки.

## 2.10. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛА

Под механическими характеристиками подразумеваются значения напряжений и деформаций, соответствующие определенным точкам на диаграмме условных напряжений.

\* Вследствие образования шейки распределение напряжений по сечению становится неравномерным, а частицы материала в этом месте испытывают растяжение не только в продольном, но также в радиальном и окружном направлениях. Это приводит к образованию внутри шейки поперечной трещины.

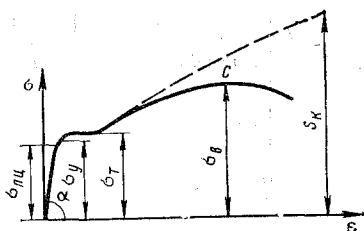


Рис. 2.10

**Пределом пропорциональности**  $\sigma_{\text{пц}}$  называется наибольшее напряжение, до которого деформации прямо пропорциональны напряжениям.

**Пределом упругости**  $\sigma_y$  называется напряжение, до которого материал не получает остаточных деформаций.

**Пределом текучести**  $\sigma_x$  называется напряжение, при котором деформации растут без заметного увеличения нагрузки.

**Пределом прочности, или временным сопротивлением**  $\sigma_b$  называется максимальное напряжение (подсчитанное по первоначальной площади сечения образца), выдерживаемое материалом при растяжении. Его величина определяется ординатой точки С условной диаграммы (см. рис. 2.10).

При экспериментальном определении величин пределов пропорциональности и упругости вносится определенный элемент условности. Объясняется это тем, что начало отклонения от линейной зависимости, как и начало образования остаточных деформаций, будет отмечено тем раньше, чем выше точность измерения деформаций.

Поэтому под пределом пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}}$  понимается напряжение, при котором отступление от линейной зависимости достигает определенной величины, устанавливаемой техническими условиями. Пределом упругости считается напряжение, при котором остаточные деформации достигают заранее установленной величины в пределах 0,001 ... 0,005 %. Условный предел упругости при остаточной деформации 0,005 % обозначается  $\sigma_{0,005}$ .

Для материалов, не имеющих площадки текучести, в качестве предела текучести условно принимается напряжение, при котором остаточные деформации составляют 0,2 или 0,3 % первоначальной длины образца. Условный или, иначе, технический предел текучести в соответствии с допуском на остаточную деформацию обозначается  $\sigma_{0,2}$  или  $\sigma_{0,3}$ .

В теоретических исследованиях индексы 0,2 и 0,3 обычно опускаются и условный предел текучести обозначается символом  $\sigma_T$ . Предел текучести является одной из основных характеристик материала.

Пластические свойства материала, т. е. способность к образованию остаточных деформаций, характеризуются величиной остаточного удлинения образца при разрыве

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100 \%, \quad (2.16)$$

а также относительным уменьшением площади сечения образца в шейке

$$\psi = \frac{F_1 - F_0}{F_0} \cdot 100 \%, \quad (2.17)$$

где  $l_1$  и  $F_1$  — длина рабочей части образца и площадь наименьшего сечения шейки разорванного образца, соответственно;  $l_0$  и  $F_0$  — их величины до нагружения.

Основные механические характеристики применяемых в технике материалов приводятся в справочной литературе.

### 2.11. ЗАКОН РАЗГРУЗКИ И ПОВТОРНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Если образец нагрузить до напряжений, больших  $\sigma_y$ , но меньших  $\sigma_B$ , например до точки  $K$  диаграммы (рис. 2.11), а затем начать разгружать, то разгрузка будет происходить по прямой  $KL$ , параллельной начальному линейному участку диаграммы. После разгрузки деформация образца уменьшится, но полностью не исчезнет. Отрезок  $LM$  определяет величину исчезающей, т. е. упругой деформации  $\epsilon_y$ , а отрезок  $OL$  — величину остаточной (пластической) деформации  $\epsilon_{пл}$ .

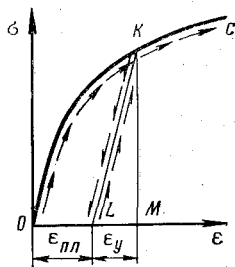


Рис. 2.11

Прямолинейность линии разгрузки показывает, что упругая деформация подчиняется закону Гука и за пределами пропорциональности.

Повторное нагружение образца уже не повторяет полностью прежнюю диаграмму, а происходит сначала по прямой разгрузки  $KL$ , и затем по кривой  $KC$ , которую имел бы этот образец без промежуточной разгрузки. Следовательно, после промежуточной разгрузки появился как бы новый материал с более высоким пределом пропорциональности, но меньшей пластичностью.

Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования называется **наклепом** или **нагартовкой**. Наклеп возникает при вытяжке, холодной прокатке металла, в процессе штамповки и т. д. Часто наклеп играет положительную роль и применяется для упрочнения поверхностного слоя детали, повышения упругости свойств проволоки, канатов и т. п. В тех случаях, когда наклеп вреден, его устраняют отжигом.

### 2.12. ПЛАСТИЧНЫЕ И ХРУПКИЕ МАТЕРИАЛЫ

По результатам испытаний на одноосное растяжение материалы принято делить на пластичные и хрупкие.

К пластичным относятся материалы, разрушению которых предшествуют большие остаточные деформации, достигающие иногда 20 ... 25 %. Хрупкими называют материалы, разрушающиеся при малых остаточных деформациях, не превышающих 2 ... 5 %.

Характерными представителями пластичных материалов являются малоуглеродистая сталь и алюминий, а хрупких — чугун, инструментальная сталь и стекло.

Пластичные и хрупкие материалы отличаются еще и характером разрушения при растяжении.

Пластичные материалы проявляют большее сопротивление отрыву частиц, чем сдвигу их друг относительно друга, и разрушаются,

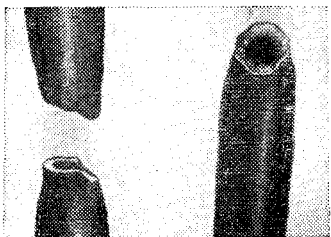


Рис. 2.12

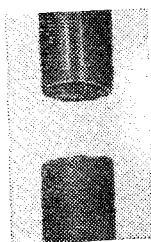


Рис. 2.13

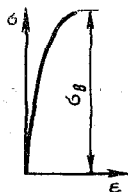


Рис. 2.14

главным образом, от сдвига частиц в плоскостях действия наибольших касательных напряжений. Именно вследствие сдвига частиц увеличивается длина образца из пластичного материала при его растяжении, а место разрушения в шейке имеет вид кратера, стенки которого наклонены к оси образца под углом  $45^\circ$  (рис. 2.12). Дном этого кратера является поверхность первоначальной внутренней трещины, возникающей после образования шейки (см. сноску в разд. 2.9).

Хрупкие материалы, наоборот, обладают большим сопротивлением сдвигу, чем отрыву, и разрушаются при растяжении внезапно от отрыва частиц материала по плоскости поперечного сечения (рис. 2.13). Явления текучести, упрочнения и образования шейки на образцах из таких материалов перед разрывом не наблюдаются. Единственной прочностной характеристикой хрупких материалов является предел прочности  $\sigma_b$ . Диаграмма растяжения хрупких материалов представлена на рис. 2.14.

Деление материалов на хрупкие и пластичные является условным, так как свойства материалов зависят от температуры, скорости и вида нагружения. Один и тот же материал в одних условиях ведет себя как хрупкий, в других — как пластичный. Например, мрамор при одноосном растяжении разрушается как хрупкий материал, а при всестороннем сжатии проявляет пластические свойства. Поэтому правильнее говорить о пластичном и хрупком характере разрушения материала. Первое происходит при больших, а второе при сравнительно малых остаточных деформациях.

### 2.13. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРИ СЖАТИИ

При сжатии образца из пластичного материала, как и при растяжении, сначала имеет место линейная зависимость  $\epsilon$  от  $\sigma$ , затем площадка текучести и зона упрочнения. Но в отличие от растяжения площадка текучести едва намечается, и в дальнейшем нагрузка все время возрастает. Возрастание происходит потому, что при сжатии образец из пластичного материала не разрушается, а постепенно сплющивается в тонкий диск при одновременном увеличении площади сечения (рис. 2.15). Определить предел прочности пластичного материала при сжатии очевидно невозможно, так как он просто не существует.

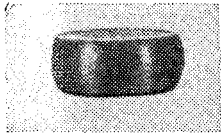


Рис. 2.15

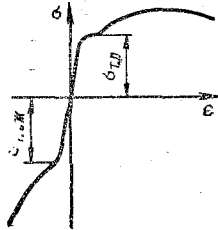


Рис. 2.16

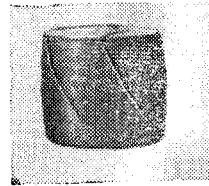


Рис. 2.17

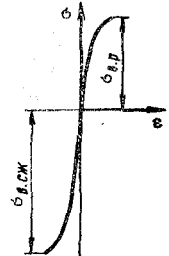


Рис. 2.18

Для испытаний на сжатие применяются короткие цилиндрические образцы. Бочкообразная форма, которую они принимают в процессе испытания, объясняется наличием сил трения между плитами пресса и торцами образца. Сравнительная диаграмма растяжения и сжатия для пластичного материала приведена на рис. 2.16.

Для пластичных материалов характерно малое отличие пределов текучести при растяжении  $\sigma_{т.р}$  и сжатии  $\sigma_{т.сж}$ . Различие в работе материала на растяжение и сжатие характеризуется коэффициентом  $\nu_T = \sigma_{т.р} / \sigma_{т.сж}$ . Материалы, у которых  $\nu_T = 1$ , называются одинаково работающими на растяжение и сжатие.

Иные свойства при сжатии проявляют хрупкие материалы. Образцы из таких материалов при сжатии разрушаются внезапно, раскалываясь по наклонным (под углом  $\approx 45^\circ$ ) плоскостям, как показано на рис. 2.17.

Сравнительная диаграмма растяжения и сжатия хрупкого материала приведена на рис. 2.18. Качественные особенности у обеих кривых одинаковы, но сравнение пределов прочности при растяжении  $\sigma_{в.р}$  и сжатии  $\sigma_{в.сж}$  показывает, что хрупкие материалы, как правило, значительно лучше работают на сжатие, чем на растяжение. Например, у чугуна предел прочности при сжатии в среднем в три раза больше, чем при растяжении.

#### 2.14. ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Изучение основных механических характеристик при повышенных температурах в условиях кратковременных испытаний показывает, что у большинства материалов предел прочности  $\sigma_B$ , предел текучести  $\sigma_T$  и модуль упругости  $E$  с ростом температуры уменьшаются, а пластические свойства повышаются. Однако заметное изменение этих характеристик наблюдается при достаточно высоких температурах. Для иллюстрации на рис. 2.19 приведена зависимость механических характеристик стали 30ХГСА от температуры испытаний.

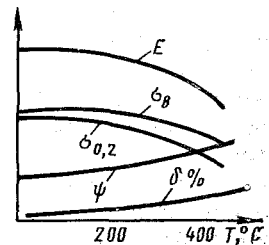


Рис. 2.19

У некоторых материалов при длительном пребывании в нагретом состоянии наблюдается явление, называемое охрупчиванием. Оно выражается в уменьшении удлинения при разрыве и некотором возрастании предела прочности.

На механические характеристики при повышенных температурах очень влияет продолжительность действия нагрузки. Вследствие этого при высоких температурах сами характеристики становятся неопределенными. Фактор времени сказывается и при нормальной температуре, но для большинства металлов его влияние незначительно и в расчетах не учитывается.

## 2.15. ПОЛЗУЧЕСТЬ. ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ И РЕЛАКСАЦИЯ

Известно, что при повышенной температуре и длительном действии нагрузки постоянной величины деформации детали с течением времени возрастают. Например, в процессе эксплуатации увеличиваются размеры дисков и лопаток газовых турбин, растут деформации обшивки самолетов при высоких скоростях полетов.

Наблюдается также постепенное уменьшение напряжений в нагруженной детали при неизменной величине деформации. Например, с течением времени уменьшается сила давления пружины на плиты теща при неизменном расстоянии между ними, уменьшается предварительная затяжка болтовых соединений и т. д.

Отмеченные изменения, как правило, носят необратимый характер. Это явление принято определять термином — ползучесть материала.

Ползучестью называется явление изменения во времени напряжений и деформаций в нагруженной детали. Различают два случая ползучести — последствие и релаксацию. Последствием, или собственно ползучестью, называется явление роста деформаций при постоянных напряжениях, а релаксацией — уменьшение напряжений при постоянной деформации.

Последствие может быть упругим и пластическим. Последствие при упругих деформациях выражается в том, что своего конечного значения деформации достигают при нагружении, и при разгрузке исчезают полностью не сразу, а по истечении некоторого времени. При пластическом последствии процесс роста деформаций развивается во времени, является необратимым и может привести к разрушению детали без увеличения нагрузки.

Падение напряжений при релаксации является следствием постепенного увеличения пластических деформаций (ползучести) в результате уменьшения упругих.

Ползучесть металлов изучается большей частью на опытах по растяжению стержней при постоянной нагрузке и температуре. Зависимость

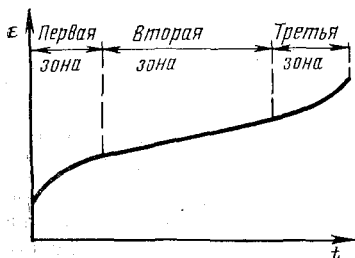


Рис. 2.20

роста относительного удлинения  $\epsilon$  от времени деформирования образца при постоянных напряжениях и температуре представляется графически кривыми ползучести (рис. 2.20). Вначале, как видно из диаграммы, деформации ползучести быстро нарастают, затем процесс стабилизируется и деформации растут с постоянной скоростью. На третьей стадии перед разрушением образца скорость возрастания деформаций вновь увеличивается. В это время на образце часто появляется шейка, как и при испытаниях на разрыв в условиях нормальной температуры.

## 2.16. ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ

Для оценки прочности деталей, длительное время находящихся в нагруженном состоянии в условиях повышенных температур, вводится понятие предела длительной прочности.

Пределом длительной прочности называется напряжение, подсчитанное по первоначальной площади сечения образца, при котором происходит разрушение образца при данной температуре через наперед заданный промежуток времени. Этот промежуток времени называется базой испытания.

База испытания назначается исходя из срока службы детали и колеблется от нескольких часов до нескольких лет. Металлы, применяемые в авиационных двигателях и конструкциях, подвергаются обычно кратковременным испытаниям на базе порядка 100 ... 200 ч. Предел длительной прочности на базе 100 ч обозначается через  $\sigma_{100}$ . С увеличением температуры и базы испытания предел длительной прочности, естественно, уменьшается.

## 2.17. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Внешние силы в процессе деформации тела производят работу. Часть затраченной на деформацию энергии поглощается телом и накапливается в нем в виде потенциальной энергии, называемой потенциальной энергией деформации. Остальная часть расходуется на необратимые процессы — нагрев тела, изменение его электромагнитных свойств и т. д. Соотношение между этими двумя слагаемыми энергии внешних сил изменяется в процессе нагружения тела.

В пределах упругих деформаций затрата энергии на необратимые процессы весьма незначительна, и поэтому можно считать, что в пределах упругости работа  $A$  внешних сил полностью переходит в потенциальную энергию деформации  $U$ . Таким образом, упругое тело является как бы аккумулятором энергии.

За пределами упругости большая часть работы внешних сил затрачивается на необратимые процессы, а при разгрузке выделяется лишь часть энергии, связанная с упругими деформациями тела.

При разгрузке идеально упругого тела накопленная в нем потенциальная энергия полностью расходуется на восстановление его первоначальной формы и размеров, причем эту работу производят

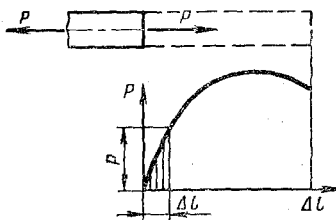


Рис. 2.21

уже внутренние силы. Следовательно, потенциальная энергия деформации равна работе внутренних сил упругости на перемещениях точек их приложения, и поэтому всегда может быть выражена через эти силы.

В случае одноосного растяжения прямого бруса при статическом нагружении работа внешних сил  $A$  может быть подсчитана по диаграмме растяжения (рис. 2.21), представляющей собой зависимость между величиной переменной силы  $P$  и перемещением  $\Delta l$  точки ее приложения в направлении этой силы. Подсчитывая работу переменной силы  $P$  как предел суммы работ ее промежуточных значений  $P(\Delta l)$  на бесконечно малых приращениях перемещений  $d(\Delta l)$ , получаем

$$A = \int_0^{\Delta l} P(\Delta l) d(\Delta l).$$

Следовательно, работа внешних сил при растяжении образца численно равна площади диаграммы растяжения в осях  $P$  и  $\Delta l$ . Энергия, затраченная на разрушение образца, определяется площадью всей диаграммы. В пределах упругих деформаций работа внешних сил определяется площадью линейной части диаграммы, т. е. площадью заштрихованного на рис. 2.21 треугольника со сторонами  $P$  и  $\Delta l$ .

Таким образом, в пределах упругости работа статической нагрузки равна половине произведения конечного значения этой нагрузки на вызванное ею удлинение образца, и эта работа равна потенциальной энергии деформации  $U$ :

$$U = A = \frac{P\Delta l}{2}.$$

Учитывая, что при растяжении образца нормальная сила  $N = P$ , а  $\Delta l = \frac{Nl}{EF}$ , записываем формулу для  $U$  так:

$$U = \frac{N^2 l}{2EF}. \quad (2.18)$$

Потенциальная энергия, накопленная в единице объема бруса, называется удельной потенциальной энергией деформации. Очевидно для образца

$$u = \frac{U}{V} = \frac{N\Delta l}{2Fl}$$

или окончательно

$$u = \frac{\sigma \epsilon}{2}. \quad (2.19)$$

В случаях, когда нормальная сила  $N$  и площадь поперечного сечения  $F$  изменяются вдоль оси бруса (см. рис. 2.3), потенциальная



энергия деформации будет равна пределу суммы потенциальных энергий  $dU$ , накопленных в его элементах длиной  $dx$ . Подсчитывая  $dU$  по формуле (2.18), получаем

$$U = \int_l \frac{N^2(x) dx}{2EF}. \quad (2.20)$$

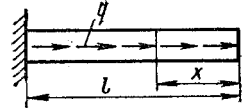


Рис. 2.22

Например, в брус постоянного сечения при действии равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q$  (рис. 2.22) потенциальная энергия деформации

$$U = \int_0^l \frac{q^2 x^2 dx}{2EF} = \frac{q^2 l^3}{6EF}.$$

Необходимо иметь в виду, что формула (2.18) является частным случаем зависимости (2.20) и применима только в случае  $N(x) = \text{const}$  и  $F(x) = \text{const}$ .

## 2.18. О РАСЧЕТЕ НА ПРОЧНОСТЬ

Чтобы оценить прочность детали, надо сравнить наибольшие напряжения  $\sigma_{\text{max}}$ , возникающие в ней при заданной нагрузке, с предельными (или недопустимыми по той или иной причине) напряжениями  $\sigma_{\text{пред}}$  для материала, из которого эта деталь сделана.

Если максимальные напряжения  $\sigma_{\text{max}}$  окажутся меньше предельных  $\sigma_{\text{пред}}$ , то деталь из этого материала, очевидно, выдержит приложенную к ней нагрузку. В противном случае ( $\sigma_{\text{max}} > \sigma_{\text{пред}}$ ) в процессе нагружения деталь разрушится, или в ней начнется недопустимый физический процесс, например течение материала.

Поясним изложенное на примере растяжения детали, имеющей форму прямого бруса с площадью поперечного сечения  $F = 2 \text{ см}^2$  (рис. 2.23). При достижении статически прилагаемой растягивающей силой своего конечного значения  $P_{\text{max}} = 30 \text{ кН}$  в детали независимо от материала, из которого она будет сделана, должны возникнуть напряжения

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{30\,000}{200} = 150 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 150 \text{ МПа}.$$

Что можно сказать о прочности этой детали? Если ее выполнить, например, из технического алюминия с пределом прочности  $\sigma_{\text{в}} = 100 \text{ МПа}$ , то такая деталь разрушится уже при  $P = \sigma_{\text{в}} F = 20 \text{ кН}$ , т. е. прежде, чем нагрузка достигает своего конечного значения  $P_{\text{max}} = 30 \text{ кН}$ . Но если ту же деталь сделать, например,

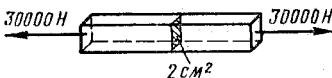


Рис. 2.23

из конструкционной малоуглеродистой стали с пределом текучести  $\sigma_{\text{т}} = 240 \text{ МПа}$  и пределом прочности  $\sigma_{\text{в}} = 300 \text{ МПа}$ , то она не только не разрушится в процессе нагружения, но и будет способна выдер-

жать еще большую нагрузку. Можно сказать, что деталь, выполненная из стали, при заданной нагрузке обладает некоторым резервом прочности.

Количественная оценка резерва прочности детали называется ее запасом прочности и обозначается буквой  $n$ .

Запас прочности есть число, показывающее, во сколько раз предельные напряжения для материала  $\sigma_{\text{пред}}$  больше максимальных напряжений  $\sigma_{\text{max}}$ , возникающих в детали при заданной нагрузке:

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}}. \quad (2.21)$$

Очевидно, запас прочности  $n$  всегда должен быть больше единицы и будет уменьшаться по мере возрастания нагрузки на деталь.

При определении запаса прочности детали обычно рассматривается наиболее неблагоприятный вариант ее нагружения в процессе эксплуатации конструкции и для этого случая вычисляется  $\sigma_{\text{max}}$ .

Для объективной оценки прочности детали в качестве предельного напряжения  $\sigma_{\text{пред}}$  принимается одна из механических характеристик материала, определяемых, как известно, путем лабораторных испытаний.

В случае одноосного растяжения и сжатия при нормальных или сравнительно невысоких температурах и постоянных во времени напряжениях такими характеристиками являются пределы прочности  $\sigma_{\text{в}}$  и текучести  $\sigma_{\text{т}}$ .

Хрупкие материалы в указанных условиях пластических свойств не проявляют, но обладают различной прочностью при растяжении и сжатии. Поэтому при расчете деталей из таких материалов в качестве  $\sigma_{\text{пред}}$  для растягивающих  $\sigma_{\text{max}}$  принимается предел прочности при растяжении  $\sigma_{\text{в.р}}$ , а при сжимающих  $\sigma_{\text{max}}$  — предел прочности при сжатии  $\sigma_{\text{в.сж}}$ .

Для пластичных материалов характерна способность к образованию значительных остаточных деформаций. В деталях машин и ответственных сооружений появление остаточных деформаций, как правило, недопустимо. Поэтому для пластичных материалов в качестве  $\sigma_{\text{пред}}$  обычно принимается предел текучести  $\sigma_{\text{т}}$ . Предел прочности  $\sigma_{\text{в}}$  также может быть взят в качестве предельного напряжения, но только при растягивающих  $\sigma_{\text{max}}$ , так как при сжатии пластичных материалов предела прочности не существует. Следовательно, для пластичных материалов при растяжении  $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{т}}$  или  $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{в}}$ , а при сжатии  $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{т}}$ .

Величина  $n$ , вычисленная по формуле (2.21) при  $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{в}}$ , называется запасом прочности по пределу прочности, а вычисленная по  $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{т}}$  — запасом прочности по пределу текучести. В случае необходимости подчеркнуть, по какой характеристике вычисляется запас прочности, символу  $n$  приписывается индекс в или т. Очевидно, всегда  $n_{\text{в}} > n_{\text{т}}$ . Так, для рассмотренной выше стальной детали

по пределу прочности  $n_{\text{в}} = 380/150 = 2,5$ ;

по пределу текучести  $n_{\text{т}} = 240/150 = 1,6$ .

Предельные напряжения служат основой для выбора так называемых допускаемых напряжений, т. е. наибольших напряжений, до которых гарантирована необходимая прочность и нормальные условия работы детали. Допускаемые напряжения принято обозначать символом  $[\sigma]$ .

Допускаемое напряжение принимается равным некоторой доле предельного напряжения:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}. \quad (2.22)$$

Следовательно, для хрупких материалов

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{в}}}{n}, \quad (2.23)$$

а для пластичных

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{в}}}{n_{\text{в}}}$$

или

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{т}}}, \quad (2.24)$$

где  $n$  — запас прочности.

Чтобы определить допускаемые напряжения, необходимо знать предельные напряжения для материала и задаться определенным запасом прочности.

При выборе запаса прочности учитываются назначение и условия работы конструкции и ее деталей, точность определения нагрузок, свойства и качество материала, совершенство методов расчета напряжений и т. п. Учитывается также опыт, накопленный при проектировании аналогичных конструкций, в том числе и личный опыт расчетчика.

Для некоторых материалов, применяемых в широко распространенных типах строительных конструкций, допускаемые напряжения устанавливаются государственными нормирующими органами.

Запас прочности должен быть выбран так, чтобы допускаемые напряжения были заведомо ниже предела упругости. В то же время допускаемые напряжения не должны быть занижены. Иначе конструкция получится тяжелой и неэкономичной. Для одного и того же материала в конструкциях разного типа могут быть назначены различные допускаемые напряжения.

Величины запасов прочности колеблются в широких пределах. В машиностроении их принимают порядка 2 ... 4 для пластичных материалов и 4 ... 6 для хрупких. В авиационной технике, где важно получить конструкции наименьшей массы, запас прочности колеблется в пределах 1,8 ... 2.

На диаграмме растяжения допускаемые напряжения определяют тот «потолок» (рис. 2.24), который не должны превосходить напряжения ни в одной точке нагруженной детали. Следовательно, условие прочности детали запишется так:

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma]. \quad (2.25)$$

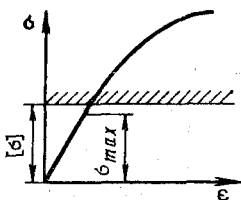


Рис. 2.24

Условие прочности (2.25), как и соотношение (2.21), определяющее запас прочности, лежат в основе метода расчета на прочность по допускаемым напряжениям. Согласно этому методу сначала должны быть определены наибольшие рабочие напряжения в опасной точке детали. Затем найденные напряжения сопоставляются с допускаемыми или предельными напряжениями для материала этой детали, и на основании проведенного сравнения делается заключение о прочности данной детали.

Расчет по допускаемым напряжениям не является единственным методом расчета на прочность. Более совершенен метод расчета по предельным нагрузкам. В этом методе сравниваются не напряжения, а рабочая нагрузка с предельной нагрузкой для детали или всей конструкции в целом. Сложность определения расчетным путем разрушающих нагрузок затрудняет применение этого метода.

## 2.19. ДВА ТИПА РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ

Различают два типа расчетов на прочность: проектировочный и поверочный.

**Проектировочный расчет.** С ним расчетчик встречается на стадии проектирования детали, когда из конструктивных соображений избрана конфигурация ее поперечных сечений, выбран материал, из которого она будет изготовлена, и требуется лишь определить размеры сечения, обеспечивающие заранее заданный запас прочности этой детали.

Искомые размеры находятся из условия прочности (2.25).

Это условие в случае одноосного растяжения и сжатия принимает вид

$$\frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (2.26)$$

Отсюда определяется необходимая площадь сечения

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

Зная конфигурацию сечения, т. е. его форму, соотношение линейных размеров, и необходимую площадь сечения, всегда можно найти его размеры. Обычно эти размеры округляются в сторону их увеличения, особенно при применении стандартных профилей-уголков, двутавров, швеллеров, труб и т. п.

Допустим, что надо подобрать стандартную дюралюминиевую трубу, обеспечивающую запас прочности  $n = 1,5$  детали при максимальном значении растягивающей осевой нагрузки  $P = 32$  кН. Предел текучести материала трубы  $\sigma_T = 300$  МПа. Поступаем так. Сначала определяем необходимую площадь сечения трубы из условия

$$F \geq \frac{32000}{300} \cdot 1,5 = 160 \text{ мм}^2.$$

Затем по этой площади подбираем в сортаменте трубу подходящих размеров. В сортаменте нет трубы с  $F = 1,6 \text{ см}^2$ , а есть трубы с  $F = 1,57$  и  $1,62 \text{ см}^2$ . Выбираем трубу  $20 \times 14$  (первый множитель — наружный диаметр трубы, а второй — внутренний в мм), имеющую  $F = 1,62 \text{ см}^2$ .

Условие прочности позволяет определить допустимую нагрузку на деталь. Для этого его записывают в виде

$$N \leq [\sigma] F. \quad (2.27)$$

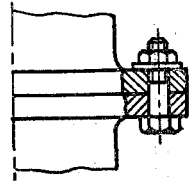


Рис. 2.25

Например, допустимая нагрузка на трос подъемника площадью сечения  $F = 3 \text{ см}^2$  при допустимом напряжении для материала троса  $[\sigma] = 300 \text{ МПа}$  будет составлять

$$P_{\text{доп}} = 300 \cdot 300 = 90 \text{ кН}.$$

Наконец, условие прочности позволяет подобрать материал для детали, размеры сечения и запас прочности которой из каких-либо соображений назначены заранее. Материал подбирается по величине предельного напряжения, определяемого неравенством

$$\sigma_{\text{пред}} \geq \sigma_{\text{max}} n. \quad (2.28)$$

Пусть, например, требуется подобрать материал для болта фланцевого соединения двух резервуаров (рис. 2.25), если диаметр сечения болта  $d = 10 \text{ мм}$ , запас прочности по пределу текучести  $n_T = 2$ , а нагрузка на болт  $P = 12\,000 \text{ Н}$ . Необходимый предел текучести для материала болта должен быть

$$\sigma_T \geq \frac{12\,000 \cdot 4 \cdot 2}{3,14 \cdot 100} = 305 \text{ МПа}.$$

Этому условию удовлетворяет качественная углеродистая сталь 45, у которой  $\sigma_T = 320 \text{ МПа}$  и  $\sigma_B = 670 \text{ МПа}$ .

**Поверочный расчет.** Целью этого типа расчета является определение запаса прочности уже спроектированной детали при известных нагрузках на нее. Фактический запас прочности детали вычисляется по формуле (2.21):

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}}.$$

Считается, что поверочный расчет дал положительные результаты, если полученный запас прочности находится в установленных для него пределах.

## 2.20. ЭПЮРЫ НОРМАЛЬНЫХ СИЛ, НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Нормальные силы  $N$ , напряжения  $\sigma$ , относительные удлинения  $\varepsilon$  и перемещения  $\delta$  изменяются по длине бруса и являются, как указывалось выше, функциями положения сечения, т. е.

$$N = N(x); \quad \sigma = \sigma(x); \quad \varepsilon = \varepsilon(x); \quad \delta = \delta(x).$$

Графики этих функций называются эпюрами. Эпюры дают наглядное представление о законе изменения исследуемых величин по длине бруса, и поэтому очень полезны для проведения расчетов на прочность и жесткость.

При построении эпюр придерживаются определенных правил. Все эпюры строятся на одном чертеже, непосредственно под схемой

бруса. Оси эпюр проводятся параллельно оси бруса, а на перпендикулярах к ним откладываются в заранее выбранных масштабах значения силы, напряжения или перемещения в соответствующем сечении. Положительные значения откладываются выше, а отрицательные — ниже оси эпюры.

При вертикальном и наклонном положении оси эпюры в случае необходимости положительная область эпюры обозначается знаком  $+$ , а отрицательная — знаком  $-$ .

На оси эпюр сносятся границы участков бруса, в пределах которых аналитические выражения исследуемых величин не изменяются. Практически такими границами являются сечения, где приложены сосредоточенные силы, начинаются и кончаются распределенные нагрузки или изменяются поперечные размеры бруса. Все эпюры штрихуются прямыми, перпендикулярными их осям.

Для построения эпюр требуется составить аналитические выражения для нормальных сил  $N$ , напряжений  $\sigma$  и т. д. в текущих сечениях каждого участка, а затем начертить графики найденных функциональных зависимостей.

Часто намечают лишь очертания эпюр, вычисляя их ординаты только для некоторых характерных сечений. Такое построение (рисование) эпюр основано на анализе уравнений линий очертания эпюр, а также на дифференциальных и интегральных зависимостях, существующих между ними. Характер этих зависимостей легко установить исходя из уравнений (2.1), (2.7), (2.11) и (2.15).

Первое слагаемое уравнения (2.1) показывает, что при переходе через сечение, где приложена сосредоточенная нагрузка  $P$ , нормальная сила изменяется на величину этой нагрузки, и поэтому на эпюре  $N$  в этом месте будет скачок, по величине и знаку равный силе  $P$ . Второе слагаемое уравнения (2.1) устанавливает интегральную зависимость между нормальной силой  $N(x)$  и погонной нагрузкой  $q(x)$ . Это означает, что на участке действия распределенной нагрузки, интенсивность которой изменяется по закону полинома, эпюра нормальных сил  $N$  будет ограничена кривой, степень которой на единицу выше степени кривой эпюры погонных нагрузок  $q$ . Следовательно, при постоянной погонной нагрузке ( $q = \text{const}$ ) эпюра  $N$  ограничена наклонной прямой, в случае изменения  $q$  по закону треугольника или трапеции эпюра  $N$  будет ограничена квадратной параболой и т. п.

Для построения эпюры нормальных напряжений надо согласно формуле (2.7) разделить ординаты эпюры  $N$  на площади  $F$  соответствующих им сечений бруса. На эпюре  $\sigma$  скачки будут не только там, где приложены сосредоточенные нагрузки, но и там, где резко изменяются размеры поперечных сечений.

Если брус сделан из одного материала ( $E = \text{const}$ ), то эпюра  $\epsilon$  по внешнему виду не отличается от эпюры  $\sigma$ . Поэтому в построении этой эпюры необходимости нет, а все заключения можно сделать на основании эпюры  $\sigma$ .

Уравнение (2.15) устанавливает интегральную зависимость между перемещениями сечений бруса  $\delta(x)$  и относительными удлинениями

$\varepsilon(x)$ . Следовательно, эпюра  $\delta$  ограничена кривой, степень которой на единицу выше степени кривой  $\varepsilon$ , а перемещение  $\delta$  любого сечения бруса относительно неподвижного равно алгебраической сумме площадей эпюры  $\varepsilon$  на интервале от неподвижного сечения до рассматриваемого. Дифференцируя равенство (2.15), получаем

$$\frac{d\delta(x)}{dx} = \varepsilon(x). \quad (2.29)$$

Согласно геометрическому смыслу первой производной, каждая ордината эпюры  $\varepsilon$  по величине равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной в соответствующей точке эпюры  $\delta$ . Аналогичная дифференциальная зависимость имеет место и между эпюрами  $q$  и  $N$ .

Итак, по эпюре  $\varepsilon$  (или по эпюре  $\sigma$ ) можно не только определить значения ординат эпюры  $\delta$  в различных ее точках, но и направления кривой  $\delta(x)$  в этих точках. В тех сечениях, где  $\varepsilon(x) = 0$ , эпюра  $\delta$  имеет экстремум, а там, где эпюра  $\varepsilon$  изменяется скачком, на эпюре  $\delta$  будет перелом.

Характерной особенностью эпюры перемещений является отсутствие на ней скачков. Скачок на эпюре  $\delta$  означает, что два бесконечно близких сечения имеют различные перемещения, и поэтому такой скачок возможен лишь при наличии первоначального зазора между двумя частями бруса или в случае разрушения бруса в этом месте.

Рассмотрим несколько примеров построения эпюр.

**Пример.** Построить эпюры нормальных сил, напряжений и перемещений для ступенчатого бруса, нагруженного, как показано на рис. 2.26, и определить  $\sigma_{\max}$  и  $\delta_{\max}$ , если  $P = 40$  кН,  $F = 2$  см<sup>2</sup>,  $l = 20$  см. Материал — сталь,  $E = 2 \cdot 10^6$  МПа.

**Решение.** Определяя нормальные силы в текущих сечениях каждого из четырех участков суммированием внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, получаем

$$N_I(x) = P; \quad N_{II}(x) = P; \quad N_{III}(x) = -P; \quad N_{IV}(x) = -P.$$

Нормальные напряжения

$$\sigma_I(x) = \frac{P}{F}; \quad \sigma_{II}(x) = \frac{P}{4F}; \quad \sigma_{III}(x) = -\frac{P}{4F}; \quad \sigma_{IV}(x) = -\frac{P}{2F}.$$

Перемещения текущих сечений каждого участка бруса относительно неподвижного, равные удлинением соответствующих частей бруса, подсчитываем по формуле (2.14):

$$\delta_{IV}(x) = -\frac{P(l-x)}{2EF}; \quad \delta_{II}(x) = -\frac{3}{4} \frac{Pl}{EF} + \frac{P(l-x)}{4EF};$$

$$\delta_{III}(x) = -\frac{Pl}{2EF} - \frac{P(l-x)}{4EF}; \quad \delta_I(x) = -\frac{Pl}{2EF} + \frac{P(l-x)}{EF}.$$

Те же результаты, естественно, были бы получены при определении перемещений по площадям эпюры  $\varepsilon$ , или, что то же, эпюры  $\sigma$ , предварительно поделенной на модуль упругости  $E$ . Эпюры приведены на рис. 2.26.

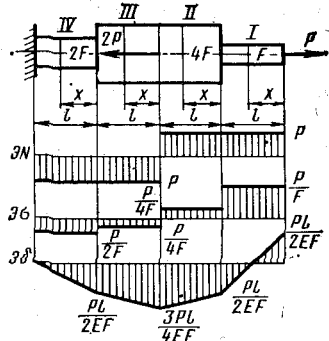


Рис. 2.26

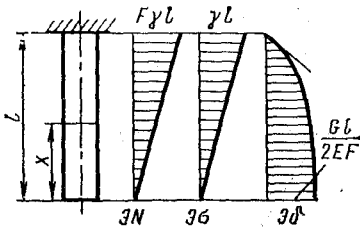


Рис. 2.27

**Пример.** Вертикально расположенный призматический стержень (рис. 2.27) нагружен силой тяжести. Построить эпюры нормальных сил, напряжений и перемещений.

**Решение.** Сила тяжести такого бруса является характерным примером равномерного распределения нагрузки. Погонной нагрузкой в этом случае является сила тяжести единицы длины бруса  $q(x) = F \cdot \gamma$  ( $\gamma$  — сила тяжести единицы объема материала).

Нормальная сила в сечении на расстоянии  $x$  от свободного конца бруса равна силе тяжести его нижней части:  $N(x) = F\gamma x$ , а нормальное напряжение в том же сечении  $\sigma = \gamma x$ . Нормальная сила  $N$  и напряжение  $\sigma$ , как и следовало ожидать из интегральной зависимости (2.1) и условия  $q(x) = \text{const}$ , изменяются по линейному закону.

Эпюру перемещений удобно построить по площадям эпюры  $\sigma$ , предварительно уменьшенной на величину модуля упругости  $E$ . Построение надо начинать с неподвижного сечения.

Согласно эпюре  $\sigma$ , эпюра  $\delta$  должна быть ограничена квадратной параболой, имеющей максимум при  $x = 0$ , так как  $\varepsilon(0) = 0$ , и наибольший угол наклона касательной при  $x = l$ , так как  $\varepsilon(l) = \varepsilon_{\text{max}}$ . Максимальное перемещение, подсчитанное по площади эпюры  $\sigma$ ,

$$\delta_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{max}} l}{2E} = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{F\gamma l}{2EF} l = \frac{Gl}{2EF},$$

где  $G$  — сила тяжести стержня.

Перемещение текущего сечения можно определить как по эпюре  $\sigma$ , так и по формуле (2.15). Используем последний путь. Учитывая, что искомое перемещение равно удлинению верхней части бруса, получаем

$$\delta(x) = \int_x^l \frac{N(x) dx}{EF} = \int_x^l \frac{F\gamma x}{EF} dx = \frac{\gamma}{2E} (l^2 - x^2).$$

Заметим, что удлинение бруса постоянного сечения, вызванное его силой тяжести, вдвое меньше удлинения от сосредоточенной силы, равной силе тяжести и приложенной на его свободном конце.

## 2.21. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Конструкции, усилия в элементах которых не могут быть найдены из одних лишь уравнений равновесия, называются статически неопределимыми, а задачи определения усилий в таких системах называются статически неопределимыми задачами.

Степенью статической неопределимости называется разность между числом искомых неизвестных усилий и числом всех независимых уравнений равновесия, которые для этой системы можно составить.

Наибольшего значения напряжения достигают в сечениях первого участка:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{P}{F} = \frac{40\,000}{200} = 200 \text{ МПа.}$$

Наибольшее перемещение имеет сечение, где приложена сила  $2P$ :

$$\delta_{\text{max}} = -\frac{3}{4} \frac{Pl}{EF} = -\frac{3 \cdot 40\,000 \cdot 200}{4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 200} = -0,15 \text{ мм.}$$

Знак минус показывает, что сечение приближается к неподвижному.



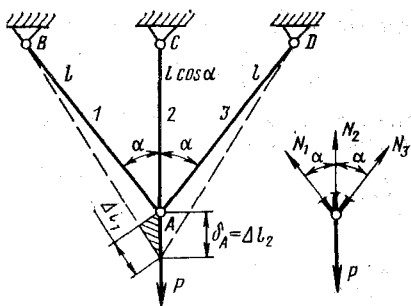
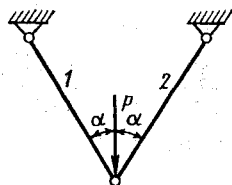


Рис. 2.28

Рис. 2.29



Например, трехстержневая система (рис. 2.28) один раз статически неопределима, так как для вычисления усилий в трех ее стержнях можно составить всего лишь два независимых уравнения равновесия узла  $A$ :

$$\begin{aligned} N_3 \sin \alpha - N_1 \sin \alpha &= 0; \\ N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \alpha - P &= 0. \end{aligned}$$

Двухстержневая ферма (рис. 2.29) является, очевидно, статически определимой, так как усилия в ее стержнях полностью определяются из одних лишь уравнений равновесия

$$N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0; \quad N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - P = 0.$$

Заметим, что при записи уравнений равновесия мы не учитываем изменение углов между направлением сил  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ , вызванные деформацией фермы. Объясняется это тем, что при малых деформациях (а именно такие деформации, как правило, и рассматриваются в сопротивлении материалов) углы между стержнями фермы изменяются весьма незначительно и тем более незначительно изменяются тригонометрические функции этих углов. В этом проявляется принцип, называемый в сопротивлении материалов **принципом сохранения начальных размеров**. Согласно этому принципу в случае малых деформаций при составлении уравнений равновесия конструкцию можно рассматривать как жесткую, имеющую первоначальные размеры и форму. Этот принцип, естественно, не справедлив при больших деформациях.

Неопределенность рассматриваемых задач объясняется наличием в статически неопределимых системах избыточных или, иначе, лишних связей, не являющихся безусловно необходимыми для восприятия нагрузки. Так, в трехстержневой ферме можно удалить один из стержней, но она будет способна воспринимать нагрузку, оставаясь геометрически неизменяемой\*. Однако удалить одновременно два стержня нельзя, так как ферма станет геометрически изменяемой, подвижной системой. Следовательно, эта ферма имеет одну

\* Геометрически неизменяемой называется система, изменение формы которой возможно лишь вследствие деформации ее частей. Если изменение формы системы возможно без деформации ее частей, то она называется геометрически изменяемой или механизмом.

избыточную связь. Отмеченное свойство является общим для любых статически неопределимых систем — степень статической неопределимости всегда равна числу лишних связей.

Статически неопределимые задачи не имеют решения, если считать материал абсолютно твердым, и имеют вполне определенное решение, если учитывать упругие свойства материала. Записывая условия неразрывности деформированной системы, всегда можно составить необходимое число дополнительных уравнений, разрешающих статическую неопределимость задачи. Эти дополнительные уравнения должны описать единственно возможные соотношения между перемещениями точек деформированной системы при заданных нагрузках. Поэтому они называются уравнениями совместности перемещений, или уравнениями совместности деформаций.

Для составления уравнений совместности перемещений полезно изобразить систему после деформации, а затем по чертежу установить соотношения между перемещениями одних ее сечений или узлов относительно других. Для наглядности эти перемещения, как и удлинения стержней, изображаются на чертеже в весьма увеличенном виде. В действительности удлинения стержней, изменение углов между ними и перемещения узлов системы обычно весьма малы. Например, удлинение стального стержня длиной 100 см и площадью сечения 1 см<sup>2</sup> при растяжении силой в 10<sup>4</sup> Н будет составлять всего

$$\Delta l = \frac{10000 \cdot 1000}{2 \cdot 10^6 \cdot 100} = 0,5 \text{ мм,}$$

т. е. удлинение в 2000 раз меньше длины этого стержня. Поэтому изображать эти удлинения приходится в утрированно увеличенном виде.

Представив вид системы после деформации, нетрудно составить уравнения совместности перемещений. Запишем, например, уравнение совместности деформаций для рассмотренной выше трехстержневой системы. Удлинение среднего стержня согласно рис. 2.28 равно перемещению узла *A*. Удлинение крайнего стержня можно найти графически, проведя дугу радиуса *AB* с центром в точке *B*. Вследствие малости деформаций дугу этой окружности можно заменить перпендикуляром, опущенным из точки *A* на новое положение стержня. Рассматривая прямоугольный треугольник (на рис. 2.28 заштрихован), находим связь между удлинениями стержней 1 и 2:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha.$$

Изменением угла  $\alpha$  пренебрегаем, так как оно незначительно. Переходя по закону Гука от удлинений стержней к искомым усилиям в них, получаем

$$\frac{N_1 l_1}{EF} = \frac{N_2 l_2}{EF} \cos \alpha \text{ или } N_1 = N_2 \cos^2 \alpha.$$

Решая совместно уравнения равновесия и уравнение совместности перемещений, находим усилия в стержнях фермы.

$$N_1 = N_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}; \quad N_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha}.$$

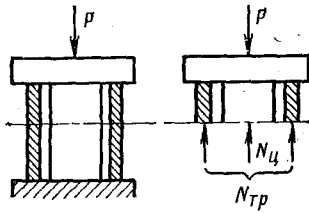


Рис. 2.30

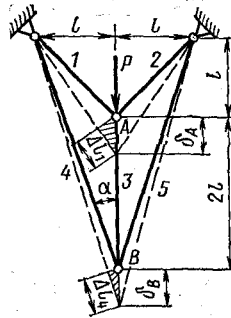
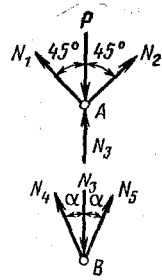


Рис. 2.31



При составлении уравнений совместности перемещений и записи уравнений равновесия необходимо обращать внимание на соответствие направлений искомых усилий представленному на чертеже характеру деформации (растяжение или сжатие) каждого стержня системы.

Отличительной особенностью любых статически неопределимых систем является зависимость распределения усилий по элементам системы от соотношения жесткостей этих элементов. Например, при сжатии медного цилиндра и стальной трубы между плитами пресса (рис. 2.30) доля сжимающего усилия  $P$ , приходящаяся на цилиндр и трубу, зависит от соотношения их жесткостей  $E_M F_{ц}$  и  $E_{ст} F_{тр}$ .

Для доказательства определим сжимающие усилия в трубе  $N_{тр}$  и цилиндре  $N_{ц}$ . Рассекая цилиндр и трубу плоскостью, нормальной их оси, и рассматривая равновесие отсеченной части (см. рис. 2.30), получаем

$$N_{тр} + N_{ц} = P.$$

Уравнением совместности деформаций является равенство укорочений трубы и цилиндра

$$\frac{N_{тр} l}{E_{ст} F_{тр}} = \frac{N_{ц} l}{E_M F_{ц}}.$$

Решая систему уравнений равновесия и совместности деформаций, находим нормальные силы в сечениях трубы и цилиндра

$$N_{тр} = \frac{P}{1 + \frac{E_M F_{ц}}{E_{ст} F_{тр}}}; \quad N_{ц} = \frac{P}{1 + \frac{E_{ст} F_{тр}}{E_M F_{ц}}}.$$

Из этих формул видно, что с увеличением жесткости трубы  $E_{ст} F_{тр}$  при одновременном уменьшении жесткости цилиндра  $E_M F_{ц}$  нормальные силы в ее сечениях возрастают, а в сечениях цилиндра уменьшаются, и, наоборот, при увеличении жесткости цилиндра возрастает доля воспринимаемой им нагрузки.

Таким образом, изменяя соотношение жесткостей элементов статически неопределимой системы, конструктор может по своему усмотрению уменьшать нагрузку на одни элементы за счет увеличения ее на других элементах.

**Пример.** Найти усилия в стержнях симметричной фермы, нагруженной силой  $P$  (рис. 2.31), если материал и площади сечений всех стержней одинаковы. Определить необходимую площадь сечения стержней и перемещение узла  $A$  при  $P = 200$  кН и коэффициенте запаса прочности по пределу текучести  $n = 1,5$ . Стержни выполнены из конструкционной малоуглеродистой стали 3.

**Решение.** При нагружении фермы стержни 1 и 2 растягиваются, узел  $A$  смещается вниз и давит на стержень 3, вызывая растяжение стержней 4 и 5 и перемещение узла  $B$ . Очевидно, перемещение  $\delta_A$  узла  $A$  больше, чем смещение  $\delta_B$  узла  $B$ , и их разность равна абсолютной величине сжатия стержня 3:

$$\delta_A - \delta_B = \Delta l_3.$$

Это и есть уравнение совместности деформаций для данной фермы. Выражая перемещения узлов через удлинения стержней (см. заштрихованные треугольники на рис. 2.31), получаем

$$\frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ} - \frac{\Delta l_4}{\cos \alpha} = \Delta l_3, \quad \text{где} \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Переходя далее по закону Гука от удлинений к искомым усилиям в стержнях и учитывая, что  $l_1 = l\sqrt{2}$  и  $l_4 = l\sqrt{10}$ , записываем уравнение совместности так:

$$3N_1 - 5N_4 = 3N_3.$$

Направляя усилия в стержнях соответственно характеру деформации каждого стержня (см. рис. 2.31), составляем уравнения равновесия узлов  $A$  и  $B$ :

$$N_1 = N_2; \quad N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 - P = 0;$$

$$N_4 = N_5; \quad N_4 \frac{3}{\sqrt{10}} + N_5 \frac{3}{\sqrt{10}} - N_3 = 0.$$

Решая систему уравнений равновесия и совместности деформаций, находим искомые усилия в стержнях:

$$N_1 = N_2 = 0,52P; \quad N_3 = 0,28P; \quad N_4 = N_5 = 0,14P.$$

Все усилия оказались с положительными знаками. Это означает, что стержни 1, 2, 4 и 5 действительно растянуты, а стержень 3 сжат. В соответствии с принятым правилом знаков для нормальных сил усилию в третьем стержне должен быть приписан минус. Подставляя численное значение нагрузки  $P$ , имеем

$$N_1 = N_2 = 104 \text{ кН}; \quad N_3 = -56 \text{ кН}; \quad N_4 = N_5 = 28 \text{ кН}.$$

Необходимую площадь сечения стержней найдем по величине наибольшего усилия  $N_1 = 104\,000$  Н. Согласно условию прочности,

$$F \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{N_1}{\sigma_T} n.$$

Предел текучести стали 3  $\sigma_T = 230$  МПа. Следовательно, искомая площадь  $F \geq \frac{104\,000}{230} \cdot 1,5 = 678,3 \text{ мм}^2$ . Принимаем  $F = 680 \text{ мм}^2$ .

Перемещение узла  $A$  при  $l = 50$  см:

$$\delta_A = \frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ} = \frac{2N_1 l}{EF} \quad \text{или} \quad \delta_A = \frac{2 \cdot 104\,000 \cdot 500}{2 \cdot 10^5 \cdot 680} = 0,8 \text{ мм}.$$

**Пример.** Определить усилия в стержнях и перемещение точки приложения силы  $P$  (рис. 2.32). Диск рассматривать как абсолютно жесткий.

**Решение.** Данная система один раз статически неопределима, так как для определения усилий  $N_1$  и  $N_2$  в стержнях имеем одно только уравнение равновесия  $\Sigma M_C = 0$ , в которое не входили бы не интересующие нас по условию задачи опорные реакции  $R_x$  и  $R_y$ .



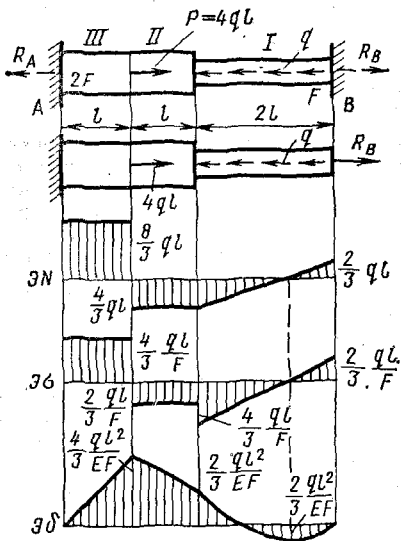


Рис. 2.33

Точка приложения силы  $P$  смещается в направлении нормали к линии  $CB$ , а величина смещения в два раза меньше  $\delta_B$ :

$$\delta_K = \frac{\delta_B}{2} = \frac{N_2 l_2}{2EF_2 \sin \beta} = 0,21 \frac{Pl}{EF}.$$

**Пример.** Построить эпюры  $N$ ,  $\sigma$  и  $\delta$  для стального бруса, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$  и сосредоточенной силой  $P = 4ql$  (рис. 2.33). Определить запас прочности бруса, если  $q = 300$  Н/см,  $l = 100$  см и  $F = 4$  см<sup>2</sup>, а предел текучести материала  $\sigma_T = 320$  МПа.

**Решение.** Данный брус представляет собой один раз статически неопределимую систему, так как для определения его двух опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$  (показаны на рис. 2.33 пунктиром) можно записать всего одно независимое уравнение равновесия:

$$-R_A + 4ql - 2ql + R_B = 0.$$

К составлению уравнения совместности перемещений можно подойти различными путями. Поступим так: отбросим одну из опор, например правую, и заменим ее действие неизвестной пока силой  $R_B$ .

Полученная система (см. рис. 2.33) будет эквивалентна данной, если перемещение сечения  $B$  относительно  $A$  в этой системе, как и в данной, будет равно нулю:  $\delta_{BA} = 0$ . Из этого условия определяется искомая опорная реакция  $R_B$ . Перемещение  $\delta_{BA}$  равно сумме удлинений всех трех участков бруса. Следовательно,  $\Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} = 0$ .

Определяя далее методом сечений нормальные силы в текущих сечениях каждого участка

$$N_I(x) = R_B - qx; \quad N_{II}(x) = R_B - 2ql; \quad N_{III}(x) = R_B + 2ql$$

и вычисляя удлинения этих участков по формулам (2.13) и (2.14), получаем

$$\int_0^{2l} \frac{R_B - qx}{EF} dx + \frac{R_B - 2ql}{2EF} l + \frac{R_B + 2ql}{2EF} l = 0.$$

Отсюда  $R_B = \frac{2}{3} ql$

Изложенный здесь прием раскрытия статической неопределимости называется методом сил. Итак, нормальные силы в сечениях бруса

$$N_I(x) = \frac{2}{3} ql - qx; \quad N_{II}(x) = -\frac{4}{3} ql; \quad N_{III}(x) = \frac{8}{3} ql,$$

а нормальные напряжения в тех же текущих сечениях

$$\sigma_I(x) = \frac{2}{3} \frac{ql}{F} - \frac{qx}{F}; \quad \sigma_{II}(x) = -\frac{2}{3} \frac{ql}{F}; \quad \sigma_{III}(x) = \frac{4}{3} \frac{ql}{F}.$$

Перемещения сечений бруса будем отсчитывать от правого неподвижного сечения. Тогда

$$\delta_I(x) = \int_0^x \frac{\frac{2}{3} ql - qx}{EF} dx = \frac{q}{6EF} (4lx - 3x^2);$$

$$\delta_{II}(x) = \delta_I(2l) - \frac{4ql}{6EF}x = -\frac{2ql}{3EF}(l+x);$$

$$\delta_{III}(x) = \delta_{II}(l) + \frac{8ql}{6EF}x = \frac{4ql}{3EF}(x-l).$$

При отсчете  $\delta$  от левого неподвижного сечения эпюра  $\delta$  будет такой, как показано на рис. 2.33. Из эпюры  $\sigma$  видно, что наибольшего значения напряжения достигают в конечном сечении первого участка и в сечениях третьего участка, но они различны по знаку. Сталь 45 одинаково работает на растяжение и сжатие. Поэтому все эти сечения равноопасны (для хрупкого материала опасными были бы сечения третьего участка, где действуют растягивающие напряжения). Подсчитывая максимальное напряжение  $\sigma_{\max} = \frac{4 \cdot 30 \cdot 1000}{3 \cdot 400} = 100$  МПа и зная предельное напряжение для материала  $\sigma_T = 320$  МПа, находим запас прочности бруса

$$n = 320/100 = 3,2.$$

Усилия в элементах статически неопределимых систем могут возникать не только от внешних сил, но и от температурного воздействия, а при сборке — и от неточности изготовления деталей конструкций. При совместном воздействии указанных факторов удобно воспользоваться принципом независимости действия сил и находить усилия в элементах конструкции суммированием усилий от каждого воздействия в отдельности.

## 2.22. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Напряжения, возникающие при изменении температуры всей конструкции или отдельных ее частей по сравнению с начальной температурой (температурой сборки), называются температурными напряжениями.

При совместном воздействии на брус внешних сил и температуры относительная деформация может быть представлена как сумма силовой и температурной деформации:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{F} + \alpha \Delta t, \quad (2.30)$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения;  $\Delta t$  — изменение температуры.

Температурные напряжения существенно зависят от закона распределения температур по брусу. В этом разделе рассматривается лишь случай равномерного распределения температуры как по площади сечения, так и по длине всего бруса или отдельных его участков.

Если все элементы бруса могут свободно расширяться или сжиматься, то изменение температуры не вызывает напряжений. Так, при нагреве бруса с одним закрепленным и другим свободным концом ничто не препятствует тепловому расширению бруса и поэтому в нем внутренние силы не возникают, что подтверждается также уравнением равновесия  $N(x) = 0$  отсеченной части бруса (рис. 2.34). Но, если тот же брус поместить между двумя абсолютно жесткими стенками (рис. 2.35), препятствующими его температурному расширению, то нагрев бруса вызовет появление в нем внутренних сил. Эти силы не могут быть найдены из уравнений равновесия, так как данная система является статически неопределимой. Уравнение

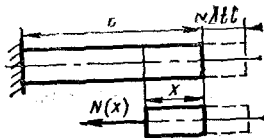


Рис. 2.34

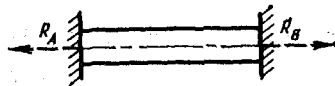


Рис. 2.35

равновесия бруса показывает лишь, что опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$  равны по величине и противоположны по направлению. Записывая условие равенства нулю суммы температурного расширения бруса и деформации его силами  $R_A = R_B = R$

$$\alpha \Delta t l + \frac{Rl}{EF} = 0,$$

находим сначала опорную реакцию  $R = -\alpha \Delta t EF$ , а затем и температурные напряжения в поперечных сечениях бруса  $\sigma = -\alpha \Delta t E$ .

Полученные результаты показывают, что сила давления бруса на стенки зависит не только от температуры нагрева и свойств материала, но и от площади сечения бруса, а напряжения в нем от площади сечения не зависят. Поэтому никаким увеличением площади сечения бруса нельзя добиться уменьшения в нем температурных напряжений, можно лишь увеличить нагрузку на соединенные с ним детали конструкции. Температурные напряжения можно уменьшить, применяя материал с меньшими  $E$  и  $\alpha$ ; иногда для той же цели предусматривается устройство специальных температурных швов (зазоров).

Приведенные примеры показывают, что температурные напряжения при равномерном нагреве возникают лишь в статически неопределимых системах.

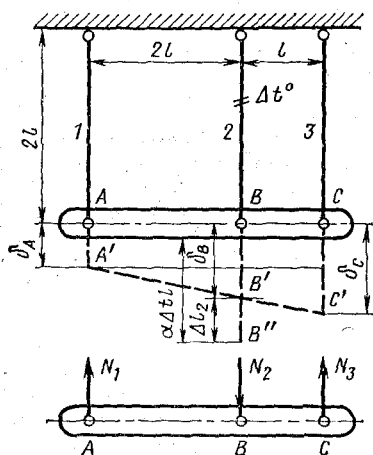


Рис. 2.36

**Пример.** Определить усилия в стержнях системы при нагреве стержня 2 на  $\Delta t$  (рис. 2.36). Подвешенный на стержнях брус рассматривать как абсолютно жесткий и невесомый.

**Решение.** Изобразим систему после деформации. Если бы стержнями 1 и 3 не было, то при нагреве стержня 2 узел B занял бы положение  $B''$ . Но стержни 1 и 3 препятствуют свободному расширению стержня 2 и поэтому узел B занимает положение  $B'$ . В результате стержень 2 сжимается, а стержни 1 и 3 растягиваются. Между перемещениями узлов A, B и C существует зависимость (см. рис. 2.36)

$$\frac{\delta_C - \delta_A}{3l} = \frac{\delta_B - \delta_A}{2l},$$

где  $\delta_A = \frac{N_1 \cdot 2l}{EF}$ ;  $\delta_C = \frac{N_3 \cdot 2l}{EF}$ ;

$$\delta_B = \alpha \Delta t \cdot 2l - \frac{N_2 \cdot 2l}{EF}.$$



Следовательно, уравнение совместности деформаций запишется так:

$$N_1 + 3N_2 + 2N_3 = 3\alpha\Delta tEF.$$

Составляя еще два уравнения равновесия бруса (см. рис. 2.36)

$$N_1 + N_3 - N_2 = 0,$$

$$2N_1 - N_3 = 0$$

и решая совместно все эти уравнения, получаем

$$N_1 = \frac{1}{14} \alpha \Delta tEF; N_2 = \frac{3}{14} \alpha \Delta tEF; N_3 = \frac{2}{14} \alpha \Delta tEF.$$

Усилию  $N_2$  приписываем знак минус, так как полученный положительный результат подтверждает, что стержень 2 действительно сжат.

### 2.23. МОНТАЖНЫЕ УСИЛИЯ

Усилия, возникающие в конструкции при сборке в результате неточного изготовления ее деталей, называются монтажными, или сборочными.

Монтажные усилия появляются только при сборке статически неопределимых конструкций. Действительно, соединение в одном узле только двух стержней (см. рис. 2.29) не требует натяжения этих стержней даже при большой неточности их изготовления. Но сборка трехстержневой фермы (см. рис. 2.28) в случае неточного изготовления ее стержней возможна лишь после их предварительного натяжения. В результате еще до нагружения конструкции одни элементы ее будут растянуты, а другие — сжаты. Величины и знаки монтажных усилий зависят от степени отклонения размеров деталей от проектных.

**Пример.** Определить монтажные усилия в стальных стержнях системы, представленной на рис. 2.37, если площадь сечения стержней  $F = 3,8 \text{ см}^2$ , а вертикальный стержень изготовлен на  $0,2 \text{ см}$  короче проектной длины  $l = 2 \text{ м}$ . Массой и деформацией бруса можно пренебречь.

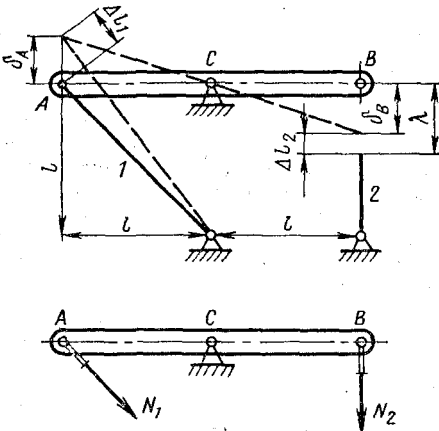


Рис. 2.37

**Решение.** Присоединение вертикального стержня потребует предварительного его растяжения. После сборки вертикальный стержень, стремясь принять свои первоначальные размеры, растянет наклонный стержень. В результате оба стержня растянутся, узлы A и B окажутся на прямой, показанной на рис. 2.37 пунктиром. Следовательно, между перемещениями этих узлов существует зависимость  $\delta_A = \delta_B$ . Выражая перемещения через удлинения стержней, получаем

$$\lambda - \Delta l_2 = \Delta l_1 / \cos 45^\circ,$$

где  $\lambda$  — величина неточности изготовления стержня 2.

Учитывая, что  $\Delta l_1 = \frac{N_1 l \cdot \sqrt{2}}{EF}$  и  $\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EF}$ , записываем уравнение совместности перемещений:

$$2N_1 + N_2 = \lambda EF/l.$$

Из трех уравнений равновесия бруса (рис. 2.37) только в одно ( $\Sigma M_C = 0$ ) не войдут опорные реакции  $R_x$  и  $R_y$ , определять которые по условию задачи не требуется. Следовательно, имеем еще одно уравнение:  $N_1 \sqrt{2}/2 - N_2 = 0$ . Отсюда

$$N_1 = 0,36 \frac{\lambda EF}{l}; \quad N_2 = 0,26 \frac{\lambda EF}{l}.$$

Подставляя в эти выражения численные значения  $l$ ,  $F$ ,  $l$  и  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, подсчитываем искомые монтажные усилия в стержнях:  $N_1 = 27$  кН,  $N_2 = 20$  кН. Затем находим монтажные напряжения  $\sigma_1 = 70$  МПа;  $\sigma_2 = 50$  МПа.

Приведенный пример показывает, что неточность в изготовлении деталей может привести к появлению значительных усилий в элементах конструкции при сборке.

## 2.24. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

В случае одновременного растяжения элемента тела в двух взаимно перпендикулярных направлениях силами, интенсивности которых соответственно  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  (рис. 2.38), нормальные и касательные напряжения в наклонных сечениях могут быть определены суммированием одноименных напряжений, вызванных каждой из нагрузок в отдельности:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_{\alpha 1} + \sigma_{\alpha 2}; \\ \tau_\alpha &= \tau_{\alpha 1} + \tau_{\alpha 2}. \end{aligned}$$

Определяя составляющие  $\sigma_{\alpha 1}$ ,  $\sigma_{\alpha 2}$ ,  $\tau_{\alpha 1}$  и  $\tau_{\alpha 2}$  по формулам (2.9) и учитывая, что нормаль к сечению составляет с осью  $x$  угол  $\alpha$ , а с осью  $y$  угол  $-(90^\circ - \alpha)$ , получаем

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha; \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Формулы (2.31) могут быть получены и непосредственно из уравнений равновесия отсеченной части бруса (см. рис. 2.38), причем в этом случае удобно проектировать все силы на нормаль и касательную к наклонному сечению.

Исследование формул (2.31) показывает, что в сечениях, наклоненных к осям  $x$  и  $y$  под углом  $45^\circ$ , касательные напряжения достигают экстремальных значений, а в сечениях, перпендикулярных этим осям, действуют только нормальные напряжения, равные интенсивности соответствующей внешней нагрузки  $\sigma_x$  или  $\sigma_y$ .

В частном случае одновременного растяжения и сжатия бруса силами равной интенсивности, т. е. когда  $\sigma_x = \sigma$  и  $\sigma_y = -\sigma$  (рис. 2.39), в сечении, проведенном под углом  $45^\circ$  к оси  $x$ , нормальные напряжения равны нулю, а касательные напряжения равны

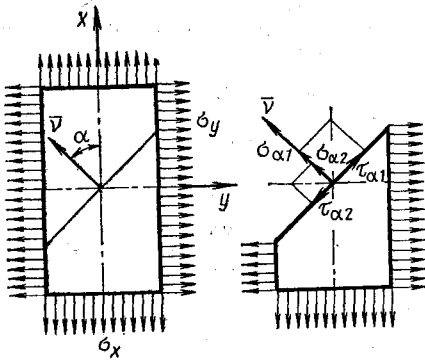


Рис. 2.38

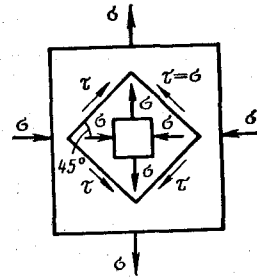


Рис. 2.39

по абсолютному значению напряжению  $\sigma$ . Действительно, согласно выражениям (2.31) при  $\sigma_x = \sigma$  и  $\sigma_y = -\sigma$  имеем

$$\sigma_{45^\circ} = \sigma \cos^2 45^\circ - \sigma \sin^2 45^\circ = 0;$$

$$\tau_{45^\circ} = \frac{\sigma + \sigma}{2} \sin 90^\circ = \sigma.$$

Если из рассматриваемого бруса вырезать параллелепипед с четырьмя гранями, наклоненными к осям  $x$  и  $y$  под углом  $45^\circ$ , то по этим граням, очевидно, будут действовать только касательные напряжения, одинаковые по величине во всех гранях. Если же вырезать параллелепипед с гранями, нормальными осям  $x$  и  $y$  (см. рис. 2.39), то на его гранях будут действовать только нормальные напряжения, равные по величине, но противоположные по знаку. На рис. 2.39 для упрощения чертежа на каждой грани показан только один вектор напряжения, хотя в действительности напряжения распределены по каждой грани равномерно. Этим приемом мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

### 2.25. ЗАКОН ГУКА ПРИ ДВУХОСНОМ И ТРЕХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

При одноосном растяжении бруса (рис. 2.40, а) относительные деформации в направлении ортогональных осей согласно закону Гука и соотношению Пуассона (см. разд. 2.3 и 2.4).

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\mu \epsilon_x.$$

В случае двухосного растяжения (рис. 2.40, б) относительные удлинения в направлении осей  $x$  и  $y$  согласно принципу независимости действия сил будут равны алгебраической сумме деформаций в направлении этих осей от каждой из нагрузок в отдельности. Деформации при растяжении в направлении оси  $x$ :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E},$$

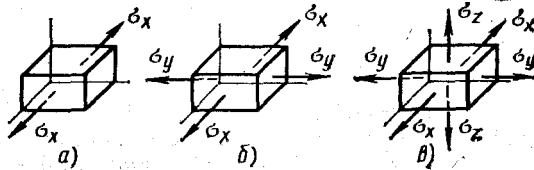


Рис. 2.40

а при растяжении в направлении оси  $y$ :

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}; \quad \epsilon_x = \epsilon_z = -\mu \frac{\sigma_y}{E}.$$

Следовательно, при одновременном растяжении в двух направлениях закон Гука запишется так:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \\ \epsilon_z &= -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Аналогично для случая трехосного растяжения получаем (см. рис. 2.40, в)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Равенства (2.32) представляют собой закон Гука при трехосном растяжении. Из них как частные случаи следуют законы Гука при двухосном и одноосном нагружении.

## 2.26. ИЗМЕНЕНИЕ ОБЪЕМА ПРИ ТРЕХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Выделим из нагруженного бруса кубик так, чтобы по граням его действовали только нормальные напряжения (рис. 2.41).

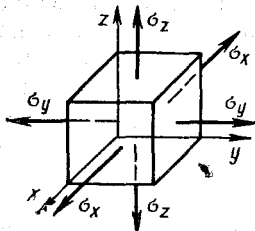


Рис. 2.41

Для упрощения дальнейших вычислений предположим, что длины ребер кубика равны единице. В этом случае силы, действующие по граням кубика, будут численно равны напряжениям на этих гранях, а деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\epsilon_z$  — абсолютным удлинениям его ребер.

В результате деформации объем кубика изменится. Приращение объема равно разности:

$$\theta = (1 + \epsilon_x) (1 + \epsilon_y) (1 + \epsilon_z) - 1.$$

Удлинения  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\epsilon_z$  в пределах упругих деформаций настолько малы, что их произведениями и квадратами можно пренебречь. Следовательно,

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z, \quad (2.34)$$

т. е. удельное изменение объема равно сумме относительных линейных деформаций по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

Переходя по закону Гука (2.33) от деформаций к напряжениям, получаем

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (2.35)$$

Величина  $\frac{1-2\mu}{E}$  называется коэффициентом объемного расширения.

Формула (2.35) позволяет установить верхнюю границу коэффициента Пуассона для изотропного тела. Так как при трехосном растяжении приращение объема  $\theta$  не может быть отрицательным, то согласно формуле (2.35) должно выполняться условие  $1 - 2\mu \geq 0$ . Следовательно,  $\mu \leq 0,5$ , т. е. коэффициент Пуассона для изотропных материалов, подчиняющихся закону Гука, не может быть более 0,5.

#### 2.27. УДЕЛЬНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ТРЕХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Определим потенциальную энергию, накопленную при деформации в кубике единичного объема (см. рис. 2.41), т. е. удельную энергию. Эта энергия равна сумме работ внешних для выделенного кубика сил, численно равных напряжениям  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ , на вызванных ими удлинениях  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\epsilon_z$  его ребер. Подсчитывая работу каждой из сил по формуле (2.19), находим

$$u = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \epsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \epsilon_z}{2}. \quad (2.36)$$

Заменяя  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\epsilon_z$  их выражениями через напряжения по формулам закона Гука (2.33), получаем следующее уравнение для удельной потенциальной энергии:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)]. \quad (2.37)$$

Заметим, что при выводе уравнения (2.36) мы не пользовались и не могли пользоваться принципом независимости сил, так как в данном случае он несправедлив. Объясняется это тем, что силы, действующие на каждой грани, производят работу не только на перемещениях, ими самими вызванных, но и на перемещениях, вызванных силами, действующими на всех остальных гранях кубика. Поэтому деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\epsilon_z$  при вычислении потенциальной энергии по формуле (2.36) необходимо определять по закону Гука для трехосного растяжения, а не для одноосного нагружения.

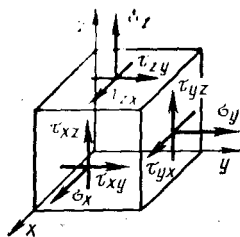


Рис. 2.42

В общем случае нагружения удельная потенциальная энергия может изменяться от точки к точке тела, т. е. является функцией положения точки  $u = u(x, y, z)$ . Потенциальная энергия, накопленная во всем теле, равна пределу суммы энергий, заключенных в его элементарных объемах:

$$U = \int_V u(x, y, z) dV. \quad (2.38)$$

## 2.28. ЗАКОН ПАРНОСТИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Покажем, что касательные напряжения обладают весьма важным свойством, называемым законом парности и справедливым как для одноосного, так и для двух- и трехосного нагружения твердого тела.

Вырежем из тела бесконечно малый прямоугольный параллелепипед со сторонами  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ . По граням этого параллелепипеда в общем случае будут действовать нормальные и касательные напряжения, как показано на рис. 2.42 (чтобы не затемнять чертеж, напряжения на противоположащих гранях не показаны). Вследствие малых размеров взятого параллелепипеда можно считать, что напряжения по его граням распределены равномерно, а одноименные напряжения на противоположащих гранях равны по величине.

Составим теперь уравнение равновесия  $\sum M_x = 0$  рассматриваемого параллелепипеда. Равнодействующие нормальных сил на гранях, параллельных оси  $x$ , дадут моменты, равные по величине, но противоположные по направлению, и поэтому уравнение равновесия  $\sum M_x = 0$  будет иметь вид

$$\tau_{yz} dx dy dz - \tau_{zy} dx dy dz = 0.$$

Отсюда  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ .

Итак, в каждой двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку тела, компоненты касательных напряжений, перпендикулярные к линии пересечения этих площадок, равны по величине и направлены оба либо к линии пересечения, либо от нее.

Доказанное свойство называется законом парности касательных напряжений. Поскольку направление граней параллелепипеда было выбрано произвольно, то свойство парности справедливо для любых пар взаимно перпендикулярных площадок.

### 3.1. ЯВЛЕНИЕ СДВИГА

Нагружение тела сопровождается не только изменением расстояний между точками, но и изменениями углов между различными направлениями внутри этого тела. Изменение линейных размеров, как известно, характеризуется величинами линейных деформаций  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\epsilon_z$ . Угловая деформация определяется величиной угла  $\gamma$ , на который изменяется первоначально прямой угол. Угол  $\gamma$  называется углом сдвига. Угловые деформации в точке тела, как и линейные, зависят от направления, исходящего из этой точки. Поэтому углам сдвига приписываются индексы, определяющие положение плоскости сдвига. Углы сдвига в координатных плоскостях обозначаются через  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  и  $\gamma_{zx}$ .

В существовании угловых деформаций легко убедиться, рассмотрев изменение во взаимном расположении двух наклонных площадок при одноосном растяжении бруса. На рис. 3.1 сплошными линиями показано положение площадок до деформации, а пунктирными — их положение после деформации.

Линейная деформация связана, в основном, с действием нормальных внутренних сил, а деформация сдвига определяется, главным образом, касательными силами. Так, при одноосном растяжении бруса изменяется угол между площадками, где действуют касательные напряжения. Углы между поперечными и продольными площадками, где действуют только нормальные напряжения, остаются прямыми.

Если по граням элемента будут действовать только касательные напряжения, то такой элемент тела будет испытывать только деформацию сдвига. Подобный элемент показан на рис. 2.39.

### 3.2. ЧИСТЫЙ СДВИГ

Деформация прямоугольного элемента тела, по граням которого действуют только касательные напряжения, называется чистым сдвигом.

Деформацию сдвига наглядно можно представить так, как показано на рис. 3.2, если условно закрепить одну из граней элемента.

Верхняя грань элемента под влиянием касательных сил сместится

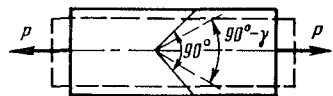


Рис. 3.1

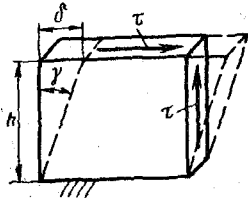


Рис. 3.2

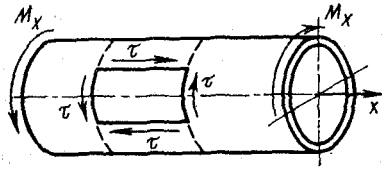


Рис. 3.3

относительно закрепленной нижней, а элемент перекосятся. Линейное смещение  $\delta$  одной грани относительно противоположной называется абсолютным сдвигом, а отношение  $\delta$  к расстоянию между этими гранями  $h$  — относительным сдвигом. Отношение  $\delta/h$  равно тангенсу угла сдвига  $\gamma$ . Вследствие малости угла  $\gamma$  можно принять  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ . Следовательно, угол сдвига  $\gamma = \delta/h$  можно рассматривать как относительный сдвиг.

Подобно тому, как при растяжении имеет место линейная зависимость между  $\sigma$  и  $\epsilon$ , при сдвиге наблюдается линейная зависимость между  $\tau$  и  $\gamma$ , представляющая закон Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma. \quad (3.1)$$

Здесь  $G$  — модуль упругости при сдвиге или модуль упругости второго рода. Его размерность  $\text{Н/м}^2$ .

Закон Гука справедлив лишь до предела пропорциональности. При испытаниях на сдвиг образцов из пластичных материалов так же, как и при растяжении, наблюдается явление текучести. Предел текучести обозначается через  $\tau_t$ , а предел прочности — через  $\tau_b$ .

Явление чистого сдвига можно иллюстрировать на примере кручения тонкостенной цилиндрической трубы, скручиваемой парами сил, приложенными в торцевых плоскостях (рис. 3.3). Из уравнений равновесия отсеченной части трубы следует, что в ее поперечных сечениях действуют только касательные напряжения. Но тогда в диаметральных сечениях по свойству парности также должны действовать касательные напряжения. Итак, по граням элемента, вырезанного из трубы двумя поперечными и двумя продольными сечениями (см. рис. 3.3), будут действовать только касательные напряжения, т. е. он будет находиться в состоянии чистого сдвига.

В состоянии чистого сдвига будет находиться также параллелепипед, испытывающий двухосное растяжение и сжатие силами равной интенсивности (см. рис. 2.39).

### 3.3. СВЯЗЬ МЕЖДУ УПРУГИМИ ПОСТОЯННЫМИ $E$ , $G$ И $\mu$ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Между тремя физическими константами материала — модулями пружности  $E$  и  $G$  и коэффициентом поперечной деформации  $\mu$  существует определенная зависимость. Ее можно



установить, определяя соотношение между линейной деформацией (изменением длин диагоналей граней) и сдвигами в плоскостях граней кубика, испытывающего чистый сдвиг (рис. 3.4).

Согласно рис. 3.4 угол наклона диагонали  $AC$  после деформации кубика равен  $\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$ , где  $\gamma$  — угол сдвига в плоскости рассматриваемой грани. В то же время тангенс этого угла равен отношению длин диагоналей  $BD$  и  $AC$  после деформации:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{B'D}{AC'}$$

или

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{l \sqrt{2} (1 + \epsilon_{BD})}{l \sqrt{2} (1 + \epsilon_{AC})}$$

В сечениях кубика, параллельных рассматриваемым диагоналям, будут действовать, как доказано в разд. 2.24 (см. рис. 2.39), нормальные напряжения  $\sigma$ , равные по величине касательному напряжению  $\tau$  на грани кубика, но одно из них растягивающее, а другое — сжимающее. Следовательно,  $\epsilon_{BD} = -\epsilon_{AC}$ , причем согласно закону Гука при двухосном нагружении

$$\epsilon_{AC} = \frac{1}{E} [\sigma + \mu\sigma] = \frac{1 + \mu}{E} \sigma;$$

$$\epsilon_{BD} = \frac{1}{E} [-\sigma - \mu\sigma] = -\frac{1 + \mu}{E} \sigma.$$

Применяя формулу тангенса суммы двух углов и заменяя  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  по малости  $\gamma$  величиной  $\gamma/2$ , получаем

$$\frac{1 - \gamma/2}{1 + \gamma/2} = \frac{1 - \epsilon_{AC}}{1 + \epsilon_{AC}}.$$

Отсюда  $\gamma/2 = \epsilon_{AC} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma$ .

Итак, в пределах упругих деформаций, учитывая, что  $\tau = G\gamma$  и  $\sigma = \tau$ ,

$$\gamma = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau \text{ или } \tau = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma = G\gamma.$$

Таким образом, между тремя упругими постоянными существует зависимость

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (3.2)$$

Это соотношение хорошо согласуется с опытом.

Например, при  $\mu = 0,3$  согласно формуле (3.2)  $G = 0,4E$ .



Рис. 3.4

### 3.4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ СДВИГЕ

При чистом сдвиге касательные силы, действующие по граням элемента бруса, производят работу. В пределах упругих деформаций рассеивание энергии незначительно, и вся эта работа практически полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации (см. разд. 2.17). Предполагая, что нагрузки прикладываются к брусу статически, подсчитаем работу касательных сил, действующих на верхней грани параллелепипеда (см. рис. 3.2). Силы, действующие на остальных гранях параллелепипеда, согласно принятой схеме деформации, работы не производят. Имеем

$$A = \frac{Q\delta}{2}, \quad (3.3)$$

где  $Q = \tau F$  — равнодействующая касательных сил на верхней грани элемента;  $F$  — площадь этой грани.

Энергия, накопленная в единице объема элемента, т. е. удельная потенциальная энергия деформации при сдвиге, будет

$$u = \frac{A}{V} = \frac{\tau F \delta}{2Fh}.$$

Учитывая, что  $\delta/h = \gamma$ , получаем

$$u = \frac{\tau\gamma}{2}. \quad (3.4)$$

Между формулами (2.19) и (3.4), как и следовало ожидать, существует полная аналогия.

## ГЛАВА 4

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Деформации и напряжения в брусе существенно зависят от размеров и формы его поперечных сечений. Поэтому во всех расчетных формулах обязательно присутствуют геометрические характеристики этих сечений. При одноосном растяжении и сжатии такой характеристикой является площадь сечения. В теории кручения и изгиба встречаются более сложные геометрические характеристики, так как в этих случаях напряжения и деформации зависят не только от площади, но и от формы сечения.

#### 4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Возьмем какую-либо плоскую фигуру (рис. 4.1), представляющую собой поперечное сечение бруса, и проведем в ее плоскости произвольную систему прямоугольных осей  $y$  и  $z$ . Затем разобьем площадь  $F$  этой фигуры на элементарные площадки  $\Delta F$ .

Пределы сумм произведений площадей всех элементарных площадок  $\Delta F$  на координаты  $y$  и  $z$  их центров тяжести называются статическими моментами сечения относительно осей  $y$  и  $z$  и обозначаются соответственно через  $S_y$  и  $S_z$ :

$$S_y = \int_F z dF, \quad S_z = \int_F y dF. \quad (4.1)$$

$F$  показывает, что суммирование производится по всей площади сечения, а индекс статического момента обозначает ось, относительно которой он вычисляется.

В зависимости от расположения сечения относительно осей координат статические моменты могут быть величинами положитель-

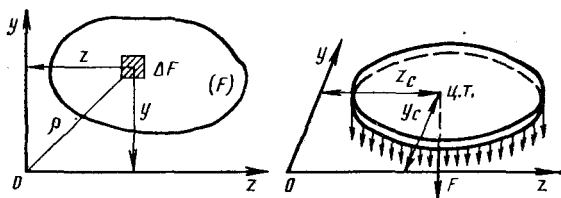


Рис. 4.1

ными, отрицательными и равными нулю. Размерность статического момента сечения  $\text{см}^3$ .

Интегралы

$$J_y = \int_F z^2 dF; \quad J_z = \int_F y^2 dF \quad (4.2)$$

называются осевыми моментами инерции, а интеграл

$$J_{yz} = \int_F yz dF - \quad (4.3)$$

центробежным моментом инерции сечения. Размерность моментов инерции  $\text{см}^4$ .

Осевые моменты инерции всегда можно представить как произведения площади фигуры на квадраты некоторых вспомогательных величин, имеющих размерность длины и называемых радиусами инерции:

$$J_y = F i_y^2; \quad J_z = F i_z^2.$$

Следовательно, радиусы инерции сечения относительно осей  $y$  и  $z$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}; \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}. \quad (4.4)$$

Предел суммы произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния  $\rho$  от начала координат

$$J_p = \int_F \rho^2 dF \quad (4.5)$$

называется полярным моментом инерции сечения относительно точки  $O$ . Так как

$$\rho^2 = y^2 + z^2, \quad \text{то } J_p = \int_F (y^2 + z^2) dF = \int_F z^2 dF + \int_F y^2 dF$$

или

$$J_p = J_y + J_z. \quad (4.6)$$

Итак, полярный момент инерции относительно центра равен сумме осевых моментов инерции относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей, проходящих через этот центр и расположенных в плоскости сечения.

Осевые  $J_y$ ,  $J_z$  и полярный  $J_p$  моменты инерции, представляющие собой пределы сумм положительных величин, всегда положительны, а центробежный момент инерции  $J_{yz}$  может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю, так как координаты  $y$  и  $z$  входят в его выражение в первых степенях.

Из самого смысла выражений (4.1), (4.2) и (4.3) как пределов интегральных сумм следует, что моменты инерции и статические моменты фигуры относительно каких-либо осей равны суммам соответствующих моментов  $J_y$ ,  $J_z$ ,  $J_{yz}$ ,  $S_y$  и  $S_z$  всех ее частей относительно тех же осей. Это свойство будет использоваться в дальней-

шем при расчете сложных сечений, которые можно разбивать на простые фигуры.

Моменты инерции и статические моменты сечения зависят от формы и размеров сечения, а также и от расположения осей координат. Какого-либо геометрического смысла эти величины не имеют. Поэтому формулы (4.1) ... (4.5) надо рассматривать и как определения этих геометрических характеристик. Названия им даны по формальной аналогии с динамическими моментами инерции тела и моментами сил.

#### 4.2. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ СЕЧЕНИЯ

Если рассматривать сечение как горизонтально расположенную пластинку постоянной толщины (см. рис. 4.1), сила тяжести которой численно равна площади сечения  $F$ , то согласно теореме о равенстве сумм моментов составляющих сил моменту равнодействующей для сил тяжести пластинки будут иметь место равенства

$$\int_F y dF = y_c F, \quad \int_F z dF = z_c F. \quad (4.7)$$

Левые части последних выражений представляют собой статические моменты  $S_z$  и  $S_y$  сечения, а координаты  $y_c$  и  $z_c$  определяют точку плоскости сечения, называемую центром тяжести сечения. Следовательно, статические моменты  $S_y$  и  $S_z$  сечения равны произведениям площади сечения на соответствующие координаты его центра тяжести:

$$S_y = F z_c, \quad S_z = F y_c. \quad (4.8)$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными. Относительно любых центральных осей статические моменты сечения равны нулю.

Формулы (4.8) позволяют вычислить статические моменты сечения при известном положении его центра тяжести или определить положение центра тяжести сечения, если найдены его статические моменты. В последнем случае формулы (4.8) записывают так:

$$y_c = \frac{S_z}{F}, \quad z_c = \frac{S_y}{F}, \quad (4.9)$$

а для сложной фигуры, которую можно разбить на простейшие (прямоугольники, треугольники и т. п.), в виде

$$y_c = \frac{\sum F_i y_i}{F}, \quad z_c = \frac{\sum F_i z_i}{F}, \quad (4.10)$$

где  $F_i$ ,  $z_i$ ,  $y_i$  — площадь и координаты центра тяжести простой фигуры.

Центр тяжести сечения, имеющего ось симметрии, находится на этой оси.

**Пример.** Определить положение центра тяжести полукруга (рис. 4.2).

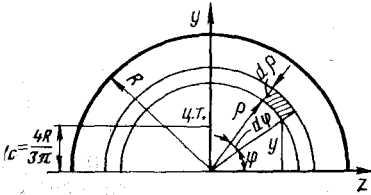


Рис. 4.2

**Решение.** Направим ось  $y$  по оси симметрии полукруга, а ось  $z$  совместим с его основанием. В этом случае  $z_C = 0$ , надо определить только координату  $y_C$ . Подсчитаем  $S_z$  непосредственным интегрированием по площади полукруга:  $S_z = \int_F y dF$ . Здесь

(рис. 4.2)  $y = \rho \sin \varphi$ ;  $dF = \rho d\varphi \rho d\rho$ . Следовательно,

$$S_z = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{3} R^3.$$

Далее по формуле (4.9) находим расстояние центра тяжести от основания полукруга  $y_C = \frac{4R}{3\pi}$ .

**Пример.** Определить центр тяжести тонкостенного полукольца (рис. 4.3). Полукольцо считается тонкостенным, если его толщина  $\delta$  мала по сравнению со средним радиусом  $R$ .

**Решение.** Вследствие симметрии сечения относительно вертикальной оси необходимо определить только координату  $y_C$ . Выделим двумя радиусами-векторами с углом раствора  $d\varphi$  элементарную площадку  $dF = R\delta d\varphi$ , находящуюся на расстоянии  $y = R \sin \varphi$  от оси  $z$ , и подсчитаем статический момент полукольца относительно этой оси

$$S_z = \int_F y dF = R^2 \delta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2R^2 \delta.$$

Площадь полукольца  $F = \pi R \delta$ . Следовательно, ордината центра тяжести  $y_C = \frac{2R}{\pi}$ .

**Пример.** Определить положение центра тяжести составного сечения (рис. 4.4).

**Решение.** Направим ось  $z$  по линии, разделяющей сечение на полукруг и треугольник. Определяя статический момент сечения относительно оси  $z$  суммированием статических моментов полукруга и треугольника и учитывая, что центр тяжести треугольника находится на  $1/3$  его высоты, получаем

$$S_z = \frac{\pi b^3}{2} \frac{4b}{3\pi} + \frac{2b \cdot 3b}{2} (-b) = -\frac{7}{3} b^3 = 2,33b^3.$$

Площадь сечения  $F = \frac{\pi b^2}{2} + \frac{2b \cdot 3b}{2} = 4,57b^2$ . Центр тяжести сечения находится на оси симметрии сечения на расстоянии

$$y_C = -\frac{2,33b^3}{4,57b^2} = -0,51b$$

от оси  $z$ .

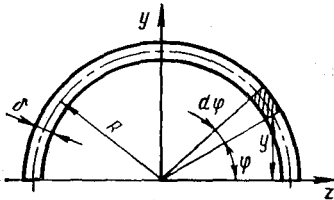


Рис. 4.3

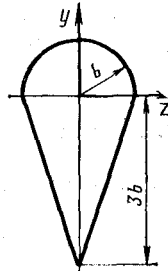


Рис. 4.4

### 4.3. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

Пусть известны осевые  $J_{z_C}$  и  $J_{y_C}$  и центробежный  $J_{z_C y_C}$  моменты инерции сечения относительно его центральных осей и требуется определить моменты инерции  $J_z$ ,  $J_y$  и  $J_{zy}$  того же сечения относительно осей  $z$  и  $y$ , параллельных данным центральным (рис. 4.5)

Обозначим через  $z_C$  и  $y_C$  координаты центра тяжести сечения в осях  $z$  и  $y$ . Тогда согласно рис. 4.5 и формулам (4.2) и (4.3)

$$J_z = \int_F (y + y_C)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2y_C \int_F y dF + y_C^2 \int_F dF$$

или в принятых выше обозначениях

$$J_z = J_{z_C} + 2y_C S_{z_C} + y_C^2 F.$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y_C} + 2z_C S_{y_C} + z_C^2 F; \\ J_{zy} &= J_{z_C y_C} + y_C S_{y_C} + z_C S_{z_C} + y_C z_C F. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Учитывая, что относительно центральных осей статические моменты  $S_{z_C}$  и  $S_{y_C}$  равны нулю, получаем следующую зависимость между моментами инерции при переходе от центральных осей к любым параллельным осям:

$$\begin{aligned} J_z &= J_{z_C} + y_C^2 F; \\ J_y &= J_{y_C} + z_C^2 F; \\ J_{zy} &= J_{z_C y_C} + z_C y_C F. \end{aligned} \quad (4.12)$$

При переходе от нецентральных осей к также нецентральной в формулах перехода (4.11) должны быть сохранены слагаемые с  $S_z$  и  $S_y$ .

Из формулы (4.12) видно, что наименьшее значение имеют осевые моменты инерции относительно центральных осей сечения, так как величины  $y_C^2 F$  и  $z_C^2 F$  всегда положительны. Центробежный момент при переходе от центральных осей к нецентральной в зависимости от знака произведения координат  $z_C$  и  $y_C$  может увеличиваться или уменьшаться.

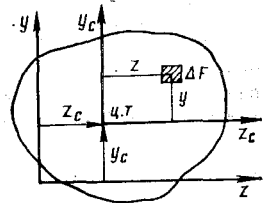


Рис. 4.5

### 4.4. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЕЙШИХ ФИГУР

В расчетной практике часто встречаются сечения в виде простейших фигур (прямоугольников, кругов, треугольников и т. п.) или их комбинаций. При вычислении моментов инерции таких фигур обычно пользуются заранее выведенными расчетными формулами. Рассмотрим некоторые из фигур.

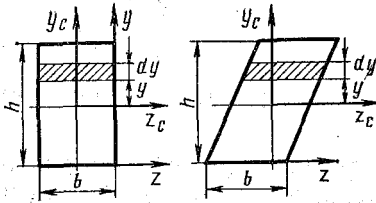


Рис. 4.6

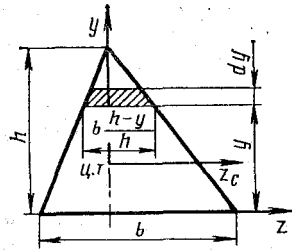


Рис. 4.7

**Прямоугольник и параллелограмм** (рис. 4.6). Выделим элементарную полоску площадью  $dF = bdy$  и подставим это значение  $dF$  под знак интеграла (4.2):

$$J_z = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Следовательно, момент инерции прямоугольника и параллелограмма с основанием  $b$  и высотой  $h$  относительно центральной оси, параллельной основанию,

$$J_{z_c} = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.13)$$

Моменты инерции этих фигур относительно осей, проходящих через основание, находим по формуле (4.12):

$$J_z = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}. \quad (4.14)$$

Моменты инерции прямоугольника относительно осей  $y_c$  и  $y$  вычисляются по формулам (4.13) и (4.14), где  $b$  заменяется на  $h$ , а  $h$  — на  $b$ .

**Треугольник** с основанием  $b$  и высотой  $h$  (рис. 4.7). Разобьем треугольник на элементарные полоски, параллельные его основанию. Площадь такой полоски

$$dF = b \frac{h-y}{h} dy.$$

Тогда момент инерции треугольника относительно оси, проходящей через основание,

$$J_z = \int_0^h b \frac{h-y}{h} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.15)$$

Подсчитывая по формулам переноса момент инерции треугольника относительно центральной оси, параллельной основанию, получаем

$$J_{z_c} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2}.$$



Отсюда относительно центральной оси момент инерции треугольника

$$J_{zC} = \frac{bh^3}{36}. \quad (4.16)$$

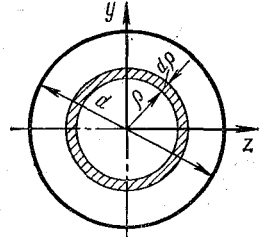


Рис. 4.8

Круг и полукруг диаметра  $d$  (рис. 4.8). Подсчитываем сначала полярный момент инерции круга. Для этого выделим в сечении окружностями радиуса  $\rho$  и  $\rho + d\rho$  элементарное кольцо площадью  $dF = 2\pi\rho d\rho$  и вычислим  $J_p$  по формуле (4.5):

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Обычно размеры круглого сечения выражают через диаметр  $d$  и подсчитывают  $J_p$  по формуле

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4. \quad (4.17)$$

Осевые моменты инерции круга найдем с помощью соотношения  $J_p = J_y + J_z$ . Замечая, что в силу симметрии круга  $J_z = J_y$ , получаем для осевых моментов инерции круга выражение

$$J_z = J_y = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (4.18)$$

Центральные оси  $y$  и  $z$  делят круг на четыре совершенно одинаковые части с равными моментами инерции относительно этих осей. Следовательно, моменты инерции круга и полукруга относительно осей  $y$  и  $z$  должны быть равны соответственно удвоенным моментам инерции относительно тех же осей одной четверти круга. Из сказанного следует, что моменты инерции полукруга относительно оси симметрии  $y$  и оси  $z$ , проходящей через его основание (рис. 4.2), будут одинаковы и равны половине момента инерции круга,

$$J_y = J_z = \frac{\pi d^4}{128}, \quad (4.19)$$

а моменты инерции четверти круга

$$J_y = J_z = \frac{\pi d^4}{256}.$$

**Тонкостенное полукольцо и кольцо постоянной толщины  $\delta$**  (см. рис. 4.3). Поступая, как и в случае вычисления центра тяжести рассматриваемого полукольца (см. разд. 4.2), находим

$$J_z = \int_F y^2 dF = R^3 \delta \int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi R^3 \delta}{2}.$$

Момент инерции полукольца относительно оси симметрии  $y$  равен моменту инерции относительно оси  $z$ . В этом нетрудно убедиться, вычисляя интеграл  $\int_F z^2 dF$ , где  $z = R \cos \alpha$ .

Осевой момент инерции кольца равен удвоенному моменту инерции полукольца:

$$J_z = \pi R^3 \delta. \quad (4.20)$$

#### 4.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЛОЖНЫХ ФИГУР

Всякую сложную фигуру обычно можно разбить на ряд простейших фигур, моменты инерций которых относительно их центральных осей известны. Применяв формулы переноса осей инерции, можно определить момент инерции сложной фигуры, алгебраически суммируя моменты инерции простых фигур относительно общей оси — центральной оси сложной фигуры.

Например, осевой момент инерции толстостенного кольца с внешним диаметром  $D$  и внутренним  $d$  (рис. 4.9) относительно любой центральной оси может быть найден как разность моментов инерции большого и малого кругов:

$$J_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - C^4), \quad (4.21)$$

где  $C = d/D$ .

Полярный момент инерции кольца находится аналогично:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - C^4). \quad (4.22)$$

#### 4.6. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ

Предположим, что задана система осей координат и известны моменты инерции  $J_z$ ,  $J_y$  и  $J_{zy}$  фигуры относительно этих осей. Повернем оси координат на некоторый угол  $\alpha$  против часовой стрелки и определим моменты инерции той же фигуры относительно новых осей координат  $u$  и  $v$ .

Из рис. 4.10 следует, что координаты какой-либо точки в обеих системах координат связаны между собой соотношениями

$$u = z \cos \alpha + y \sin \alpha;$$

$$v = y \cos \alpha - z \sin \alpha.$$

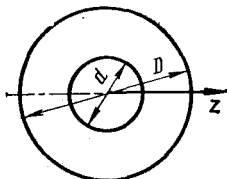


Рис. 4.9

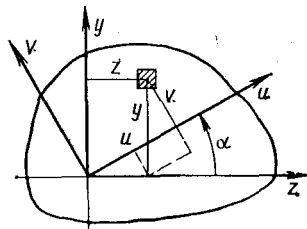


Рис. 4.10

Момент инерции

$$\begin{aligned} J_u &= \int_F v^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dF = \\ &= J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2J_{yz} \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_u &= J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha; \\ J_v &= J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{yz} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Центробежный момент инерции

$$\begin{aligned} J_{uv} &= \int_F (z \cos \alpha + y \sin \alpha) (y \cos \alpha - z \sin \alpha) dF = \\ &= J_{yz} \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin^2 \alpha + J_z \sin \alpha \cos \alpha - J_y \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

или

$$J_{uv} = (J_z - J_y) \sin \alpha \cos \alpha + J_{yz} \cos 2\alpha. \quad (4.24)$$

После введения двойных углов формулы для моментов инерции относительно осей  $u$  и  $v$  принимают вид

$$\begin{aligned} J_u &= \frac{J_y + J_z}{2} + \frac{J_z - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha; \\ J_v &= \frac{J_y + J_z}{2} - \frac{J_z - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{yz} \sin 2\alpha; \\ J_{uv} &= \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Из уравнений (4.25) видно, что  $J_u + J_v = J_z + J_y$ , т. е. сумма осевых моментов инерции при повороте осей координат остается величиной постоянной. Поэтому, если относительно какой-либо оси момент инерции достигает максимума, то относительно перпендикулярной ей оси он имеет минимальное значение.

#### 4.7. ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Из формул (4.25) видно, что при повороте осей координат центробежный момент инерции меняет знак, а следовательно, существует такое положение осей, при котором центробежный момент равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции сечения обращается в нуль, называются главными осями, а главные оси, проходящие через центр тяжести сечения — главными центральными осями инерции сечения.

Моменты инерции относительно главных осей инерции сечения называются главными моментами инерции сечения и обозначаются через  $J_1$  и  $J_2$ , причем  $J_1 > J_2$ . Обычно, говоря о главных моментах, подразумевают осевые моменты инерции относительно главных центральных осей инерции.

Предположим, что оси  $u$  и  $v$  главные. Тогда

$$J_{uv} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{yz}}{J_y - J_z}. \quad (4.26)$$

Уравнение (4.26) определяет положение главных осей инерции сечения в точке  $o$  относительно исходных осей координат  $ou$  и  $oz$ .

При повороте осей координат изменяются также и осевые моменты инерции. Найдем положение осей, относительно которых осевые моменты инерции достигают экстремальных значений. Для этого возьмем первую производную от  $J_u$  по  $\alpha$  и приравняем ее нулю:

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = -(J_z - J_y) \sin 2\alpha - 2J_{yz} \cos 2\alpha = 0,$$

отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{yz}}{J_y - J_z}.$$

К тому же результату приводит и условие  $dJ_v/d\alpha$ . Сравнивая последнее выражение с формулой (4.26), приходим к заключению, что главные оси инерции являются осями, относительно которых осевые моменты инерции сечения достигают экстремальных значений.

Для упрощения вычисления главных моментов инерции формулы (4.25) преобразовывают, исключая из них с помощью соотношения (4.26) тригонометрические функции  $\cos 2\alpha$  и  $\sin 2\alpha$ . Учитывая, что

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{J_y - J_z}{\sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4J_{yz}^2}}, \\ \sin 2\alpha &= \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{2J_{yz}}{\sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4J_{yz}^2}}, \end{aligned}$$

после несложных преобразований получаем для главных моментов инерции формулу

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4J_{yz}^2}. \quad (4.27)$$

Знак плюс перед радикалом соответствует большему  $J_1$ , а знак минус — меньшему  $J_2$  моменту инерции сечения.

Укажем на одно важное свойство сечений, у которых осевые моменты инерции относительно главных осей одинаковы. Предположим, что оси  $y$  и  $z$  главные ( $J_{yz} = 0$ ), а  $J_y = J_z$ . Тогда согласно равенствам (4.25) при любом угле поворота осей  $\alpha$  центробежный момент инерции  $J_{uv} = 0$ , а осевые  $J_u = J_v$ .

Итак, если моменты инерции сечения относительно главных осей одинаковы, то все оси, проходящие через ту же точку сечения, являются главными и осевые моменты инерции относительно всех этих осей одинаковы:  $J_u = J_v = J_y = J_z$ . Этим свойством обладают, например, квадратные, круглые, кольцевые сечения.

#### 4.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ

Центробежный момент инерции сечения относительно осей, из которых хотя бы одна есть ось симметрии, равен нулю. Действительно, каждому элементу площади  $\Delta F$  в правой половине симметричного сечения (рис. 4.11) всегда соответствует такой же элемент в левой половине. Ординаты центров тяжести этих двух элементов одинаковы, а абсциссы равны по величине, но противоположны по знаку. Поэтому интегралы  $\int_F yz dF$  по площади левой и правой части сечения противоположны по знаку, а их сумма, представляющая собой центробежный момент инерции сечения, равна нулю.

Следовательно, если сечение имеет хотя бы одну ось симметрии, то эта ось является одной из главных центральных осей инерции. Любая перпендикулярная к ней ось также является главной, а проходящая, кроме того, через центр тяжести — второй главной центральной осью инерции. Поэтому при определении положения главных осей надо прежде всего обращать внимание на наличие осей симметрии.

Если сечение не имеет осей симметрии, то сначала выбирается рациональная система осей координат, затем вычисляются моменты инерции  $J_u$ ,  $J_z$  и  $J_{yz}$  относительно этих осей и далее по формуле (4.26) определяется угол  $\alpha$ , на который нужно повернуть исходные оси, чтобы они стали главными. При положительном  $\operatorname{tg} 2\alpha$  оси  $y$  и  $z$  надо поворачивать на угол  $\alpha$  против часовой стрелки, а при отрицательном — по часовой стрелке.

Рассмотрим несколько примеров определения главных центральных осей инерции и главных моментов инерции сечений.

**Пример.** Определить главные центральные оси и главные моменты инерции для сечения, представленного на рис. 4.12.

**Решение.** Сечение имеет две оси симметрии  $y$  и  $z$ . Следовательно, эти оси являются искомыми главными центральными осями инерции сечения. Дополним сечение до полного квадрата и определим  $J_y$  и  $J_z$  вычитанием из момента инерции квадрата со стороной 4 см моментов инерции квадратов со стороной 1 см. Учитывая, что по доказанному выше моменты инерции квадратов относительно всех центральных осей одинаковы,

$$J_z = \frac{4 \cdot 4^3}{12} - 2 \frac{1^4}{12} = 21,2 \text{ см}^4.$$

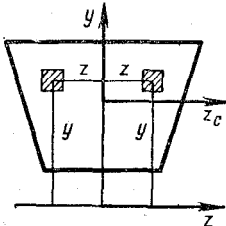


Рис. 4.11

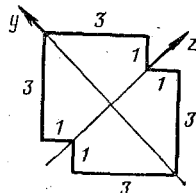


Рис. 4.12

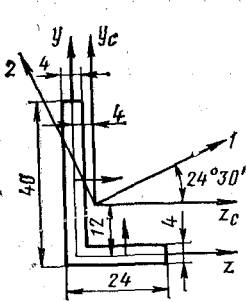


Рис. 4.13

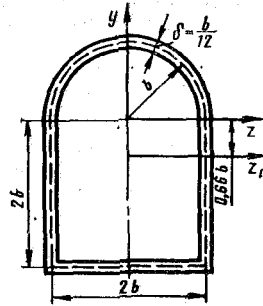


Рис. 4.14

При вычислении  $J_y$  необходимо применить формулу (4.12)

$$J_y = \frac{4 \cdot 4^3}{12} - 2 \left[ \frac{14}{12} + \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot 1 \right] = 12,1 \text{ см}^4.$$

Итак,  $J_x = 21,2 \text{ см}^4$ ,  $J_y = 12,1 \text{ см}^4$ . Заметим, что осью максимального главного момента инерции всегда будет та, от которой более удалены элементы площади сечения.

**Пример.** Определить моменты инерции уголка относительно главных центральных осей инерции (рис. 4.13).

**Решение.** Совместим оси  $z$  и  $y$  с горизонтальным и вертикальным участками средней линии уголка и определим положение его центра тяжести:

$$z_c = \frac{20 \cdot 4 \cdot 12}{40 \cdot 4 + 20 \cdot 4} = 4 \text{ мм}; \quad y_c = \frac{40 \cdot 4 \cdot 18}{40 \cdot 4 + 20 \cdot 4} = 12 \text{ мм}.$$

Проведем через центр тяжести оси  $z_c$  и  $y_c$  и вычислим моменты инерции уголка относительно этих осей. Разбивая уголок на два прямоугольника, как показано на рис. 4.13, с помощью формул (4.12) получаем:

$$J_{z_G} = \left[ \frac{20 \cdot 4^3}{12} + 12^2 \cdot 20 \cdot 4 \right] + \left[ \frac{4 \cdot 40^3}{12} + 6^2 \cdot 40 \cdot 4 \right] = 38\,720 \text{ мм}^4;$$

$$J_{y_G} = \left[ \frac{40 \cdot 4^3}{12} + 4^2 \cdot 40 \cdot 4 \right] + \left[ \frac{4 \cdot 20^3}{12} + 8^2 \cdot 20 \cdot 4 \right] = 18\,560 \text{ мм}^4;$$

$$J_{z_G y_G} = [0 + 8 \cdot (-12) \cdot 20 \cdot 4] + [0 + (-4) \cdot 6 \cdot 40 \cdot 4] = -11\,520 \text{ мм}^4.$$

Определим по формуле (4.27) угол  $\alpha$ , на который надо повернуть центральные оси  $z_c$  и  $y_c$ , чтобы они совпали с главными центральными осями инерции уголка:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(-11\,520)}{18\,560 - 38\,720} = 1,15.$$

Отсюда  $2\alpha = 49^\circ$ ,  $\alpha = 24^\circ 30'$ .

Как видно из рис. 4.13, при повороте на угол  $\alpha = 24^\circ 30'$  ось  $z_G$  совпадает с первой, а ось  $y_G$  — со второй главной центральной осью инерции уголка (элементы данной фигуры расположены ближе к оси 2, чем к оси 1).

Главные моменты инерции  $J_1$  и  $J_2$  вычислим по формуле (4.28):

$$J_{1,2} = \frac{38\,720 + 18\,560}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(38\,720 - 18\,560)^2 + 4 \cdot 11\,520^2} = 28\,640 \pm 15\,260.$$

Следовательно,  $J_1 = 43\,900 \text{ мм}^4$ ;  $J_2 = 13\,380 \text{ мм}^4$ .

**Пример.** Определить главные моменты инерции тонкостенного профиля постоянной толщины  $\delta = b/12$ , представленного на рис. 4.14.

**Решение.** Проведем оси  $z$  и  $y$ , как показано на рис. 4.14, и определим положение центра тяжести профиля

$$y_C = \frac{S_z^{\wedge} + 2S'_z + S_z^-}{F^{\wedge} + 2F' + F^-},$$

где площади и статические моменты полукольца, вертикального и горизонтального прямоугольников

$$F^{\wedge} = \pi b\delta; \quad F' = 2b\delta; \quad F^- = 2b\delta;$$

$$S_z^{\wedge} = 2b^2\delta \text{ (см. разд. 4.2); } S'_z = -2b^2\delta; \quad S_z^- = -4b^2\delta.$$

Следовательно,

$$y_C = \frac{2b^2\delta - 4b^2\delta - 4b^2\delta}{\pi b\delta + 4b\delta + 2b\delta} = -0,66b.$$

Определим моменты инерции относительно главных центральных осей инерции  $z_C$  и  $y_C$ .

При вычислении  $J_{z_C}$  поступим так. Сначала определим момент инерции всего сечения относительно оси  $z$ , а затем по формулам (4.12) перейдем к центральной оси  $z_C$ . Используя результаты разд. 4.4, получим

$$J_z = \frac{\pi b^3\delta}{2} + 2 \frac{\delta (2b)^3}{3} + \left[ \frac{2b\delta^3}{12} + 2b\delta (2b)^2 \right].$$

Первое слагаемое в квадратных скобках — момент инерции горизонтального элемента относительно его собственной центральной оси — весьма мало по сравнению со всеми остальными слагаемыми, так как содержит малую величину  $\delta$  в третьей степени.

Таковыми слагаемыми при расчете тонкостенных сечений обычно пренебрегают. Поэтому

$$J_z = \left( \frac{\pi}{2} + \frac{16}{3} + 8 \right) b^3\delta = 14,9b^3\delta,$$

а 
$$J_{z_C} = 14,9b^3\delta - (0,66b)^2 \cdot 9 \cdot 14b\delta = 10,9b^3\delta = 0,9b^4.$$

Момент инерции относительно оси  $y_C$

$$J_{y_C} = \frac{\pi b^3\delta}{2} + 2 \left[ \frac{2b\delta^3}{12} + b^3 \cdot 2b\delta \right] + \frac{\delta (2b)^3}{12} = 0,52b^4.$$

Кручением называется деформация бруса, при которой его поперечные сечения поворачиваются друг относительно друга, вращаясь вокруг оси бруса.

Вызывается кручение парами сосредоточенных и распределенных вдоль оси бруса сил, действующими в плоскостях, перпендикулярным этой оси.

С точки зрения теории кручения все брусья делятся на три группы: брусья круглого, некруглого (прямоугольного, эллиптического, треугольного и т. д.) и тонкостенного сечения. Такая классификация вызвана различным характером деформации брусьев при кручении. Так, гипотеза плоских сечений, как показали опыты, применима лишь для брусьев круглого и кольцевого сечения. При кручении брусьев некруглых сечений поперечные сечения не остаются плоскими, вследствие чего решение задачи весьма усложняется. Эти задачи рассматриваются в теории упругости, а в сопротивлении материалов приводятся лишь некоторые конечные результаты полученных решений. Тонкостенные брусья изучаются отдельно потому, что вне зависимости от очертания тонкостенность замкнутого сечения дает возможность ввести ряд упрощений, позволяющих решить задачу кручения таких брусьев методами сопротивления материалов.

### 5.1. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ ПРИ КРУЧЕНИИ

Рассмотрим брус, нагруженный сосредоточенными парами с моментами  $M_1$  и  $M_2$  и распределенными скручивающими парами, интенсивность которых  $m$  изменяется по какому-либо закону вдоль оси бруса, т. е.  $m = m(x)$ . На рис. 5.1 сосредоточенные пары представлены их условными изображениями в виде двух кружков, причем кружок с точкой обозначает силу, направленную на наблюдателя, а с крестиком — от него. Эпюра распределенных моментов заштрихована винтовой линией; кружки с точкой и крестиком у этой эпюры показывают направление вращения распределенных пар сил.

Воспользуемся методом сечений. Проводя последовательно сечения на расстоянии  $x$  от начала каждого участка, составляем суммы моментов относительно оси бруса всех действующих на отсеченную часть внешних и внутренних сил и приравняем каждую из этих сумм нулю. Заменяя моменты  $\tau_0 dF$  всех внутренних элементарных



касательных сил в текущих сечениях их равнодействующими — крутящими моментами  $M_K$  (см. разд. 1.11), получаем для первого и второго участков

$$M_K^I(x) = M_1; \quad M_K^{II}(x) = M_1 - M_2.$$

Остальные пять уравнений равновесия отсеченных частей бруса приводят к равенствам

$$N(x) = 0; \quad Q_y(x) = 0; \quad Q_z(x) = 0; \\ M_z(x) = 0; \quad M_y(x) = 0,$$

т. е. при кручении из шести силовых факторов в сечениях бруса отличен от нуля лишь крутящий момент  $M_K$ .

На третьем участке на брус действует распределенная моментная нагрузка. Заменяв распределенную нагрузку равнодействующей, равной пределу суммы всех действующих на отсеченную часть бруса элементарных скручивающих моментов  $m(\xi) d\xi$ , запишем уравнение равновесия отсеченной части для третьего участка так:

$$M_K^{III}(x) = M_1 - M_2 + \int_0^x m(\xi) d\xi.$$

Обобщая это уравнение на случай действия на отсеченную часть  $n$  сосредоточенных пар и  $k$  распределенных скручивающих нагрузок, получаем

$$M_K(x) = \sum_1^k M_i + \sum_1^k \int_{x_0}^x m_j(x) dx. \quad (5.1)$$

Здесь нижний предел должен быть проставлен в конкретных задачах в соответствии с выбранным началом отсчета координаты  $x$ .

Уравнение (5.1) можно сформулировать в виде удобного для практических целей правила: **крутящий момент в поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме моментов относительно оси бруса от всех внешних сил и пар, расположенных по одну (любую) сторону от сечения.**

При суммировании моментов надо придерживаться какого-либо правила знаков. Обычно момент от внешней пары, направленной по часовой стрелке (если смотреть на эту пару со стороны текущего сечения), считается положительным, а момент пары, направленной против часовой стрелки, — отрицательным.

Можно и не придерживаться строго этого правила, но при решении конкретных задач необходимо приписывать определенный знак внешним моментам одного направления.

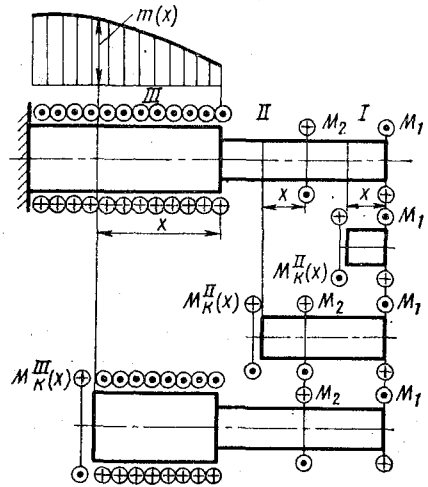


Рис. 5.1

Крутящий момент в сечении не зависит, естественно, от формы и размеров сечения, так как полностью определяется одними лишь условиями равновесия отсеченной части бруса.

Заметим, что правила определения крутящего момента  $M_K$  и нормальной силы  $N$  (см. разд. 2.1) идентичны. Иначе и не может быть, так как  $M_K$  и  $N$  являются двумя из шести равнодействующих одних и тех же внутренних сил упругости в сечении бруса.

Закон изменения крутящих моментов по длине бруса изображается в виде эпюры крутящих моментов. Примеры построения эпюр приведены в разд. 5.10.

## 5.2. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО БРУСА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Определим напряжения и деформации при кручении цилиндрического бруса круглого сечения парами сил, действующими в плоскостях его торцевых сечений (рис. 5.2).

Отметим сразу, что поставленная задача при кручении решается так же, как и аналогичная задача при центральном растяжении (см. разд. 2.4). Более того, сравнивая решения задач определения напряжений при различных видах деформаций (растяжении, кручении, поперечном изгибе и т. д.), нетрудно установить общность метода решений. Уяснение этого обстоятельства учащимися может значительно облегчить им изучение курса сопротивления материалов.

Последовательность решения уже изложена в разд. 2.4. Сначала методом сечений находится зависимость между внешними нагрузками и внутренними силовыми факторами в сечениях бруса. При кручении таким фактором является крутящий момент  $M_K$ .

Крутящий момент, численное значение которого находится из уравнения (5.1), представляет собой сумму моментов всех внутренних касательных сил упругости в сечении бруса (см. разд. 1.11):

$$M_K = \int_F (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) dF \quad (5.2)$$

или в более краткой записи

$$M_K = \int_F \rho \tau dF,$$

где  $\rho$  — плечо элементарной касательной силы  $\tau dF$ ;  $\tau$  — полное касательное напряжение в точке сечения.

Уравнение (5.2) позволяет определить напряжения  $\tau$ , если известен закон их распределения по сечению. Трудности, возникающие при аналитическом определении этого закона, заставляют обратиться к экспериментальному исследованию деформаций бруса.

Опыт показывает, что после закручивания бруса круглого сечения поперечные линии, нанесенные на его поверхность, остаются плоскими, а диаметры сечений и расстояния между ними не изменяются. Следовательно, можно предположить, что нормальные напряжения в поперечных сечениях такого бруса отсутствуют

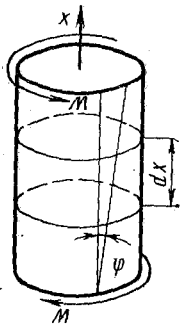


Рис. 5.2

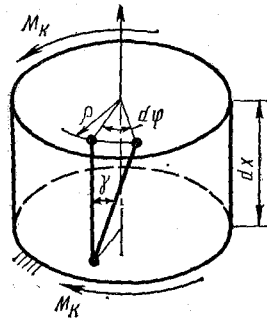


Рис. 5.3

(иначе измерялись бы расстояния между сечениями), а сами сечения поворачиваются вокруг оси бруса как жесткие диски. Последнее предположение равносильно введению сразу двух гипотез — гипотезы плоских сечений и гипотезы о недеформируемости (прямолинейности) радиусов сечений.

Чтобы круглое сечение не деформировалось в своей плоскости и не имело поступательных перемещений, а только поворачивалось вокруг своего центра, касательные напряжения во всех его точках, равноудаленных от этого центра, должны быть равны по величине и направлены по нормальям к радиус-векторам этих точек.

Вырежем двумя поперечными сечениями элемент бруса (рис. 5.3). В результате нагружения бруса верхнее сечение элемента повернется относительно нижнего на угол  $d\varphi$ . При этом выделенная в верхнем сечении бесконечно малая площадка сдвинется относительно соответствующей ей нижней площадки (рис. 5.3) на угол  $\gamma$ . По граням продольного элемента, ограниченного указанными площадками, действуют только касательные напряжения. Следовательно, этот элемент испытывает чистый сдвиг, а  $\gamma$  — угол сдвига. Согласно рис. 5.3

$$\gamma dx = \rho d\varphi \text{ или } \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}.$$

Переходя по закону Гука ( $\tau = G\gamma$ ) к напряжениям, получаем

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.3)$$

Частное от деления абсолютного угла закручивания  $d\varphi$  элемента бруса на длину этого элемента  $dx$  называется относительным углом закручивания и обозначается буквой  $\theta$ :

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.4)$$

Тогда

$$\tau = G\rho\theta. \quad (5.5)$$

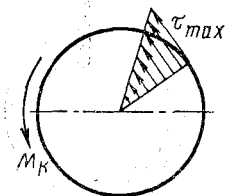


Рис. 5.4

Таким образом, касательные напряжения в центре сечения равны нулю, растут к периферии сечения по линейному закону и направлены, как указывалось выше, нормально к радиусу сечения (рис. 5.4).

Подставляя найденный закон распределения напряжений (5.5) в равенство (5.2), получаем

$$M_K = \int_F G\theta\rho^2 dF = G\theta \int_F \rho^2 dF = GJ_p\theta, \quad (5.6)$$

где  $J_p$  — полярный момент инерции круглого сечения. Отсюда находим расчетное уравнение для относительного угла закручивания бруса

$$\theta = \frac{M_K}{GJ_p}, \quad (5.7)$$

а затем, исключая  $\theta$  из равенства (5.5), получаем формулу для напряжений при кручении бруса круглого сечения

$$\tau = \frac{M_K}{J_p} \rho. \quad (5.8)$$

Наибольшего значения напряжения достигают в контурных точках сечения при  $\rho = R$ , где  $R = d/2$  — радиус сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{J_p} R \quad (5.9)$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}. \quad (5.10)$$

Величину  $W_K = J_p/R$ , представляющую собой отношение полярного момента инерции сечения к его наибольшему радиусу  $R$ , называют моментом сопротивления кручению. Его размерность  $\text{см}^3$ . Для круглого сечения

$$W_K = \frac{\pi d^4}{32} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (5.11)$$

Произведение  $GJ_p$  называется жесткостью при кручении;  $J_p$  — геометрическая характеристика жесткости сечения, а модуль сдвига  $G$  — характеристика жесткости материала.

Угол закручивания элемента бруса длиной  $d\bar{x}$  согласно формулам (5.4) и (5.7)

$$d\varphi = \theta dx = \frac{M_K dx}{GJ_p}. \quad (5.12)$$

Угол закручивания всего бруса

$$\varphi = \int_l \theta dx \quad \text{или} \quad \varphi = \int_l \frac{M_K dx}{GJ_p}. \quad (5.13)$$

Если брус имеет несколько участков с различными аналитическими выражениями для  $M_R$  или различными значениями  $J_p$ , то

$$\varphi = \sum_1^n \int_l \frac{M_R dx}{GJ_p}. \quad (5.14)$$

Пределы интегрирования в конкретных задачах проставляются в соответствии с заранее выбранным началом отсчета координаты  $x$ .

В частном случае при  $M_R(x) = \text{const}$  и  $J_p(x) = \text{const}$ , т. е. только для бруса постоянного сечения, нагруженного по концам сосредоточенными парами,

$$\varphi = \frac{M_R l}{GJ_p}. \quad (5.15)$$

Полученные в этом разделе уравнения справедливы также и для бруса кольцевого сечения с наружным диаметром  $D$  и внутренним  $d$ . Только в этом случае  $J_p$  и  $W_R$  надо вычислять по формулам

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - C^4); \quad W_R = \frac{\pi D^3}{16} (1 - C^4); \quad C = \frac{d}{D}. \quad (5.16)$$

Эпюра касательных напряжений в сечении полого бруса приведена на рис. 5.5.

Сравнение эпюр касательных напряжений в сплошном и полом брус указывает на преимущества полых валов, так как в таких валах выбран материал в области действия малых напряжений. В результате распределение напряжений по сечению становится более равномерным, а сам брус более легким, чем равнопрочный ему брус сплошного сечения, несмотря на некоторое увеличение наружного диаметра.

Полезно отметить полное совпадение структуры расчетных уравнений для аналогичных факторов при растяжении и кручении.

При растяжении

1. Относительная деформация

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}$$

2. Напряжения

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

3. Перемещения

$$\Delta l = \int_l \varepsilon dx$$

$$\Delta l = \int_l \frac{N dx}{EF}$$

При кручении

$$\theta = \frac{M_R}{GJ_p}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_R}{W_R}$$

$$\varphi = \int_l \theta dx.$$

$$\varphi = \int_l \frac{M_R dx}{GJ_p}.$$

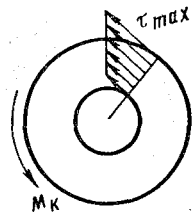


Рис. 5.5

### 5.3. НАПРЯЖЕНИЯ В РАЗЛИЧНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ СЕЧЕНИЯХ И ХАРАКТЕР РАЗРУШЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ БРУСА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Полученное выше теоретическое решение задачи кручения бруса круглого сечения находит подтверждение в результатах многочисленных опытов. Одновременно эти опыты указывают на различный характер разрушения брусьев из пластичных и хрупких материалов при кручении.

Касательные напряжения в точках любого радиуса поперечного сечения, как известно, перпендикулярны радиусу и изменяются вдоль него по линейному закону. Согласно свойству парности такие же по величине касательные напряжения имеют место и в продольных сечениях (рис. 5.6).

Продольные волокна при кручении бруса испытывают чистый сдвиг. Следовательно (см. разд. 3.2), в каждой паре ортогональных площадок, наклоненных к оси бруса под углом  $45^\circ$ , будут действовать нормальные напряжения, равные по величине касательному напряжению в поперечном сечении. При этом одно из них будет растягивающим, а другое — сжимающим (рис. 5.7). Во всех остальных наклонных площадках возникают одновременно касательные и нормальные напряжения. Однако наибольшие  $\sigma$  действуют на площадках, проведенных под углом  $45^\circ$ , а наибольшие  $\tau$  — в поперечных сечениях.

Площадки действия наибольших растягивающих  $\sigma$  располагаются на винтовой поверхности. Именно по этой поверхности и разрушаются при кручении образцы их хрупкого материала (рис. 5.9), так как хрупкие материалы слабее сопротивляются отрыву частиц, чем их сдвигу.

Пластичные материалы, наоборот, обладают меньшим сопротивлением сдвигу, чем отрыву. Поэтому образцы из таких материалов разрушаются при кручении по плоскости поперечного сечения, где действуют наибольшие касательные напряжения (рис. 5.8).

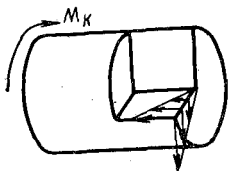


Рис. 5.6

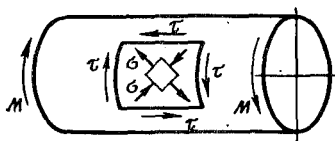


Рис. 5.7

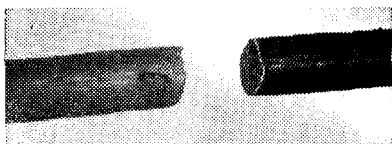


Рис. 5.8

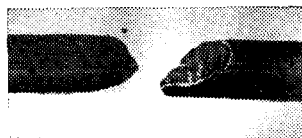


Рис. 5.9

Древесина имеет низкое сопротивление складыванию вдоль волокон. Поэтому разрушение деревянного образца при кручении начинается с образования на его поверхности продольных трещин.

#### 5.4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Потенциальная энергия деформации при кручении определяется подобно тому, как это делалось при растяжении (см. разд. 2.17).

Энергия  $dU$ , накопленная в элементе бруса длиной  $dx$  (см. рис. 5.3), равна работе момента  $M_R$  на угле  $d\varphi$  поворота верхнего сечения относительно нижнего. Работа пары сил, как известно, равна произведению момента этой пары на угол поворота. Учитывая, что нагрузки прикладываются к брусу статически и момент  $M_R$  в пределах упругих деформаций возрастает пропорционально  $\varphi$ , получаем

$$dU = \frac{M_R d\varphi}{2}.$$

Подставим сюда выражение (5.12) для  $d\varphi$ . Тогда

$$dU = \frac{M_R^2 dx}{2GJ_p}.$$

Интегрированием по длине бруса находим потенциальную энергию деформации во всем брусе

$$U = \int_l \frac{M_R^2 dx}{2GJ_p}. \quad (5.17)$$

Если по длине бруса крутящий момент  $M_R$  и жесткость  $GJ_p$  не изменяются, то

$$U = \frac{M_R^2 l}{2GJ_p}. \quad (5.18)$$

Формулы (5.17) и (5.18), как и следовало ожидать, аналогичны формулам (2.20) и (2.18) для потенциальной энергии при растяжении.

#### 5.5. О НАПРАВЛЕНИИ ВЕКТОРА КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ В КОНТУРНЫХ ТОЧКАХ СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО БРУСА

В любом поперечном сечении цилиндрического бруса векторы касательных напряжений в контурных точках сечения направлены по касательным к контуру. Это следует из того условия, что нормальная к контуру составляющая  $\tau_n$  полного касательного напряжения  $\tau$  на площадке поперечного сечения (рис. 5.10) должна быть равна нулю, так как в противном случае в силу закона парности должно возникнуть равное этой компоненте и направленное вдоль образующей касательное напряжение  $\tau_n$  на боковой поверхности

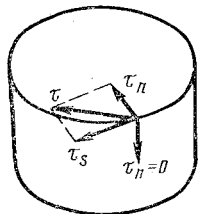


Рис. 5.10

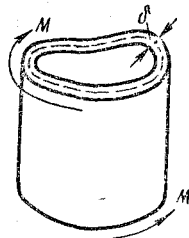


Рис. 5.11

бруса. Боковая же поверхность обычно свободна от продольных касательных нагрузок, поскольку скручивающие и изгибающие брус силы прикладываются перпендикулярно его боковой поверхности.

### 5.6. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО БРУСА ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ

Брус считается тонкостенным, если толщина стенки  $\delta$  существенно меньше его прочих линейных размеров.

Линия, делящая толщину сечения пополам, называется средней линией или контуром сечения. Часто тонкостенное сечение, называемое также профилем, изображается только его средней линией, а размеры сечения задаются по этой линии.

Средняя линия может быть замкнутой и незамкнутой. Соответственно этому профили делятся на замкнутые и открытые.

При кручении тонкостенного бруса его поперечные сечения деформируются. Если ничто не препятствует свободной деформации сечений, кручение называется чистым или свободным. В противном случае кручение называется стесненным. При стесненном кручении в отличие от свободного в поперечных сечениях кроме касательных напряжений возникают также и нормальные напряжения.

Рассмотрим случай свободного кручения тонкостенного бруса замкнутого контура (рис. 5.11), при котором поперечные сечения могут свободно деформироваться, но не искажаться в своей плоскости, т. е. не изменяется форма сечения в плане. Последнее условие обеспечивается в тонкостенных конструкциях установкой достаточно жестких в своей плоскости диафрагм (в крыле самолета — нервюры, в фюзеляже — шпангоутов).

Определим напряжения в поперечных сечениях рассматриваемого бруса.

Крутящий момент, численное значение которого, как и в брус круглого сечения, определяется из уравнения (5.1), будет реализован внутренними касательными силами упругости в сечении. Следовательно, и при деформации вся система внутренних касательных сил в сечении приводится к паре сил, действующей в нормальной к оси бруса плоскости.

Согласно методу решения подобных задач (см. разд. 2.4 и 5.2) следующим шагом является определение закона распределения



напряжений по сечению. В данном случае нет необходимости обращаться к исследованию деформаций, так как тонкостенность сечения позволяет определить сразу закон распределения напряжений.

Сначала установим направление и характер распределения напряжений по толщине сечения.

В крайних точках нормали  $n - n$  (рис. 5.12) к средней линии сечения векторы напряжений, как доказано выше, направлены по касательным к внешнему и внутренним контурам сечения. Вследствие малой толщины сечения эти векторы почти параллельны, и поэтому с небольшой погрешностью можно считать, что во всех точках нормали  $n - n$  векторы напряжений  $\tau$  параллельны касательной к средней линии сечения. В то же время кручение пустотелого вала кольцевого сечения (см. рис. 5.5) показывает, что при малой толщине стенки можно пренебречь изменением величины напряжений по толщине сечения.

Таким образом, можно считать, что при кручении тонкостенного бруса замкнутого контура касательные напряжения по толщине распределены равномерно и направлены по касательной к его средней линии.

Остается определить, как изменяются напряжения вдоль контура сечения, иначе — установить зависимость между напряжениями  $\tau_1$  и  $\tau_2$  в двух его произвольных точках, если толщина сечения в этих точках  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Для этого двумя продольными сечениями, проходящими через рассматриваемые точки нормально к контуру, и еще одним поперечным сечением выделим элемент бруса длиной  $dx$ . В силу свойства ларности в проведенных продольных сечениях будут действовать касательные напряжения, равные  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Составим теперь уравнение равновесия элемента, спроектировав все силы на ось бруса  $x$  (рис. 5.12):

$$\tau_1 \delta_1 dx - \tau_2 \delta_2 dx = 0 \text{ или } \tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2.$$

Так как точки 1 и 2 взяты произвольно, то тем самым доказано, что произведение  $\tau \delta$ , называемое потоком касательных напряжений, является величиной постоянной для всего сечения:

$$\tau \delta = \text{const.} \quad (5.19)$$

Воспользуемся далее равенством (5.2):

$$M_K = \int_F \rho \tau dF,$$

где  $\tau dF = \tau \delta ds$  — элементарная касательная сила в сечении;  $\rho \tau \delta ds$  — момент этой силы относительно произвольно взятой точки  $O$  (рис. 5.13).

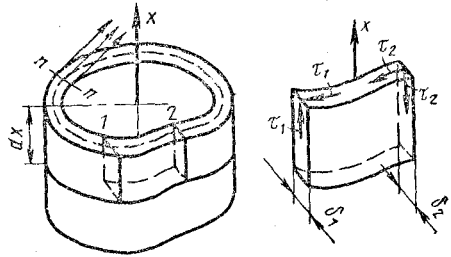


Рис. 5.12

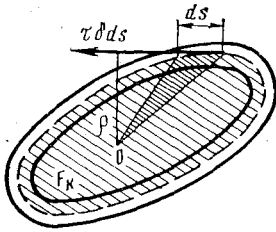


Рис. 5.13

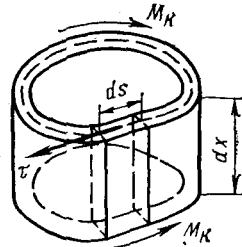


Рис. 5.14

Следовательно,  $M_k = \oint_F \tau \delta \rho ds$ . Величина  $\tau \delta = \text{const}$  при интегрировании по средней линии сечения, поэтому  $M_k = \tau \delta \oint \rho ds$ .

Произведение  $\rho ds$  представляет собой удвоенную площадь треугольника с вершиной в точке  $O$ , основанием  $ds$  и высотой  $\rho$  (на рис. 5.13 треугольник заштрихован). Интеграл  $\oint \rho ds$  даст, очевидно, удвоенную площадь фигуры, ограниченной средней линией сечения. Обозначим эту площадь через  $F_k$ . Тогда

$$M_k = \tau \delta \cdot 2F_k.$$

Отсюда получаем расчетное уравнение для определения  $\tau$  при кручении тонкостенного бруса замкнутого контура:

$$\tau = \frac{M_k}{2F_k \delta}. \quad (5.20)$$

При постоянной толщине  $\delta$  сечения  $\tau$  во всех его точках одинаковы по величине. В сечении переменной толщины наибольшее  $\tau$  действует там, где сечение тоньше:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{2F_k \delta_{\min}}. \quad (5.21)$$

Угол закручивания  $\varphi$  тонкостенного бруса в пределах упругих деформаций определим энергетическим методом, приравнявая работу внешних сил потенциальной энергии деформации.

Выделим двумя поперечными сечениями элемент бруса длиной  $dx$ . Крутящие моменты в этих сечениях, являющиеся для выделенной части бруса внешними нагрузками, производят на угле закручивания рассматриваемой части  $d\varphi$  работу

$$A = \frac{M_k d\varphi}{2}. \quad (5.22)$$

Подсчитаем потенциальную энергию деформации. Удельная энергия при сдвиге согласно формуле (3.4)

$$u = \frac{\tau^2}{2G}.$$

Следовательно, энергия, накопленная в элементарном объеме с площадью основания  $\delta ds$  и высотой  $dx$  (рис. 5.14), равна  $\frac{\tau^2}{2G} \delta ds dx$ , а энергия, накопленная во всей рассматриваемой части бруса,  $dU = \oint \frac{\tau^2}{2G} \delta dx ds$ . Заменяя здесь  $\tau$  его значением из выражения (5.20) и учитывая, что  $M_R$ ,  $F_R$ ,  $dx$  и  $G$  величины постоянные при интегрировании по контуру сечения, получаем

$$dU = \frac{M_R^2 dx}{8F_R^2 G} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (5.23)$$

Приравнивая выражения (5.22) и (5.23), находим относительный угол закручивания тонкостенного бруса

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_R}{4F_R^2 G} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (5.24)$$

Введя обозначение

$$J_R = \frac{4F_R^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}, \quad (5.25)$$

придадим выражению для  $\theta$  такой же вид, как и при кручении бруса круглого сечения

$$\theta = \frac{M_R}{GJ_R}. \quad (5.26)$$

Абсолютный угол закручивания вычисляется по формуле

$$\varphi = \int_l \frac{M_R dx}{GJ_R}. \quad (5.27)$$

Выражение (5.25) является геометрической характеристикой жесткости тонкостенного сечения при кручении. Его размерность такая же, как и у полярного момента инерции (см<sup>4</sup>), но  $J_R \neq J_P$ . При постоянной толщине сечения

$$J_R = \frac{4F_R^2 \delta}{S},$$

где  $S$  — длина средней линии сечения.

Если толщина сечения на различных участках контура различна, то

$$J_R = \frac{4F_R^2}{\sum_1^m \frac{S_i}{\delta_i}},$$

где  $S_i$  и  $\delta_i$  — длина и толщина участка сечения.

## 5.7. КРУЧЕНИЕ БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Опыт показывает, что при кручении бруса любого некруглого сечения его поперечные сечения деформируются. Это обстоятельство значительно усложняет задачу определения напряже-

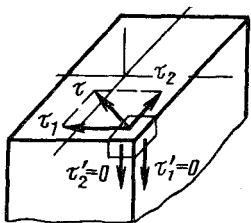


Рис. 5.15

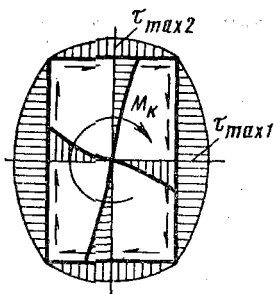


Рис. 5.16

ний и деформаций, так как не позволяет принять гипотезу плоских сечений. В то же время и нет возможности ввести обоснованные допущения о характере распределения напряжений по сечению, как это удается сделать для тонкостенных брусков замкнутого контура. Поэтому задачи кручения брусков некруглых сечений могут быть решены только методами теории упругости.

Интересно отметить, что принятие гипотезы плоских сечений для брусков некруглого сечения привело бы к результатам, прямо противоположным действительным. Согласно этой гипотезе, точки, наиболее удаленные от центра сечения, имеют наибольшие перемещения и, следовательно, в них должны действовать наибольшие напряжения. Например, в брусе прямоугольного сечения  $\tau_{\max}$  должны были бы возникнуть в угловых точках. Но легко показать, что на самом деле именно в этих точках касательные напряжения равны нулю. Действительно, если бы на площадке поперечного сечения в угловой точке действовало напряжение  $\tau$  (рис. 5.15), то его можно было бы всегда разложить на составляющие  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , направленные вдоль сторон прямоугольника. Каждая из этих составляющих должна быть равна нулю, так как парные им напряжения  $\tau'_1$  и  $\tau'_2$  на свободной от продольной касательной нагрузки боковой поверхности бруса равны нулю. Следовательно, и напряжение  $\tau = 0$ .

Решение задачи о кручении бруса прямоугольного сечения, полученное в теории упругости Сен-Венаном, показывает, что касательные напряжения в контурных точках сечения возрастают от нулевых значений в углах к серединам сторон по некоторым кривым (рис. 5.16); в центре сечения напряжение равно нулю, а максимального значения напряжения достигают в серединах длинных сторон, причем

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{\alpha b^2 h}. \quad (5.28)$$

Наибольшее напряжение на короткой стороне прямоугольника

$$\tau_B = \gamma \tau_{\max}. \quad (5.29)$$

Угол закручивания определяется по формуле

$$\theta = \frac{M_R}{G\beta b^3 h}. \quad (5.30)$$

В этих формулах  $b$  — длина короткой и  $h$  — длинной стороны прямоугольника;  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — числовые коэффициенты, зависящие от соотношения сторон  $h$  и  $b$ .

Значения этих коэффициентов приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

$h/b$	1	1,5	1,75	2	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\gamma$	1,00	0,859	0,820	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

Характер изменения касательных напряжений по различным направлениям внутри прямоугольного сечения показан на рис. 5.16.

#### 5.8. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО БРУСА ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Результаты предыдущего раздела позволяют получить расчетные уравнения для напряжений и деформаций при свободном кручении тонкостенных брусев открытого профиля.

При кручении бруса в виде узкой прямоугольной полосы с большим отношением высоты сечения  $h$  к его толщине  $\delta$  ( $h/\delta \gg 10$ ) коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  согласно данным табл. 5.1 можно принять равными  $1/3$  и вычислять  $\tau$  и  $\theta$  для такого профиля по формулам (см. уравнения 5.28 и 5.30)

$$\tau = \frac{3M_R}{h\delta^2}; \quad (5.31)$$

$$\theta = \frac{3M_R}{Gh\delta^3}. \quad (5.32)$$

Форма и соотношение размеров сечения скручиваемой полосы определяют и характер распределения напряжений в ней. За исключением небольших участков у коротких сторон прямоугольника распределение напряжений вдоль его длинных сторон становится равномерным, а по толщине сечения — линейным (рис. 5.17). Аналогичный характер имеет распределение напряжений и при криволинейной форме сечения (см. рис. 5.17). Для таких сечений в формулах (5.31) и (5.32) надо высоту сечения  $h$  заменить на длину его средней линии  $L$ .

При кручении тонкостенного бруса незамкнутого криволинейного или ломаного профиля (рис. 5.18) напряжения и углы закручивания вычисляются также по формулам (5.31) и (5.32), если только толщина сечения  $\delta$  постоянна.

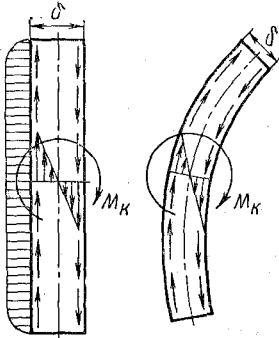


Рис. 5.17

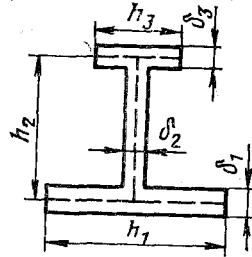


Рис. 5.18

Если профиль составлен из участков различной толщины  $\delta_i$  (см. рис. 5.18), наибольшие напряжения возникают по середине края участка наибольшей толщины  $\delta_{\max}$ , причем

$$\tau_{\max} = \frac{3M_K}{\sum_1^n \delta_i^3 h_i} \delta_{\max}, \quad (5.33)$$

где  $\delta_i$  и  $h_i$  — толщина и длина каждого отдельно взятого участка сечения.

Относительный угол закручивания такого бруса определяется по формуле

$$\theta = \frac{3M_K}{G \sum_1^n \delta_i^3 h_i}. \quad (5.34)$$

Формулы (5.33) и (5.34) могут быть получены из выражения (5.31) и (5.32) путем следующих рассуждений. Крутящий момент в сечении можно представить как сумму моментов  $M_i$ , возникающих в каждом отдельно взятом участке сечения. Согласно формуле (5.32):

$$M_i = \frac{1}{3} \theta G \delta_i^3 h_i. \quad (5.35)$$

Принимая, что углы поворота  $\theta$  всех частей сечения одинаковы, находим

$$M_K = \sum_1^n M_i = \frac{1}{3} \theta G \sum_1^n \delta_i^3 h_i.$$

Отсюда получаем выражение (5.34).

Касательное напряжение на каждом участке согласно формуле (5.31)

$$\tau_i = \frac{3M_i}{h_i \delta_i^3}. \quad (5.36)$$

Заменяя в выражении (5.35) угол  $\theta$  его значением из выражения (5.34) и подставляя найденную величину  $M_i$  в равенство (5.36), получаем формулу (5.33).

Характерной особенностью тонкостенных стержней открытого профиля является их слабое сопротивление свободному кручению. Например, жесткости на кручение цельной тонкостенной трубы с толщиной стенки  $\delta$  и средним диаметром сечения  $d$  и такой же трубы, но с тонким разрезом по образующей (рис. 5.19), находятся в соотношении

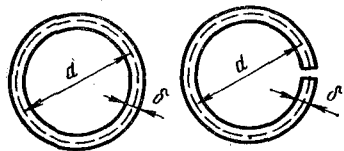


Рис. 5.19

$$\frac{4F_K^2}{\oint \frac{ds}{\delta}} : \frac{\delta^3 L}{3} = \frac{3d^2}{4\delta^2}.$$

Следовательно, при  $d/\delta = 10$  угол закручивания трубы с разрезом в 75 раз больше, чем цельной.

### 5.9. ОБОБЩЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ БРУСЬЕВ РАЗЛИЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Уравнения для напряжений, углов закручивания и потенциальной энергии деформации при кручении брусьев любой формы сечения можно записать так:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}; \quad \theta = \frac{M_K}{GJ_K}; \quad (5.37)$$

$$\varphi = \int_l \theta dx = \int_l \frac{M_K dx}{GJ_K}; \quad U = \int_l \frac{M_K^2 dx}{2GJ_K},$$

где  $W_K$  и  $J_K$  — геометрические характеристики сечения бруса, зависящие при кручении от формы сечения.


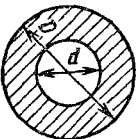
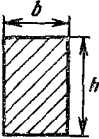
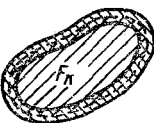
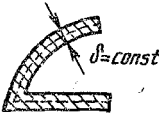
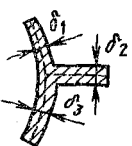
Значения  $W_K$  и  $J_K$  для рассмотренных в предыдущих разделах типов сечений сведены в табл. 5.2.

### 5.10. ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ, НАПРЯЖЕНИЙ И УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ

Расчеты на кручение, как и на растяжение, принято иллюстрировать построением эпюр крутящих моментов  $M_K$ , максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$ , относительных  $\theta$  и абсолютных  $\varphi$  углов закручивания.

В разд. 2.20 сформулированы общие для всех видов деформаций правила построения эпюр и установлены дифференциальные и интегральные зависимости между  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  и  $\delta$ , позволяющие по одной эпюре определить вид другой эпюры, места скачков и экстремумов, направления касательных и т. п. Следующее сравнение убеждает

Таблица 5.2

Форма сечения	$W_K$	$I_K$
	$\frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$	$\frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$
	$\frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$	$\frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$
	$\alpha b^2 h$ ( $b < h$ )	$\beta b^3 h$
	$2F_K \delta \min$	$\frac{4F_K^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}$
	$\frac{1}{3} \delta^2 L$	$\frac{1}{3} \delta^3 L$
	$\frac{\frac{1}{3} \sum \delta_i^3 h_i}{\delta_{\max}}$	$\frac{\frac{1}{3} \sum \delta_i^3 h_i}{\delta_{\max}}$

нас в том, что все выводы разд. 2.20 справедливы для эпюр родственных факторов и в случае кручения бруса.

Растяжение

Кручение

$$q = q(x)$$

$$m = m(x)$$

$$N = \sum P + \sum \int q(x) dx \quad M_K = \sum M + \sum \int m(x) dx \quad \left. \begin{array}{l} \text{интегральная} \\ \text{зависимость} \end{array} \right\}$$

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}$$



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{EF} & \theta &= \frac{M_R}{GJ_R} \\ \delta &= \int_l \varepsilon dx = \int_l \frac{N dx}{EF} & \varphi &= \int_l \theta dx = \int_l \frac{M_R dx}{GJ_R} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{интегральная} \\ \text{зависимость} \end{array}$$

$$\frac{d\delta}{dx} = \varepsilon \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \theta.$$

Следовательно, эпюра  $M_R$  ограничена кривой, степень которой на единицу выше степени эпюры распределенных скручивающих пар  $m$ , а скачки на ней будут там, где приложены сосредоточенные пары.

На эпюре  $\tau$  скачки будут еще и там, где резко изменяются размеры сечений.

Эпюра  $\theta$  получается делением ординат эпюры  $M_R$  на значения жесткости  $GJ_R$  в данном месте бруса.

Эпюра  $\varphi$  ограничена кривой, степень которой на единицу выше степени эпюры  $\theta$ . Скачки на этой эпюре возможны только при разрушении бруса.

**Пример.** Построить эпюры  $M_K$ ,  $\tau_{\max}$  и  $\varphi$  для ступенчатого бруса (рис. 5.20).

**Решение.** Определяя  $M_K$  в текущих сечениях всех трех участков бруса суммированием внешних моментов, расположенных по правую сторону от сечения, получаем

$$M_K^I(x) = M, \quad M_K^{II}(x) = M, \quad M_K^{III}(x) = M - 3M = -2M.$$

Следовательно, эпюра  $M_R$  на каждом участке ограничена прямыми, параллельными ее оси.

На первом участке брус круглого сечения диаметра  $d$ , а на втором и третьем — прямоугольного с основанием  $d$  и высотой  $2d$ . Геометрические характеристики этих сечений:

$$J_K^I = 0,1d^4; \quad W_K^I = 0,2d^3;$$

$$J_K^{II} = J_K^{III} = \beta b^3 h = 0,458d^4;$$

$$W_K^{II} = W_K^{III} = \alpha b^2 h = 0,492d^4.$$

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  взяты из табл. 5.1.

Подсчитываем максимальные касательные напряжения в тех же текущих сечениях

$$\tau_I(x) = \frac{M}{0,2d^3} = 5 \frac{M}{d^3};$$

$$\tau_{II}(x) = \frac{M}{0,492d^3} = 2,03 \frac{M}{d^3};$$

$$\tau_{III}(x) = -\frac{2M}{0,492d^3} = -4,06 \frac{M}{d^3}.$$

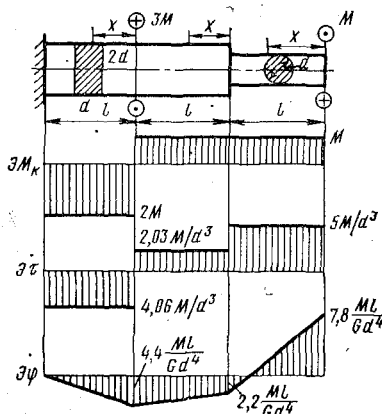


Рис. 5.20

Определяем по формуле (5.37) углы поворота сечений бруса относительно левого неподвижного

$$\begin{aligned}\varphi_{III}(x) &= -\frac{2M(l-x)}{0,458Gd^4} = -4,4 \frac{M(l-x)}{Gd^4}; \\ \varphi_{II}(x) &= \varphi_{III}(0) + \frac{M(l-x)}{0,458Gd^4} = -4,4 \frac{Ml}{Gd^4} + 2,2 \frac{M(l-x)}{Gd^4}; \\ \varphi_I(x) &= \varphi_{II}(0) + \frac{M(l-x)}{0,1Gd^4} = -2,2 \frac{Ml}{Gd^4} + 10 \frac{M(l-x)}{Gd^4}.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что эпюра  $\varphi$  ограничена прямыми линиями на всех трех участках. Эпюры приведены на рис. 5.20.

**Пример.** Построить эпюры  $M_K$ ,  $\tau$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  и определить угол закручивания  $\varphi$  тонкостенного бруса длиной  $2l$ . Схема нагружения и форма сечения бруса показаны на рис. 5.21.

**Решение.** Согласно интегральной зависимости между  $M_K$  и  $m$  и равенству  $\frac{dM_K}{dx} = m$  эпюра моментов  $M_K$  на первом участке должна быть ограничена квадратной параболой с вершиной в точке  $x = 0$ , так как в этой точке  $\frac{dM_K}{dx} = m = 0$ , а на втором участке — наклонной прямой. Аналитические выражения для  $M_K$ , полученные по формуле (5.2), подтверждают отмеченный характер очертания эпюры  $M_K$ :

$$\begin{aligned}M_K^I(x) &= ml - \frac{m(x)x}{2} = ml - \frac{mx^2}{2l}; \\ M_K^II(x) &= ml - \frac{ml}{2} - mx = \frac{ml}{2} - mx.\end{aligned}$$

При составлении этих выражений равнодействующие распределенных нагрузок подсчитывались по площадям эпюры  $m$ .

Эпюры  $\tau$  и  $\theta$  по очертанию подобны эпюре  $M_K$ , поскольку характеристики сечения  $J_K$  и  $W_K$  по длине бруса не изменяются:

$$\begin{aligned}W_K &= 2F_K \delta_{\min} = 2 \frac{\pi b^2}{2} \frac{b}{10} = 0,31b^3; \\ J_K &= \frac{4F_K^2}{\oint \frac{ds}{\delta}} = \frac{4 \frac{\pi^2 b^4}{4}}{\frac{10\pi b}{b} + \frac{2b \cdot 6,28}{b}} = 0,22b^4.\end{aligned}$$

В связи с одинаковыми очертаниями эпюр  $M_K$ ,  $\tau$  и  $\theta$  на рис. 5.21 построена только эпюра  $M_K$ .

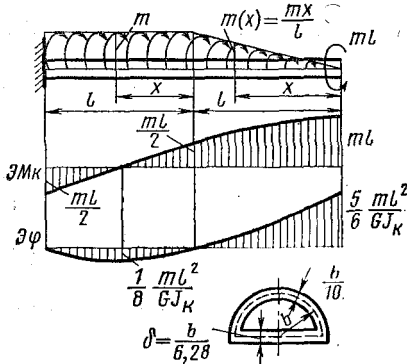


Рис. 5.21

Эпюра углов закручивания  $\varphi$  как интегральная по отношению к эпюре  $\theta$  должна быть ограничена кубической параболой на первом участке и квадратной на втором. На границе участков обе кривые должны иметь общую касательную, а по середине второго участка на эпюре  $\varphi$  должен быть экстремум, что следует из равенства нулю производной  $\frac{d\varphi}{dx} = \theta = 0$  при  $x = l/2$  на втором участке и равенства этих производных на границе двух участков.

Построение эпюры  $\varphi$  надо начинать с неподвижного сечения в заделке. Ordinаты эпюры  $\varphi$  можно подсчитать по площадям эпюры  $\theta$  или по формуле (5.37).

Определяя угол поворота текущего сечения второго участка относительно заделки как угол закручивания части бруса длиной  $l - x$  (рис. 5.21), получаем

$$\varphi_{II}(x) = \frac{1}{GJ_R} \int_x^l \left( \frac{ml}{2} - mx \right) dx = \frac{m}{2GJ_R} (x^2 - lx).$$

Отсюда находим углы поворота начального  $\varphi_{II}(0) = 0$  и конечного  $\varphi_{II}(l) = 0$  сечений, а также наибольший угол поворота на втором участке

$$\varphi_{II}(l/2) = -\frac{ml^3}{8GJ_R}.$$

Аналогично для первого участка

$$\varphi_I(x) = \varphi_{II}(0) + \frac{1}{GJ_R} \int_x^l \left( ml - \frac{mx^2}{2l} \right) dx = \frac{m}{GJ_R} \left( \frac{x^3}{6l} - lx + \frac{5}{6} l^2 \right).$$

Угол закручивания всего бруса равен значению  $\varphi_I(x)$  при  $x = 0$ :

$$\varphi_I(0) = \frac{5}{6} \frac{ml^3}{GJ_R}.$$

### 5.11. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Приципы расчетов на прочность, изложенные в разд. 2.18 и 2.19 применительно к одноосному растяжению и сжатию, полностью справедливы и для случая кручения бруса. При кручении расчеты на прочность также делятся на проектировочные и проверочные.

В основе проектировочных расчетов лежит условие прочности

$$\tau_{\max} \leq [\tau], \quad (5.38)$$

где  $\tau_{\max}$  — максимальное касательное напряжение в брусе, определяемое по формуле (5.37);  $[\tau]$  — допускаемое напряжение, равное части предельного напряжения  $\tau_{\text{пред}}$  для материала детали — предела прочности  $\tau_B$  или предела текучести  $\tau_T$ .

Для хрупких материалов  $[\tau] = \frac{\tau_B}{n}$ , для пластичных  $[\tau] = \frac{\tau_T}{n_T}$

или  $[\tau] = \frac{\tau_B}{n_B}$ .

Здесь  $n$  — запас прочности, величина которого устанавливается исходя из тех же соображений, что и при растяжении, и часто принимается равной запасу прочности при растяжении.

Механические характеристики материала при кручении (сдвиге) и растяжении взаимно связаны. Поэтому должна существовать определенная зависимость между допускаемыми напряжениями при кручении  $[\tau]$  и растяжении  $[\sigma]$ .

Например, для пластичных материалов  $[\tau]$  назначается в пределах

$$[\tau] = (0,5 \dots 0,65) [\sigma]. \quad (5.39)$$

Запас прочности при поверочном расчете определяется, как и при растяжении,

$$n = \frac{\tau_{\text{пред}}}{\tau_{\max}}, \quad (5.40)$$

где  $\tau_{\text{пред}}$  — предельное напряжение для материала;  $\tau_{\text{мах}}$  — максимальное напряжение в детали при наиболее неблагоприятном случае ее нагружения.

### 5.12. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВИНТОВЫЕ ПРУЖИНЫ МАЛОГО ШАГА

Определим напряжения и деформации при осевом растяжении и сжатии цилиндрической пружины, навитой из прутка круглого сечения диаметра  $d$  (рис. 5.22). Конструктивно пружины растяжения и сжатия отличаются оформлением их концов, но концевые витки при расчетах пружин на прочность и жесткость во внимание не принимаются.

Цилиндрические пружины характеризуются средним диаметром витка  $D$ , числом витков  $n$ , углом подъема витков  $\alpha$  и шагом пружины  $h$ .

Наибольшее распространение в технике имеют пружины с небольшим углом подъема винтовой линии ( $\alpha < 5^\circ$ ), называемые пружинами малого шага.

В пружинах малого шага можно пренебречь подъемом витков и считать длину витка примерно равной  $\pi D$ , а сам виток — расположенным в плоскости, нормальной к оси пружины. Но в таком случае либо сечение прутка пружины плоскостью, содержащей ее ось, можно рассматривать как ее поперечное сечение. Указанные допущения положены в основу приближенного расчета пружин.

Разделим пружину осевым сечением на две части и отбросим одну из них. Из условия равновесия оставшейся части (рис. 5.23) следует, что внутренние касательные силы упругости в сечении пружины приводятся к перерезывающей силе  $Q = P$  и крутящему моменту  $M_K = PD/2$ .

Касательные напряжения, вызванные кручением, достигают максимума в контурных точках сечения, а напряжения от перерезывающей силы можно в первом приближении считать равномерно распределенными по плоскости сечения. В точке  $A$  контура сечения

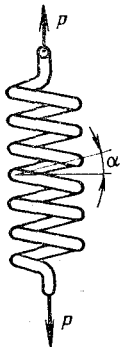


Рис. 5.22

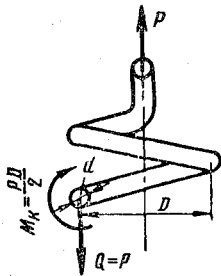


Рис. 5.23

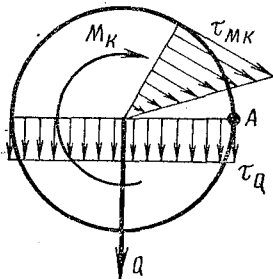


Рис. 5.24

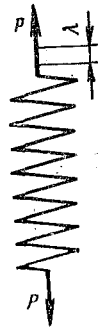


Рис. 5.25

суммарные касательные напряжения, как видно из рис. 5.24, достигают наибольшей величины

$$\tau_{\max} = \tau_M + \tau_Q = \frac{M_K}{W_K} + \frac{Q}{F} = \frac{8PD}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2}$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right).$$

Для большинства пружин отношение  $d/2D$  — величина малая по сравнению с единицей. Это говорит о том, что основным видом деформации для пружин является кручение, а срезом можно пренебречь и вычислять напряжения в пружине по формуле

$$\tau = \frac{8PD}{\pi d^3}. \quad (5.41)$$

Изменение продольных размеров  $\lambda$  (рис. 5.25) удобно определить энергетическим методом, приравнявая работу  $A$  статически приложенных сил  $P$  потенциальной энергии деформации  $U$  пружины. Работа внешних сил  $A = P\lambda/2$ , а потенциальная энергия накапливается, главным образом, за счет кручения прутка и поэтому может быть вычислена по формуле (5.17). Учитывая, что крутящий момент  $M_K = PD/2$  и момент инерции  $J_p = \pi d^4/32$  по длине прутка не изменяются, а длина прутка  $l = \pi Dn$ , получаем

$$U = \frac{M_K^2 l}{2GJ_p} = \frac{4PD^3 n}{Gd^4}.$$

Приравнявая  $A$  и  $U$ , находим

$$\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}. \quad (5.42)$$

Для пружин сжатия формула (5.42) справедлива лишь до полного обжатия пружины, т. е. до соприкосновения ее витков. После полного обжатия пружина начинает работать на осевое сжатие как прямой пустотелый брус.

### 5.13. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ КРУЧЕНИИ

При кручении, как и при растяжении, могут встретиться статически неопределимые задачи, для решения которых к уравнениям равновесия статики должны быть добавлены уравнения совместности перемещений.

Нетрудно показать, что метод решения указанных задач при кручении и при растяжении один и тот же. С этой целью решим две однотипные статически неопределимые задачи на растяжение и кручение. Пусть брус, заделанный обоими концами в абсолютно жесткие стены, нагружен на половине его длины в одном случае равномерно распределенными вдоль оси силами интенсивности  $q$ , а во втором — равномерно распределенными скручивающими моментами интенсивности  $m$  (рис. 5.26). Аналогия между этими задачами

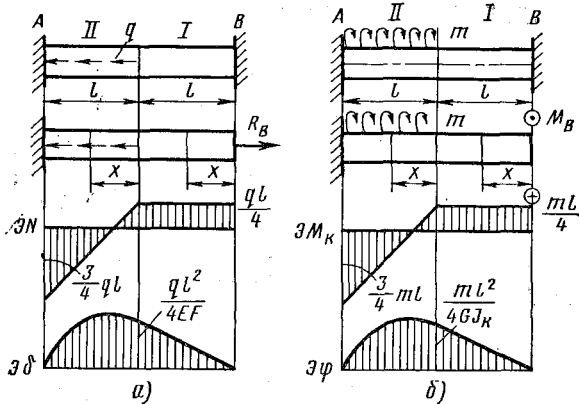


Рис. 5.26

станет еще яснее, если представить во второй задаче моменты внешних скручивающих пар их векторами, нормальными плоскостям действия пар. Тогда распределенная скручивающая нагрузка изобразится на чертеже векторами, направленными вдоль оси бруса, т. е. так же, как и погонная осевая нагрузка в первой задаче.

В обеих задачах для определения двух опорных реакций — в первом случае сил  $R_A$  и  $R_B$ , а во втором — моментов  $M_A$  и  $M_B$  — имеется всего лишь по одному уравнению равновесия:

$$R_A + R_B - ql = 0;$$

$$M_A + M_B - ml = 0.$$

Следовательно, обе задачи один раз статически неопределимы.

Согласно намеченному в разд. 2.21 методу решения аналогичных задач, отбросим одну из заделок, например, правую, и заменим ее действие соответственно силой  $R_B$  или моментом  $M_B$ .

Далее запишем условия равенства нулю удлинения  $\Delta l$  первого бруса и угла закручивания  $\varphi$  второго бруса от совместного действия заданной нагрузки и реакций  $R_B$  и  $M_B$ . Определяя деформации всего бруса суммированием деформаций его двух участков, записываем уравнения совместности деформаций так:

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} = 0$$

и

$$\varphi_{AB} = \varphi_I + \varphi_{II} = 0.$$

Определяя нормальные силы  $N$  и крутящие моменты  $M_k$  в текущих сечениях участков бруса

$$N_I(x) = R_B; \quad N_{II}(x) = R_B - qx;$$

$$M_k^I(x) = M_B; \quad M_k^{II}(x) = M_B - mx$$

и вычисляя  $\Delta l$  и  $\varphi$  по формулам (2.13), (2.14), (5.13) и (5.15), получаем

$$\frac{R_B l}{EF} + \int_0^l \frac{R_B - qx}{EF} dx = 0;$$

$$\frac{M_B l}{GJ_R} + \int_0^l \frac{M_B - mx}{GJ_R} dx = 0.$$

Отсюда  $R_B = ql/4$  и  $M_B = ml/4$ .

Итак, не только постановка задач и метод их решения одинаковы, но одинаковы по структуре все уравнения и окончательные результаты решения.

Далее эти задачи решаются как статически определимые. Внутренние силовые факторы в сечениях бруса

$$N_I(x) = ql/4; \quad N_{II}(x) = ql/4 - qx;$$

$$M_K^I(x) = ml/4; \quad M_K^{II}(x) = ml/4 - mx.$$

Перемещения текущих сечений относительно правого неподвижного сечения

$$\delta_I(x) = \frac{ql}{4EF} x;$$

$$\delta_{II}(x) = \frac{ql^2}{4EF} + \int_0^x \frac{ql - 4qx}{4EF} dx = \frac{q}{4EF} (l^2 + lx - 2x^2);$$

$$\varphi_I(x) = \frac{ml}{4GJ_R} x;$$

$$\varphi_{II}(x) = \frac{ml^2}{4GJ_R} + \int_0^x \frac{ml - 4mx}{4GJ_R} dx = \frac{m}{4GJ_R} (l^2 + lx - 2x^2).$$

Эпюры  $N$ ,  $\delta$ ,  $M_R$  и  $\varphi$  приведены на рис. 5.26.

**Пример.** Стальная тонкостенная коробка постоянной толщины и стальной круглый брус прикреплены наглухо к концевым жестким дискам (рис. 5.27). Вся система скручивается парами сил, приложенными к дискам. Определить долю скручивающей нагрузки  $M$ , приходящейся на коробку и на брус. Аналогичный пример приведен в разд. 2.21.

**Решение.** Пусть  $M_{кор}$  — крутящий момент в сечениях коробки, а  $M_{бр}$  — момент в сечениях бруса. Из условия равновесия отсеченной части системы имеем

$$M_{кор} + M_{бр} = M.$$

Условием совместности перемещений является равенство углов закручивания коробки и бруса:

$$\frac{M_{кор} l}{GJ_{кор}} = \frac{M_{бр} l}{GJ_{бр}},$$

где согласно табл. 5.2

$$J_{кор} = \frac{4F_k^2 \delta}{s} = \frac{4(4d^2)^2}{8d} \frac{d}{32} = 0,25d^4;$$

$$J_{бр} = \frac{\pi d^4}{32} = 0,1d^4.$$

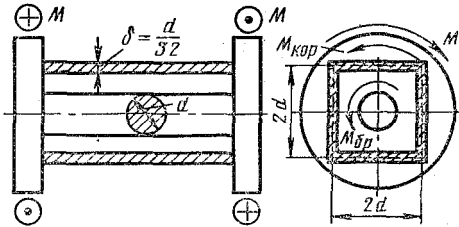


Рис. 5.27

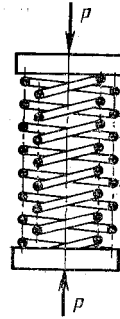


Рис. 5.28

Решая уравнения равновесия и совместности перемещений, находим

$$M_{бр} = \frac{M}{1 + \frac{J_{кор}}{J_{бр}}}; \quad M_{кор} = \frac{M}{1 + \frac{J_{бр}}{J_{кор}}}$$

или

$$M_{бр} = 0,3M; \quad M_{кор} = 0,7M.$$

Отметим, что распределение нагрузки по элементам системы зависит от соотношения жесткостей на кручение  $GJ_K$  этих элементов; например, при увеличении отношения  $J_{кор}/J_{бр}$  возрастает доля нагрузки, воспринимаемой коробкой.

**Пример.** Две клапаные пружины (рис. 5.28), свитые из проволоки одинакового диаметра  $d$  и имеющие одинаковое число витков  $n$ , сжимаются силой  $P$ . Нагрузка передается через клапанную тарелочку. Выяснить, как распределяется нагрузка  $P$  между пружинами, если диаметр витков внешней пружины  $D_2$  в два раза больше диаметра  $D_1$  витков внутренней пружины, и определить напряжения в пружинах.

**Решение.** Обозначим усилия сжатия внутренней и наружной пружины соответственно через  $P_1$  и  $P_2$ . Из условия равновесия тарелочки  $P_1 + P_2 = P$ .

Исходя из равенства осадков пружин  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , получаем

$$\frac{8P_1 D_1^3 n}{Gd^4} = \frac{8P_2 D_2^3 n}{Gd^4}.$$

Учитывая, что  $D_2 = 2D_1$ , находим  $P_1 = 8P_2$ . Следовательно,  $P_1 = \frac{8}{9}P$ ,  $P_2 = \frac{1}{9}P$ .

Напряжения в пружинах подсчитываем по формуле (5.10):

$$\tau_1 = \frac{8 \cdot 8PD_1}{9\pi d^3} = 2,26 \frac{PD_1}{d^3};$$

$$\tau_2 = \frac{8P \cdot 2D_1}{9\pi d^3} = 0,57 \frac{PD_1}{d^3}.$$

Напряжения в пружинах отличаются меньше, чем воспринимаемые ими нагрузки, так как  $\tau_1 \approx 4\tau_2$ .



# ГЛАВА 6

## ИЗГИБ

### 6.1. ВИДЫ ИЗГИБА БРУСА

Изгибом называется деформация бруса, сопровождающаяся искривлением его оси или изменением кривизны оси, если до деформации она была кривой линией. Прямой брус, воспринимающий главным образом изгибающую нагрузку, называется балкой.

Изгиб прямого бруса может быть вызван поперечными внешними силами и при некоторых условиях — продольными.

Изгиб, вызванный поперечной нагрузкой (рис. 6.1, *а*), называется поперечным, а изгиб, вызванный продольными силами (рис. 6.1, *б*) — продольным изгибом. Встречаются также случаи совместного действия продольной и поперечной нагрузки (рис. 6.1, *в*). Изгиб, вызванный такими нагрузками, называется продольно-поперечным. Продольный и продольно-поперечный изгибы связаны с изучением устойчивости сжатого стержня и будут рассмотрены в соответствующих разделах курса.

Поперечный изгиб в свою очередь подразделяется на прямой изгиб, когда брус изгибается в плоскости действия нагрузки, и косой изгиб, при котором плоскость изгиба бруса не совпадает с плоскостью действия нагрузки.

При некоторых условиях поперечный изгиб может сопровождаться явлением закручивания бруса. Например, при приложении силы  $P$  в плоскости симметрии консольного бруса (рис. 6.2, *а*) он будет испытывать только изгиб, а если силу  $P$  сдвинуть в угловую точку торцевого сечения (рис. 6.2, *б*), то изгиб будет сопровождаться закручиванием бруса.

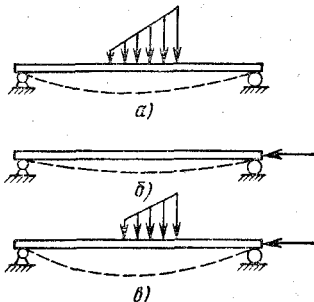


Рис. 6.1

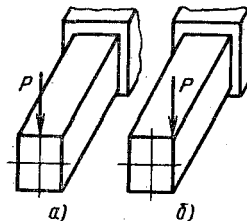


Рис. 6.2

В этой главе излагается теория прямого поперечного изгиба бруса, не осложненного явлением закручивания. Рассматриваются преимущественно брусья симметричного сечения с нагрузками, действующими в плоскости симметрии.

## 6.2. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ ПРИ ИЗГИБЕ БРУСА

Рассмотрим брус, нагруженный сосредоточенными парами с моментами  $M$ , поперечными сосредоточенными силами  $P$  и распределенными нагрузками, интенсивность которых  $q$  изменяется вдоль оси бруса ( $q = q(x)$ ).

Предположим, что поперечные сечения бруса имеют ось симметрии и все внешние силы и пары действуют в плоскости, содержащей эти оси, т. е. в плоскости симметрии бруса. В дальнейшем от условия симметричности сечения освободимся.

Применив метод сечений, разделим брус поперечным сечением на две части и отбросим одну из них, например, левую. Совместим начало координат с центром тяжести проведенного сечения, направим ось  $y$  по оси симметрии сечения и составим уравнения равновесия оставшейся части бруса (рис. 6.3).

Составим сначала уравнения  $\sum y = 0$  и  $\sum m_z = 0$ . Обозначая

через  $Q_y$  и  $M_z$  соответственно равнодействующую силу и пару всех внутренних касательных и нормальных сил упругости в проведенном сечении и суммируя элементарные внешние поперечные силы  $q(x) dx$  и моменты этих сил  $xq(x) dx$  относительно оси  $z$  рассматриваемого сечения, получаем

$$Q_y = P + \int_{x_0}^x q(x) dx;$$

$$M_z = M + Px + \int_{x_0}^x xq(x) dx.$$

Равнодействующая внутренних касательных сил  $Q_y = \int_F \tau_{xy} dF$  называется перерезывающей силой, а равнодействующая пара внутренних нормальных сил  $M_z = \int_F y\sigma dF$  — изгибающим моментом (см. разд. 1.11).

Обобщая уравнения равновесия отсеченной части на случай действия на эту часть  $k$  сосредоточенных пар,  $m$  сосредоточенных сил и  $n$  распределенных нагрузок, получаем

$$Q_y(x) = \sum_1^m P + \sum_1^n \int_l q(x) dx; \quad (6.1)$$

$$M_z(x) = \sum_1^k M + \sum_1^m Px + \sum_1^n \int_l xq(x) dx. \quad (6.2)$$

Уравнения (6.1) и (6.2), позволяющие определить численные значения перерезывающей силы и изгибающего момента в сечении бруса, можно сформулировать в виде правил, аналогичных правилам определения  $N$  при растяжении и  $M_{кр}$  при кручении.

Перерезывающая сила  $Q_y$  в сечении балки численно равна алгебраической сумме всех внешних активных и реактивных поперечных сил, расположенных по одну (любую) сторону от сечения.

Изгибающий момент  $M_z$  в сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов относительно центральной оси  $z$  этого сечения всех внешних активных и реактивных пар и сил, расположенных по одну (любую) сторону от сечения.

Для изгибающих моментов и перерезывающих сил в балках принято следующее правило знаков. Перерезывающая сила  $Q_y$  считается положительной, когда сила  $P$  направлена вверх, если рассматривается левая часть балки, и вниз, если рассматривается правая часть балки. Указанное правило знаков иллюстрируется схемой, представленной на рис. 6.4.

Знак момента определяется по направлению выпуклости изогнутой оси балки. Момент от внешней силы (пары) будет положительным, если нагрузка изгибает балку выпуклостью вниз, и отрицательным, если изогнутая ось обращена выпуклостью вверх. Заметим, что такое же правило знаков принято для кривизны плоской кривой в курсе математического анализа.

Рассмотрим остальные четыре уравнения равновесия отсеченной части балки.

Внешние силы нормальны к оси бруса. Поэтому согласно уравнению  $\sum x = 0$  нормальная сила  $N$  в сечении балки должна быть равна нулю:

$$N = \int_F \sigma dF = 0. \quad (6.3)$$

Это равенство говорит о том, что при изгибе в сечении бруса должны действовать нормальные внутренние силы разных знаков.

Внешние силы на ось  $z$  не проектируются. Следовательно, сумма проекций

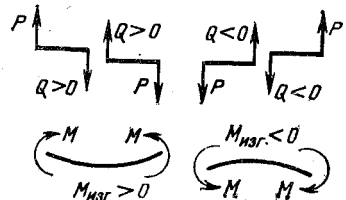


Рис. 6.4

внутренних сил в сечении на эту ось также должна быть равна нулю, т. е. при прямом поперечном изгибе перерезывающая сила

$$Q_z = \int_F \tau_{xz} dF = 0. \quad (6.4)$$

Для симметричного сечения это уравнение удовлетворяется тождественно, так как из-за нагружения бруса в плоскости симметрии внутренние касательные силы  $\tau_{xz}dF$  в симметричных точках сечения должны быть равны по величине и противоположны по направлению.

Внешние силы параллельны оси  $y$  и моментов относительно этой оси не создают. Следовательно, и сумма моментов внутренних нормальных сил в сечении относительно оси  $y$  должна быть равна нулю:

$$M_y = \int_F \sigma z dF = 0. \quad (6.5)$$

Это уравнение для симметричных сечений также удовлетворяется тождественно. В дальнейшем будет установлено, при каких условиях это уравнение удовлетворяется и для несимметричных сечений.

Шестое уравнение равновесия  $\sum m_x = 0$ , которое в данном случае принимает вид

$$M_x = \int_F (z\tau_{xy} - y\tau_{xz}) dF = 0, \quad (6.6)$$

удовлетворяется тождественно для симметричных сечений.

Итак, при поперечном изгибе бруса в его сечениях возникают изгибающий момент  $M_z$  и перерезывающая сила  $Q_y$ . Иногда изгибающий момент обозначают символом  $M_{изг}$ .

### 6.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ

Вырежем из балки (рис. 6.5) двумя поперечными сечениями элемент длиной  $dx$  (для общности вывода в зоне действия распределенной нагрузки) и заменим действие на него правой и левой отброшенных частей балки силами  $Q$  и  $Q + dQ$  и парами  $M_{изг}$  и  $M_{изг} + dM_{изг}$ .

Запишем уравнение  $\sum y = 0$  равновесия элемента, пренебрегая изменениями  $q$  на участке  $dx$ :

$$Q - (Q + dQ) + qdx = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x), \quad (6.7)$$

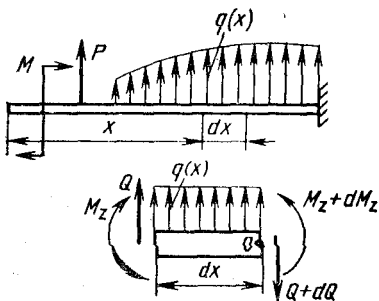


Рис. 6.5

т. е. производная от перерезывающей силы  $Q$  по длине балки  $x$  равна интенсивности  $q$  распределенной нагрузки.

Из второго уравнения равновесия  $\sum m_0 = 0$  найдем зависимость между  $Q$  и  $M_{изг}$ . Имеем

$$M_{изг} - (M_{изг} + dM_{изг}) + Q dx - \frac{q(dx)^2}{2} = 0.$$

Последним слагаемым как величиной высшего порядка малости пренебрегаем. В результате

$$\frac{dM_{изг}(x)}{dx} = Q(x), \quad (6.8)$$

т. е. производная от изгибающего момента  $M_{изг}$  по длине балки  $x$  равна перерезывающей силе  $Q$ .

Дифференцируя равенство (6.8) по  $x$  и учитывая выражение (6.7), получаем

$$\frac{d^2 M_{изг}}{dx^2} = q. \quad (6.9)$$

Равенства (6.7), (6.8) и (6.9) называются дифференциальными зависимостями при изгибе.

#### 6.4. ЭПЮРЫ ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

В расчетах балок на прочность и жесткость широко используются эпюры изгибающих моментов  $M_{изг}$  и перерезывающих сил  $Q$ , представляющие собой графические изображения законов изменения этих внутренних силовых факторов по длине балки.

Общие правила построения эпюр уже известны из теории кручения и растяжения бруса и полностью справедливы в данном случае. Установленные в предыдущем разделе дифференциальные зависимости значительно облегчают построение и исследование эпюр сил  $Q$  и моментов  $M_{изг}$ . Из соотношений  $dQ/dx = q$ ,  $dM/dx = Q$  и соответствующих им интегральных зависимостей (6.1) и (6.2) можно сделать следующие выводы.

1. Тангенсы углов наклона к оси эпюры касательных к эпюрам  $Q$  и  $M_{изг}$  по величине равны соответственно значениям ординат эпюр  $q$  и  $Q$  в тех же сечениях.

2. На участках, где закон изменения интенсивности распределенной нагрузки  $q$  выражается целой алгебраической функцией, очертанием эпюры  $Q$  является кривая, степень которой на единицу выше степени кривой очертания эпюры  $q$ , а эпюра  $M_{изг}$  ограничена кривой, степень которой на единицу выше степени кривой эпюры  $q$  или на две единицы выше степени кривой очертания эпюры  $q$ . Следовательно, на тех участках, где нет распределенной нагрузки ( $q = 0$ ) перерезывающая сила  $Q$  постоянна, а  $M_{изг}$  меняется по линейному закону; при равномерно распределенной нагрузке ( $q = \text{const}$ ) сила  $Q$  изменяется по наклонной прямой, а  $M_{изг}$  — по квадратной параболе и т. д.

3. В местах, где к балке приложена сосредоточенная сила, на эпюре  $Q$  будет скачок, равный по величине и знаку этой силе, а на эпюре  $M_{изг}$  — перелом.

4. Внешний сосредоточенный момент на характере эпюры  $Q$  не отразится, а ордината эпюры  $M_{изг}$  в этом месте изменится скачком, равным по величине и знаку этому моменту.

5. Эпюра  $M_{изг}$  всегда обращена выпуклостью навстречу распределенной нагрузке, что следует из соотношения  $d^2M/dx^2 = q$  и совпадения правил знаков для изгибающих моментов и кривизны линии очертания эпюры.

Рассмотрим несколько примеров построения эпюр.

**Пример.** Построить эпюры  $Q$  и  $M_{изг}$  для двухопорной балки (рис. 6.6).

**Решение.** Построение эпюр в двухопорных балках надо начинать с определения опорных реакций. Направим реакции  $R_A$  и  $R_B$  как показано на рис. 6.6 и составим уравнения равновесия балки

$$\sum m_B = R_A \cdot 3l - ql \cdot \frac{3}{2}l - \frac{1}{2}ql \cdot \frac{4}{3}l + ql^2 = 0,$$

отсюда  $R_A = \frac{7}{18}ql$ .

$$\sum y = \frac{7}{18}ql - \frac{q+2q}{2}l + R_B = 0,$$

отсюда  $R_B = \frac{10}{9}ql$ .

Определим теперь  $Q$  и  $M_{изг}$  в текущих сечениях всех четырех участков, используя уравнения (6.1) и (6.2). Интегралы, входящие в эти формулы, удобно вычислять непосредственно по эпюре  $q$ , так как интеграл  $\int_1^2 q(x) dx$  численно равен площади эпюры  $q$  на участке интегрирования, а  $\int_1^2 xq(x) dx$  — статическому моменту этой площади относительно оси  $z$  сечения, т. е. произведению указанной площади эпюры на расстояние ее центра тяжести от рассматриваемого сечения.

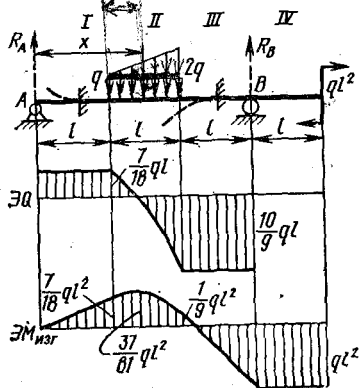


Рис. 6.6

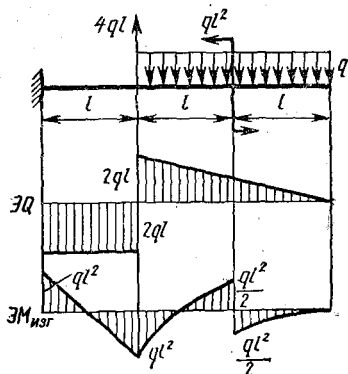


Рис. 6.7

Учитывая принятое выше правило знаков для  $Q$  и  $M_{\text{изг}}$ , получаем

$$Q_I(x) = \frac{7}{18} ql, \quad M_I(x) = \frac{7}{18} qlx.$$

Для определения знака изгибающего момента в сечении от какой-либо нагрузки удобно поступить так. Мысленно закрепить текущее сечение, удалить опоры и снять с балки все нагрузки, кроме рассматриваемой, и представить характер деформации такой консольной балки от этой нагрузки. Если выпуклость оси балки будет обращена вниз, то  $M_{\text{изг}} > 0$ , а если вверх, то  $M_{\text{изг}} < 0$ . На рис. 6.6 вид изгиба отдельно от распределенной нагрузки и от сосредоточенной силы показан пунктиром.

При вычислении  $Q$  и  $M_{\text{изг}}$  трапецию на эюре  $q$  разбиваем на прямоугольник и треугольник. Тогда

$$Q_{II}(x) = \frac{7}{18} ql - q(x-l) - \frac{q}{l} \frac{(x-l)^2}{2} = \frac{8}{9} ql - \frac{qx^2}{2l};$$

$$M_{II}(x) = \frac{7}{18} qlx - q \frac{(x-l)^2}{2} - q \frac{(x-l)^3}{6l};$$

$$Q_{III}(x) = \frac{7}{18} ql - \frac{q+2q}{2} l = -\frac{10}{9} ql;$$

$$M_{III}(x) = -\frac{10}{9} qlx + \frac{7}{3} ql^2;$$

$$Q_{IV}(x) = 0; \quad M_{IV}(x) = -ql^2.$$

По этим данным на рис. 6.6 построены эиоры  $Q$  и  $M_{\text{изг}}$ . Для контроля правильности построения этих эиор воспользуемся сделанными выше выводами из дифференциальных и интегральных зависимостей между  $q$ ,  $Q$  и  $M_{\text{изг}}$ . На первом, третьем и четвертом участках эиоры  $Q$  и  $M_{\text{изг}}$  действительно должны быть ограничены прямыми линиями, так как  $q = 0$ . На втором участке эиора  $q$  изменяется по закону наклонной прямой, и поэтому эиора  $Q$  должна быть ограничена квадратной параболой, а  $M_{\text{изг}}$  — кубической. На этом же участке эиора  $Q$ , монотонно убывая, пересекает ось в точке, абсцисса которой  $x = \frac{4}{3} l$ . Но согласно усло-

вию  $\frac{dM}{dx} = Q = 0$  в этой точке на эиоре  $M_{\text{изг}}$  должен быть экстремум. Изгибающий момент в этом сечении  $M_{II}\left(\frac{4}{3} l\right) = \frac{37}{81} ql^2$ .

**Пример.** Построить эиоры  $Q$  и  $M_{\text{изг}}$  для консольной балки (рис. 6.7), опираясь лишь на дифференциальных зависимостях между  $q$ ,  $Q$  и  $M_{\text{изг}}$  и вычисляя ординаты эиор только в характерных точках.

**Решение.** В данном случае нет необходимости в определении опорных реакций, так как эиоры можно строить начиная с правого конца балки.

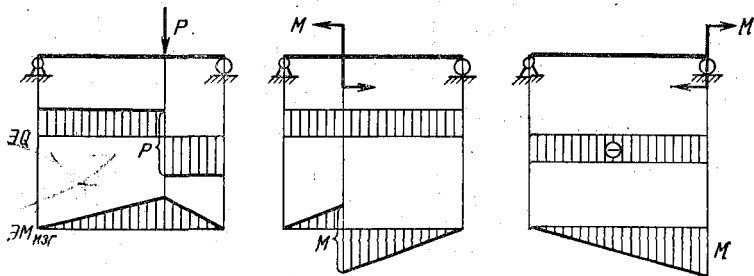


Рис. 6.8

На первом и втором участках  $q = \text{const}$ , и поэтому эпюра  $Q$  будет ограничена наклонной прямой, проходящей через точки  $Q(0) = 0$  и  $Q(2l) = 2ql$ . Изгибающий момент на этих участках изменяется по закону квадратной параболы, направленной выпуклостью навстречу стрелкам нагрузки  $q$ . На границе двух участков на эпюре  $M_{\text{изг}}$  будет скачок, равный по величине и знаку приложенному в этом сечении внешнему моменту  $ql^2$ . На третьем участке перерезывающая сила  $Q$  постоянна и равна  $-2ql$ , а изгибающий момент изменяется по наклонной прямой от  $-ql^2$  до  $+ql^2$ .

На рис. 6.8 построены эпюры  $Q$  и  $M_{\text{изг}}$  для некоторых простейших случаев нагружения балок, часто встречающихся в дальнейшем, как элементов более сложных задач.

### 6.5. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Изгиб балки, при котором в сечении возникает только изгибающий момент  $M_{\text{изг}}$ , а перерезывающая сила  $Q$  равна нулю, называется чистым изгибом. Чистый изгиб можно осуществить, нагружая брус в конечных сечениях равными по величине и противоположно направленными парами сил, действующими в плоскости симметрии бруса или так, как показано на рис. 6.9.

Равенство нулю перерезывающей силы говорит о том, что при чистом изгибе в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные внутренние силы. Изгибающий момент  $M_{\text{изг}} = M_z$ , численное значение которого определяется из уравнения (6.2), представляет собой сумму моментов  $y\sigma dF$  всех элементарных нормальных внутренних сил  $\sigma dF$  относительно оси  $z$  сечения:

$$M_z = \int_F y\sigma dF. \quad (6.10)$$

Чтобы с помощью равенства (6.10) определить величину напряжений  $\sigma$  в точках сечения, необходимо, как и в случаях растяжения и кручения, определить закон распределения  $\sigma$  по плоскости сечения.

Опыт показывает, что при чистом изгибе продольные линии, нанесенные на поверхность бруса, искривляются, а поперечные поворачиваются, но остаются прямыми и перпендикулярными к изогнутым продольным линиям (рис. 6.10). Следовательно, и в данном случае можно применить гипотезу плоских сечений, т. е. считать, что сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.

Опытным путем также установлено, что волокна на выпуклой стороне бруса испытывают растяжение, а на вогнутой — сжатие.

Поэтому должен существовать слой, волокна которого, искривляясь, сохраняют свою первоначальную длину. Такой слой называется нейтральным, а линия пересечения этого слоя с плоскостью сечения — нейтральной линией сечения.

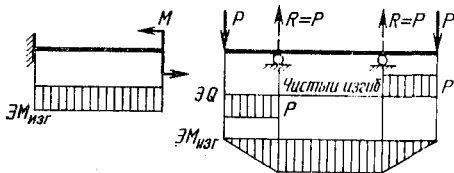


Рис. 6.9



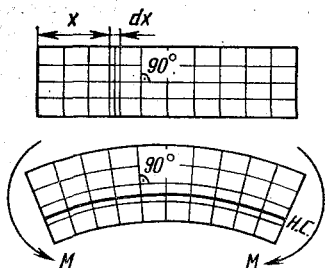


Рис. 6.10

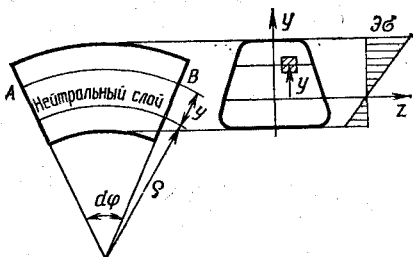


Рис. 6.11

К заключению о существовании нейтрального слоя приводит и уравнение (6.3). Действительно, при наличии в сечении напряжений разных знаков и непрерывном их распределении по сечению должны существовать точки, где  $\sigma = 0$ . Следовательно, должен существовать слой, волокна которого не испытывают действия ни растягивающих, ни сжимающих сил.

Нейтральная линия делит сечение на две части, в одной из которых действуют растягивающие внутренние силы, а в другой — сжимающие. Вокруг нейтральной линии поворачивается сечение при изгибе. При изгибе в плоскости симметрии бруса нейтральная линия перпендикулярна оси симметрии сечения.

Выделим двумя поперечными сечениями элемент бруса длиной  $dx$  (см. рис. 6.10). При нагружении бруса торцевые сечения этого элемента, оставаясь плоскими, повернутся друг относительно друга вокруг своих нейтральных линий на угол  $d\varphi$ , а нейтральный слой искривится, и его радиус кривизны станет равным  $\rho$  (рис. 6.11).

Сечение может поворачиваться вокруг нейтральной линии и оставаться при этом плоским только при одинаковых удлинениях продольных волокон, расположенных в слоях, параллельных нейтральному.

Определим относительное удлинение волокна  $AB$ , находящегося на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя. Длина этого волокна до деформации была равна длине нейтрального слоя  $dx = \rho d\varphi$  (нейтральный слой искривляется, но длины не меняет), а после деформации станет равной  $(\rho + y) d\varphi$ . Тогда

$$\varepsilon(y) = \frac{(\rho + y) d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}, \quad (6.11)$$

т. е. по высоте сечения удлинения продольных волокон изменяются по линейному закону. Полученный линейный закон распределения деформаций по ширине и высоте сечения является прямым следствием гипотезы плоских сечений.

Введем второе допущение, весьма упрощающее решение задачи о напряжениях при изгибе. Предположим, что продольные волокна при изгибе друг на друга не давят и находятся таким образом в со-

стоянии одноосного растяжения или сжатия \*. Согласно этому допущению связь между удлинениями волокон  $\epsilon$  и напряжениями  $\sigma$  в поперечных сечениях бруса описывается законом Гука для одноосного нагружения:  $\sigma = E\epsilon$ . Без такого допущения надо было бы применить закон Гука для трехосного нагружения (см. выражения 2.33).

Подставляя формулу (6.11) в равенство  $\sigma = E\epsilon$ , получаем

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad (6.12)$$

Итак, напряжения  $\sigma$ , как и деформации  $\epsilon$ , по ширине сечения постоянны, а по высоте сечения изменяются пропорционально расстоянию точки от нейтральной линии. Эпюра  $\sigma$  приведена на рис. 6.11.

Положение нейтральной линии определим из условия равенства нулю нормальной силы  $N$  в сечениях бруса при поперечном изгибе:

$$N = \int_F \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0, \text{ отсюда } \int_F y dF = 0.$$

Этот последний интеграл представляет собой статический момент всего сечения относительно нейтральной линии. Он может быть равен нулю только относительно центральной оси. Следовательно, нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения и поэтому является его нейтральной осью. Кроме того, она перпендикулярна оси симметрии сечения и является поэтому главной осью инерции сечения. Таким образом, при прямом поперечном изгибе нейтральная линия совпадает с главной центральной осью инерции сечения, перпендикулярной плоскости действия нагрузки.

Подставляя закон распределения напряжений (6.12) в уравнение (6.10), получаем

$$M_z = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{E}{\rho} J_z.$$

Отсюда находим формулу для определения кривизны нейтрального слоя балки

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (6.13)$$

Последнее уравнение аналогично выражениям  $\epsilon = \frac{N}{EF}$  и  $\theta = \frac{M_R}{GJ_R}$  и является, в сущности, уравнением деформаций при изгибе.

Исключая из уравнений (6.12) и (6.13) радиус кривизны, находим расчетное уравнение для нормальных напряжений при изгибе

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y. \quad (6.14)$$

\* При чистом изгибе бруса постоянного сечения давление между волокнами действительно отсутствует, а поперечные сечения остаются плоскими. Это подтверждается строгими решениями теории упругости.

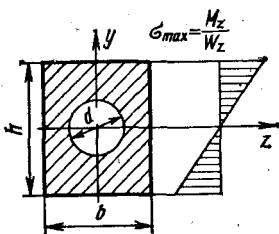


Рис. 6.12

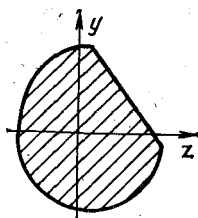


Рис. 6.13

Здесь  $J_z$  — момент инерции сечения относительно его нейтральной оси, а  $y$  — расстояние от этой оси до точки, в которой определяется напряжение.

Максимальное напряжение при изгибе возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} y_{\max}.$$

Частное от деления главного момента инерции сечения на расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной от нее точки сечения называется моментом сопротивления изгибу и обозначается  $W_z$  или  $W_{изг}$ :

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}. \quad (6.15)$$

Таким образом,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}. \quad (6.16)$$

Понятие момента сопротивления вводится обычно лишь для сечений, симметричных относительно нейтральной оси. Момент сопротивления изгибу прямоугольника  $W_z = bh^2/6$ , а кольца с внутренним диаметром  $d$  и внешним  $D$ :  $W_z = \frac{\pi D^3}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$ .

Для сечения, представленного на рис. 6.12, момент сопротивления вычисляется так:

$$W_z = \left( \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} \right) : \frac{h}{2}.$$

Следует иметь в виду, что  $W_z$  сложной фигуры не равен сумме моментов сопротивления изгибу ее частей.

В предыдущих выводах предполагалось, что брус имеет продольную плоскость симметрии и в этой плоскости действует внешняя нагрузка. Распространим теперь полученные результаты на случай несимметричных сечений (рис. 6.13). Для этого обратимся к уравнениям равновесия отсеченной части бруса (см. разд. 6.2). При чистом изгибе бруса в одной из координатных плоскостей, например  $хоу$ , нормальные напряжения  $\sigma$ , определяемые формулой (6.14),

и касательные  $\tau = 0$  удовлетворяют пяти уравнениям равновесия отсеченной части бруса (см. рис. 6.3) независимо от формы сечения и положения его центральных осей  $y$  и  $z$ . Одно только уравнение (6.5)

$$M_y = \int_F z \sigma dF = \frac{M_z}{J_z} \int_F yz dF = 0$$

требует, чтобы был равен нулю интеграл  $\int_F yz dF$ , представляющий собой центробежный момент инерции  $J_{yz}$  сечения относительно выбранных центральных осей  $y$  и  $z$ . Это условие будет выполнено, если оси  $y$  и  $z$  будут главными центральными осями инерции сечения.

Следовательно, расчётное уравнение (6.14) справедливо при любой форме сечения, если только внешняя нагрузка действует в плоскости, содержащей по одной из главных центральных осей инерции всех поперечных сечений. Эта плоскость называется главной плоскостью балки. Таких плоскостей минимум две и они ортогональны. Очевидно, что только при этих же самых условиях будет справедливо и уравнение (6.13) для деформаций при изгибе.

#### 6.6. НОРМАЛЬНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ. ФОРМУЛА ЖУРАВСКОГО

При поперечном изгибе в сечениях бруса одновременно действуют внутренние нормальные и касательные силы. Нормальные силы вызывают линейные  $\epsilon_x$ , а касательные — угловые  $\gamma$  деформации продольных волокон бруса. В результате деформаций сдвига сечения бруса при поперечном изгибе деформируются. Опыт показывает, что наибольшее искривление сечения имеет место вблизи нейтрального слоя (рис. 6.14). Это означает, что касательные напряжения при изгибе достигают наибольшей величины вблизи нейтральной оси сечения, где нормальные напряжения минимальны.

При поперечном изгибе имеет место также давление между волокнами бруса. Однако искривление плоскости сечения и давление между волокнами не сказывается сколько-нибудь заметно на распределении и величине нормальных напряжений в поперечных сечениях балок, у которых высота сечения  $h$  мала ( $l/h > 5$ ) по сравнению с длиной балки  $l$ . А именно такие балки наиболее распространены в технике. Поэтому нормальные напряжения и при поперечном изгибе балок вычисляют по формулам, выведенным для случая чистого изгиба.

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y \quad \text{и} \quad \sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}.$$

Перейдем к определению касательных напряжений  $\tau_{xy}$ , векторы которых параллельны плоскости действия нагрузки. Кроме этих напряжений в сечении могут суще-

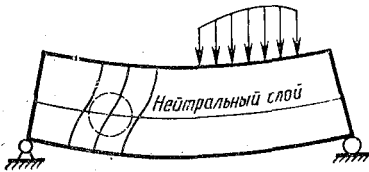


Рис. 6.14

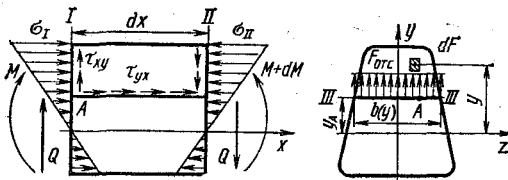


Рис. 6.15

ствовать также направленные параллельно нейтральной оси напряжения  $\tau_{xz}$ . Однако напряжения  $\tau_{xz}$  в сплошных сечениях, как доказано в теории упругости, существенно меньше напряжений  $\tau_{xy}$ , и поэтому ими в расчетах обычно пренебрегают.

Непосредственное определение напряжений  $\tau_{xy}$  затруднительно. Проще определить парные им касательные напряжения  $\tau_{yx}$ , возникающие в продольных сечениях бруса (рис. 6.15).

Предположим, что по ширине сечения  $b(y)$  касательные напряжения  $\tau_{xy}$  распределены равномерно. Более точная теория показывает, что это допущение выполняется тем точнее, чем меньше ширина сечения по сравнению с его высотой.

Определим напряжение  $\tau_{xy}$  в точке  $A$  сечения  $I$ , находящейся на расстоянии  $y_A$  от нейтральной оси. Для этого продольным горизонтальным сечением, проходящим через точку  $A$ , и еще одним поперечным сечением  $II$  выделим элемент бруса длиной  $dx$  (см. рис. 6.15).

При переходе от одного поперечного сечения к другому, находящемуся на расстоянии  $dx$ , изгибающий момент  $M_z$  изменится на величину  $dM_z$ . Следовательно, по торцевым граням выделенного элемента будут действовать различные по величине напряжения  $\sigma_I = \frac{M_z}{J_z} y$  и  $\sigma_{II} = \frac{M_z + dM_z}{J_z} y$ , но тогда и равнодействующая нормальных сил  $\sigma_1 dF$  на площади  $F_{отс}$  (ее называют площадью отсеченной части сечения) левого торца рассматриваемого элемента

$$N_I^{отс} = \frac{M_z}{J_z} \int_{F_{отс}} y dF$$

не будет равна соответствующей равнодействующей нормальных сил на правом его торце

$$N_{II}^{отс} = \frac{M_z + dM_z}{J_z} \int_{F_{отс}} y dF.$$

Равнодействующие  $N_I^{отс}$  и  $N_{II}^{отс}$  (рис. 6.16) противоположно направлены, и их разность должна уравниваться касательными силами  $\tau_{yx} dF$ , действующими на продольном сечении эле-

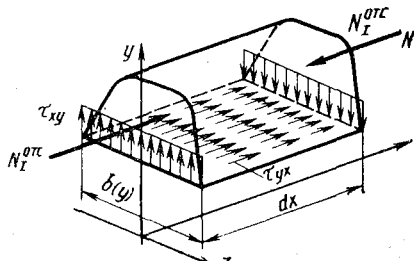


Рис. 6.16

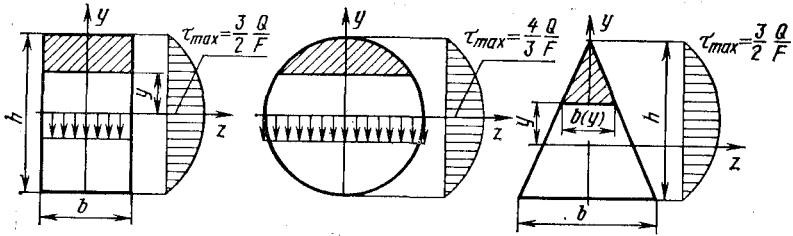


Рис. 6.17

мента \*. Вследствие малой длины элемента и допущения о равномерном распределении напряжений  $\tau_{xy}$  по ширине поперечного сечения напряжения  $\tau_{yx}$  можно считать распределенными равномерно по всей продольной грани элемента. Следовательно, уравнение равновесия  $\sum x = 0$  выделенного элемента будет иметь вид

$$\frac{M_z}{J_z} \int_{F_{отс}} y dF - \frac{M_z + dM_z}{J_z} \int_{F_{отс}} y dF + \tau_{yx} b(y) dx = 0.$$

Отсюда

$$\tau_{yx} = \frac{dM_z}{dx J_z b(y)} \int_{F_{отс}} y dF.$$

Учитывая, что  $\frac{dM_z}{dx} = Q_y$ ,  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ , а интеграл  $\int_{F_{отс}} y dF = S_z^{отс}$  представляет собой статический момент площади отсеченной части относительно нейтральной оси  $z$  сечения, получаем расчетное уравнение для касательных напряжений при поперечном изгибе

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{отс}}{J_z b(y)}, \quad (6.17)$$

здесь  $J_z$  — момент инерции всего сечения; а  $b(y)$  — ширина сечения на уровне той точки, где определяется напряжение.

Формула (6.17) называется формулой Журавского по имени русского инженера-мостостроителя, впервые применившего ее к балкам прямоугольного сечения.

Для прямоугольного сечения статический момент отсеченной части на уровне  $y$  от нейтральной линии (рис. 6.17)

$$S_z^{отс} = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad \text{а } J_z = \frac{bh^3}{12}.$$

Следовательно, распределение напряжений по высоте прямоугольного сечения изображается параболой

$$\tau_{xy} = \frac{6Q}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Для данного вывода весьма существенно, что все остальные части поверхности элемента совпадают с внешней поверхностью балки, свободной при поперечном изгибе от продольных касательных сил.

Максимальные касательные напряжения действуют в точках нейтральной линии (при  $y = 0$ ):

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh}. \quad (6.18)$$

В круглом сечении эпюра касательных напряжений ограничена кривой, имеющей максимум на нейтральной оси. Учитывая, что статический момент полукруга и момент инерции круга  $S_z^{\text{отс}} = \frac{\pi d^2}{8} \frac{2d}{3\pi} = \frac{d^3}{12}$ ;  $J_z = \frac{\pi d^4}{64}$ , получаем  $\tau_{\max} = \frac{16}{3} \frac{Q}{\pi d^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}$ . Следовательно, максимальные касательные напряжения в круглом сечении на 33 % больше средних напряжений  $\tau = \frac{Q}{F}$ , по которым, например, обычно проводится расчет заклепок.

Для треугольного сечения с основанием  $b$  и высотой  $h$  (см. рис. 6.17), имеем

$$S_z^{\text{отс}} = \frac{b(y)}{3} \left( \frac{2}{3}h - y \right) \left( \frac{1}{3}h + y \right); \quad J_z = \frac{bh^3}{36}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (6.17), находим

$$\tau = \frac{12Q}{bh^3} \left( \frac{2}{3}h - y \right) \left( \frac{1}{3}h + y \right); \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}.$$

Максимальное напряжение имеет место на расстоянии  $y = h/6$  от нейтральной линии, т. е. в точках средней линии треугольника.

Нужно всегда иметь в виду, что формула Журавского определяет не полное касательное напряжение  $\tau$  в точке сечения, а лишь составляющую  $\tau_{xy}$  этого напряжения, параллельную плоскости действия нагрузки. Однако в контурных точках сечения полные напряжения  $\tau$  могут быть найдены графически по предварительно вычисленным напряжениям  $\tau_{xy}$ . Для этого в рассматриваемой точке контура строится прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза направлена по касательной к контуру, а катет, параллельный оси  $y$ , представляет собой напряжение  $\tau_{xy}$  в этой точке. Учитывая, что в контурной точке сечения вектор полного напряжения  $\tau$  направлен по касательной к контуру (см. разд. 5.5), приходим к выводу, что гипотенуза построенного треугольника определяет величину и направление искомого напряжения  $\tau$ . Этим же построением доказывается существование составляющих  $\tau_{xz}$ , о которых упоминалось выше. Изложенное иллюстрируется рис. 6.18 на примере круглого сечения.

В заключение отметим, что формулой Журавского можно пользоваться только в тех случаях, когда плоскость действия нагрузки перпендикулярна одной из главных центральных осей инерции сечения. Объясняется это тем, что при выводе формулы Журавского использовано уравнение (6.14), справедливое лишь при указанных условиях.

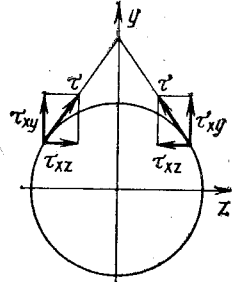


Рис. 6.18

## 6.7. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ ТОНКОСТЕННЫХ БАЛОК

Нормальные напряжения при поперечном изгибе тонкостенных балок допустимо вычислять по формуле (6.14) по тем же соображениям, что и для балок сплошного сечения. Однако для определения касательных напряжений нельзя воспользоваться формулой Журавского непосредственно в виде (6.17), так как при ее выводе не принимались во внимание напряжения  $\tau_{xz}$ , являющиеся для многих элементов тонкостенных сечений основными составляющими касательных напряжений.

Для тонкостенных сечений эта формула должна быть соответствующим образом видоизменена.

Определим сначала касательные напряжения при поперечном изгибе тонкостенной балки открытого профиля (рис. 6.19).

Вывод уравнения касательных напряжений при изгибе тонкостенных балок, как и при кручении тонкостенных брусьев замкнутого контура (см. разд. 5.6), основан на допущении, что напряжения  $\tau$  направлены параллельно касательной к средней линии сечения и по его толщине распределены равномерно.

Пусть требуется определить касательные напряжения в точках нормали  $n - n$  к средней линии поперечного сечения (см. рис. 6.19). Как и в случае балок сплошного сечения, будем искать равные им по величине напряжения  $\tau$  в продольном сечении, содержащем эту нормаль. Выделим элемент бруса длиной  $dx$  указанным продольным и двумя поперечными сечениями (см. рис. 6.19).

По торцевым граням элемента действуют касательные  $\tau dF$  и нормальные  $\sigma dF$  силы. Равнодействующие нормальных сил  $N_{I}^{отс}$  и  $N_{II}^{отс}$  различны по величине и направлению. В продольном сечении действуют только касательные силы, равнодействующая которых равна  $\tau b dx$ , так как предполагается, что давление между волокнами отсутствует. Все остальные части поверхности элемента совпадают с боковой поверхностью бруса и поэтому свободны от продольных касательных нагрузок. Указанную особенность способа выделения элемента надо всегда иметь в виду для правильного применения формул Журавского как в случае тонкостенных, так и сплошных сечений.

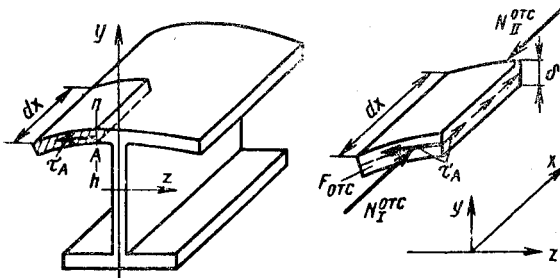


Рис. 6.19



Уравнение равновесия  $\sum x = 0$  выделенного элемента имеет вид

$$\int_{F_{отс}} \frac{M_z}{J_z} y dF - \int_{F_{отс}} \frac{M_z + dM_z}{J_z} y dF + \tau \delta dx = 0.$$

Отсюда

$$\tau = \frac{\overline{Q_y} S_z^{отс}}{J_z \delta}. \quad (6.19)$$

По внешнему виду уравнения (6.17) и (6.19) одинаковы. По существу же они различны, так как формула (6.19) определяет не составляющую  $\tau_{xy}$ , а полное касательное напряжение  $\tau$  в точках поперечного сечения. Необходимо помнить, что это уравнение, как и (6.17), справедливо лишь тогда, когда плоскость действия нагрузки перпендикулярна главной центральной оси инерции сечения.

Произведение  $\tau$  на толщину сечения  $\delta$  называют потоком касательных напряжений  $q = \tau \delta$ , показывая тем самым, что  $\tau$  распространяются по сечению подобно потоку жидкости в трубопроводе аналогичной формы.

Вектор потока  $q$ , как и напряжения  $\tau$ , направлен по касательной к средней линии сечения. Изменение величины  $q$  или  $\tau$  вдоль контура сечения изображается эпюрами, ординаты которых откладываются на нормалях к средней линии сечения, а действительные направления  $\tau$  и  $q$  указываются на эпюрах стрелками.

На рис. 6.20 построена эпюра  $\tau$  при изгибе тонкостенного двутавра в вертикальной плоскости симметрии. Вследствие симметрии сечения и нагрузки, касательные напряжения в симметричных точках полок двутавра должны быть также симметричны относительно оси  $y$  и согласно уравнению (6.19) будут увеличиваться от края к центру по линейному закону:

$$\tau(z) = \frac{Q_y}{J_z \delta} \frac{h\delta}{2} z.$$

Вдоль стенки  $\tau$  изменяются по параболическому закону

$$\tau(y) = \frac{Q_y}{J_z \delta} \left[ bh\delta + \frac{\delta}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

и направлены в ту же сторону, что и сила  $Q_y$ .

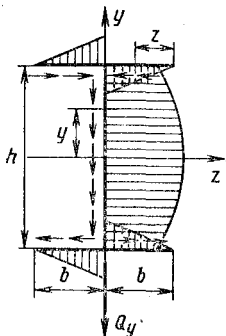


Рис. 6.20

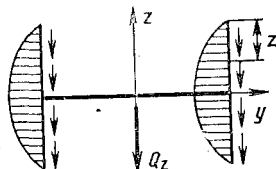


Рис. 6.21

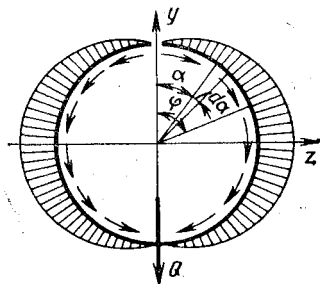


Рис. 6.22

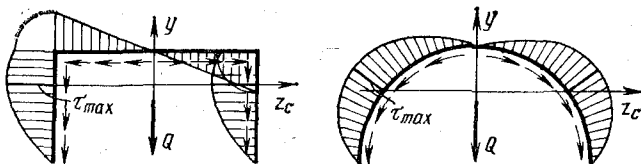


Рис. 6.23

Перерезывающая сила  $Q_y$  направлена вдоль оси  $y$  и равна сумме касательных сил, действующих только в сечении стенки двутавра, так как проекции на эту ось касательных сил в полках равны нулю.

При изгибе двутавра в плоскости второй оси симметрии (рис. 6.21) касательные напряжения в стенке равны нулю, а вдоль каждой из полок изменяются по закону

$$\tau(z) = \frac{Q_y}{J_y \delta} \left( b - \frac{z}{2} \right) \delta z.$$

Из приведенных примеров видно, что при изгибе бруса в плоскости симметрии перерезывающая сила совпадает с осью симметрии сечения, а касательные напряжения распределены симметрично относительно этой оси. Если сечение не имеет направленной вдоль оси симметрии стенки (рис. 6.22), то в каждой точке сечения, находящейся на этой оси, вектор касательного напряжения должен быть

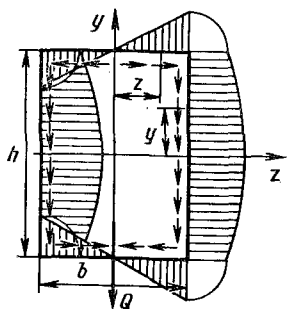


Рис. 6.24

одновременно направлен в противоположные стороны, что возможно лишь при условии  $\tau = 0$ . Заключение о равенстве нулю напряжений  $\tau$  на оси симметрии подтверждается и расчетами по формуле (6.19). Так, касательные напряжения при изгибе тонкостенной трубы, имеющей в плоскости действия нагрузки тонкий продольный разрез,

$$\tau(\varphi) = \frac{Q_y}{J_z \delta} \int_0^\varphi R \cos \alpha R \delta \, d\alpha = \frac{QR^2}{J_z} \sin \varphi$$

обращаются в нуль при  $\varphi = \pi$ , т. е. именно в точках на оси симметрии сечения.

На рис. 6.23 приведены эпюры  $\tau$  для швеллера и тонкостенного полукольца при изгибе в плоскости симметрии.

Равенство нулю напряжений  $\tau$  на оси симметрии позволяет применять формулу (6.19) и для замкнутых симметричных профилей. Для этого достаточно мысленно разрезать сечение на оси симметрии и дальше рассматривать его как открытое. Например, напряжения в полке прямоугольной коробки (рис. 6.24)

$$\tau(z) = \frac{Q_y}{J_z \delta} \frac{h\delta}{2} z, \text{ а в стенке } \tau(y) = \frac{Q_y}{J_z \delta} \left[ \frac{b}{2} - \frac{h}{2} \delta + \frac{\delta}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right].$$

Изгиб балок замкнутых несимметричных и многосвязных тонкостенных сечений рассматривается в курсе строительной механики.

## 6.8. ЦЕНТР ИЗГИБА

Равнодействующая всех внутренних касательных сил в сечении балки при изгибе — перерезывающая сила  $Q$  — приложена в точке плоскости сечения, относительно которой момент всех этих сил равен нулю.

Допустим, что на отсеченную часть бруса действует сосредоточенная внешняя сила  $P$ , проекция которой на плоскость сечения не проходит через указанную точку. Тогда сила  $P$  и равная ей по величине, но противоположно направленная перерезывающая сила  $Q$  образуют в плоскости сечения пару сил, появление которой сопровождается закручиванием бруса в направлении вращения этой пары. Изложенное иллюстрируется рис. 6.25 на примере консольно закрепленного тонкостенного швеллера, а на рис. 6.26 показан характер перемещения торцевого сечения такого бруса в зависимости от взаимного расположения сил  $P$  и  $Q$ .

Кручение бруса при поперечном изгибе связано с появлением в его сечениях дополнительной системы касательных сил, равнодействующей которых является крутящий момент, равный по величине моменту пары сил  $P$  и  $Q$ , т. е.  $M_k = Pa$ .

Если проекция силы  $P$  пройдет через точку приложения силы  $Q$ , то крутящий момент будет равен нулю ( $a = 0$ ) и изгиб бруса не осложнится кручением (см. рис. 6.26).

Точка плоскости сечения, через которую должна проходить плоскость действия поперечной нагрузки, чтобы изгиб бруса не сопровождался кручением, называется центром изгиба, или центром жесткости сечения. Геометрическое место центров изгиба поперечных сечений бруса называется осью центров изгиба.

В толстостенных сечениях центр изгиба расположен вблизи центра тяжести. Однако расстояние между двумя этими точками растет с уменьшением толщины сечения и становится значительным в тонкостенных профилях. Часто центр изгиба тонкостенного сечения находится вне этого сечения.

Из изложенного видно, что точка приложения перерезывающей силы  $Q$  является одновременно и центром изгиба сечения. Следовательно, центр изгиба — это точка, относительно которой момент всех внутренних касательных сил в сечении при изгибе без кручения равен нулю. Вокруг этой точки

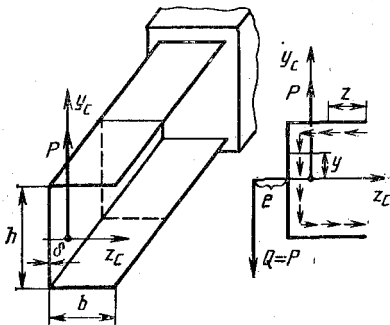


Рис. 6.25

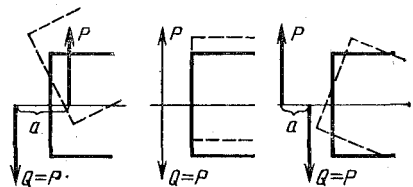


Рис. 6.26

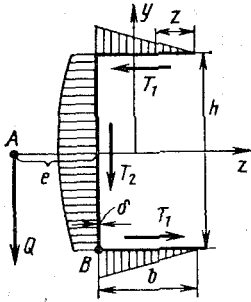


Рис. 6.27

вращается вектор перерезывающей силы  $Q$  при изменении наклона плоскости действия внешней поперечной нагрузки. Поэтому центр изгиба обычно определяют как точку пересечения линий действия двух перерезывающих сил  $Q_y$  и  $Q_z$ , соответствующих поперечному изгибу сначала в плоскости параллельной одной, а затем другой главной центральной оси инерции сечения. Такие положения плоскостей изгиба выбирают потому, что только при изгибе в главных плоскостях бруса касательные напряжения допустимо вычислять по формуле (6.19).

В случае симметричных сечений расчеты упрощаются, так как центр изгиба симметричного сечения находится на оси симметрии. При наличии двух осей симметрии центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения.

Последовательность определения положения центра изгиба в сечении с одной осью симметрии проследим на примере швеллера (см. рис. 6.25).

Предположим, что центр изгиба  $A$  находится на расстоянии  $e$  слева от стенки швеллера (рис. 6.27). Приложим в этой точке силу  $Q$ , направив ее перпендикулярно оси симметрии  $z$ , и определим касательные напряжения в полках и стенке

$$\tau(z) = \frac{Q}{J_z \delta} \frac{\delta h}{2} z; \quad \tau(y) = \frac{Q}{J_z \delta} \left[ \frac{\delta b h}{2} + \frac{\delta}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right].$$

Здесь  $J_z = \frac{\delta h^3}{12} + 2b\delta \left( \frac{h}{2} \right)^2$ .

Направление силы  $Q$  и соответствующих ей  $\tau$  показано на рис. 6.25.

Применим теперь теорему о равенстве по величине и знаку момента равнодействующей и суммы моментов ее составляющих относительно одной и той же точки. Очевидно, момент силы  $Q$  относительно точки  $B$  (рис. 6.27) швеллера будет равен моменту касательной силы  $T_1$  в верхней полке относительно той же точки:  $Qe = T_1 h$ . Знак плюс поставлен в правой части этого равенства потому, что моменты сил  $Q$  и  $T_1$  совпадают по направлению. В противном случае моменту силы  $T_1$  надо было бы приписать знак минус.

Подсчитывая силу  $T_1$  интегрированием по длине полки или непосредственно по площади эпюры  $\tau$  (см. рис. 6.27), получаем

$$T_1 = \int_0^b \tau(z) \delta dz = \frac{1}{2} \tau(b) b \delta = \frac{Q h b^2 \delta}{4 J_z}.$$

Следовательно,  $e = \frac{h^2 b^2 \delta}{4 J_z} = \frac{3b^2}{h + 6b}$ . При  $h = 2b$  эксцентриситет  $e = \frac{3}{8} b$ .

Положительное значение величины  $e$  показывает, что центр изгиба действительно расположен слева от стенки швеллера.

Заметим, что положение центра изгиба зависит лишь от конфигурации и соотношения размеров сечения, а не от величины силы  $Q$ .

В профилях, составленных из пересекающихся в одной точке прямых стенок, называемых профилями-пучками (рис. 6.28), центры изгиба находятся в вершинах пучков, так как относительно этих точек равны нулю моменты касательных сил во всех стенках.

**Пример.** Определить положение центра изгиба сечения тонкостенной трубы, имеющей тонкий продольный разрез (рис. 6.29). Радиус средней линии сечения  $R$ , а толщина стенки  $\delta$ .

**Решение.** Касательные напряжения при изгибе трубы в плоскости, перпендикулярной оси симметрии сечения,

$$\tau(\varphi) = \frac{Q}{J_z \delta} \int_0^\varphi R \sin \alpha R \delta d\alpha = \frac{QR^2}{J_z} (1 - \cos \varphi)$$

и направлены параллельно касательным к окружности радиуса  $R$ . Поэтому наиболее просто вычисляются моменты касательных сил в сечении относительно его центра.

Приравнивая сумму моментов этих сил моменту равнодействующей  $Q$  относительно той же точки  $O$ , получаем

$$Qe = \int_0^{2\pi} R\tau(\varphi) R\delta d\varphi = \frac{QR^4\delta}{J_z} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) d\varphi.$$

$$\text{Отсюда } e = \frac{2\pi R^4\delta}{\pi R^3\delta} = 2R.$$

При определении центра изгиба сечения, показанного на рис. 6.30, надо рассмотреть изгиб бруса в горизонтальной плоскости, поскольку сечение имеет вертикальную ось симметрии. Получим

$$Qe = T_1b + T_2b - T_3b - T_5b + T_6b + T_7b.$$

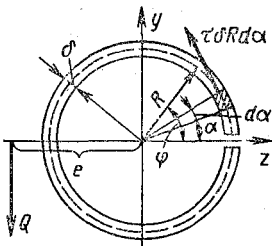


Рис. 6.29

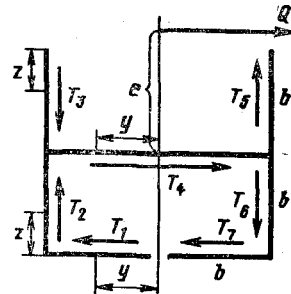


Рис. 6.30

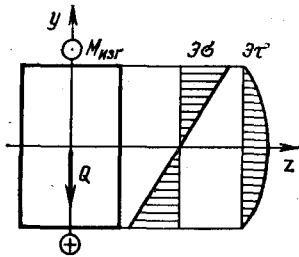


Рис. 6.31

## 6.9. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

При поперечном изгибе, как известно, наибольшие нормальные напряжения возникают в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения, а на самой этой оси  $\sigma = 0$ , тогда как зона действия наибольших касательных напряжений расположена, наоборот, вблизи нейтральной оси (рис. 6.31). Кроме того, и величина  $\tau_{\max}$ , как показывают расчеты, мала по сравнению с  $\sigma_{\max}$ , если длина балки  $l$  существенно больше высоты сечения  $h$ . Все это позволяет не принимать во внимание касательные напряжения и проводить расчет на прочность только по нормальным напряжениям\*.

Условие прочности балки требует, чтобы максимальные нормальные напряжения не превышали допускаемых напряжений для материала балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_z} y_{\max} \leq [\sigma], \quad (6.20)$$

где  $[\sigma] = \sigma_T/n$  или  $[\sigma] = \sigma_B/n$ .

Если материал одинаково работает на растяжение и сжатие, то опасной будет та точка сечения, где действует наибольшее по абсолютной величине напряжение независимо от его знака.

Для хрупких материалов, имеющих существенно различные пределы прочности при растяжении  $\sigma_{B.p}$  и сжатии  $\sigma_{B.сж}$ , требуется проверка прочности по наибольшим растягивающим  $\sigma_p$  и наибольшим сжимающим напряжениям  $\sigma_{сж}$ :

$$\sigma_p = \frac{M_{\max}}{J_z} y_p \leq [\sigma]_p, \quad \sigma_{сж} = \frac{M_{\max}}{J_z} y_{сж} \leq [\sigma]_{сж},$$

где  $[\sigma]_p = \sigma_{B.p}/n$ , а  $[\sigma]_{сж} = \sigma_{B.сж}/n$ .

## 6.10. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Для балок из пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие ( $\sigma_{T.p} = \sigma_{T.сж}$ ), целесообразно выбирать сечения, симметричные относительно их нейтральных осей; при этом условии обеспечивается одинаковый запас прочности сечения по растянутым и сжатым волокнам.

Если кроме условия прочности исходить еще и из требования минимальной массы балки, то наиболее рациональным будет сечение, которое при заданном моменте сопротивления  $W_z$  имеет наименьшую площадь сечения  $F$ , а при заданной площади  $F$  — наибольший момент сопротивления  $W_z$ .

\* Для тонкостенных балок это не всегда справедливо.

Сравнивая с этих позиций, например, прямоугольное сечение с двутавровым (рис. 6.32), нетрудно убедиться в преимуществе последнего.

Действительно, у балки прямоугольного сечения материал вблизи нейтральной оси полностью не используется, так как находится в наименее напряженной зоне сечения; у двутавровой балки большая часть материала расположена в наиболее напряженной зоне. Поэтому при одинаковой прочности двутавровая прокатная балка оказывается в 2 ... 3 раза легче прямоугольной.

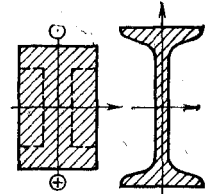


Рис. 6.32

Для материалов хрупких, обладающих различной прочностью при растяжении и сжатии, рациональным будет сечение, несимметричное относительно нейтральной оси, например тавровое, несимметричное двутавровое и т. п.

**Пример.** Стальная балка (рис. 6.33) выполнена из бруса прямоугольного сечения  $b \times 2b$  и из прокатного двутавра. Интенсивность нагрузки  $q = 230 \text{ Н/см}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $\sigma_T = 250 \text{ МПа}$ . Определить размеры прямоугольного сечения и подобрать по сортаменту прокатный двутавр, приняв  $\lambda = 1,8$ . Сравнить массы этих балок и вычислить максимальные касательные напряжения.

**Решение.** Строим эпюры  $Q$  и  $M_{изг}$  (см. рис. 6.33) и вычисляем максимальный изгибающий момент

$$M_{\max} = \frac{9}{32} q l^2 = \frac{9 \cdot 230 \cdot 10^6}{32} = 65 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{мм}.$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения

$$W_z = \frac{bh^3}{6} = \frac{2}{3} b^3, \text{ а допускаемое напряжение } [\sigma] = \frac{250}{1,8} = 140 \text{ МПа}.$$

Согласно условию прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{65 \cdot 10^5 \cdot 3}{2b^3} \leq 140.$$

Отсюда находим размеры прямоугольного сечения, обеспечивающие заданную прочность балки. Округляя результаты, получаем  $b = 42 \text{ мм}$ ,  $h = 84 \text{ мм}$ ,  $F = 35,5 \text{ см}^2$ .

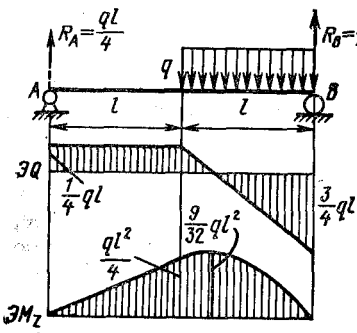


Рис. 6.33

Из условия прочности двутавровой

$$\text{балки } \sigma_{\max} = \frac{65 \cdot 10^5}{W_z} \leq 140 \text{ находим}$$

требную величину  $W_z \geq 46 \text{ см}^3$ , а затем по сортаменту подбираем двутавр с ближайшим большим моментом сопротивления. Им оказывается двутавр N10:  $h = 10 \text{ см}$ ,  $W_z = 48,8 \text{ см}^3$ ,  $F = 14,2 \text{ см}^2$ ,  $J_z = 244 \text{ см}^4$ ,  $S_z = 28 \text{ см}^3$ ,  $d = 4,5 \text{ мм}$ .

При найденных размерах сечений максимальные нормальные напряжения в обеих балках  $\sigma_{\max} = 140 \text{ МПа}$ .

Массы балок относятся, как площади их сечений:  $35,5/14,2 = 2,5$ , т. е. при одинаковой прочности на изгиб балка прямоугольного сечения в 2,5 раза тяжелее двутавровой.

Максимальные касательные напряжения возникают в сечении, где  $Q = \frac{3}{4} ql = \frac{3}{4} \cdot 230 \cdot 100 = 17\,300 \text{ Н}$ .

В прямоугольном сечении (см. разд. 6.6).

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{17\,300}{42 \cdot 84} = 7,3 \text{ МПа.}$$

Для вычисления  $\tau_{\max}$  при изгибе двутавра в сортаменте приводятся значения статических моментов половины сечения. В рассматриваемом случае  $S_z = 28 \text{ см}^3$ . Следовательно, в двутавровой балке согласно формуле (6.18)

$$\tau_{\max} = \frac{17\,300 \cdot 28 \cdot 10^3}{244 \cdot 10^4 \cdot 4,5} = 44,2 \text{ МПа.}$$

Полученные результаты подтверждают, что при изгибе  $\tau_{\max}$  существенно меньше  $\sigma_{\max}$ .

### 6.11. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

В пределах упругости потенциальная энергия деформации равна работе внутренних сил на перемещениях точек их приложения. При поперечном изгибе прямого бруса в его сечениях одновременно действуют два внутренних силовых фактора — изгибающий момент  $M_z$  и перерезывающая сила  $Q_y$ . Очень важно, что каждому из них соответствует определенное перемещение сечения (моменту  $M_z$  — угловое, а силе  $Q_y$  — поступательное), на котором другой силовой фактор работы не производит. Поэтому потенциальную энергию деформации элемента балки длиной  $dx$  (рис. 6.34) можно определить как сумму работ момента  $M_z$  и силы  $Q_y$  на перемещениях, ими самими вызванных, т. е. как сумму независимых работ:  $dU = dU_M + dU_Q$ .

Учитывая, что в пределах пропорциональности имеет место линейная зависимость  $M_z$  от  $\varphi$  (рис. 6.35), получаем  $dU_M = \frac{M_z d\varphi}{2}$ .

Но согласно равенству (6.13)  $d\varphi = \frac{M_z dx}{EJ_z}$ , поэтому

$$dU_M = \frac{M_z^2 dx}{2EJ}.$$

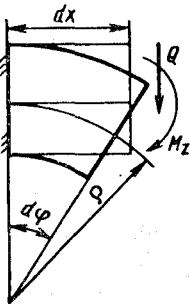


Рис. 6.34

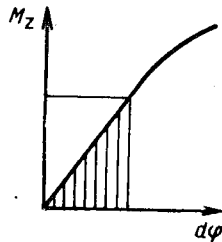


Рис. 6.35

Внутренние касательные силы, вызывающие деформации сдвига в элементе бруса, распределены по сечению неравномерно. Поэтому энергию  $dU_Q$  найдем суммированием энергий сдвига всех продольных волокон элемента. Объем одного волокна  $dV = dF dx$ , а удельная



энергия сдвига  $u = \frac{\tau^2}{2G}$  (см. разд. 3.4). Следовательно, потенциальная энергия одного волокна  $udV = \frac{\tau^2 dx}{2G} dF$ , а всего элемента —  $dU_Q = \int_F \frac{\tau^2 dx}{2G} dF$ . При изгибе  $\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{отс}}{J_z b(y)}$ , поэтому

$$dU_Q = \frac{Q_y^2 dx}{2GF} \int_F \frac{S_z^2 F}{J_z^2 b^2} dF.$$

Умножение и деление на  $F$  введено для удобства записи расчетной формулы. Обозначим  $\int_F \frac{S_z^2 F}{J_z^2 b^2} dF = K$ , тогда

$$dU_Q = K \frac{Q_y^2 dx}{2GF}.$$

Произведение  $GF$  называется жесткостью при сдвиге.

Безразмерным коэффициентом  $K$  в выражении  $dU_Q$  учитывается неравномерность распределения  $\tau$  по сечению. Этот коэффициент зависит только от формы сечения. Например, для прямоугольника

$$K = \frac{bh}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)^2 b^2} \int_{-h/2}^{+h/2} \left[ \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]^2 b dy = \frac{6}{5}.$$

Суммируя  $dU_M$  и  $dU_Q$  и интегрируя по длине бруса, находим потенциальную энергию при изгибе

$$U = \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z} + K \int_l \frac{Q_y^2 dx}{2GF}. \quad (6.21)$$

Расчеты показывают, что для обычных балок ( $l \gg h$ ) второе слагаемое во много раз меньше первого. Поэтому энергией сдвига, как правило, пренебрегают и потенциальную энергию при изгибе балок вычисляют по формуле

$$U = \sum_1^n \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z}, \quad (6.22)$$

где  $n$  — число участков балки.

## 6.12. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ УПРУГОЙ ЛИНИИ И ЕГО ИНТЕГРИРОВАНИЕ

При изгибе ось балки искривляется, а поперечные сечения перемещаются поступательно и поворачиваются вокруг нейтральных осей, оставаясь при этом нормальными к изогнутой продольной оси (рис. 6.36).

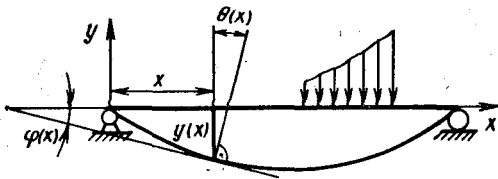


Рис. 6.36

Деформированная (изогнутая) продольная ось балки называется упругой линией, а поступательные перемещения сечений, равные перемещениям  $y = y(x)$  их центров тяжести сечений — прогибами балки.

Между прогибами  $y(x)$  и углами поворота сечений  $\theta(x)$  существует определенная зависимость. Из рис. 6.36 видно, что угол поворота сечения  $\theta$  равен углу  $\varphi$  наклона касательной к упругой линии ( $\theta$  и  $\varphi$  — углы с взаимноперпендикулярными сторонами). Но согласно геометрическому смыслу первой производной  $y' = \operatorname{tg} \varphi$ . Следовательно,  $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \varphi = y'$ .

В пределах упругих деформаций прогибы балок обычно значительно меньше высоты сечения  $h$ , а углы поворота  $\theta$  не превышают  $0,1 \dots 0,15$  рад. В этом случае связь между прогибами и углами поворота упрощается и принимает вид  $\theta = y'$ .

Определим теперь форму упругой линии. Влияние перерезывающих сил  $Q$  на прогибы балок как правило, незначительно. Поэтому с достаточной точностью можно принять, что при поперечном изгибе кривизна упругой линии зависит только от величины изгибающего момента  $M_z$  и жесткости  $EJ_z$ :

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}.$$

В то же время в неподвижной системе координат кривизна упругой линии, как и всякой плоской кривой,

$$K = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Приравнивая правые части последних равенств и учитывая, что правила знаков для  $M_z$  и  $y''$  были приняты независимо друг от друга, получаем

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \pm \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (6.23)$$

Это равенство называется дифференциальным уравнением упругой линии.

При малых деформациях второе слагаемое в знаменателе мало по сравнению с единицей (при  $\theta = \frac{1}{10}$  рад  $(y')^2 = \frac{1}{100}$ ) и им можно пренебречь. В результате получим приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$y'' = \pm \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (6.24)$$

Выбор знака в правой части равенства (6.24) определяется направлением координатной оси  $y$ , так как от этого направления зави-

сит знак второй производной  $y''$ . Если ось  $y$  направлена вверх, то, как видно из рис. 6.37, знаки  $y''$  и  $M_z$  совпадают, и в правой части надо оставить знак плюс. Если же ось  $y$  направлена вниз (см. рис. 6.37), то знаки  $y''$  и  $M_z$  противоположны, и это заставляет выбрать в правой части знак минус.

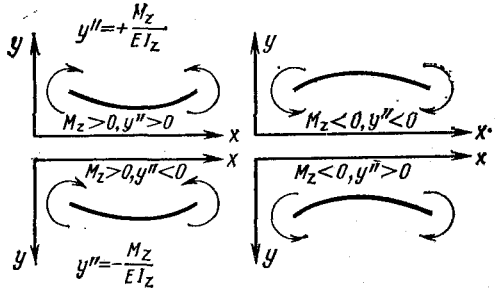


Рис. 6.37

Заметим, что уравнение (6.24) справедливо только

в пределах применимости закона Гука и лишь в тех случаях, когда плоскость действия изгибающего момента  $M_z$  содержит одну из главных центральных осей инерции сечения.

Интегрируя (6.24), находим сначала углы поворота сечений

$$EJ_z y' = EJ_z \theta = \int M_z dx + C,$$

а после второго интегрирования — прогибы балки

$$EJ_z y = \int dx \int M_z dx + Cx + D.$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий.

Например, для консольной балки с сосредоточенной парой на свободном конце (рис. 6.38)

$$EJ_z y''(x) = m;$$

$$EJ_z \theta(x) = mx + C;$$

$$EJ_z y(x) = mx^2/2 + Cx + D.$$

В заделке прогиб  $y(0)$  и угол поворота сечения  $\theta(0)$  равны нулю ( $y(0) = 0$  и  $\theta(0) = 0$ ). Эти граничные условия будут удовлетворены, если  $C = 0$  и  $D = 0$ . Следовательно, балка изогнется по дуге параболы:

$$EJ_z y(x) = \frac{1}{2} mx^2.$$

а этом примере наглядно проявляется приближенный характер уравнения (6.24), так как при постоянном изгибающем моменте  $M_z(x) = m$  согласно равенству

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z} = \frac{m}{EJ_z} = \text{const}$$

балка должна изгибаться по дуге окружности радиуса  $\rho$ . Однако в пределах длины балки указанные дуги окружности и параболы практически совпадают.

На участках с различными аналитическими выражениями для изгибающих моментов дифференциальные уравнения упругой линии

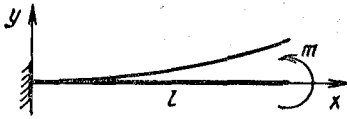


Рис. 6.38

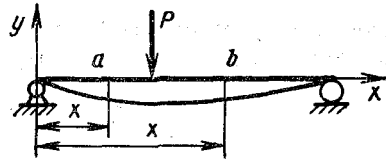


Рис. 6.39

также различны. Интегрирование этих уравнений при  $n$  участках дает  $2n$  произвольных постоянных. Для их определения к граничным условиям на опорах добавляются условия равенства прогибов и углов поворота на стыке двух смежных участков балки.

Например, в случае двухопорной балки, нагруженной на расстоянии  $a$  от левой опоры сосредоточенной силой  $P$  (рис. 6.39), имеем два участка с различными уравнениями для моментов и упругой линии. На первом участке (при  $x \leq a$ )

$$EJy_1' = \frac{Pb}{l} x;$$

$$EJ_2y_1' = \frac{Pb}{2l} x^2 + C_1; \quad EJ_2y_1 = \frac{Pb}{6l} x^3 + C_1x + D_1,$$

а на втором участке (при  $x \geq a$ )

$$EJ_2y_{II}' = \frac{Pb}{l} x - P(x-a); \quad EJ_2y_{II}' = \frac{Pb}{2l} x^2 - \frac{P(x-a)^2}{2} + C_2;$$

$$EJ_2y_{II} = \frac{Pb}{6l} x^3 - \frac{P(x-a)^3}{6} + C_2x + D_2.$$

Здесь использован прием интегрирования без раскрытия скобок, т. е. переменной интегрирования является  $(x-a)$ , а не  $x$ , что сказывается лишь на величине произвольных постоянных  $C_2$  и  $D_2$ .

Условия на опорах балки и условия плавного сопряжения участков упругой линии друг с другом будут иметь вид

- 1)  $y_1(0) = 0;$
- 2)  $y_1'(a) = y_{II}'(a);$
- 3)  $y_1(a) = y_{II}(a);$
- 4)  $y_{II}(l) = 0.$

Из первого граничного условия получим  $D_1 = 0$ , из второго имеем  $C_1 = C_2$ , а из третьего находим, что  $D_2 = D_1$ .

Используя последнее четвертое условие, подставим в уравнение упругой линии на втором участке  $x = l$  и  $y = 0$  и вычислим  $C_2$ , а тем самым и  $C_1$ :

$$C_2 = C_1 = \frac{P(l-a)^3}{6l} - \frac{Pb}{6} l = \frac{Pb(b^2 - l^2)}{6l}.$$

Таким образом, прогибы на левом и правом участках балки определены уравнениями

$$EJ_2y_1(x) = \frac{Pb}{6l} [x^3 + (b^2 - l^2)x];$$

$$EJ_2y_{II}(x) = \frac{Pb}{6l} [x^3 + (b^2 - l^2)x] - \frac{P(x-a)^3}{6}.$$

Если сила  $P$  приложена по середине пролета, то прогиб балки в этом месте будет максимальным. Величину прогиба найдем, подставляя в уравнение на левом или правом участках  $b = l/2$  и  $x = l/2$ :

$$y_{\max} = -\frac{Pl^3}{48EJ_z}.$$

Знак минус означает, что балка прогибается в сторону, противоположную положительному направлению оси  $y$ .

При числе участков, большем двух, вычисления произвольных постоянных становятся громоздкими. Однако путем искусственных приемов составления и интегрирования дифференциальных уравнений упругой линии оказывается возможным добиться равенства произвольных постоянных  $C$  и  $D$  на всех участках и свести таким образом задачу к вычислению только двух постоянных при любом числе участков. С помощью этих приемов получено так называемое универсальное уравнение упругой линии.

### 6.13. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СЕЧЕНИЙ БАЛОК. ИНТЕГРАЛ МОРА

Кроме способов определения перемещений сечений балок, основанных на интегрировании дифференциального уравнения упругой линии, существуют более удобные для практических целей энергетические методы. Одним из них является способ определения прогибов и углов поворотов сечений при упругих деформациях балок с помощью интеграла Мора. Этот интеграл может быть получен различными путями, и, в частности, исходя из условия равенства работы внешних сил  $A$  и потенциальной энергии  $U$ , накопленной в деформированной балке.

Определим, например, прогиб в точке  $C$  оси балки, нагруженной некоторой системой внешних поперечных сил и пар. Для упрощения промежуточных выкладок представим всю эту нагрузку одной сосредоточенной силой  $P$  (рис. 6.40). Обозначим через  $\delta_{PP}$  прогиб балки в точке приложения силы  $P$ , а через  $\delta_{CP}$  — искомый прогиб от этой силы в точке  $C$ .

При статическом приложении к балке сила  $P$  произведет работу

$$A = \frac{P\delta_{PP}}{2}.$$

Потенциальная энергия деформации для первого состояния балки, если пренебречь влиянием перерезывающих сил  $Q$  на прогибы, может быть подсчитана по формуле (6.22), т. е.

$$U = \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z}.$$

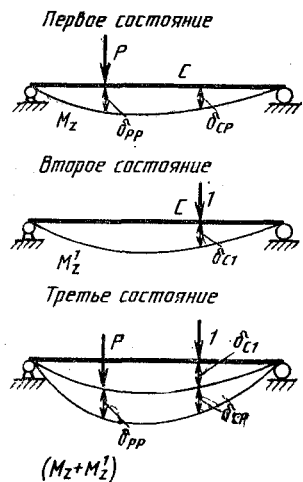


Рис. 6.40

Составляя баланс энергий  $A = U$ , получаем

$$\frac{P\delta_{PP}}{2} = \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z}.$$

Поступим далее следующим образом. Снимем с балки всю заданную нагрузку и приложим статически в сечении  $C$  в направлении искомого прогиба вспомогательную силу, равную по величине единице измерения силы, например, 1Н. От этой единичной нагрузки в сечениях балки возникнут изгибающие моменты  $M_z^1$ , а точка  $C$  в процессе деформации балки пройдет путь  $\delta_{C1}$  (см. рис. 6.40).

Баланс энергий во втором состоянии балки запишется так:

$$\frac{1 \cdot \delta_{C1}}{2} = \int_l \frac{(M_z^1)^2 dx}{2EJ_z}.$$

Рассмотрим третье состояние, когда к балке, уже нагруженной вспомогательной единичной силой, прикладывается еще и заданная нагрузка  $P$  (см. рис. 6.40). Эта нагрузка вызовет дополнительные деформации балки, причем согласно принципу независимости действия сил дополнительные прогибы будут такими же, как и в первом из рассмотренных состояний балки, когда она нагружена только силой  $P$ . Поэтому работа внешних сил, если подсчитывать ее в последовательности их приложения,

$$A = \frac{1 \cdot \delta_{C1}}{2} + \frac{P\delta_{PP}}{2} + 1 \cdot \delta_{CP}.$$

У последнего слагаемого множитель  $1/2$  отсутствует потому, что к моменту приложения заданной нагрузки единичная сила достигла уже своего конечного значения и в процессе перемещения  $\delta_{CP}$  величины своей не изменяет (рис. 6.41).

Изгибающие моменты в сечениях балки в ее третьем состоянии равны суммам изгибающих моментов  $M_z$  от заданных нагрузок и  $M_z^1$  от единичной силы, а потенциальная энергия деформации

$$\begin{aligned} U &= \int_l \frac{(M_z + M_z^1)^2}{2EJ_z} dx = \\ &= \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z} + \int_l \frac{M_z M_z^1 dx}{EJ_z} + \int_l \frac{(M_z^1)^2 dx}{2EJ_z}. \end{aligned}$$

Баланс энергий в третьем состоянии

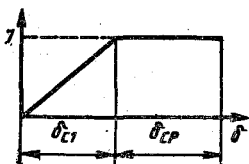


Рис. 6.41

$$\begin{aligned} \frac{P\delta_{PP}}{2} + \frac{1 \cdot \delta_{CP}}{2} + 1 \cdot \delta_{CP} &= \\ &= \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z} + \int_l \frac{M_z M_z^1}{EJ_z} dx + \int_l \frac{(M_z^1)^2 dx}{2EJ_z}. \end{aligned}$$

Учитывая выражения для балансов энергий в первом и втором состояниях, получаем

$$1 \cdot \delta_{CP} = \int_l \frac{M_z M_z^1}{EJ_z} dx.$$

Чтобы левая часть равенства представляла собой непосредственно искомый прогиб балки, нужно разделить обе части этого равенства на вспомогательную единичную силу или считать ее безразмерной. В обоих случаях получаем для определения прогибов балки выражение

$$\delta_{CP} = \int_l \frac{M_z M_z^1}{EJ_z} dx, \quad (6.25)$$

где  $M_z^1$  имеет размерность длины.

Задача определения угла поворота сечения  $C$  приводит к тому же выражению (6.25). Отличие заключается в том, что в этом случае в сечении  $C$  надо прикладывать в направлении искомого углового перемещения единичный момент, а под  $\delta_{CP}$  понимать угол поворота сечения в радианах.

В выражении (6.25) интеграл должен быть распространен на всю длину балки. Если балка имеет  $n$  участков с различными аналитическими выражениями для изгибающих моментов  $M_z(x)$  и  $M_z^1(x)$ , то в правой части будет стоять сумма интегралов по всем  $n$  участкам.

Итак, прогибы и углы поворотов сечений балок могут быть найдены из равенства, называемого интегралом Мора:

$$\delta = \sum_1^n \int_l \frac{M_z M_z^1}{EJ_z} dx, \quad (6.26)$$

здесь  $M_z = M_z(x)$  — изгибающий момент в текущем сечении балки от заданной нагрузки;  $M_z^1 = M_z^1(x)$  — изгибающий момент в том же сечении от единичной силы, если ищется прогиб, и единичного момента, если ищется угол поворота сечения.

Для определения  $M_z^1$  надо снять с балки заданную нагрузку (но не удалять опоры) и приложить в том сечении, перемещение которого ищется, в направлении этого перемещения единичную силу или пару. Моменты  $M_z$  и  $M_z^1$  надо подставлять в интеграл Мора с их знаками. Положительный знак в окончательном выражении означает, что сечение перемещается по направлению приложенной единичной нагрузки, а отрицательный знак показывает, что перемещение происходит в противоположном направлении.

**Пример.** Определить вертикальное перемещение среднего и угол поворота торцевого сечений консольной балки (рис. 6.42).

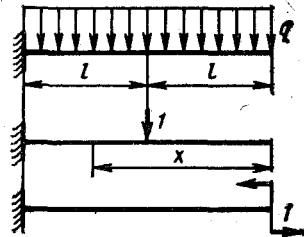


Рис. 6.42

**Решение.** Изгибающий момент от заданной нагрузки в текущем сечении  $M_z(x) = -qx^2/2$ .

При нагружении единичной силой в среднем сечении балка будет иметь два участка, причем на первом  $M_z^1(x) = 0$ , а на втором  $M_z^1(x) = -1(x-l)$ . Искомый прогиб в середине балки

$$y(l) = \frac{1}{EJ_z} \int_l^{2l} \frac{qx^2}{2} (x-l) dx = \frac{17}{24} \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

Для определения угла поворота торцевого сечения приложим в этом сечении единичный момент. Тогда  $M_z^1(x) = 1$ , искомый угол поворота торца балки

$$\theta = -\frac{1}{EJ_z} \int_0^{2l} \frac{qx^2}{2} \cdot 1 \cdot dx = -\frac{8}{6} \frac{ql^3}{EJ_z}.$$

Следовательно, торцевое сечение поворачивается не в направлении вращения единичной пары (см. рис. 6.42), а в противоположную сторону — по часовой стрелке.

#### 6.14. СПОСОБ ВЕРЕЩАГИНА

В 1925 г. А. Н. Верещагин предложил простой графоаналитический прием вычисления интеграла  $\int_l M_z(x) M_z^1(x) dx$  в случаях, когда эпюра  $M_z^1$  (или  $M_z$ ) ограничена прямыми линиями. По существу это прием графоаналитического вычисления определенного интеграла от произведения двух функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , из которых одна, например  $\varphi(x)$ , линейная, т. е. имеет вид  $\varphi(x) = kx + b$ .

Рассмотрим участок балки, в пределах которого эпюра изгибающих моментов от единичной нагрузки ограничена одной прямой линией  $M_z^1 = kx + b$ , а изгибающий момент от заданной нагрузки изменяется по некоторому произвольному закону  $M_z = M_z(x)$  (рис. 6.43). Тогда в пределах этого участка

$$\begin{aligned} \int_l M_z(x) M_z^1(x) dx &= \int_l M_z(x) (kx + b) dx = \\ &= k \int_l x M_z(x) dx + b \int_l M_z(x) dx. \end{aligned}$$

Второй интеграл представляет собой площадь  $\omega$  эпюры  $M_z$  на рассматриваемом участке, а первый — статический момент этой площади относительно оси  $y$  и поэтому равен произведению площади  $\omega$  на координату ее центра тяжести  $x_C$ . Таким образом,

$$\int_l M_z(x) M_z^1(x) dx = \omega(kx_C + b).$$

Здесь  $kx_C + b$  — ордината  $y_C$  эпюры  $M_z^1$  под центром тяжести площади  $\omega$ . Следовательно,

$$\int_l M_z(x) M_z^1(x) dx = \omega y_C.$$



Произведение  $\omega y_C$  будет положительным, когда  $\omega$  и  $y_C$  расположены по одну сторону от оси эпюры, и отрицательным, если они находятся по разные стороны от этой оси.

Итак, по способу Верещагина операция интегрирования заменяется перемножением площади  $\omega$  одной эпюры на ординату  $y_C$  второй (обязательно линейной) эпюры, взятой под центром тяжести площади  $\omega$ .

Важно всегда помнить, что такое «перемножение» эпюр возможно лишь на участке, ограниченном одной прямой той эпюры, с которой берется ордината  $y_C$ . Поэтому при вычислении перемещений сечений балок способом Верещагина интеграл Мора по всей длине балки надо заменить суммой интегралов по участкам, в пределах которых эпюра моментов от единичной нагрузки не имеет изломов. Тогда

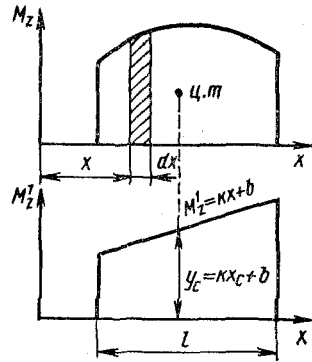


Рис. 6.43

$$\delta = \sum_1^n \int \frac{M_z(x) M_z^1(x) dx}{EJ_z} = \sum_1^n \frac{\omega y_C}{EI_z}. \quad (6.27)$$

Для успешного применения способа Верещагина необходимо иметь формулы, по которым могут быть вычислены площади  $\omega$  и координаты  $x_C$  их центров тяжести. Приведенные в табл. 6.1 данные отвечают только наиболее простым случаям нагружения балки. Однако более сложные эпюры изгибающих моментов допустимо разбивать на простейшие фигуры, площади  $\omega_i$  и координаты  $y_{Ci}$  которых известны, а затем находить произведение  $\omega y_C$  для такой сложной эпюры суммированием произведений площадей  $\omega_i$  ее частей на соответствующие им координаты  $y_{Ci}$ . Объясняется это тем, что разложение множимой эпюры на части равносильно представлению функции  $M_z(x)$  в интеграле (6.27) в виде суммы:

$$M_z(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x).$$

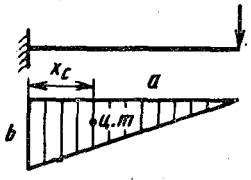
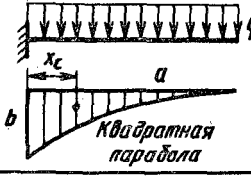
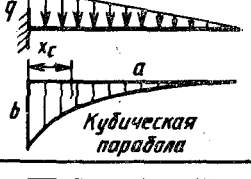
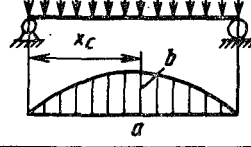
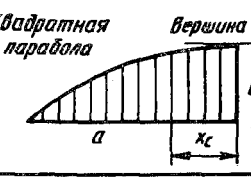
В некоторых случаях упрощает расчеты построение расслоенных эпюр, т. е. от каждой из внешних сил и пар в отдельности.

Если обе эпюры  $M_z$  и  $M_z^1$  линейные, конечный результат их перемножения не зависит от того, умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй или, наоборот, площадь второй на ординату первой.

Для практического вычисления перемещений по способу Верещагина надо:

1) построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки (основная эпюра);

Таблица 6.1

Вид эпюры $M_z$	Площадь $\omega$	Координата центра тяжести $x_c$
	$\frac{ab}{2}$	$\frac{a}{3}$
 <p>Квадратная парабола</p>	$\frac{ab}{3}$	$\frac{a}{4}$
 <p>Кубическая парабола</p>	$\frac{ab^*}{4}$	$\frac{a}{5}^*$
	$\frac{2}{3}ab$	$\frac{a}{2}$
 <p>Квадратная парабола вершина</p>	$\frac{2}{3}ab$	$\frac{3}{8}a$

\*) Эти формулы несправедливы для такого случая нагружения



2) снять с балки заданную нагрузку (но сохранить опоры) и приложить в сечении, перемещение которого ищется, в направлении этого перемещения единичную силу, когда ищется прогиб, или единичную пару, если искомым является угол поворота;

3) построить эпюру изгибающих моментов от единичной нагрузки (единичная эпюра);

4) разбить эпюры от заданных нагрузок на отдельные площади  $\omega_i$  и вычислить ординаты  $y_{Ci}$  единичной эпюры под центрами тяжести этих площадей;

5) составить произведение  $\omega_i y_{Ci}$  и просуммировать их.

**Пример.** Определить прогиб конца консоли (рис. 6.44) и угол поворота сечения  $B$ .

**Решение.** Построим эпюры изгибающих моментов от заданных нагрузок, а затем от единичной силы, приложенной к концу консоли, и от единичной пары, приложенной в сечении  $B$  (см. рис. 6.44).

Для определения прогиба точки  $A$  надо перемножить эпюры от заданной нагрузки и единичной силы.

Разобьем основную эпюру на параболический треугольник, прямоугольник и трапециевидный треугольник (трапецию разбиваем на прямоугольник и треугольник потому, что заранее неизвестно, где находится ее центр тяжести) и вычислим  $\omega_i$ , а затем по эпюре от единичной силы найдем координаты  $y_{Ci}$ . В результате получим

$$y_A = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{3}{4}l + \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} ql^2 \cdot l \cdot \frac{5}{3}l \right) = \frac{41}{24} \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

Определяя угол поворота сечения  $B$ , перемножаем эпюры от заданных нагрузок и единичного момента только на правом участке (на левом это произведение равно нулю). Обе эпюры на этом участке линейные, и поэтому безразлично, с какой из них брать площадь. Если площадь взять с эпюры от заданных нагрузок, то

$$\theta_B = - \frac{1}{EJ_z} \frac{l}{2} \left( \frac{1}{2} ql^2 + \frac{3}{2} ql^2 \right) \cdot l = - \frac{ql^3}{EJ_z}.$$

Если же площадь взять с единичной эпюры, то

$$\theta_B = - \frac{1}{EJ_z} \cdot l \cdot l \cdot ql^2 = - \frac{ql^3}{EJ_z}.$$

Результаты перемножения, как и следовало ожидать, одинаковы. Знак минус показывает, что сечение  $B$  поворачивается в направлении, противоположном направлению единичного момента.

**Пример.** Определить прогиб середины пролета балки (рис. 6.45).

**Решение.** Перемножить эпюры от заданных нагрузок и единичной силы сразу на всей длине балки нельзя, так как единичная эпюра ограничена двумя прямыми. Поэтому перемножим эпюры на половине балки и результат удвоим. Используя данные табл. 6.1, получаем

$$y_A = \frac{2}{EJ_z} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{4} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

Нетрудно проверить, что правая часть последнего выражения имеет размерность длины.

**Пример.** Определить прогиб в точке  $B$  балки, показанной на рис. 6.46.

**Решение.** Строим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и единичной силы, приложенной в точке  $B$ . Чтобы перемножить эти эпюры, надо балку разбить на три участка, так как единичная эпюра ограничена тремя различными прямыми.

Операция перемножения эпюр на втором и третьем участках осуществляется прямо. Затруднения возникают при вычислении площади и координат центра тя-

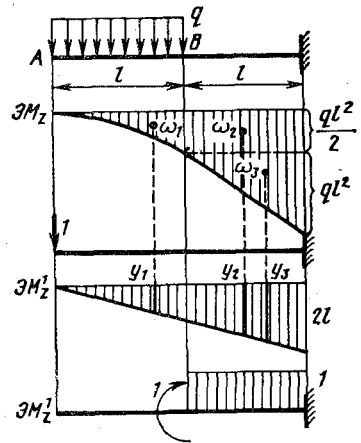


Рис. 6.44

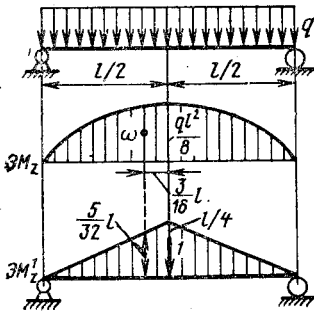


Рис. 6.45

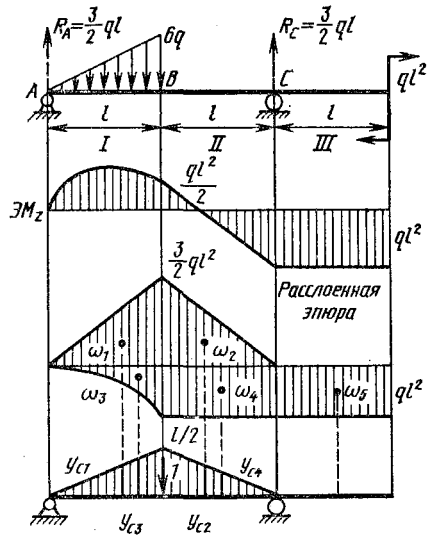


Рис. 6.46

жести основной эпюры на первом участке. В таких случаях намного упрощает решение задачи построение расслоенных эпюр. При этом удобно одно из сечений принять условно за неподвижное и строить эпюры от каждой из нагрузок, приближаясь справа и слева к этому сечению. Целесообразно за неподвижное принимать сечение в месте перелома на эпюре единичных нагрузок.

Расслоенная эпюра, в которой за неподвижное принято сечение  $B$ , представлена на рис. 6.46. Вычислив площади составных частей расслоенной эпюры и соответствующие им ординаты единичной эпюры, получаем

$$y_B = \frac{1}{EJ_z} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{4} ql^2 \cdot l \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{l}{2} - ql^2 \cdot l \cdot \frac{l}{4} \right] = \frac{3}{20} \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

### 6.15. БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Нормальные напряжения в балках, поперечные сечения которых изменяются по длине (рис. 6.47), могут быть с достаточной точностью определены по формуле (6.14):

$$\sigma(x) = \frac{M_z(x)}{J_z(x)} y.$$

Перемещения сечений таких балок удобно определять способом Мора:

$$\delta = \sum_1^n \int_l \frac{M_z(x) M_z^1(x)}{EJ_z(x)} dx,$$

где  $J_z(x)$  — момент инерции текущего сечения.

В балках ступенчатого сечения интеграл Мора на каждом участке с  $J_z(x) = \text{const}$  может быть вычислен способом Верещагина, как

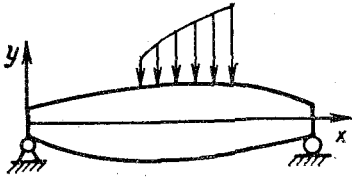


Рис. 6.47

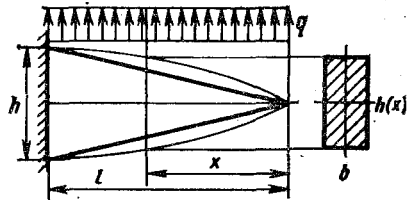


Рис. 6.48

и для балок постоянного сечения. Этот способ применим и при плавном изменении размеров сечения, если пользоваться эпюрой приведенных моментов:

$$M_{\text{пр}}(x) = \frac{M_z(x)}{J_z(x)}.$$

В этом случае

$$\delta = \sum_1^n \frac{1}{E} \int_l M_{\text{пр}}(x) M_z^1(x) dx = \sum_1^n \frac{\omega_{\text{пр}} y_c}{E}.$$

Балки, у которых при заданной нагрузке максимальные напряжения  $\sigma_{\text{max}}$  во всех сечениях одинаковы, называются балками равного сопротивления изгибу.

В качестве примера определим, по какому закону должна изменяться высота сечения  $h$  при постоянной толщине  $b$ , чтобы консоль с равномерно распределенной нагрузкой (рис. 6.48) представляла собой балку равного сопротивления изгибу.

Изгибающий момент в текущем сечении консоли  $M_z(x) = qx^2/2$ , а момент сопротивления изгибу этого сечения  $W_z = bh^2(x)/6$ . Следовательно, максимальное напряжение в текущем сечении  $\sigma_{\text{max}}(x) = \frac{3qx^2}{bh^2(x)}$ , а в заделке  $\sigma_{\text{max}}(l) = \frac{3ql^2}{bh^2}$ .

Приравнявая правые части последних выражений, находим  $h(x) = \frac{h}{l}x$ , т. е. высота сечения должна меняться по линейному закону.

**СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ  
СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ**

---

**7.1. ТИПЫ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Стержневыми системами принято называть конструкции, элементы которых имеют форму плоского или пространственного бруса.

Стержневая система называется плоской, если оси всех составляющих ее брусьев расположены в одной плоскости и в этой же плоскости расположены все внешние нагрузки и одна из двух главных центральных осей инерции всех поперечных сечений системы. Такая система будет деформироваться только в своей плоскости. Системы, в которых указанные условия не соблюдены, называются пространственными. Геометрически плоская система с нагрузкой, перпендикулярной этой плоскости, называется плоскопространственной.

Конструкции из прямых стержней, испытывающих, главным образом, растяжение или сжатие, называются фермами. В фермах нагрузки прикладываются к ее узлам, а соединение стержней в узлах ферм считается идеально шарнирным.

Стержневые системы, элементы которых работают главным образом на изгиб и кручение, называются рамами. Для рам характерно жесткое соединение составляющих их брусьев в узлах. Жестким считается соединение, при котором в процессе деформации брусьев углы между их осями в вершинах узлов не изменяются (рис. 7.1). Отдельные части рамы могут быть соединены шарнирно.

Соотношение продольных и поперечных размеров составляющих раму брусьев подбирается так, чтобы их изгибные  $EJ_z/I$  и крутильные  $GJ_k/I$  жесткости были достаточно большими. Стержни фермы, наоборот, выполняются в виде тонких длинных брусьев с малой изгибной и крутильной жесткостью.

Системы, содержащие одновременно элементы рамного и ферменного типа, а иногда и пружины, называются смешанными.

Стержневые системы являются статически определимыми, если усилия во всех сечениях их элементов и опорные реакции могут быть найдены из одних лишь уравнений равновесия.

**7.2. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ  
БРУСЕ МАЛОЙ КРИВИЗНЫ. ИНТЕГРАЛ МОРА**

При нагружении пространственного бруса (рис. 7.2) в его поперечных сечениях могут возникнуть одновременно все шесть внутренних силовых факторов: нормальная сила  $N$ , пере-

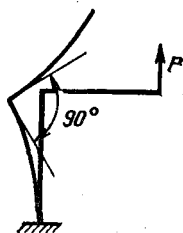


Рис. 7.1

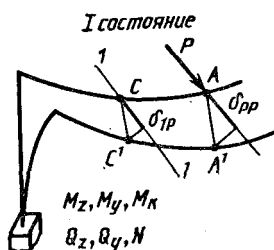
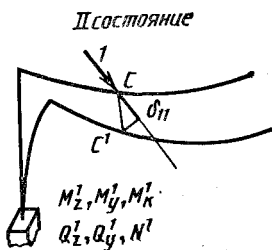


Рис. 7.2



резывающие силы  $Q_y$  и  $Q_z$ , крутящий момент  $M_K$  и изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$ . Эти факторы зависят от величины нагрузок и положения сечения и определяются из шести уравнений равновесия отсеченной части бруса (см. разд. 1.11).

Некоторое влияние на распределение напряжений в сечении бруса и его деформации при изгибе оказывает кривизна оси бруса. Однако, как показали исследования, это влияние становится значительным только при отношении радиуса кривизны оси  $\rho$  к высоте  $h$  соответствующего поперечного сечения бруса меньше 5. Такой брус называют брусом большой кривизны, или просто кривым брусом. В стержневых системах элементы типа бруса большой кривизны встречаются крайне редко.

В бруске малой кривизны ( $\rho/h \geq 5$ ) влияние кривизны оси на напряжения и деформации незначительно, и поэтому расчет таких брусков на изгиб с достаточной точностью можно производить по формулам для прямого бруса.

Если при определении внутренних силовых факторов в качестве осей  $y$  и  $z$  выбрать главные центральные оси инерции сечения, то напряжения в сечении бруса малой кривизны можно вычислить по формулам

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y;$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z b(y)}; \quad \tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^{\text{отс}}}{J_y b(z)};$$

$$\tau = \frac{QS}{J\delta}; \quad \tau_{\text{max}} = \frac{M_K}{W_R}.$$

Перейдем к определению перемещений сечений бруса малой кривизны. Определим, например, линейное перемещение центра тяжести сечения  $C$ , или, иначе, перемещение точки  $C$  оси бруса (рис. 7.2). Так как направление полного перемещения рассматриваемой точки заранее неизвестно, то сначала определим проекцию этого перемещения на некоторое наперед выбранное направление  $1-1$ .

Проекция полного перемещения на заранее выбранное (заданное) направление называется перемещением по заданному направ-

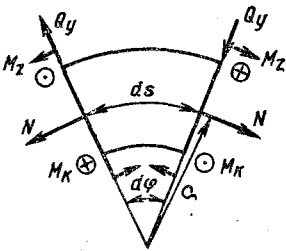


Рис. 7.3

лению и обозначается  $\delta_{ik}$ . Индекс  $i$  показывает, перемещение какого сечения и в каком направлении ищется, а индекс  $k$  обозначает причину, вызвавшую это перемещение.

Для определения перемещения  $\delta_{1P}$  точки  $C$  оси бруса воспользуемся таким общим законом механики, как принцип возможных перемещений. Применительно к деформируемому телу этот принцип может быть сформулирован так: если система (тело) находится в равновесии под дей-

ствием приложенных к ней внешних сил, то сумма работ всех внешних и внутренних сил при всяком возможном бесконечно малом перемещении точек этой системы равна нулю.

Возможными называются малые перемещения точек тела, допускаемые связями, которые наложены на это тело. Перемещения точек бруса от заданной внешней нагрузки суть возможные перемещения; они малы и совместны со связями, налагаемыми опорными устройствами.

Рассмотрим два состояния бруса (см. рис. 7.2). Первое состояние определяется заданными внешними нагрузками, а второе — единичной силой, приложенной в направлении искомого перемещения в центре тяжести того сечения, перемещение которого ищется. При определении угла поворота сечения во втором состоянии к брусу прикладывается единичный момент.

Применим к брусу, находящемуся во втором состоянии, принцип возможных перемещений. В качестве возможных примем перемещения точек бруса, вызванные заданной нагрузкой (перемещения в первом состоянии).

По условию единичная сила приложена в направлении перемещения  $\delta_{1P}$  центра тяжести сечения  $C$  бруса и своей величины в процессе этого перемещения не меняет. Тогда работа на возможном перемещении внешних сил второго состояния

$$A = 1 \cdot \delta_{1P}.$$

Реактивные силы работы не производят, так как перемещения точек их приложения равны нулю.

Определим теперь работу внутренних сил второго состояния на перемещениях, которые имеют место в первом состоянии, т. е. при нагружении бруса заданными внешними силами.

Рассмотрим элемент бруса длиной  $dx$  (рис. 7.3). По его граням в первом состоянии действуют изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$ , крутящие моменты  $M_k$ , нормальные силы  $N$ , перерезывающие силы  $Q_y$  и  $Q_z$ , вызванные заданной нагрузкой, а по граням такого же элемента во втором состоянии — соответственно  $M_y^1$ ,  $M_z^1$ ,  $M_k^1$ ,  $N^1$ ,  $Q_y^1$  и  $Q_z^1$  от действия единичной нагрузки.

В брусе малой кривизны каждый из внутренних силовых факторов совершает работу на перемещении, вызванном аналогичным



силовым фактором (для бруса большой кривизны это положение несправедливо). Поэтому работу силовых факторов  $M_y^1, M_z^1, M_K^1, N^1, Q_y^1, Q_z^1$  на перемещениях граней элемента, вызванных соответственно факторами  $M_y, M_z, M_K, N, Q_y$  и  $Q_z$  можно подсчитать так же, как и потенциальную энергию в случае растяжения, кручения и изгиба прямого бруса (см. разд. 2.17, 5.4, 6.1). Учитывая, что в процессе перемещения граней элемента бруса внутренние силовые факторы от единичной нагрузки не изменяются, получаем

$$dU = \frac{M_y^1 M_y}{EJ_y} ds + \frac{M_z^1 M_z}{EJ_z} ds + \frac{M_K^1 M_K}{GJ_K} ds + \frac{N^1 N}{EF} ds + \\ + K_y \frac{Q_y^1 Q_y}{GF} ds + K_z \frac{Q_z^1 Q_z}{GF} ds,$$

здесь  $K_y$  и  $K_z$  — коэффициенты, учитывающие неравномерность распределения  $\tau$  по сечению при изгибе бруса.

Интегрируя по всей длине бруса, находим работу внутренних сил второго состояния на возможных перемещениях точек их приложения

$$U = \int_l \frac{M_y M_y^1}{EJ_y} ds + \int_l \frac{M_z M_z^1}{EJ_z} ds + \int_l \frac{M_K M_K^1}{GJ_K} ds + \int_l \frac{NN^1}{EF} ds + \\ + K_y \int_l \frac{Q_y Q_y^1}{GF} ds + K_z \int_l \frac{Q_z Q_z^1}{GF} ds.$$

Сумма работ внешних и внутренних сил согласно принципу возможных перемещений равна нулю. Но работа внутренних сил всегда противоположна по знаку работе внешних сил, т. е.  $1 \cdot \delta_{1P} - U = 0$ . Таким образом, искомое перемещение сечения бруса

$$\delta_{1P} = \int_l \frac{M_y M_y^1}{EJ} ds + \int_l \frac{M_z M_z^1}{EJ_z} ds + \int_l \frac{M_K M_K^1}{GJ_K} ds + \int_l \frac{NN^1}{EF} ds + \\ + K_y \int_l \frac{Q_y Q_y^1}{GF} ds + K_z \int_l \frac{Q_z Q_z^1}{GF} ds. \quad (7.1)$$

Уравнение (7.1) называется интегралом Мора для пространственного бруса малой кривизны. Важно помнить, что в это равенство входят внутренние силовые факторы в текущем сечении, вычисленные относительно главных центральных осей инерции этого сечения.

Произведение силового фактора от заданной нагрузки (например,  $M_z$ ) на соответствующий силовой фактор от единичной нагрузки ( $M_z^1$ ) считается положительным, если эти факторы совпадают по направлению. На криволинейных участках изгибающий момент принято считать положительным, если он увеличивает кривизну **оси**.

Шестичленная формула (7.1) позволяет вычислить только проекцию полного перемещения сечения бруса на заданное направление. Если требуется определить полное перемещение  $\delta$ , то сначала по формуле (7.1) вычисляются проекции этого перемещения на три взаимно перпендикулярных направления (направления главных центральных осей  $y$  и  $z$  сечения и касательной к оси  $x$  бруса), а затем находится  $\delta$ :

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2}. \quad (7.2)$$

Слагаемые правой части равенства (7.1) по своей относительной величине неравноценны и соотношение между ними зависит от типа конструкции. Например, для подавляющего большинства рам влияние на их деформации перерезывающих и нормальных сил существенно меньше влияния изгибающих и крутящих моментов. Поэтому при определении перемещений сечений рам тремя последними слагаемыми формулы (7.1) обычно пренебрегают.

Изложенный выше метод вывода интеграла Мора не является единственным. Эту формулу для бруса малой кривизны можно получить различными способами, и в частности, исходя из условия равенства работы внешних сил  $A$  и потенциальной энергии деформации бруса  $U$ , как это было сделано при выводе интеграла Мора для балок (см. разд. 6.13).

### 7.3. ПЛОСКИЕ РАМЫ

В сечениях плоской рамы возникают только те силовые факторы, которые действуют в плоскости самой рамы, а именно: изгибающие моменты  $M_z$ , перерезывающие силы  $Q_y$  и нормальные силы  $N$ . Следовательно, для плоской рамы из шести слагаемых в формуле (7.1) остается три. Если же учесть, что основную роль в рамах играют изгибные перемещения, в этой формуле можно оставить лишь одно слагаемое. Поэтому интеграл Мора для плоских рам принимает такой же вид, как и для балок:

$$\delta = \sum_1^n \int \frac{M_z M_z^1}{EJ_z} ds. \quad (7.3)$$

На прямолинейных участках рам этот интеграл удобно вычислять перемножением эпюр способом Верещагина.

Эпюры изгибающих моментов в рамах строятся на сжатых волокнах; ординаты эпюр  $M_z$  откладываются на перпендикулярах к оси рамы в сторону сжатых волокон.

**Пример.** Построить эпюру  $M_z$  для плоской рамы (рис. 7.4) и определить вертикальное перемещение сечения  $D$ , если  $l = 20$  см,  $q = 20$  Н/см, а сечение имеет форму квадрата  $2 \times 2$  см.

**Решение.** Применяя метод сечений (рис. 7.4), определяем  $M_z$  в текущих сечениях каждого участка рамы:

$$M_I(x) = \frac{qx^2}{2}, \quad M_{II}(x) = \frac{ql^2}{2}, \quad M_{III}(x) = ql \left( \frac{l}{2} - x \right).$$

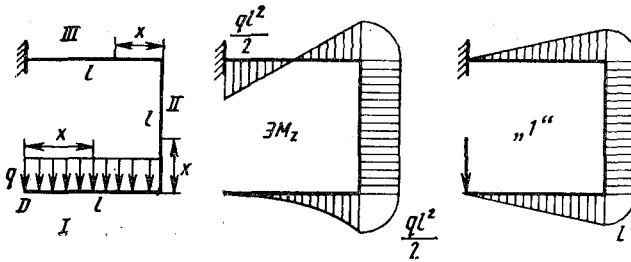


Рис. 7.4

По этим уравнениям строим эпюры (см. рис. 7.4) учитывая, что на первом участке сжатые волокна расположены ниже оси, на втором — справа, на третьем — на одной половине вверху, а на второй — внизу. В среднем сечении последнего участка  $M_{III}(l/2) = 0$ , так как линия действия равнодействующей распределенной нагрузки проходит через это сечение и никаких других нагрузок к отсеченной части рамы не приложено.

Заметим, что в местах излома рамы изгибающие моменты в двух смежных сечениях, проведенных по разные стороны от вершины угла, равны по величине и вызывают сжатие волокон, которые находятся по одну сторону от оси рамы (в данном случае — внешних волокон). Это свойство любых плоских рам. Оно несправедливо только при наличии внешнего сосредоточенного момента в вершине угла рамы. В последнем случае изгибающие моменты в указанных смежных сечениях будут отличаться как раз на величину момента этой пары, а сжатые волокна могут быть расположены по разные стороны от оси рамы (см. третий пример этого раздела).

Для определения вертикального перемещения сечения  $D$  снимем с рамы заданную нагрузку, приложим в этом сечении в вертикальном направлении единичную силу и построим эпюру изгибающих моментов  $M_2^1$  от этой силы (см. рис. 7.4). На каждом участке рамы эпюра  $M_2^1$  ограничена прямыми линиями. Поэтому вычисление интегралов (7.3) можно провести способом Верещагина (см. разд. 6.13):

$$\delta_D = \frac{1}{EJ_z} \left[ \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} l + \frac{ql^2}{2} + l \cdot l + \frac{l^2}{2} \cdot \frac{ql^2}{6} \right] = \frac{17}{24} \frac{ql^4}{EJ_z} =$$

$$= \frac{17 \cdot 2 \cdot 200^4 \cdot 12}{24 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 20^4} = 0,85 \text{ мм.}$$

В последнем слагаемом площадь  $\omega$  взята с единичной эпюры, а ордината  $y_G$  получена подстановкой в  $M_{III}(x)$  значения  $x = l/3$ .

**Пример.** Определить полное перемещение сечения  $C$  плоской криволинейной рамы (рис. 7.5).

**Решение.** Изгибающий момент от силы  $P$  в текущем сечении  $M_z(\varphi) = PR \sin \varphi$ . Снимем силу  $P$  и приложим в сечении сначала вертикальную, а затем

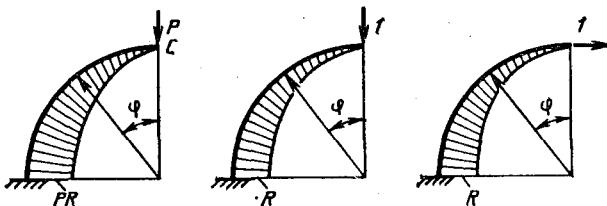


Рис. 7.5

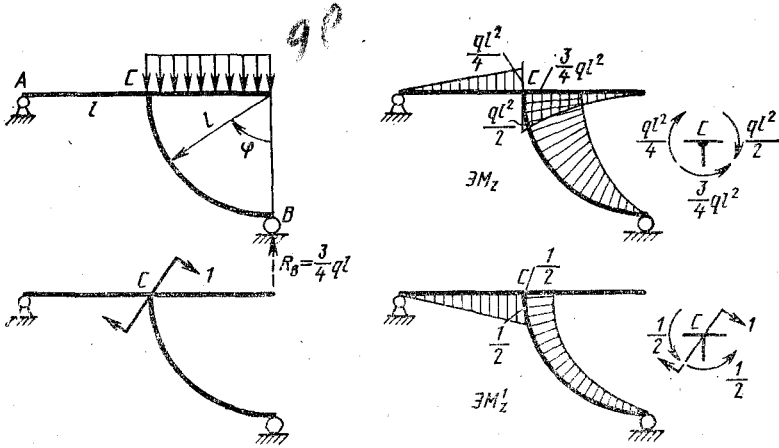


Рис. 7.6

горизонтальную единичные силы и определим изгибающие моменты в текущем сечении от этих сил

$$M_z^1(\varphi) = R \sin \varphi, \quad M_z^1(\varphi) = R(1 - \cos \varphi).$$

Эпюры изгибающих моментов приведены на рис. 7.5.

Согласно формуле (7.3) и равенству  $ds = R d\varphi$ ,

$$\delta_{\text{верт}} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\pi/2} PR \sin \varphi R \sin \varphi R d\varphi = \frac{\pi PR^3}{4EJ_z};$$

$$\delta_{\text{гор}} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\pi/2} PR \sin \varphi R (1 - \cos \varphi) R d\varphi = \frac{PR^3}{2EJ_z}.$$

Искомое полное перемещение

$$\delta = \sqrt{\delta_{\text{гор}}^2 + \delta_{\text{верт}}^2} = \frac{PR^3}{EJ_z} \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}} = 0,93 \frac{PR^3}{EJ_z}.$$

Направление перемещения определяется углом  $\alpha$ , тангенс которого  $\operatorname{tg} \alpha = \delta_{\text{гор}} / \delta_{\text{верт}} = 2/\pi = 0,64$ . Следовательно,  $\alpha = 32^\circ 30'$ .

**Пример.** Построить эпюру  $M_z$  для рамы, представленной на рис. 7.6, и определить угол поворота сечения C.

**Решение.** В узле C сходятся три стержня. В таких случаях эпюры строят приближаясь к этому узлу со стороны каждого стержня.

Согласно дифференциальным зависимостям,

$$\frac{dQ_y}{ds} = q; \quad \frac{dM_z}{ds} = Q_y; \quad \frac{d^2 M_z}{ds^2} = q$$

(см. разд. 6.3), справедливым и для рам, эпюра  $M_z$  на участке с распределенной нагрузкой ограничена квадратной параболой, направленной выпуклостью навстречу стрелкам нагрузки (см. рис. 7.6). В конечном сечении этого участка  $M_z = 0,5q \cdot l^2$ , а в начальном  $M_z = 0$ . На криволинейном участке момент изменяется

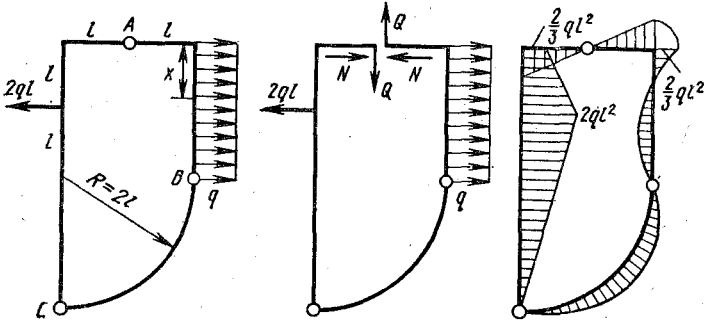


Рис. 7.7

по закону  $M_z(\varphi) = 0,75ql^2 \sin \varphi$ , на участке  $AC$  — по линейному закону ( $q = 0$ ) от  $M_z = 0,75ql^2 - 0,5ql^2 = 0,25ql^2$  в сечении узла  $C$  до  $M_z = 0$  на шарнирно закрепленном конце.

Узел  $C$ , как и вся рама, находится в равновесии. Поэтому изгибающие моменты в близких к центру узла сечениях должны представлять собой систему уравновешенных моментов (см. рис. 7.6). Условия равновесия узлов необходимо всегда использовать для контроля правильности вычисления изгибающих моментов при построении эпюр в любых плоских рамах.

Вследствие жесткого соединения стержней в узле  $C$  сечения всех стержней в узле  $C$  повернутся на один и тот же угол. Чтобы определить этот угол, надо приложить в узле единичный момент и построить эпюру  $M_{1/2}^1$  (см. рис. 7.6). Узел  $C$  рамы и в этом случае нагружения находится в равновесии, но изгибающие моменты в смежных сечениях отличаются на величину единичного момента, вызывая сжатие внешних волокон на криволинейном и внутренних — на прямолинейном участке рамы.

Вычисляя интеграл Мора (7.3), находим

$$\theta_C = \frac{1}{EJ_z} \left[ \int_0^{\pi/2} 0,75ql^2 \sin \varphi \cdot 0,5 \sin \varphi \cdot l \, d\varphi - 0,5 \cdot 0,25 \cdot ql^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5l \right] =$$

$$= 0,25 \frac{ql^3}{EJ_z}.$$

**Пример.** Построить эпюру изгибающих моментов в раме, представляющей собой замкнутый контур с тремя шарнирами (рис. 7.7).

**Решение.** Рама не имеет опор, но она находится в равновесии, так как внешняя нагрузка является самоуравновешенной. Чтобы построить эпюру  $M_z$ , надо сначала определить внутренние силовые факторы хотя бы в одном сечении рамы. Рассечем раму, например, по оси шарнира  $A$ . Силы взаимодействия частиц материала рамы в этом сечении приводятся к нормальной  $N$  и перерезывающей  $Q$  силам, направленным по обе стороны от разреза в противоположные стороны. Наличие двух других шарниров позволяет определить величины  $N$  и  $Q$ . Действительно, записывая условия равенства нулю изгибающих моментов в сечениях шарниров  $B$  и  $C$ , получаем

$$M_B = Ql - N \cdot 2l + 2ql^2 = 0; \quad M_C = Ql + N \cdot 4l - 6ql^2 = 0,$$

$$\text{Отсюда } N = \frac{4}{3} ql; \quad Q = \frac{2}{3} ql.$$

Далее строим эпюру  $M_z$ , как и в незамкнутой раме, начиная с места разреза (см. рис. 7.7).

#### 7.4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ РАМЫ

Для пространственных рам, если пренебречь влиянием на их деформации перерезывающих и нормальных сил, интеграл Мора (7.1) принимает вид

$$\delta = \sum_1^n \int_i \frac{M_z M_z^1}{EJ_z} ds + \sum_1^m \int_i \frac{M_y M_y^1}{EJ_y} ds + \sum_1^k \int_i \frac{M_k M_k^1}{GJ_k} ds. \quad (7.4)$$

На прямолинейных участках каждый из этих интегралов может быть вычислен способом Верещагина путем перемножения одноименных эпюр, расположенных, естественно, в одной плоскости.

Эпюры внутренних силовых факторов строятся на осевой линии рамы, изображаемой в перспективе. Ординаты эпюр изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  откладываются в плоскостях действия этих моментов в сторону сжатых волокон. Плоскости действия крутящих моментов  $M_k$  нормальны к оси участка рамы, и поэтому эпюра  $M_k$  может быть построена в любой плоскости, содержащей ось этого участка. В отличие от эпюр изгибающих моментов, эпюры крутящих моментов принято штриховать винтовыми линиями.

При построении эпюр изгибающих моментов обычно вычисляют их ординаты только для некоторых характерных сечений, а очертание устанавливают, как и в балках, на основании дифференциальных

$$\frac{d^2 M_y}{ds^2} = q_z \quad \text{и} \quad \frac{d^2 M_z}{ds^2} = q_y$$

и соответствующих им интегральных зависимостей.

Значения крутящих и изгибающих моментов в поперечных сечениях рамы находятся методом сечений из уравнений равновесия отсеченной части рамы. Очевидно изгибающий момент  $M_y$  будет равен алгебраической сумме моментов относительно одной, а  $M_z$  — относительно другой главной центральной оси инерции рассматриваемого поперечного сечения от всех внешних активных и реактивных сил и пар, расположенных по одну (любую) сторону от сечения. Крутящий момент равен сумме моментов тех же сил и пар относительно касательной к осевой линии рамы в данном сечении, а для тонкостенных рам — относительно оси, нормальной к плоскости сечения и проходящей через его центр изгиба.

Опоры пространственных рам отличаются большим разнообразием. Часто встречаются опоры в виде глухой заделки, исключающей поступательные и вращательные движения опорного узла. Реакцию таких опор можно представить в виде трех сил ( $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ ) и трех моментов ( $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$ ).

**Пример.** Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов и определить вертикальное смещение точки  $A$  стальной рамы, представленной на рис. 7.8. Участки  $AB$  и  $BC$  круглого сечения диаметра  $d$ , а участок  $CD$  прямоугольного сечения с отношением сторон  $2d : d$ .

**Решение.** На участке  $AB$  в плоскости действия распределенной нагрузки (плоскости чертежа) эпюра  $M_z$  будет ограничена квадратной параболой, а в плоскости действия сосредоточенной силы  $ql$  — прямой линией. В сечении  $A$  изгибаю-

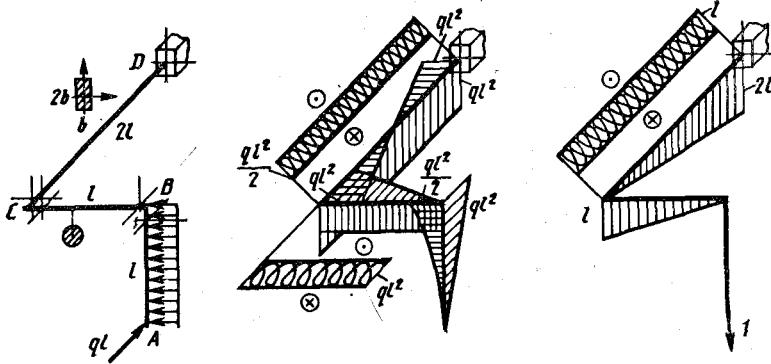


Рис. 7.8

щие моменты равны нулю. Чтобы определить их значения в сечении  $B$ , разрежем раму на две части, проведем в рассматриваемом сечении центральные оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ , как показано на рис. 7.8 и составим уравнение равновесия отсеченной части. Получим, что в конечном сечении первого участка

$$M_z = -\frac{ql^2}{2}; \quad M_y = ql^2; \quad M_K = M_x = 0.$$

На участке  $BC$  распределенной нагрузки нет, и поэтому все эпюры будут ограничены прямыми линиями.

Разрезаем раму сначала в сечении  $B$ , а затем в сечении  $C$  и составляя суммы моментов внешних сил относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , проведенных в указанных сечениях, найдем, что в начальном сечении второго участка

$$M_z = -\frac{ql^2}{2}; \quad M_y = 0; \quad M_K = ql^2,$$

а в конечном

$$M_z = -\frac{ql^2}{2}; \quad M_y = ql^2; \quad M_K = ql^2.$$

На участке  $CD$  в качестве осей  $y$  и  $z$  могут быть выбраны только вертикальные и горизонтальные оси симметрии сечения, так как только эти оси в прямоугольнике являются главными центральными осями инерции.

Составляя суммы моментов всех действующих на отсеченную часть внешних сил относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , находим, что в начальном сечении участка

$$M_z = ql^2; \quad M_y = ql^2; \quad M_K = \frac{ql^2}{2},$$

а в конечном

$$M_z = ql^2; \quad M_y = ql^2; \quad M_K = \frac{ql^2}{2},$$

но от изгиба в горизонтальной плоскости сжатые волокна в начале участка находятся справа от оси, а в конце — слева от нее. Эпюры приведены на рис. 7.8.

Для проверки правильности построения эпюр следует убедиться в том, что все узлы рамы будут находиться в равновесии, если выделить каждый узел близкими к его вершине поперечными сечениями и приложить действующие в этих сечениях изгибающие и крутящие моменты. Нетрудно проверить, что нагрузки на выделенные узлы  $B$  и  $C$  рассматриваемой рамы (рис. 7.9) действительно уравновешены.

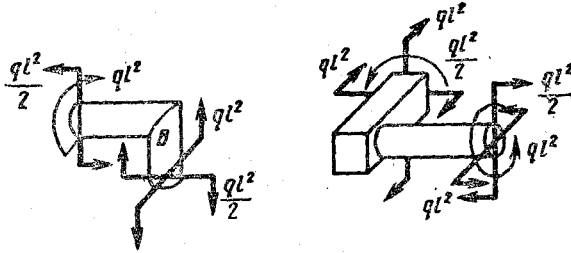


Рис. 7.9

Для определения вертикального перемещения сечения  $A$  приложим в этом сечении в вертикальном направлении единичную силу и построим эпюры  $M_z^1$ ,  $M_y^1$  и  $M_x^1$  от этой нагрузки (см. рис. 7.8).

Интегралы (7.4) можно вычислить способом Верещагина. Перемножая одноименные эпюры от заданных нагрузок и единичной силы, расположенные на каждом участке в одних плоскостях, получаем

$$\delta_A = \frac{ql^4}{4EJ_z^{II}} + \frac{2ql^4}{EJ_z^{III}} + \frac{ql^4}{GJ_K}.$$

Учитывая, что

$$J_z^{II} = \frac{\pi d^4}{64}; \quad J_z^{III} = \frac{d(2d)^3}{12};$$

$$J_K^{II} = \beta d^3 \cdot 2d = 0,5d^4; \quad G = 0,4E,$$

находим

$$\delta_A = \frac{64ql^4}{4E\pi d^4} + \frac{2ql^4 \cdot 3}{E \cdot 2d^4} + \frac{ql^4}{0,4E \cdot 0,5d^4} = 13,1 \frac{ql^4}{Ed^4}.$$

Заметим, что составляющая искомого перемещения от кручения того же порядка, что и от изгиба.

**Пример.** Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов для пространственной рамы (рис. 7.10), криволинейный участок которой очерчен по дуге окружности.

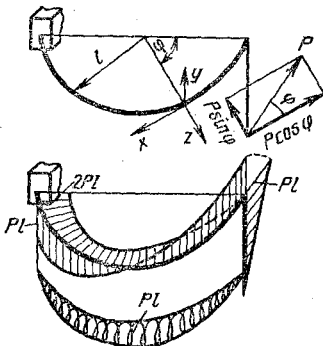


Рис. 7.10

**Решение.** Крутящий  $M_K = M_x$  и изгибающие  $M_y$  и  $M_z$  моменты в текущем сечении криволинейного участка равны моментам силы  $P$  относительно главных центральных осей инерции  $y$  и  $z$  рассматриваемого сечения и оси  $x$ , направленной по касательной к оси рамы.

Подсчитывая момент силы  $P$  относительно оси  $y$ , получаем  $M_y = Pl(1 - \cos \varphi)$ .

Для вычисления моментов  $M_x$  и  $M_z$  удобно силу  $P$  разложить на составляющую  $P \cos \varphi$ , направленную параллельно оси  $x$ , и составляющую  $P \sin \varphi$ , параллельную оси  $z$ . Тогда

$$M_z(\varphi) = Pl \cos \varphi,$$

$$M_K(\varphi) = M_x(\varphi) = Pl \sin \varphi.$$

Эпюры  $M_K$ ,  $M_y$  и  $M_z$  показаны на рис. 7.10.



## 7.5. ПЛОСКОПРОСТРАНСТВЕННЫЕ РАМЫ

В геометрически плоских рамах все внешние нагрузки принято раскладывать на составляющие, действующие в плоскости рамы, и нормальные к ней. Нормальные составляющие внешней нагрузки вызывают появление в сечениях только тех силовых факторов ( $M_x$ ,  $M_y$  и  $Q_z$ ), плоскости действия которых перпендикулярны плоскости рамы. Величины же нормальных сил  $N$ , а также перерезывающих сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_z$ , действующих в плоскости рамы, зависят только от внешних сил и пар, действующих также в плоскости рамы, а при отсутствии такой нагрузки эти силовые факторы равны нулю. Очевидно и перемещения сечений в плоскости рамы происходят только от нагрузок, расположенных в ее плоскости, а перемещения из плоскости рамы вызываются лишь нормальными к плоскости рамы нагрузками.

Линейные и угловые перемещения сечений плоскопространственных рам вычисляются по формуле (7.4).

**Пример.** Построить эпюры  $M_K$  и  $M_{изг}$  для стальной рамы круглого сечения (рис. 7.11) и определить полное перемещение точки  $K$ .

**Решение.** Эпюры  $M_y$ ,  $M_z$  и  $M_K$  от распределенной нагрузки и сосредоточенной силы построены на рис. 7.11 отдельно. Там же приведены эпюры от единичных сил, приложенных к точке  $K$  в направлении осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Перемножая расположенные в одних плоскостях эпюры от заданных и единичных нагрузок, находим перемещения сечения  $K$  в направлении осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$\delta_x = \frac{1}{EJ_z} \cdot 2Pl^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l = 2 \frac{Pl^3}{EJ_z};$$

$$\delta_y = \frac{1}{EJ_z} \left[ \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l + 2Pl^3 \right] = \frac{7}{3} \frac{Pl^3}{EJ_z};$$

$$\delta_z = \frac{1}{EJ_y} \cdot 2l \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} \cdot 2ql \cdot \frac{1}{3} l - \frac{1}{GJ_R} \cdot 2ql^2 \cdot 2l \cdot l = -\frac{11}{3} \frac{ql^4}{EJ_y}.$$

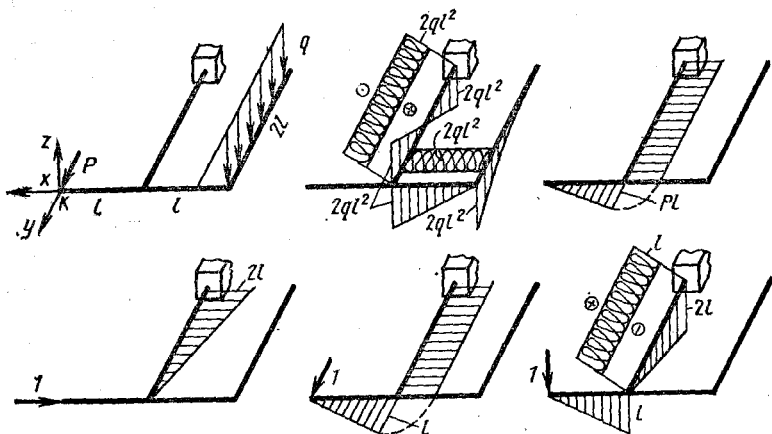


Рис. 7.11

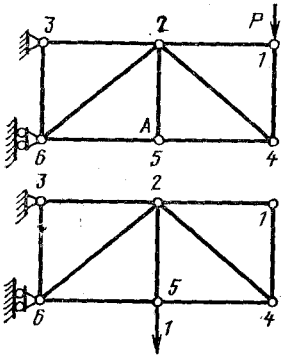


Рис. 7.12

Здесь учтено, что для круга  $J_K = 2J_y$  и для стали  $G = \frac{2}{5} E$ . Полное перемещение сечения  $K$  согласно формуле (7.2)

$$\delta_K = \frac{l^3}{3EJ_z} \sqrt{85P^2 + 121(ql)^2}.$$

### 7.6. ФЕРМЫ

Для ферм в интеграле Мора (7.1) следует удержать только одно слагаемое, содержащее нормальные силы  $N$  в сечениях стержней от заданных нагрузок и нормальные силы  $N^1$  от единичной нагрузки. Учитывая, что по длине каждого стержня нормальные силы  $N$  и  $N^1$  постоянны, формулу для определения перемещений узлов ферм можно записать так:

$$\delta = \sum_1^n \frac{N_i N_i^1}{EF_j} l_i. \quad (7.5)$$

Здесь суммирование распространяется на все стержни фермы. Равенство (7.5) называется суммой Мора.

**Пример.** Определить вертикальное перемещение узла  $A$  плоской фермы (рис. 7.12).

**Решение.** Составляя уравнения равновесия узлов, определяем нормальные силы  $N$  и  $N^1$  в стержнях фермы от силы  $P$  и единичной силы, приложенной в узле  $A$  в вертикальном направлении.

Результаты расчета удобно свести в таблицу.

Стержни	$l_i$	$N_i$	$N_i^1$	$N_i N_i^1 l_i$
1-2	$l$	0	0	0
2-3	$l$	$2P$	1	$2Pl$
4-5	$l$	$-P$	0	0
5-6	$l$	$-P$	0	0
1-4	$l$	$-P$	0	0
2-5	$l$	0	1	0
3-6	$l$	$P$	1	$Pl$
2-4	$1,41l$	$1,41P$	0	0
2-6	$1,41l$	$-1,41P$	$-1,41$	$2,82Pl$
				$5,82Pl$

Следовательно,  $\delta_A = 5,82 \frac{Pl}{EF}$ .

### 7.7. СМЕШАННЫЕ СИСТЕМЫ

Решение вопроса о том, какие слагаемые формулы (7.1) должны быть сохранены при определении перемещений сечений смешанных систем, зависит от состава элементов этих систем.

Для плоских систем, содержащих элементы рамного и ферменного типа, интеграл Мора принимает вид

$$\delta = \sum_1^n \int_l \frac{M_z M_z^1}{EJ_z} ds + \sum_1^m \frac{N_i N_i^1}{EF_i} l_i. \quad (7.6)$$

Здесь интегрирование распространяется на все элементы, работающие, главным образом, на изгиб (балки, рамные элементы и т. п.), а суммирование производится по всем элементам, работающим, преимущественно, на растяжение или сжатие (тяги, подкосы и т. п.).

Для плоских рам с пружинами, если учитывать деформации пружины только от крутящих моментов, имеем

$$\delta = \sum_1^n \int_l \frac{M_{\kappa} M_{\kappa}^1}{EJ_{\kappa}} ds + \sum_1^m \int_l \frac{M_{\kappa} M_{\kappa}^1}{GJ_{\kappa}} ds, \quad (7.7)$$

где  $M_{\kappa}$  — крутящий момент в сечении пружины от заданной, а  $M_{\kappa}^1$  — от единичной нагрузки.

**Пример.** Определить перемещение свободного конца балки, опертой на подкос (рис. 7.13). Жесткость сечения балки на изгиб  $EJ_z$ , а жесткость подкоса на растяжение  $EF$ .

**Решение.** Из уравнения  $\sum m_A = 0$  определим усилия  $N$  и  $N^1$  в подкосе от заданных нагрузок и единичной силы и строим эпюры изгибающих моментов для балки от этих нагрузок.

Переменяя эпюры изгибающих моментов на балке (на участке  $AB$  пунктиром показана расслоенная эпюра) и усилия  $N$  и  $N^1$  в подкосе, находим вертикальное смещение свободного конца балки

$$\delta = \frac{1}{EJ_z} \left[ \frac{l}{4} \cdot \frac{ql^2}{6} \cdot \frac{4}{5} l + \frac{l}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{3}{4} l - \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{3} \cdot \frac{2}{3} l \right] + \frac{7\sqrt{2} ql \cdot 2\sqrt{2} \cdot l \sqrt{2}}{6EF} = \frac{17}{360} \frac{ql^4}{EJ_z} + \frac{14\sqrt{2}}{3} \frac{ql^2}{EF}.$$

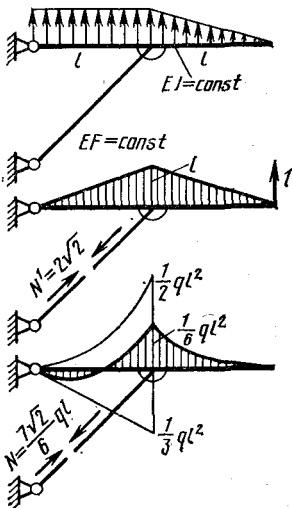


Рис. 7.13

Отсюда следует, что с увеличением жесткости  $EF$  сечения подкоса перемещения сечений балки уменьшаются.

**Пример.** Определить вертикальное перемещение точки приложения силы  $P$  на рычаге с пружиной (рис. 7.14). Жесткость рычага  $EJ_z$ , а характеристики пружины  $D$ ,  $d$ ,  $n$ ,  $G$ .

**Решение.** Из уравнения равновесия  $\sum m_A = 0$  находим, что при заданной нагрузке пружина растягивается силой  $P$ ,

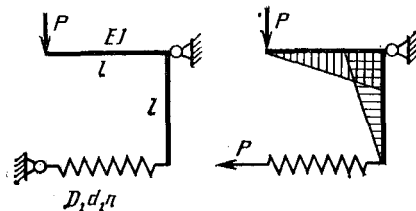


Рис. 7.14

а при единичной нагрузке — силой, равной единице. Следовательно, в пружине  $M_K = PD/2$ , а  $M_K^1 = 1 \cdot D/2$ . Ординаты эпюры изгибающих моментов  $M_z^1$  на рычаге от единичной нагрузки будут в  $P$  раз меньше ординат эпюры  $M_z$ . Следовательно, вертикальное перемещение точки приложения силы  $P$  согласно формуле (7.7)

$$\delta = \frac{2}{EJ_z} \cdot \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l + \int_0^{\pi D n} \frac{PD^2 \cdot 32}{4G\pi d^4} ds = \frac{2}{3} \frac{Pl^3}{EJ_z} + \frac{8PD^3 n}{Gd^4}.$$

Последнее слагаемое представляет собой удлинение пружины при растяжении силой  $P$ .

### 7.8. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Допустим, что требуется определить перемещение точки  $A$  оси некоторой стержневой системы, например плоской рамы, относительно точки  $B$  по линии, соединяющей эти точки. Обозначим через  $\delta_A$  и  $\delta_B$  перемещения соответственно точек  $A$  и  $B$  по линии  $AB$ , вызванные деформацией системы (рис. 7.15). Очевидно, что в тех случаях, когда эти точки смещаются в противоположные стороны, их относительное перемещение

$$\delta_{AB} = \delta_A + \delta_B,$$

а когда в одну сторону, то

$$\delta_{AB} = \delta_A - \delta_B.$$

Очевидно, также, что автоматически будет получаться сумма в случае смещений точек  $A$  и  $B$  в разные стороны и разность — при их перемещении в одну сторону, если для определения  $\delta_A$  и  $\delta_B$  единичные силы направить в противоположные стороны, как показано на рис. 7.15.

Кроме того, нетрудно показать, что если эти силы прикладывать к системе одновременно, то интеграл Мора будет давать сразу относительное перемещение точек  $A$  и  $B$ . Например, для плоской рамы

$$\delta_{AB} = \delta_A + \delta_B = \int_l \frac{M_z M_z^1}{EJ_z} ds + \int_l \frac{M_z M_z^{11}}{EJ_z} ds = \int_l \frac{M_z (M_z^1 + M_z^{11})}{EJ_z} ds,$$

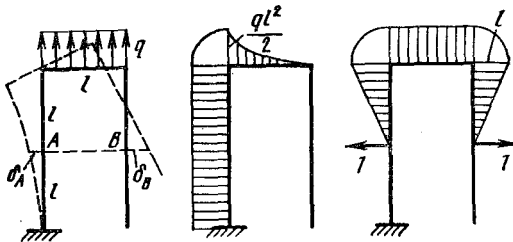


Рис. 7.15

где  $M_2^1$  — изгибающий момент от единичной нагрузки, приложенной в точке  $A$ , а  $M_2^{11}$  — в точке  $B$ . Здесь согласно принципу независимости действия сил сумма  $M_2^1 + M_2^{11}$  представляет собой изгибающий момент в текущем сечении от одновременного действия двух указанных единичных сил.

Итак, для определения методом Мора относительного перемещения каких-либо сечений стержневой системы надо одновременно приложить в этих сечениях две единичные нагрузки (силы, если ищется линейное перемещение, и пары, если искомым является относительный угол поворота), направляя их в противоположные стороны.

Относительное перемещение сечений  $A$  и  $B$  рамы, представленной на рис. 7.15, будет

$$\delta_{AB} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{l}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} l + \frac{l^2}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \right] = \frac{5}{12} \cdot \frac{ql^3}{EJ_2}.$$

**СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ  
СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ**

**8.1. МЕТОД СИЛ. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ**

Стержневые системы, опорные реакции и внутренние силовые факторы в которых не могут быть найдены из одних лишь уравнений равновесия, называются статически неопределимыми. Разность между числом искомых неизвестных усилий и независимых уравнений равновесия определяет степень статической неопределимости системы. Степень статической неопределимости всегда равна числу избыточных (лишних) связей, без которых система не превращается в геометрически изменяемую (подвижную). Избыточными могут быть как внешние (опорные) связи, так и внутренние, накладывающие определенные ограничения на перемещение сечений системы друг относительно друга.

Для определения внутренних силовых факторов в сечениях статически неопределимых систем к уравнениям равновесия добавляются уравнения совместности перемещений.

Наиболее распространенным (но не единственным) методом раскрытия статической неопределимости является метод сил. Последовательность составления уравнений совместности перемещений методом сил удобно проследить на примере какой-либо плоской системы, например рамы (рис. 8.1).

Рассматриваемая рама имеет семь внешних (опорных) связей. Для определения усилий в этих связях (опорных реакций) можно составить всего лишь три независимых уравнения равновесия. Следовательно, данная система имеет четыре избыточных связи, а это означает, что она четыре раза статически неопределима.

Удалим избыточные опорные связи, например, одну в катке и три в правой заделке и заменим действие этих связей силами

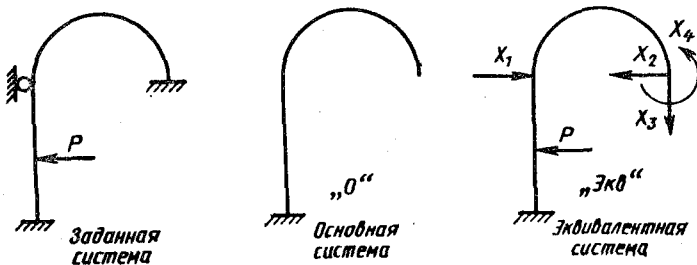


Рис. 8.1

$X_1, X_2, X_3$  и моментом  $X_4$  (см. рис. 8.1). Полученную таким способом статически определимую систему называют эквивалентной, поскольку напряжения и перемещения сечений в этой системе такие же, как и в заданной статически неопределимой. Система, полученная из заданной путем удаления всех избыточных связей и внешней нагрузки, называется основной системой (см. рис. 8.1).

Величины неизвестных силовых факторов  $X_1, X_2, X_3$  и  $X_4$  найдем из условия равенства нулю перемещений освобожденных опорных сечений по направлению снятых связей. Эти перемещения вызваны в эквивалентной системе совместным действием заданной нагрузки и самих усилий  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , поэтому

$$\delta_{1(P, X_1, X_2, X_3, X_4)} = 0; \quad \delta_{2(P, X_1, X_2, X_3, X_4)} = 0; \quad (8.1)$$

$$\delta_{3(P, X_1, X_2, X_3, X_4)} = 0; \quad \delta_{4(P, X_1, X_2, X_3, X_4)} = 0.$$

Индексы 1, 2, 3 и 4 показывают, что рассматриваются перемещения опорных сечений соответственно по направлению  $X_1, X_2, X_3$  и  $X_4$ .

Очевидно, что только при выполнении условий (8.1) напряжения и деформации в эквивалентной системе будут равны напряжениям и деформациям в заданной статически неопределимой системе.

Таким образом, в методе сил задача расчета статически неопределимой системы сводится к расчету статически определимой эквивалентной системы, нагруженной заданной внешней нагрузкой и неизвестными пока усилиями  $X_1, X_2, X_3, X_4$ .

Согласно принципу независимости действия сил перемещение сечения от одновременного воздействия группы нагрузок равно сумме перемещений от каждой из нагрузок в отдельности. Поэтому любое из уравнений (8.1) можно представить в виде

$$\delta_{i(P, X_1, X_2, X_3, X_4)} = \delta_{iP} + \delta_{iX_1} + \delta_{iX_2} + \delta_{iX_3} + \delta_{iX_4} = 0.$$

Но перемещение  $\delta_{iX_k}$  от усилия  $X_k$  пропорционально величине этого усилия. Поэтому

$$\delta_{iX_k} = \delta_{ik} X_k,$$

где  $\delta_{ik}$  — перемещение от единичного усилия (1 Н, 1 Н·м и т. д.), приложенного вместо  $X_k$ .

Итак, в развернутом виде уравнения совместности перемещений (8.1) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 &= 0; \\ \delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 &= 0; \\ \delta_{3P} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 &= 0; \\ \delta_{4P} + \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 &= 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

При выводе уравнений (8.2) рассматривалась плоская рама, но с равным успехом такой системой могла быть пространственная рама, ферма или любая смещанная стержневая система с любой степенью статической неопределимости. Структура уравнений си-

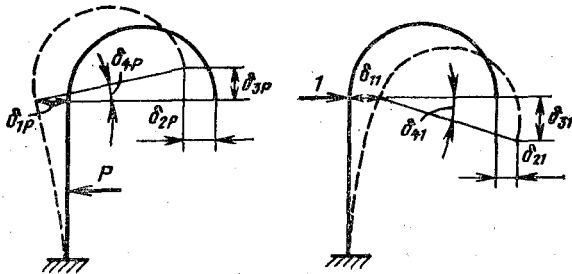


Рис. 8.2

стемы (8.2) от такой замены не изменится, но число их всегда будет равно степени статической неопределимости задачи.

Равенства (8.2) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых неизвестных усилий  $X_1, X_2, X_3, X_4$  и называются каноническими уравнениями метода сил.

Коэффициенты канонических уравнений суть перемещения определенных сечений эквивалентной системы в известных направлениях и от известной нагрузки. Так,  $\delta_{1P}$  есть перемещение точки приложения силы  $X_1$  в направлении этой силы от одной только внешней нагрузки,  $\delta_{11}$  — перемещение той же точки и в том же направлении, но лишь от одной единичной силы, приложенной вместо  $X_1$ , а  $\delta_{12}$  — перемещение от единичной силы, приложенной вместо  $X_2$  и т. д.

Любой коэффициент канонического уравнения можно, а иногда и полезно представить графически, если изобразить вид системы после приложения к ней соответствующего единичного усилия или заданной нагрузки. На рис. 8.2 показаны некоторые из коэффициентов системы (8.2) для рассматриваемой рамы.

Коэффициенты вида  $\delta_{11}, \delta_{22}, \dots, \delta_{ii}$  называют иногда главными, а  $\delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{31}, \dots, \delta_{ik}$  — побочными.

Уравнения (8.2) выведены на примере стержневой системы, у которой избыточными были внешние (опорные) связи. Такие системы принято называть внешне статически неопределимыми.

Рассмотрим теперь стержневую систему, в которой избыточными являются только внутренние связи, например, плоскую раму с одной шарнирной и другой катковой опорой (рис. 8.3).

С точки зрения вычисления опорных реакций эта рама статически определима (при большом числе опор она была бы еще и внешне статически неопределимой). Однако из одних лишь уравнений равновесия внутренние силовые факторы в ее сечениях определить невозможно.

Действительно, если разрезать раму на две части и составить уравнений равновесия одной из них, то в эти три уравнения войдут шесть неизвестных величин — изгибающие моменты  $X_1$  и  $X_4$ , перерезывающие силы  $X_2$  и  $X_5$ , нормальные силы  $X_3$  и  $X_6$  в двух различных сечениях рамы (см. рис. 8.3). Если разрезать раму только в одном месте (см. рис. 8.3) и составить уравнения равновесия для всей рамы,



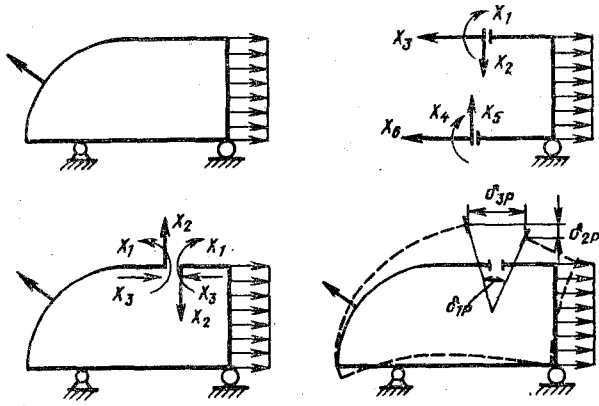


Рис. 8.3

то искомые неизвестные  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  в этих уравнениях взаимно уничтожаются, так как в силу закона действия и противодействия одноименные силовые факторы на двух сторонах разреза равны по величине противоположны по направлению.

Таким образом, замкнутый плоский контур любого очертания представляет собой трижды статически неопределимую систему.

Разрез замкнутого плоского контура удаляет сразу три внутренние связи, препятствующие относительным перемещениям сечений в этом месте по направлению сил  $X_2$  и  $X_3$  и повороту их друг относительно друга в направлении моментов  $X_1$ .

В действительности разрез отсутствует, и поэтому относительные перемещения двух смежных сечений эквивалентной системы (см. рис. 8.3), вызванные совместным действием заданной нагрузки и силовых факторов  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ , должны быть равны нулю. Как и в случае внешне статически неопределимых систем, запишем условия равенства нулю относительных перемещений двух смежных сечений в виде системы канонических уравнений:

$$\begin{aligned}
 \delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 &= 0; \\
 \delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 &= 0; \\
 \delta_{3P} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{8.3}$$

Канонические уравнения совместности перемещений (8.3) для внутренне статически неопределимых систем отличаются от аналогичных уравнений (8.2) для внешне статически неопределимых систем только тем, что коэффициенты уравнений (8.2) представляют собой абсолютные, а в (8.3) — относительные перемещения двух смежных сечений в месте разреза. Например,  $\delta_{1P}$  — относительный угол поворота сечений в месте разреза в направлении  $X_1$ , а  $\delta_{2P}$  и  $\delta_{3P}$  — расхождения тех же сечений в направлении сил  $X_2$  и  $X_3$  (рис. 8.3) от заданной нагрузки.

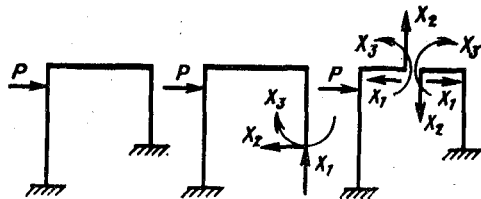


Рис. 8.4

Часто одну и ту же стержневую систему можно рассматривать как внешне статически неопределимую, если удалять опорные связи, или как внутренне статически неопределимую, если удалять внутренние связи (рис. 8.4).

В канонических уравнениях совместности перемещений для систем, в которых избыточными являются одновременно внешние и внутренние связи, одна часть коэффициентов — абсолютные, а другая — относительные перемещения сечений этих систем.

## 8.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Коэффициенты канонических уравнений обычно вычисляются с помощью интеграла Мора (7.1) и, где это возможно, применяется правило Верещагина.

Вычисления начинаются с определения внутренних силовых факторов и построения эпюр этих факторов отдельно от заданной нагрузки и единичных усилий, приложенных вместо искомого усилия  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ . Силовым факторам и их эпюрам от единичного усилия присписывается номер  $i$  соответствующего усилия  $X_i$ , а у силовых факторов от заданной нагрузки проставляется индекс  $P$  или  $0$ . Эпюры от заданных нагрузок называются основными, а от единичных усилий — единичными.

Согласно методу Мора далее надо снять с эквивалентной системы все внешние для нее нагрузки, включая усилия  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , а затем в сечениях, перемещение которых ищется, приложить единичные нагрузки (силы или пары) и вычислить внутренние силовые факторы от каждой из этих нагрузок. Необходимость в таких вычислениях отпадает, если единичные нагрузки совместить по направлению с искомыми усилиями  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , так как в этом случае внутренние силовые факторы от единичных нагрузок будут по величине и знаку равны найденным ранее одноименным силовым факторам от единичных усилий, приложенных вместо  $X_i$ . Обычно так всегда и направляют единичные нагрузки. Но в таком случае для определения коэффициентов канонических уравнений надо вычислить интегралы Мора от произведения ранее найденных внутренних силовых факторов с номерами, соответствующими индексам у этих коэффициентов, или перемножить по правилу Верещагина эпюры этих факторов с теми же номерами.

При определении коэффициентов  $\delta_{iP}$  перемножаются внутренние силовые факторы (или их эпюры) от заданной нагрузки и от соответствующего единичного усилия с индексом  $i$ . Для побочных коэффициентов  $\delta_{ik}$  и  $\delta_{ki}$  интегралы Мора отличаются только последовательностью сомножителей с индексами  $i$  и  $k$ . Но от перестановки сомножителей величины интегралов не изменяются, поэтому всегда

$$-\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (8.4)$$

Если  $\delta_{ik}$  — угол поворота сечения,  $\delta_{ki}$  — линейное смещение, то это равенство надо понимать как численное.

Отметим, что главные коэффициенты  $\delta_{ii}$  всегда отличны от нуля и положительны, а побочные коэффициенты  $\delta_{ik}$  и свободные члены  $\delta_{iP}$  могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

### 8.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ЗАДАЧ

Решение статически неопределимых задач методом сил проводится в такой последовательности.

1. Устанавливается степень статической неопределимости системы как разность между числом искомых неизвестных усилий и числом независимых уравнений равновесия. При этом учитывается, что простой шарнир, соединяющий два стержня системы, уменьшает степень статической неопределимости на единицу, так как снимает одну связь, препятствующую повороту одной части системы относительно другой. Тем самым простой шарнир позволяет добавить к уравнениям равновесия всей системы уравнение равновесия присоединенной этим шарниром части системы. Шарнир, связывающий  $n$  (три и более) частей системы, играет роль  $n - 1$  простых шарниров и поэтому снижает степень статической неопределимости на  $n - 1$  единиц.

2. Из заданной статически неопределимой системы выделяется основная система путем удаления лишних связей и внешней нагрузки.

В качестве лишних могут быть выбраны различные связи. Поэтому для одной и той же статически неопределимой системы можно получить сколько угодно основных систем. Но любая основная система должна быть обязательно геометрически неизменяемой и статически определимой.

Геометрически неизменяемой называется система, перемещения точек которой возможны лишь как следствие деформаций системы. Нельзя выбирать в качестве основной и мгновенно геометрически изменяемую систему, потому что в такой системе при любой сколь угодно малой нагрузке усилия получаются бесконечно большими или неопределенными (см. второй пример этого раздела).

3. Изображается соответствующая выбранной основной эквивалентная система, в которой взамен снятых лишних связей и в их направлении приложены силы  $X_i$ , если связи препятствовали линейному перемещению, и пары  $X_R$ , если они исключали повороты сечений.

4. Составляются канонические уравнения метода сил

$$\delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n = 0;$$

$$\delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n = 0;$$

.....

$$\delta_{nP} + \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n = 0.$$

5. Вычисляются коэффициенты канонических уравнений аналитически по формуле (7.2) или перемножением эпюр по способу Верещагина. Для этого строятся в основной системе эпюры внутренних силовых факторов отдельно от заданной нагрузки и всех единичных усилий, приложенных вместо  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Индексы у коэффициента  $\delta_{in}$  указывают на номера эпюр, которые надо перемножить при его вычислении, или номера внутренних силовых факторов, которые надо подставить в интеграл Мора.

6. Решается система канонических уравнений и определяются величины искомого силового фактора  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ .

7. Определяются окончательные значения внутренних силовых факторов в сечениях эквивалентной системы суммированием их значений от каждой из нагрузок в отдельности:

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_P + \Phi_1X_1 + \Phi_2X_2 + \dots + \Phi_nX_n, \quad (8.5)$$

где  $\Phi_{\Sigma}$  — искомый силовой фактор — изгибающий или крутящий момент, нормальная или перерезывающая сила в рассматриваемом сечении;  $\Phi_P$  — аналогичный силовой фактор от одной только внешней нагрузки;  $\Phi_i$  — аналогичный силовой фактор от единичного усилия, приложенного вместо  $X_i$ .

При построении суммарных эпюр силовых факторов (изгибающих и крутящих моментов и т. д.) их ординаты находятся алгебраическим суммированием ординат ранее построенных эпюр тех же факторов от заданных нагрузок и единичных эпюр, увеличенных в  $X_i$  раз.

Можно поступить и иначе, а именно, заменить в эквивалентной системе неизвестные  $X_i$  их вычисленными значениями и определять внутренние силовые факторы в сечениях этой системы одновременно от заданной нагрузки и усилий  $X_i$ .

Очевидно, что окончательные результаты расчета не зависят от выбора основной и эквивалентной системы, так как все системы, эквивалентные данной, эквивалентны и между собой.

Рассмотрим несколько примеров раскрытия статической неопределенности плоских рам.

**Пример.** Решить плоскую раму, представленную на рис. 8.5.

**Решение.** Данная рама дважды статически неопределима. На рис. 8.5 показаны три из большого числа возможных эквивалентных систем. Остановимся на первой системе и запишем для нее канонические уравнения

$$\delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0;$$

$$\delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0.$$

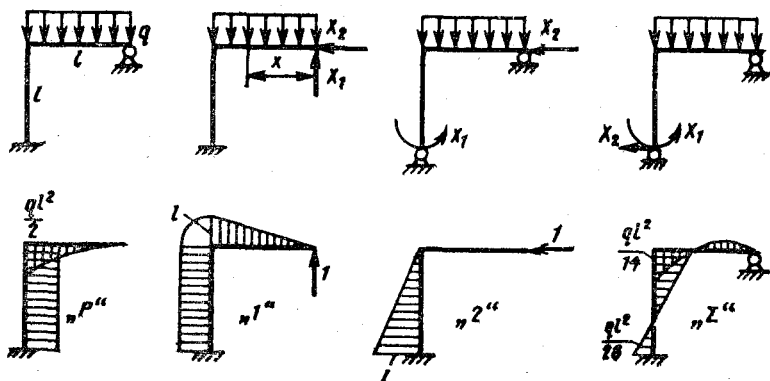


Рис. 8.5

Коэффициенты этих уравнений вычислим способом Верещагина. Для этого построим эпюры изгибающих моментов от распределенной нагрузки и единичных сил. Перемножая эпюры согласно индексам коэффициентов, находим

$$\delta_{1P} = -\frac{5}{8} \frac{ql^4}{EJ_z}; \quad \delta_{2P} = -\frac{1}{4} \frac{ql^4}{EJ_z}; \quad \delta_{11} = \frac{4}{3} \frac{l^3}{EJ_z};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ_z}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2} \frac{l^3}{EJ_z}.$$

Подставляя эти значения коэффициентов в канонические уравнения и решая их, получаем  $X_1 = \frac{3}{7} ql$ ,  $X_2 = \frac{3}{28} ql$ .

Суммируя ординаты эпюры «P» с ординатами эпюры «1», умноженными на  $X_1 = \frac{3}{7} ql$ , и эпюры «2», увеличенными в  $X_2 = \frac{3}{28} ql$  раз, строим суммарную эпюру изгибающих моментов  $M_{\Sigma}$ .

Изгибающий момент в текущем сечении горизонтального участка находим по формуле (8.5):

$$M_{\Sigma} = -\frac{qx^2}{2} + \frac{3}{7} qlx.$$

Приравнивая нулю производную  $\frac{dM}{dx} = \frac{7}{3} ql - qx$ , устанавливаем, что эта функция имеет экстремум при  $x = \frac{3}{7} l$ , причем  $M_{\Sigma} \left( \frac{3}{7} l \right) = \frac{9}{98} ql^2$ .

**Пример.** Построить эпюру изгибающих моментов для рамы, представленной на рис. 8.6.

**Решение.** Рама один раз статически неопределима. Выберем основную систему, удаляя одну связь в нижнем (или верхнем) шарнире. Однако в рассматриваемой раме горизонтальные и вертикальные опорные связи неравноценны. Если удалить горизонтальную связь, то при любой нагрузке реакция  $R_y$  оставшейся вертикальной связи должна быть бесконечно большой, так как линия ее действия проходит через центр верхнего шарнира, а момент внешней нагрузки относительно этого шарнира не равен нулю. Чтобы воспринять даже самую малую нагрузку, эта рама должна сначала повернуться как жесткое целое (без деформации) на бесконечно малый угол  $d\varphi$ . Тогда плечо реакции  $R_y$  станет отличным от нуля, а сама реакция будет конечной, но значительной по величине.

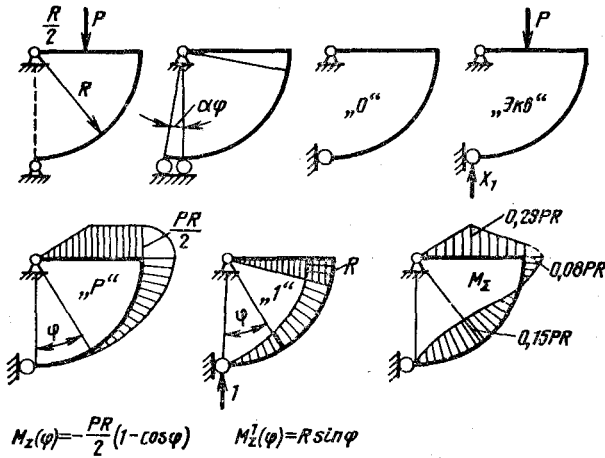


Рис. 8.6

Такая система является мгновенно геометрически изменяемой. Ее в качестве основной системы выбирать нельзя.

Положение сразу же изменяется, если удалить не горизонтальную, а вертикальную опорную связь. В такой основной системе при любой нагрузке опорные реакции и внутренние силовые факторы будут конечными и определенными. Эквивалентная система, соответствующая этой основной системе, представлена на рис. 8.6. Там же приведены эпюры изгибающих моментов от заданной и единичной нагрузок.

Вычисляя коэффициенты канонического уравнения  $\delta_{1P} + \delta_{11}X_1 = 0$  интегрированием на криволинейных участках и перемножением эпюр на прямолинейных, получаем

$$\begin{aligned}
 EJ\delta_{1P} &= - \int_0^{\pi/2} \frac{PR^2}{2} (1 - \cos \varphi) \sin \varphi R d\varphi - \frac{PR}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{3}{4} R - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{PR}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{R}{2} = - \frac{23}{48} PR^3; \\
 EJ\delta_{11} &= \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 \varphi R d\varphi + \frac{R^2}{2} \cdot \frac{2}{3} R = \frac{3\pi + 4}{12} R^3.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$X_1 = - \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{23PR^3 \cdot 12}{48(3\pi + 4)R^3} = \frac{23}{4(3\pi + 4)} P = 0,42P.$$

Суммарный изгибающий момент на криволинейном участке изменяется по закону  $M_{\Sigma}(\varphi) = -0,5PR(1 - \cos \varphi) + 0,42PR \sin \varphi$ . Приравняв нулю производную от  $M_{\Sigma}(\varphi)$ :

$$\frac{dM_{\Sigma}(\varphi)}{dx} = PR(0,42 \cos \varphi - 0,5 \sin \varphi) = 0,$$

получаем  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{0,42}{0,5} = 0,84$ ,  $\varphi = 40^\circ$ .

Следовательно, при  $\varphi = 40^\circ$  функция  $M_\Sigma(\varphi)$  имеет экстремум, причем  $M_\Sigma(40^\circ) = PR(0,42 \cdot 0,64 + 0,5 \cdot 0,77 - 0,5) = 0,15PR$ . Суммарная эпюра приведена на рис. 8.6.

#### 8.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СЕЧЕНИЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

После раскрытия статической неопределимости и построения суммарных эпюр силовых факторов можно приступить к определению перемещений сечений рассматриваемой стержневой системы. Естественно это делать методом Мора, перемножая, где возможно, по правилу Верещагина суммарные эпюры внутренних силовых факторов на соответствующие эпюры от единичных нагрузок, приложенных в сечениях, перемещения которых определяются.

Однако построение эпюр от единичных нагрузок при приложении их непосредственно к заданной системе требует вторичного раскрытия ее статической неопределимости. Такой достаточно трудоемкой операции можно избежать, если определять перемещения не в заданной, а в эквивалентной системе. Причем не обязательно пользоваться первоначальной эквивалентной системой, выбранной для раскрытия статической неопределимости, так как перемещения одного и того же сечения во всех системах, эквивалентных данной, одинаковы.

Если сечение заданной системы в рассматриваемом направлении не перемещается, то произведение суммарной эпюры на единичную должно быть равно нулю. На этом свойстве основана проверка правильности вычисления неизвестных  $X_1, X_2, \dots, X_n$  при раскрытии статической неопределимости и построения суммарных эпюр.

Абсолютные или относительные перемещения сечений в направлении усилий  $X_1, X_2, \dots, X_n$  отсутствуют, поэтому произведение каждой из единичных эпюр на суммарную должно быть обязательно равно нулю. Пользуясь этим правилом, нетрудно проверить, что суммарная эпюра изгибающих моментов в первом примере разд. 8.3 построена правильно, так как произведение этой эпюры на первую единичную (см. рис. 8.5)

$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ_z} \left[ \int_0^l \left( \frac{3}{7} qlx - \frac{qx^2}{2} \right) x dx - \frac{1}{2} \frac{ql^2}{14} \cdot \frac{2l}{3} l + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{ql^2}{28} \cdot \frac{l}{3} l \right] = 0.$$

Ордината суммарной эпюры  $M_\Sigma$  под центром тяжести второй единичной эпюры, как видно из рис. 8.5, равна нулю. Следовательно, произведение и этих двух линейных эпюр также равно нулю.

## 8.5. О РАЦИОНАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ СИММЕТРИИ

Рациональной основной системой для заданной статически неопределимой конструкции является такая система, при которой наибольшее число побочных коэффициентов канонических уравнений обращается в нуль. Чем больше коэффициентов канонических уравнений равно нулю, тем, очевидно, проще и легче решить эти уравнения.

Упрощать решения задачи раскрытия статической неопределенности можно использованием симметричных и обратно симметричных стержневых систем. Отметим, что внутренние силовые факторы в сечении бруса можно также разделить на симметричные и обратно симметричные. К симметричным силовым факторам относятся изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  и нормальные силы  $N$ , так как в двух смежных сечениях бруса они симметричны относительно плоскости разреза (рис. 8.7), а к обратно (косо) симметричным относятся перерезывающие силы  $Q_y$  и  $Q_z$  и крутящие моменты  $M_k$ , поскольку они обратно симметричны относительно плоскости разреза.

Первая группа силовых факторов вызывает симметричные, а вторая — обратно симметричные относительно плоскости разреза деформации прилегающих к разрезу частей бруса.

Рассмотрим сначала особенности симметричных стержневых систем. Геометрически симметричная стержневая система с нагрузкой, симметричной относительно той же оси (плоскости), называется симметричной.

Вследствие полной симметрии такая система имеет симметричный вид и после деформации. Следовательно, перемещения симметричных сечений симметричны по направлению. Это означает, что в симметричных сечениях симметричной системы одноименные силовые факторы (а в опорных сечениях — опорные реакции) равны по величине и симметричны по направлению.

Если разрезать симметричную систему по оси (плоскости) симметрии, то нетрудно заметить, что обратно симметричные внутренние силовые факторы в этом сечении должны быть равны нулю. Действительно, обратно симметричные силовые факторы будут вызывать обратно симметричные деформации, которые противоречат характеру деформаций симметричной системы. Таким образом, в сечении по оси симметрии симметричной системы крутящие моменты  $M_k$  и перерезывающие силы  $Q_y$  и  $Q_z$  всегда равны нулю.

Покажем справедливость этих выводов на примере плоской симметричной рамы (рис. 8.8). Эта рама представляет собой плоский замкнутый контур и является трижды статически неопределимой системой. Выберем основную систему разрезом по оси симметрии. Допустим, что все внутренние силовые

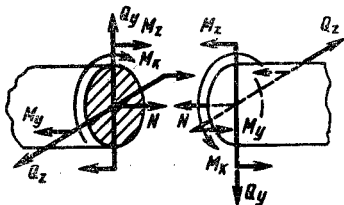


Рис. 8.7



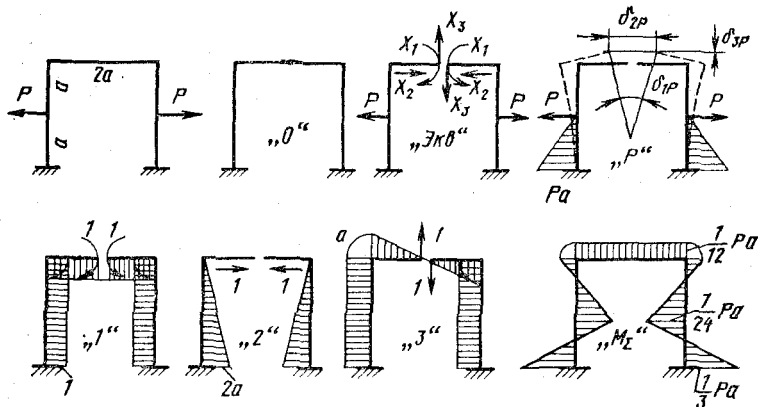


Рис. 8.8

факторы — изгибающие моменты  $X_1$ , нормальные силы  $X_2$  и перерезывающие силы  $X_3$  — отличны от нуля.

Раскрывая статическую неопределенность задачи методом сил, запишем систему канонических уравнений

$$\delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0;$$

$$\delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0;$$

$$\delta_{3P} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0.$$

Для вычисления ее коэффициентов построим эпюры изгибающих моментов от заданной и единичных нагрузок (см. рис. 8.8).

Эпюры от заданных нагрузок, изгибающих моментов и нормальных сил симметричны, а от перерезывающих сил — обратно симметричны. Произведение симметричной эпюры на обратно симметричную равно нулю, поэтому коэффициенты канонических уравнений

$$\delta_{3P} = 0; \quad \delta_{31} = \delta_{13} = 0; \quad \delta_{32} = \delta_{23} = 0.$$

В результате система канонических уравнений принимает вид

$$\delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0;$$

$$\delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0;$$

$$\delta_{33}X_3 = 0.$$

Коэффициент  $\delta_{33}$  отличен от нуля и поэтому перерезывающая сила  $X_3$  равна нулю.

Итак, в сечении по оси симметрии симметричной стержневой системы обратно симметричные силовые факторы равны нулю.

Вычисляя остальные коэффициенты канонических уравнений, получаем

$$EJ\delta_{1P} = -Pa^2; \quad EJ\delta_{2P} = -\frac{5}{3}Pa^2;$$

$$EJ\delta_{11} = 6a; \quad EJ\delta_{12} = EJ\delta_{21} = 4a^2; \quad EJ\delta_{22} = \frac{16}{3}a^3$$

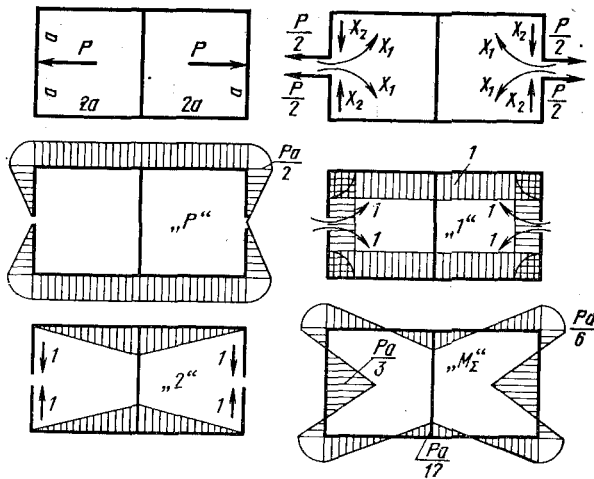


Рис. 8.9

и, решая систему канонических уравнений, находим

$$X_1 = -\frac{Pa}{12}, \quad X_2 = \frac{3}{8} P.$$

Суммарная эпюра изгибающих моментов симметрична относительно оси симметрии рамы, так как ее ординаты представляют собой суммы ординат симметричных эпюр «P», «1» и «2» (ординаты двух последних увеличиваются соответственно в  $X_1$  и  $X_2$  раз). Таким образом, подтверждено и второе свойство симметричных систем: силовые факторы в симметричных сечениях симметричной стержневой системы равны по величине и симметричны по направлению.

Итак, основную систему в симметричных конструкциях надо выбирать путем удаления лишних связей на оси симметрии и следить за тем, чтобы и эквивалентная система была симметричной (только при этом условии реализуются свойства симметричных систем). Если в конструкции имеется стержень, направленный вдоль оси симметрии, то основную систему надо выбирать путем удаления лишних связей в симметричных сечениях.

**Пример.** Решить раму, представленную на рис. 8.9.

**Решение.** Если не использовать свойств симметричных систем, то для раскрытия статической неопределенности потребовалось бы решать систему из шести линейных алгебраических уравнений. Использование свойств симметрии упрощает решение задачи.

Один из стержней рамы совпадает с вертикальной осью симметрии. Поэтому основную систему выберем разрезом боковых стержней рамы по горизонтальной оси симметрии. Чтобы эквивалентная система была симметричной, внешние силы  $P$  отнесем равными частями к обеим сторонам разреза.

В силу симметрии рамы относительно вертикальной оси силовые факторы в проведенных сечениях равны по величине и противоположны по направлению, а след-

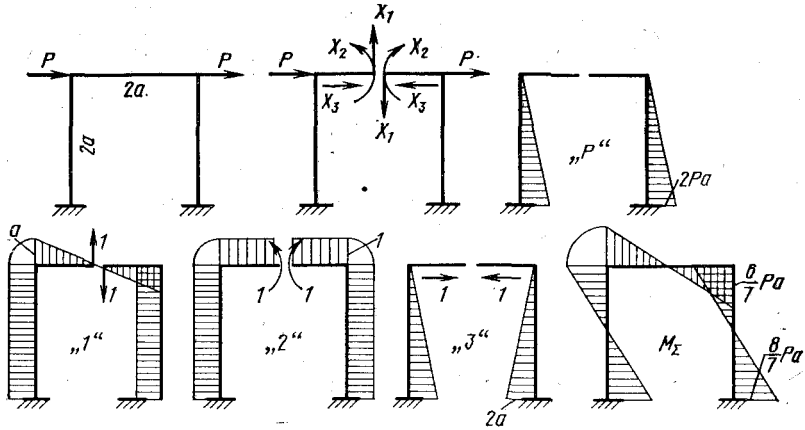


Рис. 8.10

ствие симметрии относительно горизонтальной оси перерезывающие силы в этих сечениях равны нулю.

Система канонических уравнений имеет вид

$$\delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0; \quad \delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0.$$

Перемножая эпюры (см. рис. 8.9), находим коэффициенты этой системы

$$EJ\delta_{1P} = -5Pa^2; \quad EJ\delta_{2P} = -4Pa^3; \quad EJ\delta_{11} = 12a;$$

$$EJ\delta_{12} = EJ\delta_{21} = 8a^2; \quad EJ\delta_{22} = \frac{32}{3}a^3.$$

Решение канонических уравнений дает  $X_1 = Pa/3$ ;  $X_2 = P/8$ . Суммарная эпюра  $M_x$  приведена на рис. 8.9.

Рассмотрим теперь обратно симметричные стержневые системы.

Геометрически симметричные стержневые системы с нагрузкой, обратно симметричной относительно оси (плоскости) симметрии системы, называются обратно симметричными, или косо симметричными.

Перемещения симметричных сечений такой системы и одноименные внутренние силовые факторы в них равны по величине и обратно симметричны по направлению. В сечении на оси симметрии симметричные силовые факторы всегда равны нулю, так как они вызывают симметричные деформации, не соответствующие характеру деформаций от заданной нагрузки.

Подтвердим изложенное на примере плоской обратно симметричной рамы (рис. 8.10). Выберем основную систему разрезом рамы по оси симметрии и построим эпюры изгибающих моментов от заданных нагрузок и единичных усилий, приложенных вместо искомых силовых факторов (см. рис. 8.10).

Составим канонические уравнения

$$\delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0;$$

$$\delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0;$$

$$\delta_{3P} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0$$

и вычислим коэффициенты этой системы способом Верещагина.

Так как произведение симметричной эпюры на обратно симметричную равно нулю, то  $\delta_{2P} = 0$ ;  $\delta_{3P} = 0$ ;  $\delta_{31} = \delta_{13} = 0$ ;  $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ .

Итак, система канонических уравнений распадается на две группы:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1P} + \delta_{11}X_1 &= 0; \\ \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 &= 0; \\ \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Вторая группа представляет собой систему линейных однородных уравнений, определитель которой отличен от нуля. Отсюда следует, что нормальная сила  $X_2$  и изгибающий момент  $X_3$  в сечении по оси симметрии рамы равны нулю.

Итак, подтверждено, что в сечении по оси симметрии обратно симметричной стержневой системы симметричные силовые факторы — изгибающие моменты и нормальные силы равны нулю и могут действовать только обратно симметричные силовые факторы. А это означает, что в симметричных сечениях (в том числе и опорных) обратно симметричных стержневых систем силовые факторы равны по величине и обратно симметричны по направлению.

Использование в расчетах отмеченных свойств обратно симметричных систем позволяет существенно упростить решение задачи.

Для рассматриваемой на рис. 8.10 задачи коэффициенты канонического уравнения  $\delta_{1P} + \delta_{11}X_1 = 0$  будут:

$$EJ\delta_{1P} = -4Pa^3; \quad EJ\delta_{11} = \frac{14}{3}a^3,$$

и, согласно первому уравнению,  $X_1 = \frac{6}{7}P$ .

Суммарная эпюра изгибающих моментов имеет обратно симметричный вид (см. рис. 8.10).

**Пример.** Решить раму, представленную на рис. 8.11.

**Решение.** Согласно свойству обратно симметричных рам, одноименные опорные реакции равны по величине и противоположны по направлению. Следовательно,  $R_x = 0$ ,  $R_y = M/l$ .

Эпюра  $M_{изг}$  показана на рис. 8.11.

**Пример.** Раскрыть статическую неопределимость рамы, представленной на рис. 8.12.

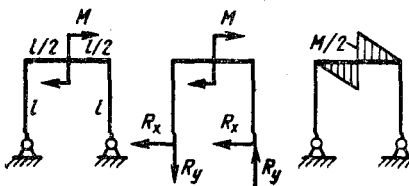


Рис. 8.11

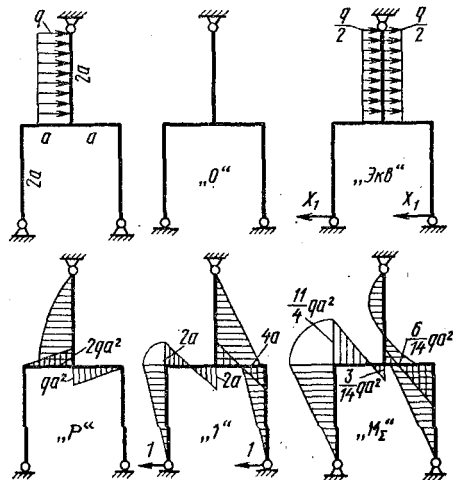


Рис. 8.12

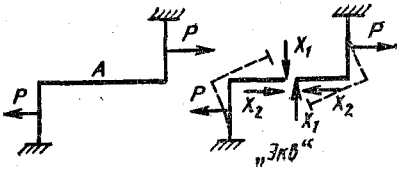


Рис. 8.13

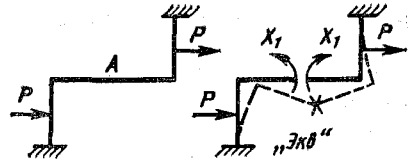


Рис. 8.14

**Решение.** Данная рама обратно симметрична. В этом нетрудно убедиться, представив распределенную нагрузку так, как показано на рис. 8.12. Основную систему получим, сняв горизонтальные связи в нижних шарнирных опорах. В данном случае в качестве основной выбрана, вообще говоря, статически неопределимая система. Однако при обратно симметричной нагрузке опорные реакции в катковых опорах будут равны по величине и противоположны по направлению и их можно определить, из уравнения равновесия.

Коэффициенты канонического уравнения  $\delta_{1P} + \delta_{11}X_1 = 0$  найдем перемножив эпюры:

$$EJ\delta_{1P} = -\frac{2}{3} \cdot 2qa^2 \cdot 2a \cdot \frac{5}{8} \cdot 4a - 2 \cdot \frac{1}{2} qa^2 \cdot a \cdot \frac{2}{3} a = -\frac{22}{3} qa^4;$$

$$EJ\delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 4a + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{4}{3} a + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{3} a = \frac{56}{3} a^4.$$

Тогда  $X_1 = \frac{11}{28} qa$ .

Суммарная эпюра представлена на рис. 8.12.

Остановимся теперь на особенностях расчета центрально симметричных (рис. 8.13) и центрально обратно симметричных (рис. 8.14) рам. В первом случае при повороте одной половины рамы вокруг центра симметрии на  $180^\circ$  внешние силы  $P$  совпадают по направлению, а во втором — окажутся противоположны по направлению.

Разрежем обе рамы по центру симметрии и представим себе характер деформации этих рам под действием сил  $P$ . Из рис. 8.13 видно, что сечения рамы в месте разреза не поворачиваются друг относительно друга, а только расходятся в вертикальном и горизонтальном направлениях. Это означает, что в сечении изгибающие моменты равны нулю и действуют только нормальные  $X_2$  и перерезывающие силы  $X_1$ .

В таких же сечениях второй рамы (см. рис. 8.14), наоборот, должны действовать изгибающие моменты  $X_1$  и будут отсутствовать нормальные и перерезывающие силы, так как эти сечения только поворачиваются друг относительно друга.

В центрально симметричных и обратно симметричных рамах основную систему следует выбирать удалением лишних связей в сечении по центру симметрии.

В смешанных статически неопределимых конструкциях при выборе основной системы следует сначала разрезать тяги и пружины и только после этого удалить лишние связи в элементах рамного типа.

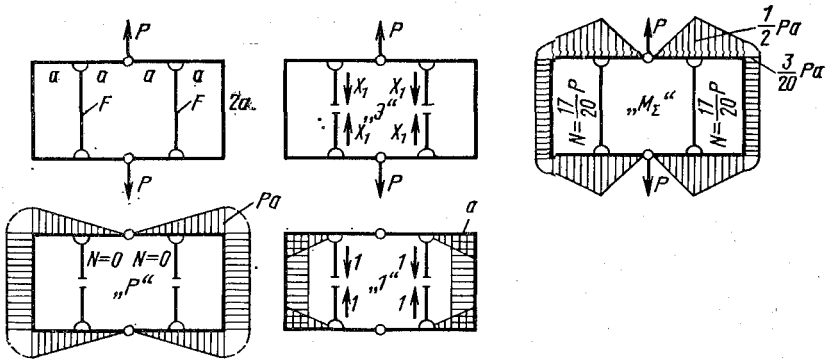


Рис. 8.15

**Пример.** Определить усилие в тягах и построить суммарную эпюру изгибающих моментов для рамы, представленной на рис. 8.15, если  $J_z = \frac{1}{3} Fa^2$ .

**Решение.** Вследствие симметрии рамы относительно вертикальной оси усилия в тягах будут равны по величине и симметричны по направлению. Эквивалентная система и эпюры от заданной нагрузки и единичных сил показаны на рис. 8.15.

Вычисляя коэффициенты канонического уравнения  $\delta_{1P} + \delta_{11}X_1 = 0$  по формуле

$$\delta = \sum_1^n \int_1^i \frac{M_z M_z^1}{EJ_z} ds + \sum_1^m \frac{N_i N_i^1}{EF_i} l_i,$$

получаем

$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EJ_z} \left[ 4 \frac{a^2}{2} \cdot \frac{5}{6} Pa + 2Pa \cdot 2a \cdot a \right] = -\frac{17}{3} \frac{Pa^3}{EJ_z};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \left[ 4 \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{3} a + 4a \cdot a \cdot a \right] + 4 \frac{1 \cdot 1 \cdot a}{EF} = \frac{20}{3} \frac{a^3}{EJ_z}.$$

Следовательно, нормальные силы в тягах  $X_1 = \frac{17}{20} P$ .

Суммарная эпюра  $M_z$  приведена на рис. 8.15. Там же приведены значения нормальных сил  $N$  в тягах.

**КОСОЙ ИЗГИБ. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ  
РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ**

**9.1. КОСОЙ ИЗГИБ**

В предыдущих разделах курса рассматривался так называемый прямой поперечный изгиб, при котором нагружение и искривление оси бруса происходит в одной из двух его главных плоскостей (напомним, что главные плоскости бруса суть две взаимно перпендикулярные и проходящие через ось бруса плоскости, каждая из которых содержит одну из главных центральных осей инерции всех его поперечных сечений).

Если плоскость действия изгибающего момента не содержит ни одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения балки, то происходит так называемый косоый изгиб. Такой случай имеет место, например, при изгибе консольного бруса прямоугольного сечения силой, приложенной в плоскости торцового сечения под некоторым углом  $\alpha$  к его оси симметрии (рис. 9.1).

Косоый изгиб можно представить как сочетание двух прямых изгибов, если разложить изгибающий момент  $M_{изг}$  по главным плоскостям балки на два составляющих момента:  $M_y$  и  $M_z$ .

Изображая изгибающий момент в сечении по правилам механики в виде вектора, нормального к плоскости действия этого момента (рис. 9.2), и раскладывая этот вектор по главным центральным осям  $y$  и  $z$ , получаем

$$M_z = M_{изг} \cos \alpha; \quad M_y = M_{изг} \sin \alpha.$$

Воспользуемся принципом независимости действия сил. Нормальное напряжение  $\sigma$  в какой-либо точке поперечного сечения при косоом изгибе получим как алгебраическую сумму нормальных напряжений, вызванных в той же точке моментами  $M_y$  и  $M_z$ , т. е.

$$\sigma(z, y) = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z. \quad (9.1)$$

Здесь  $y$  и  $z$  — координаты исследуемой точки сечения в осях, совмещенных с главными центральными осями инерции сечения, а  $M_y$  и  $M_z$  — изгибающие моменты относительно этих осей. Все эти величины при расчетах надо подставлять в формулу (9.1) с их знаками. Знаки координат  $y$  и  $z$  определяются положением исследуемой точки сечения относительно координатных осей. Если точка расположена, например, в первой четверти сечения, то  $y$  и  $z$  имеют положительные значения. Следовательно, чтобы растягивающие напряже-

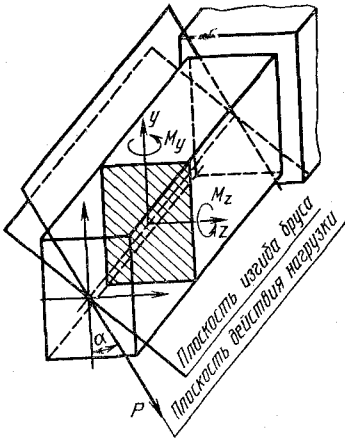


Рис. 9.1

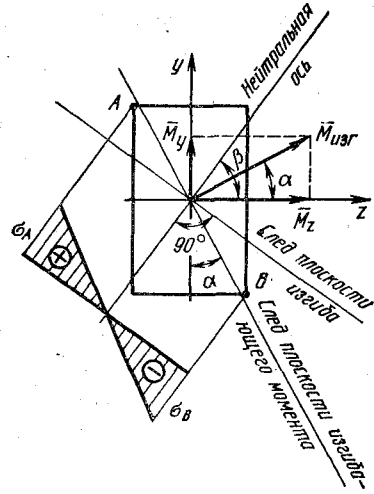


Рис. 9.2

ния в первой четверти имели знак плюс, моменты  $M_y$  и  $M_z$ , вызывающие растяжение в первой четверти, должны быть положительными.

Поэтому условимся в случае косо́го изгиба считать изгибающий момент положительным, если он вызывает растяжение в первой четверти сечения, и отрицательным, если он вызывает сжатие в этой четверти.

(Согласно принятому правилу знаков, в приведенном выше примере изгиба консольного бруса моменту  $M_z$  надо приписать знак плюс, а моменту  $M_y$  — минус.)

Из уравнения (9.1) следует, что концы векторов напряжений располагаются на плоскости. Эта плоскость называется плоскостью напряжений, (рис. 9.3). Плоскость напряжений пересекается с плоскостью поперечного сечения по прямой, в точках которой напряжения равны нулю. Геометрическое место точек сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю, называются нейтральной линией сечения. Нейтральная линия делит сечение на две части, в одной из которых действуют растягивающие, а в другой — сжимающие напряжения.

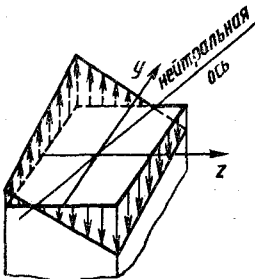


Рис. 9.3

Уравнение нейтральной линии найдем, приравняв правую часть равенства (9.1) нулю:

$$\frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z = 0. \quad (9.2)$$

Уравнение (9.2) можно преобразовать так:

$$y = - \frac{M_y J_z}{M_z J_y} z.$$



Здесь  $y$  и  $z$  — координаты текущей точки нейтральной линии,  
 $a = \frac{M_y J_z}{M_z J_y}$  — угловой коэффициент этой линии.)

Зная положение нейтральной линии и характер распределения напряжений по сечению, легко построить эпюру напряжений в сечении и по ней наметить положение опасных точек.

Эпюра напряжений  $\sigma$  строится на оси, перпендикулярной к нейтральной линии сечения. Поскольку поверхность напряжений есть плоскость, эпюра  $\sigma$  будет ограничена прямой, наклонной к оси эпюры (см. рис. 9.2). Опасными будут точки сечения, наиболее удаленные от нейтральной линии. Напряжения в опасных точках определяются по формуле (9.1) путем подстановки в нее координат этих точек.

Иногда опасные точки можно находить, не определяя положения нейтральной оси сечения. Так, в приведенном выше примере изгиба консольного бруса опасными могут быть только точки  $A$  и  $B$  (см. рис. 9.2), поскольку в этих точках напряжения от моментов  $M_z$  и  $M_y$  имеют наибольшие значения и одинаковые знаки. Во всех остальных точках сечения суммарные напряжения будут по абсолютной величине меньше, чем в точках  $A$  и  $B$ .

Механические свойства материала определяют, какая из двух указанных точек является более опасной. Так, если материал бруса одинаково работает на растяжение и сжатие, то точки  $A$  и  $B$  равноопасны. Если же материал хуже работает на растяжение, чем на сжатие, то опасной будет точка  $A$ , так как в ней действует наибольшее растягивающее напряжение.

Условие прочности при косом изгибе напишется так:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} y_A + \frac{M_y}{J_y} z_A \leq [\sigma]. \quad (9.3)$$

Здесь  $y_A$  и  $z_A$  — координаты опасной точки наиболее нагруженного (опасного) сечения бруса, а  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение для материала бруса при простом растяжении или сжатии.

Из формулы (9.2) следует, что нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения, т. е. является нейтральной осью, и наклонена к оси  $z$  под углом  $\beta$ :

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{M_y}{M_z} \frac{J_z}{J_y}.$$

В рассматриваемом примере  $\operatorname{tg} \beta > 0$ , так как согласно правилу знаков  $M_z > 0$ , а  $M_y < 0$ . В то же время тангенс угла наклона вектора  $M_{\text{нар}}$  к оси  $z$  или, что то же самое, тангенс угла между нормалью к плоскости действия суммарного изгибающего момента в сечении и осью  $z$ , как видно из рис. 9.2,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_z}.$$

Таким образом, в общем случае между углами  $\alpha$  и  $\beta$  существует следующее соотношение:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha.$$

Так как  $J_z \neq J_y$ , то угол  $\alpha$  не равен углу  $\beta$ . Следовательно, при косом изгибе, в отличие от плоского изгиба, нейтральная линия не перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента, а составляет с ней угол  $\varphi = |\beta - \alpha|$ .

Если  $J_z = J_y$ , то нейтральная линия нормальна к плоскости действия изгибающего момента; при этом любая центральная ось сечения является главной и имеет место не косо́й, а прямой изгиб.

При изгибе поперечные сечения бруса, оставаясь плоскими, поворачиваются вокруг нейтральной линии и смещаются в направлении нормали к этой линии. Следовательно, при косом изгибе смещение центра сечения будет происходить не в плоскости действия изгибающего момента. При косом изгибе прямого бруса нагрузками, расположенными в одной плоскости, упругая линия бруса будет плоской кривой. Однако плоскость изгиба, т. е. плоскость, в которой расположена деформированная ось бруса, не будет совпадать с плоскостью действия нагрузки.

Если внешние силы и пары, изгибающие брус, будут расположены в разных плоскостях, то изогнутая ось бруса (упругая линия) будет пространственной кривой.

Полное перемещение  $\delta$  центра сечения бруса, как следует из принципа независимости действия сил и представления косо́го изгиба в виде комбинации двух плоских изгибов, равно геометрической сумме перемещений, вызванных каждым из указанных плоских изгибов в отдельности, т. е.

$$\delta = \sqrt{\delta_z^2 + \delta_y^2}. \quad (9.4)$$

Перемещения  $\delta_y$  и  $\delta_z$  в главных плоскостях бруса определяются способом Мора или другими методами, например с помощью дифференциального уравнения упругой линии.

## 9.2. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Внецентренное растяжение (сжатие) вызывается силой, параллельной оси бруса, но не совпадающей с ней (рис. 9.4).

Проекция точки приложения силы на поперечное сечение называется полюсом или силовой точкой, а прямая, проходящая через полюс и центр сечения, — силовой линией.

Внецентренное растяжение (сжатие) может быть сведено к осевому растяжению (сжатию) и косо́му изгибу, если перенести силу  $P$  в центр тяжести сечения. Так, сила  $P$ , отмеченная на рис. 9.4 одной черточкой, вызовет осевое растяжение бруса, а пара сил, отмеченных двумя черточками, — косо́й изгиб.

На основании принципа независимости действия сил напряжения в точках поперечного сечения при внецентренном растяжении (сжатии) определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z. \quad (9.5)$$

В эту формулу осевую силу  $N$ , изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$ , а также координаты точки сечения, в которой определяется напряжение, надо подставлять с их знаками. Для изгибающих моментов примем такое же правило знаков, как и при косом изгибе, а осевую силу будем считать положительной, когда она вызывает растяжение.

Если координаты полюса обозначить через  $m$  и  $n$ , то момент  $M_z = Pn$ , а  $M_y = Pm$ . Формула (9.5) принимает вид

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pn}{J_z} y + \frac{Pm}{J_y} z. \quad (9.6)$$

Из этого уравнения видно, что концы векторов напряжений в точках сечения расположены на плоскости. Линия пересечения плоскости напряжений с плоскостью поперечного сечения является нейтральной линией, уравнение которой находим, приравнявая правую часть равенства (9.6) нулю. После сокращения на  $P$  получим

$$\frac{n}{J_z} y + \frac{m}{J_y} z + \frac{1}{F} = 0, \quad (9.7)$$

откуда

$$y = -\frac{J_z}{J_y} \frac{m}{n} z - \frac{J_z}{Fn}.$$

Таким образом, нейтральная линия при внецентренном растяжении (сжатии) не проходит через центр тяжести сечения и не перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента. Нейтральная линия отсекает на осях координат отрезки

$$z_0 = -\frac{J_y}{Fn}; \quad y_0 = -\frac{J_z}{Fm}. \quad (9.8)$$

Представим моменты инерции  $J_z$  и  $J_y$  как произведения площади сечения на квадрат соответствующего радиуса инерции  $i_z$  и  $i_y$ .

Тогда выражения (9.8) можно записать так:

$$z_0 = -\frac{i_y^2}{m}; \quad y_0 = -\frac{i_z^2}{n}.$$

Из формул (9.8) видно, что полюс и нейтральная линия всегда расположены по разные стороны от центра тяжести сечения, причем положение нейтральной линии определяется координатами полюса.

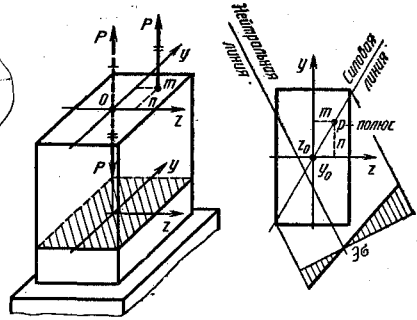


Рис. 9.4

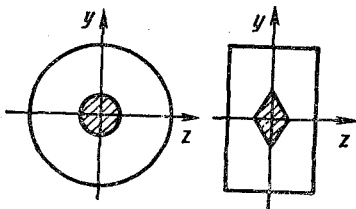


Рис. 9.5

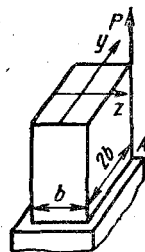


Рис. 9.6

При приближении полюса по силовой линии к центру тяжести сечения нейтральная линия будет удаляться от центра, оставаясь параллельной своему первоначальному направлению. В пределе при  $m = n = 0$  нейтральная линия удалится в бесконечность. В этом случае будет иметь место центральное растяжение (сжатие) бруса.

На силовой линии всегда можно найти такое положение полюса, при котором нейтральная линия будет касаться контура сечения, нигде не пересекая его. Если провести все возможные нейтральные линии так, чтобы они касались контура сечения, нигде не пересекая его, и найти соответствующие им полюсы, то окажется, что полюсы замкнуты линией. Область, ограниченная этой линией, называется ядром сечения. В круглом сечении, например, ядро представляет собой круг диаметром в 4 раза меньшим диаметра сечения, а в прямоугольных и двутавровых сечениях ядро имеет форму параллелограмма (рис. 9.5).

Из самого построения ядра сечения следует, что до тех пор, пока полюс находится внутри ядра, нейтральная линия не пересечет контур сечения и напряжения во всем сечении будут одного знака. Если же полюс расположен вне ядра, то нейтральная линия пересечет контур сечения, и тогда в сечении будут действовать напряжения разного знака. Указанное обстоятельство необходимо учитывать при расчете на внецентренное сжатие стоек из хрупких материалов. Поскольку хрупкие материалы плохо воспринимают растягивающие нагрузки, то желательно внешние силы прикладывать к стойке так, чтобы во всем сечении действовали только напряжения сжатия. Для этого точка приложения равнодействующей внешних сил, сжимающих стойку, должна находиться внутри ядра сечения.

Расчет на прочность при внецентренном растяжении и сжатии производится так же, как и при косом изгибе, — по напряжению в опасной точке поперечного сечения. Опасной является точка сечения, наиболее удаленная от его нейтральной линии. Однако в тех случаях, когда в этой точке действует напряжение сжатия, а материал стойки хрупкий, опасной может быть точка, в которой действует наибольшее растягивающее напряжение.

Эпюра напряжений строится на оси, перпендикулярной к нейтральной линии сечения, и ограничена прямой линией (см. рис. 9.4).

Условие прочности запишется так:

$$\left[ \sigma_A = \frac{Pn}{J_z} y_A + \frac{Pm}{J_y} z_A + \frac{P}{F} \leq [\sigma] \right] \quad (9.9)$$

Здесь  $y_A$  и  $z_A$  — координаты опасной точки, а  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение на растяжение или сжатие.

**Пример.** Определить, во сколько раз напряжение в опасной точке бруса прямоугольного сечения при внецентренном приложении нагрузки больше, чем при центральном ее приложении (рис. 9.6).

**Решение.** При центральном приложении нагрузки напряжения во всех точках поперечных сечений стойки одинаковы:

$$\sigma = \frac{P}{2b^2}.$$

При внецентренном приложении нагрузки в поперечных сечениях стойки действуют осевая сила  $N = P$  и изгибающие моменты  $M_z = Pb$  и  $M_y = 0,5Pb$ . Подставляя в формулу (9.7) значения силовых факторов и моментов инерции, находим уравнение нейтральной линии:  $6z + 3y + b = 0$ .

Наиболее удалена от нейтральной линии точка  $A$  с координатами  $z = b/2$  и  $y = b$ . Напряжение в этой точке

$$\sigma_A = \frac{3P}{2b^3} b + \frac{3P}{b^3} \frac{b}{2} + \frac{P}{2b^2} = 7 \frac{P}{2b^2}.$$

Итак, напряжение в опасной точке при внецентренном приложении силы  $P$  оказалось в семь раз больше, чем при центральном ее приложении. Этот результат показывает, насколько важно для уменьшения напряжений обеспечивать центральное приложение нагрузки.

**ОСНОВЫ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА**

---

**10.1. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА**

Напряжения в точке тела, как известно (см. разд. 1.9), зависят не только от величины действующих на тело сил, но и от ориентировки площадки их действия. На различно ориентированных площадках, проходящих через одну и ту же точку, напряжения будут различны как по величине, так и по направлению. Совокупность напряжений на всех площадках, проходящих через данную точку, называется напряженным состоянием в точке тела. Как будет показано в дальнейшем, напряжения на любой площадке, проходящей через данную точку, можно определить, если известны напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через ту же точку.

**10.2. КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЧКЕ ТЕЛА**

Отнесем тело к системе прямоугольных координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  и проведем через какую-либо точку тела площадки, параллельные координатным плоскостям. Напряжения на этих площадках разложим на составляющие, параллельные осям координат. В результате на каждой площадке получим одно нормальное и два касательных напряжения: на площадке, перпендикулярной оси  $x$  —  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$ , на площадке, перпендикулярной оси  $y$  —  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{yz}$ , на площадке, перпендикулярной оси  $z$  —  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{zy}$ .

Указанные девять величин, представляющие собой напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через исследуемую точку, называются компонентами напряжений или компонентами напряженного состояния в точке тела.

Для того, чтобы сделать изображение компонентов напряжений более наглядным, из тела в окрестности исследуемой точки вырезают элементарный параллелепипед, грани которого направляют параллельно рассматриваемым площадкам (см. рис. 1.1). Вследствие малых размеров параллелепипеда одноименные напряжения на противоположных его гранях можно считать равными напряжениям на параллельной им площадке, проходящей через исследуемую точку.

Итак, в каждой точке имеется девять компонентов напряжений (в частных случаях некоторые из них могут быть равны нулю). Их

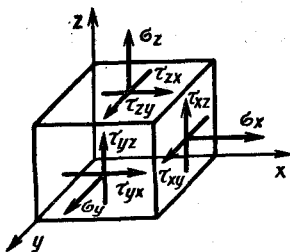


Рис. 10.1

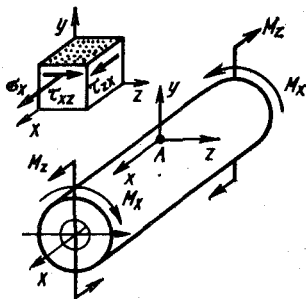


Рис. 10.2

принято записывать в виде таблицы — тензора напряженного состояния

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \quad (10.1)$$

Из девяти компонентов напряжений независимых всего шесть, так как согласно свойству парности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Для компонентов напряжений принято следующее правило знаков.

В том случае, когда внешняя по отношению к рассматриваемой части тела нормаль к сечению совпадает по направлению с параллельной ей осью координат, положительными направлениями компонентов напряжений в этом сечении считаются направления параллельных им осей координат. Если же внешняя нормаль противоположна направлению параллельной ей оси координат, то положительные направления компонентов напряжений противоположны направлению параллельных им осей. На рис. 10.1 показаны положительные направления компонентов напряжений.

При исследовании напряженного состояния предполагается, что компоненты напряжений известны. Для деталей, имеющих форму бруса, задача определения компонентов напряжений решается сравнительно просто, так как известны формулы для напряжений в сечениях бруса при различных комбинациях нагрузок. Значительно труднее определить компоненты напряжений аналитическими методами для деталей, имеющих более сложную форму, как, впрочем, и для бруса в местах концентраций напряжений. Эти задачи рассматриваются в курсах теории упругости и пластичности. В тех случаях, когда аналитическое решение невозможно, прибегают к различным экспериментальным методам определения напряжений.

**Пример.** Определить компоненты напряжений в точке  $A$  поверхности трубы  $D \times d$  (рис. 10.2), подвергнутой одновременно действию изгибающих нагрузок  $M = 2Pl$  и скручивающих пар  $M = Pl$ .

**Решение.** Вырежем в окрестности точки  $A$  двумя поперечными и тремя продольными сечениями бесконечно малый параллелепипед так, чтобы его верхняя грань совпадала с боковой поверхностью бруса (рис. 10.2). Поскольку боковая поверхность бруса свободная от нагрузок, то напряжения на гранях, перпендикулярных оси  $y$ , будут равны нулю. Нулю будут равны и нормальные напряжения на гранях, перпендикулярных оси  $z$ , так как по предположению продольные волокна при изгибе друг на друга не давят.

Таким образом, из девяти компонентов напряженного состояния в точке  $A$  трубы отличны от нуля только три:  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zx}$ . Для их определения имеем формулы

$$\sigma_x = \frac{M_z}{W_z} = \frac{2Pl \cdot 32}{\pi D^3 (1 - C^4)};$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{M_R}{W_R} = \frac{16Pl}{\pi D^3 (1 - C^4)}; \quad C = \frac{d}{D}.$$

### 10.3. НАПРЯЖЕНИЯ НА ПРОИЗВОЛЬНО НАКЛОНЕННОЙ К ОСЯМ КООРДИНАТ ПЛОЩАДКЕ

Покажем, что напряжения на любой площадке, проходящей через какую-либо точку, могут быть выражены через компоненты напряжений в этой точке.

Для доказательства допустим, что известны напряжения на каких-либо трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку, т. е. известны компоненты напряжений в этой точке  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ , если принять нормали к этим площадкам за оси координат.

Определим напряжения на наклонной площадке, нормаль к которой составляет с осями координаты углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  (рис. 10.3). Косинусы углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , как известно, называются направляющими косинусами и их принято обозначать так:  $\cos \alpha = l$ ;  $\cos \beta = m$ ;  $\cos \gamma = n$ . Направляющие косинусы связаны соотношением  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

Для определения напряжений на наклонной площадке проведем на бесконечно близком от нее расстоянии вспомогательную площадку, параллельную рассматриваемой, а через исследуемую точку — три плоскости, параллельные координатным плоскостям. Эти четыре плоскости выделяют из тела бесконечно малый тетраэдр. На гранях выделенного тетраэдра действуют напряжения (рис. 10.4): на грани  $ABC$  —  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$ , на грани  $ACD$  —  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ , на грани  $ABD$  —

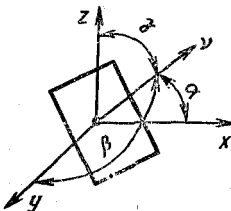


Рис. 10.3

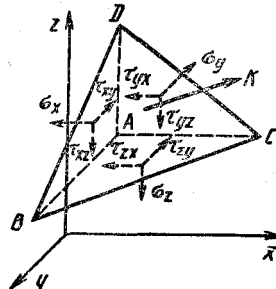


Рис. 10.4



$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ , на грани  $BDC - K$ . Вследствие малости граней тетраэдра можно считать, что напряжения распределены по ним равномерно.

Напишем для этого тетраэдра три уравнения равновесия:

$$\sum x = 0; \quad \sum y = 0; \quad \sum z = 0.$$

Этих уравнений достаточно для определения проекций  $K_x, K_y$  и  $K_z$  полного напряжения  $K$  в наклонной площадке на оси координат.

Обозначим площадь наклонной площадки  $BCD$  через  $dF$ . Тогда площадь грани  $ABD$  будет  $dF \cdot l$ , площадь грани  $ADC - dF \cdot m$ , площадь грани  $ABC - dF \cdot n$ .

В уравнениях равновесия тетраэдра не будем учитывать объемные силы, так как они являются бесконечно малыми величинами высших порядков малости вследствие малости размеров тетраэдра.

Проектируя внешние поверхностные силы на оси  $x$ , получаем

$$K_x dF = \sigma_x dFl + \tau_{yx} dFm + \tau_{zx} dFn,$$

откуда

$$\begin{aligned} K_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ K_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n; \\ K_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Полное напряжение на наклонной площадке

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}. \quad (10.3)$$

Таким образом, доказано, что напряжения на любой наклонной площадке действительно могут быть выражены через компоненты напряжений в данной точке.

#### 10.4. НОРМАЛЬНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ НА НАКЛОННОЙ ПЛОЩАДКЕ

Нормальное напряжение  $\sigma_v$  найдем, проектируя вектор полного напряжения на нормаль  $v$  к площадке. Поскольку проекция вектора на какое-либо направление равна сумме проекций составляющих данного вектора на это направление, то  $\sigma_v = K_x l + K_y m + K_z n$ .

Заменяя  $K_x, K_y$  и  $K_z$  их выражениями через компоненты напряжений по формулам (10.2) и учитывая свойство парности касательных напряжений, получаем

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \quad (10.4)$$

Касательное напряжение можно определить из соотношения

$$\tau_v^2 = K^2 - \sigma_v^2. \quad (10.5)$$

#### 10.5. ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ И ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ИНВАРИАНТЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Нормальные  $\sigma_v$  и касательные  $\tau_v$  напряжения на наклонной площадке зависят от ее ориентировки; величина их изменяется с изменением наклона площадки.

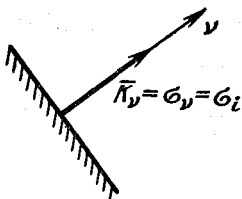


Рис. 10.5

Можно показать, что среди множества площадок, проходящих через точку тела, всегда найдутся по крайней мере три взаимно перпендикулярные площадки, касательные напряжения на которых равны нулю. Эти площадки называются главными площадками, а нормальные напряжения на них — главными напряжениями.

Направления нормалей к этим площадкам называются главными направлениями или главными осями напряжений в данной точке.

Докажем сначала существование главных площадок, а затем их ортогональность.

Для доказательства предположим, что среди множества площадок, проходящих через точку, существует одна площадка, на которой действует только нормальное напряжение (рис. 10.5), а касательное равно нулю. Эта площадка будет главной. Обозначим напряжение на этой площадке символом  $\sigma_i$ , а направляющие косинусы нормали к ней —  $l_i, m_i, n_i$ . Проектируя полное напряжение  $K = \sigma_i$  на оси координат, получаем

$$K_x = \sigma_i l_i; \quad K_y = \sigma_i m_i; \quad K_z = \sigma_i n_i.$$

Но согласно формулам (10.2)

$$K_x = \sigma_x l_i + \tau_{yx} m_i + \tau_{zx} n_i;$$

$$K_y = \tau_{xy} l_i + \sigma_y m_i + \tau_{zy} n_i;$$

$$K_z = \tau_{xz} l_i + \tau_{yz} m_i + \sigma_z n_i.$$

Следовательно,

$$\sigma_i l_i = \sigma_x l_i + \tau_{yx} m_i + \tau_{zx} n_i;$$

$$\sigma_i m_i = \tau_{xy} l_i + \sigma_y m_i + \tau_{zy} n_i; \quad (10.6)$$

$$\sigma_i n_i = \tau_{xz} l_i + \tau_{yz} m_i + \sigma_z n_i.$$

Преобразуем написанные уравнения так:

$$(\sigma_x - \sigma_i) l_i + \tau_{yx} m_i + \tau_{zx} n_i = 0;$$

$$\tau_{xy} l_i + (\sigma_y - \sigma_i) m_i + \tau_{zy} n_i = 0; \quad (10.7)$$

$$\tau_{xz} l_i + \tau_{yz} m_i + (\sigma_z - \sigma_i) n_i = 0.$$

Относительно переменных  $l_i, m_i$  и  $n_i$  полученная система является системой линейных однородных алгебраических уравнений. Направляющие косинусы  $l_i, m_i$  и  $n_i$  не могут быть одновременно равны нулю, так как связаны соотношением  $l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$ ; поэтому для существования решений, отличных от нулевых, определитель системы должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0. \quad (10.8)$$

Равенство (10.8) является уравнением третьей степени относительно  $\sigma_i$ , и, как всякое уравнение нечетной степени, имеет по меньшей мере один действительный корень. Это обстоятельство свидетельствует о существовании, по крайней мере, одного главного напряжения, а следовательно, и одной главной площадки в исследуемой точке.

Обратимся к доказательству существования двух других главных площадок. Повернем оси координат, направив одну из них, например ось  $y$ , по нормали к главной площадке, существование которой было доказано. В этом случае

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0.$$

Напишем теперь уравнение (10.8) для случая, когда ось  $y$  перпендикулярна главной площадке. Полагая в уравнении (10.8)  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{zy}$  равными нулю, получаем

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & \sigma_y - \sigma_i & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам второй строки. Имеем

$$(\sigma_y - \sigma_i) \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(\sigma_y - \sigma_i) [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_z - \sigma_i) - \tau_{xz}^2] = 0.$$

Первое решение этого уравнения ( $\sigma_i = \sigma_y$ ) ничего нового не дает, так как приводит к исходной главной площадке.

Два других решения получим, приравнявая нулю множитель, стоящий в квадратных скобках:

$$\sigma_i^2 - \sigma_i(\sigma_x + \sigma_z) + \sigma_x\sigma_z - \tau_{zx}^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим значения двух остальных главных напряжений:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x + \sigma_z)^2 + 4\tau_{zx}^2 - 4\sigma_x\sigma_z}.$$

После преобразования под радикалом окончательно получим

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zx}^2}. \quad (10.9)$$

Из последнего выражения видно, что два других значения  $\sigma_i$  также действительны, так как под корнем стоит сумма квадратов двух величин.

Итак, все три корня уравнения (10.8) оказались действительными. Этим и доказано существование трех главных напряжений, а тем самым и трех главных площадок.

Главные напряжения принято обозначать символами  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , так чтобы удовлетворялись неравенства  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Значения

главных напряжений определяются из уравнения (10.8). В развернутом виде это уравнение может быть записано так:

$$\sigma_i^3 - J_1 \sigma_i^2 + J_2 \sigma_i - J_3 = 0, \quad (10.10)$$

где  $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ ;

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (10.11)$$

Компоненты напряженного состояния  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$  зависят от ориентировки осей  $x, y, z$  и будут меняться при изменении направления этих осей. В то же время главные напряжения в каждой точке имеют вполне определенные значения и направления и, естественно, не зависят от направления выбранных для их определения координатных осей. Но тогда коэффициенты  $J_1, J_2, J_3$  в уравнении (10.10) не должны изменять своей величины при изменении направления исходной системы прямоугольных координат. Поэтому коэффициенты  $J_1, J_2$  и  $J_3$  называются инвариантами напряженного состояния в точке. Если в качестве исходных осей приняты главные направления, то

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$J_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1;$$

$$J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (10.12)$$

Докажем теперь ортогональность главных площадок. Сначала докажем ортогональность первой и второй главных площадок.

Обозначив направляющие косинусы первой главной площадки через  $l_1, m_1, n_1$ , а второй — через  $l_2, m_2, n_2$ , запишем уравнения (10.6) для первой площадки:

$$\sigma_1 l_1 = \sigma_x l_1 + \tau_{yx} m_1 + \tau_{zx} n_1;$$

$$\sigma_1 m_1 = \tau_{xy} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{zy} n_1;$$

$$\sigma_1 n_1 = \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} m_1 + \sigma_z n_1$$

и для второй:

$$\sigma_2 l_2 = \sigma_x l_2 + \tau_{yx} m_2 + \tau_{zx} n_2;$$

$$\sigma_2 m_2 = \tau_{xy} l_2 + \sigma_y m_2 + \tau_{zy} n_2;$$

$$\sigma_2 n_2 = \tau_{xz} l_2 + \tau_{yz} m_2 + \sigma_z n_2.$$

Умножим уравнения первой группы соответственно на  $l_2, m_2$  и  $n_2$ , а уравнения второй группы на  $l_1, m_1, n_1$  и сложим все уравнения сначала первой группы, а затем второй. Далее из первой суммы вычтем вторую. Проведя эти операции, получим

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = 0.$$

Если  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , то  $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ . Последнее равенство есть условие перпендикулярности двух плоскостей, что и доказывает ортогональность первой и второй главных площадок. В случае когда  $\sigma_1 = \sigma_2$ , как будет показано в дальнейшем, любая площадка, перпендикулярная к третьей, является главной.

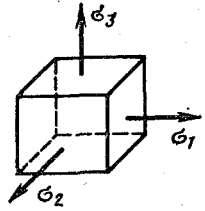


Рис. 10.6

Аналогично доказывается ортогональность остальных главных площадок.

Итак, доказано существование в точке по меньшей мере трех главных площадок и их ортогональность. Отсюда следует, что любое сложное напряженное состояние в точке может быть сведено к растяжению и сжатию по трем взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 10.6). Для этого достаточно направить оси координат по нормальям к главным площадкам.

### 10.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ПЛОЩАДОК

Чтобы определить положение какой-либо из главных площадок, надо найти направляющие косинусы нормали к этой площадке. Для их определения следует воспользоваться системой уравнений (10.7). Однако равенство нулю определителя этой системы указывает на то, что не все уравнения системы являются линейно независимыми; одно из них есть следствие двух других. Чтобы сделать систему определенной, надо добавить к ней равенство  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ . После этого число независимых уравнений становится достаточным для однозначного определения искомых направляющих косинусов. Итак, для определения положения какой-либо главной площадки надо совместно решить уравнения

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i) l_i + \tau_{yx} m_i + \tau_{zx} n_i &= 0; \\ \tau_{xy} l_i + (\sigma_y - \sigma_i) m_i + \tau_{zy} n_i &= 0; \\ \tau_{xz} l_i + \tau_{yz} m_i + (\sigma_z - \sigma_i) n_i &= 0; \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 &= 1, \end{aligned} \tag{10.13}$$

предварительно подставив в них вместо  $\sigma_i$  значение главного напряжения на искомой площадке. Индексу  $i$  в обозначениях направляющих косинусов следует при этом приписать номер той главной площадки, положение которой определяется.

### 10.7. ЭЛЛИПСОИД НАПРЯЖЕНИЙ

Направим оси координат  $x, y, z$  по нормальям соответственно к первой, второй и третьей главным площадкам. В этом случае на площадках, совпадающих с координатными плоскостями, касательные напряжения равны нулю и действуют только нормальные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Согласно формулам (10.2) в этом случае  $K_x = \sigma_1 l, K_y = \sigma_2 m, K_z = \sigma_3 n$ .

Отсюда, учитывая равенство  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , получаем

$$\frac{K_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{K_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{K_z^2}{\sigma_3^2} = 1. \quad (10.14)$$

Уравнение (10.14) показывает, что концы векторов напряжений  $K$  на всех площадках, проходящих через данную точку, располагаются на поверхности эллипсоида, полуосями которого являются главные напряжения. Следовательно, главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  суть экстремальные значения напряжений  $\sigma_v$  в данной точке; одно из двух крайних главных напряжений, а именно  $\sigma_1$ , есть наибольшее из всех нормальных напряжений  $\sigma_v$ , а другое ( $\sigma_3$ ) — наименьшее.

Если  $\sigma_1 = \sigma_2$  или  $\sigma_2 = \sigma_3$ , то эллипсоид напряжений будет эллипсоидом вращения и все плоскости, проходящие через ось вращения, будут равноправными, т. е. главными. Таким образом, в случае равенства двух главных напряжений в точке будет существовать бесчисленное множество главных площадок и все они будут нормальны к площадке действия главного напряжения, не равно двум другим.

При  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  эллипсоид напряжений обращается в сферу и любая площадка, проходящая через данную точку, будет в этом случае главной площадкой.

#### 10.8. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЛОЩАДКИ ИХ ДЕЙСТВИЯ

Предположим, что известны главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  и положение главных площадок. Направим оси координат по нормальям к этим площадкам и определим нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке, нормаль к которой составляет с выбранными осями углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Поскольку за исходные приняты главные площадки, то  $\sigma_x = \sigma_1$ ;  $\sigma_y = \sigma_2$ ;  $\sigma_z = \sigma_3$ ;  $\tau_{xy} = \tau_y = \tau_{yx} = 0$ . Подставляя указанные значения компонентов напряжений в уравнения (10.3), (10.4), и (10.5), находим значения  $\sigma_v$  и  $\tau_v$ :

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2; \\ K_v^2 &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2; \\ \tau_v^2 &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - [\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2]^2. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Определим площадки, на которых касательные напряжения достигают экстремальных значений.

Из трех переменных  $l$ ,  $m$  и  $n$ , определяющих положение искомым площадок, только две являются независимыми, так как они связаны соотношением  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ . Воспользуемся этим равенством и исключим из (10.15) одну из переменных, например  $n$ . Подставляя в выражение для касательного напряжения  $n^2 = 1 - l^2 - m^2$ , после простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \tau_v^2 &= (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) m^2 + \sigma_3^2 - \\ &- [\sigma_1 - \sigma_3] l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \sigma_3]^2. \end{aligned}$$

В этом уравнении  $l$  и  $m$  надо рассматривать как независимые переменные, а  $\tau_v^2$  — как функцию этих переменных. Следовательно, для определения положения площадок действия экстремальных  $\tau_v$  надо найти частные производные  $\frac{\partial \tau_v^2}{\partial l}$  и  $\frac{\partial \tau_v^2}{\partial m}$  и приравнять их нулю.

Получим два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_v^2}{\partial l} &= 2(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)l - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3] \times \\ &\quad \times 2(\sigma_1 - \sigma_3)l = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_v^2}{\partial m} &= 2(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \\ &\quad + \sigma_3] \cdot 2(\sigma_2 - \sigma_3)m = 0. \end{aligned}$$

Поскольку предполагается, что  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  и  $\sigma_2 \neq \sigma_3$  — эти уравнения можно разделить соответственно на  $\sigma_1 - \sigma_3$  и  $\sigma_2 - \sigma_3$ . Получим

$$l \left[ (\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right] = 0;$$

$$m \left[ (\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right] = 0.$$

Найдем все возможные решения этой системы уравнений. Положим  $l = 0$  и  $m = 0$ , тогда  $n = \pm 1$ . Эти значения определяют положение третьей главной площадки, касательное напряжение на которой равно нулю. Эта площадка нас не интересует, так как искомыми являются площадки, на которых экстремальные значения  $\tau_v$  отличны от нуля.

Остальные возможные решения системы находим, приравнявая нулю один из множителей в каждом уравнении.

Предположим, что  $l = 0$ ,  $m \neq 0$ . Тогда выражение, стоящее в скобках во втором уравнении, должно быть равно нулю:

$$(\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = 0.$$

Отсюда  $2m^2 - 1 = 0$ ,  $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Подставляя  $l = 0$  и  $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  в равенство  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , находим, что третий направляющий косинус нормали к площадке действия экстремального касательного напряжения  $n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Аналогично найдем, что при  $m = 0$  направляющие косинусы  $l = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Если бы мы исключили из уравнений (10.15) не  $n$ , а  $l$

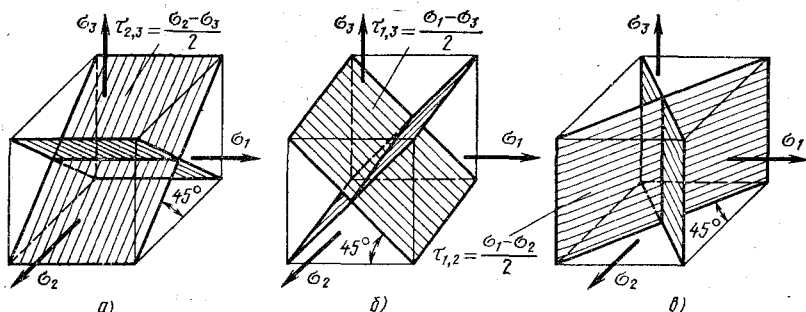


Рис. 10.7

или  $m$ , то получили бы еще одно решение, отличное от двух предыдущих, а именно:  $n = 0$ ,  $l = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Все три системы решений приведены в табл. 10.1.

Решение  $a$  определяет две ортогональные площадки, перпендикулярные к первой главной площадке, так как  $l = 0$  ( $\alpha = 90^\circ$ ). Эти две площадки делят угол между второй и третьей площадками пополам, что следует из равенств  $\cos \beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  (рис. 10.7); касательные напряжения на них находим, подставляя в уравнение (10.15)  $l = 0$ ;  $m = n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$$\text{откуда } \tau_v = \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}.$$

Решение  $b$  определяет две площадки, перпендикулярные ко второй главной площадке ( $\cos \beta = 0$ ). Эти площадки делят пополам угол между первой и третьей площадками, так как  $\alpha = \gamma = 45^\circ$  (рис. 10.7, б). Касательные напряжения на этих площадках определим, подставив в уравнение (10.15)  $m = 0$  и  $l = n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ :

Таблица 10.1

Направляющие косинусы	Решения		
	$a$	$b$	$c$
$l$	0	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
$m$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
$n$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	0

$$\tau_{1,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Наконец, третье решение определяет две площадки, перпендикулярные к третьей главной ( $\cos \gamma = 0$ ) и делящие угол между первой и второй главными площадками пополам (рис. 10.7, в). Касательные напряжения на них

$$\tau_{1,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Так как  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , наибольшее из касательных напряжений



в точке равно полуразности крайних главных напряжений и действует на двух площадках, перпендикулярных ко второй главной площадке и составляющих с первой и третьей главными площадками углы  $45^\circ$ . Касательные напряжения на этих площадках

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (10.16)$$

Отметим, что на площадках с наибольшими касательными напряжениями могут действовать и нормальные напряжения.

**Пример.** Определить  $\tau_{\max}$  и площадки их действия в точке, напряженное состояние в которой задано напряжениями, как показано на рис. 10.8.

**Решение.** По условию на площадках, перпендикулярных осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ , касательные напряжения равны нулю. Следовательно, эти площадки являются главными, причем  $\sigma_1 = 200$  МПа;  $\sigma_2 = 100$  МПа;  $\sigma_3 = -200$  МПа.

Максимальное касательное напряжение в исследуемой точке

$$\tau_{\max} = \frac{200 - (-200)}{2} = 200 \text{ МПа}$$

и действует на площадках, параллельных оси  $x$  и наклоненных к осям  $y$  и  $z$  под углом  $45^\circ$ . На рис. 10.8 эти площадки заштрихованы.

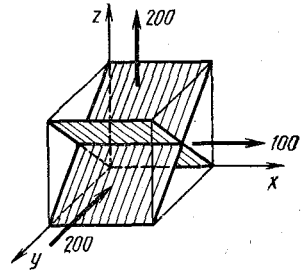


Рис. 10.8

### 10.9. КРУГОВАЯ ДИАГРАММА НАПРЯЖЕНИЙ (КРУГИ МОРА)

Определим нормальные и касательные напряжения на всех площадках, перпендикулярных к одной из главных, например к третьей главной площадке. На рис. 10.9 одна из этих площадок заштрихована.

Как следует из рис. 10.9, нормали к указанным площадкам имеют направляющие косинусы  $n = 0$ ,  $l = \cos \alpha$ ,  $m = \cos \beta = \sin \alpha$ . Подставляя эти значения направляющих косинусов в формулы (10.15), получаем следующие выражения для нормального и касательного напряжений в исследуемых площадках:

$$\sigma_v = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad (10.17)$$

$$\tau_v^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \sin^2 \alpha - [\sigma_1 \cos^2 \alpha - \sigma_2 \sin^2 \alpha]^2.$$

Заменяя в последних равенствах  $\cos^2 \alpha$  и  $\sin^2 \alpha$  их выражениями через косинус двойного угла, после простых преобразований (в выражении  $\tau_v^2$  предварительно возводится в квадрат сумма, заключенная в скобки) получаем

$$\sigma_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad (10.18)$$

$$\tau_v = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

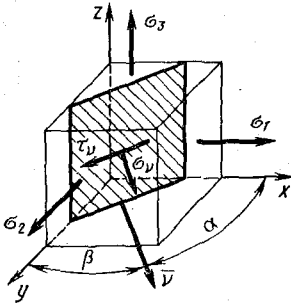


Рис. 10.9

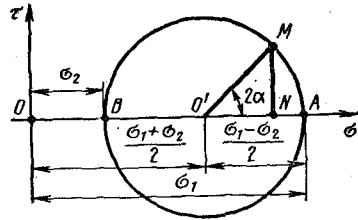


Рис. 10.10

Обратимся к геометрической интерпретации этих формул.

Возьмем две перпендикулярные оси; по оси абсцисс будем откладывать нормальные напряжения, а по оси ординат — касательные напряжения (рис. 10.10). Отложим отрезки  $OA$  и  $OB$ , соответствующие в выбранном масштабе напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Затем на разности отрезков  $OA$  и  $OB$  как на диаметре построим окружность. Радиус этой окружности, как следует из ее построения, равен  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ , а абсцисса центра равна  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ .

Проведем из центра окружности прямую под углом  $2\alpha$  к оси абсцисс. Координаты точки пересечения этой прямой с окружностью суть отрезки  $ON$  и  $NM$ . Как видно из диаграммы,

$$ON = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha;$$

$$NM = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Сравнивая эти выражения с правыми частями формул (10.18), приходим к выводу, что координаты точки  $M$  определяют нормальные и касательные напряжения на площадке, наклоненной под углом  $\alpha$  к первой главной площадке. Следовательно, координаты всех точек построенной окружности определяют напряжения во всех площадках, проходящих через данную точку и перпендикулярных к третьей главной площадке.

К такому заключению можно прийти и другим путем. Исключая из (10.18)  $\sin 2\alpha$  и  $\cos 2\alpha$ , получаем

$$\left(\sigma_v - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_v^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2.$$

В осях  $\sigma$ ,  $\tau$  — это уравнение окружности радиуса  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$  с центром на оси  $\sigma$ , абсцисса которого  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ . Именно эта окружность и построена на рис. 10.10.

Аналогично можно построить круговые диаграммы для площадок, перпендикулярных ко второй, а затем и к первой главной пло-

щадке. Если все три диаграммы построить на одном графике, то получим диаграмму для объемного напряженного состояния. Такая диаграмма представлена на рис. 10.11; она называется круговой диаграммой Мора.

Координаты точек окружности 1 на этой диаграмме определяют  $\sigma_v$  и  $\tau_v$  во всем множестве площадок, перпендикулярных ко второй главной площадке. Координаты точек окружности 2 определяют  $\sigma_v$  и  $\tau_v$  для всех площадок, перпендикулярных к третьей главной, а окружности 3 — для площадок, перпендикулярных к первой главной площадке.

В теории упругости доказывается, что напряжения на любой площадке, наклонной ко всем трем главным площадкам, определяются координатами точек заштрихованной части диаграммы.

Приведем круговые диаграммы для некоторых напряженных состояний.

На рис. 10.12 приведены круговые диаграммы напряжений для одноосного растяжения, одноосного сжатия и чистого сдвига. На рис. 10.13 представлена круговая диаграмма для гидростатического сжатия ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma$ ). В этом случае радиусы всех трех кругов напряжений равны нулю. Следовательно, при гидростатическом сжатии любая площадка, проходящая через точку, будет главной. Такое же положение имеет место и при всестороннем растяжении силами равной интенсивности.

Рассмотрение круговой диаграммы приводит к следующим выводам.

1. Наибольшее главное напряжение является наибольшим из всех нормальных напряжений, существующих в точке, а наименьшее — наименьшим из нормальных напряжений в этой точке. Иначе говоря, нормальные напряжения на главных площадках достигают экстремальных значений.

2. Максимальное касательное напряжение в точке

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

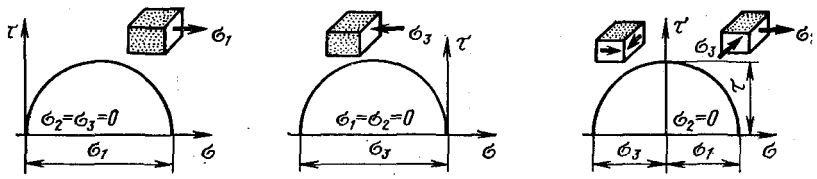
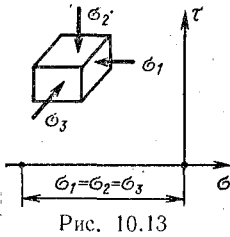


Рис. 10.12



и действует на двух ортогональных площадках, перпендикулярных ко второй главной площадке и составляющих с первой и третьей углы  $45^\circ$ . Наибольшие касательные напряжения на площадках, перпендикулярных к первой и третьей главным площадкам:

$$\tau_{2,3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{2,1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Площадки действия этих напряжений соответственно делят пополам углы между второй и третьей и между первой и второй главными площадками.

К такому же заключению мы пришли в разд. 10.8 иным путем.

3. В случае равенства хотя бы двух главных напряжений один из кругов Мора стягивается в точку, и это означает, что в точке тела существует бесчисленное множество главных площадок. Эти площадки параллельны направлению главного напряжения, отличного от двух равных между собой главных напряжений. В случае равенства всех трех главных напряжений любая площадка, проходящая через точку, является главной.

#### 10.10. НАПРЯЖЕНИЯ НА ПЛОЩАДКАХ, РАВНОНАКЛОННЫХ К ГЛАВНЫМ (ОКТАЭДРИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ)

Если площадка наклонена под одним и тем же углом ко всем трем главным площадкам, то ее направляющие косинусы  $l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , а проекции  $K_x, K_y$  и  $K_z$  полного напряжения  $K_{\text{окт}}$  на этой (октаэдрической) площадке согласно формулам (10.2) и условию  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$  будут:

$$K_x = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}; \quad K_y = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}; \quad K_z = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}.$$

Квадрат полного напряжения на октаэдрической площадке

$$K_{\text{окт}}^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2).$$

Нормальное напряжение на этой площадке согласно (10.4)

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (10.19)$$

а квадрат касательного напряжения согласно соотношению  $\tau_v^2 = K^2 - \sigma_v^2$

$$\tau_{\text{окт}}^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Отсюда

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (10.20)$$

Такие же нормальные и касательные напряжения будут действовать на всех восьми равнонаклонных к главным осям площадках, образующих замкнутую восьмигранную фигуру — октаэдр.

### 10.11. ПОНЯТИЕ О ШАРОВОМ ТЕНЗОРЕ И ДЕВИАТОРЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Предположим, что напряженное состояние в точке тела задано тензором напряжений

$$T_{\text{н}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Представим этот тензор в виде суммы двух тензоров:

$$T_{\text{н}} = T_{\text{н}}^0 + D_{\text{н}},$$

где

$$T_{\text{н}}^0 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}; \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

— так называемый шаровой тензор, а

$$D_{\text{н}} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{pmatrix}$$

— девиатор напряжений.

Представление тензора напряжений в виде суммы двух тензоров равносильно представлению данного напряженного состояния (рис. 10.14) в виде суммы двух напряженных состояний, первое из которых характеризуется шаровым тензором и представляет всестороннее растяжение, а второе напряженное состояние, определяемое девиатором напряжений, показывает, насколько заданное напряженное состояние уклоняется от всестороннего растяжения.

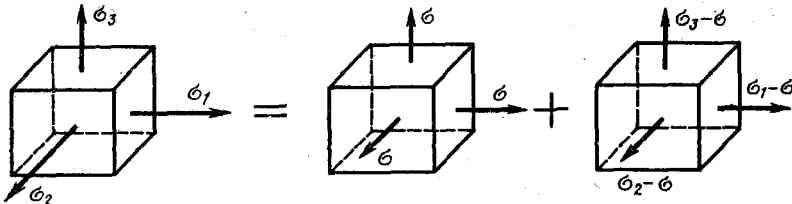


Рис. 10.14

Подсчитывая удельное изменение объема при заданном напряженном состоянии (см. формулу (2.35)).

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),$$

затем при всестороннем равномерном растяжении (см. рис. 10.14)

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} 3\sigma = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

и при напряженном состоянии (см. рис. 10.14), определяемом девиатором напряжений

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} [(\sigma_x - \sigma) + (\sigma_y - \sigma) + (\sigma_z - \sigma)] = 0,$$

приходим к заключению, что шаровой тензор показывает, насколько изменяется объем тела в окрестности данной точки, т. е. определяет объемную деформацию в этой точке, а девиатор напряжений показывает, насколько изменяется лишь форма тела в окрестности той же точки, так как изменение объема в этом случае равно нулю. Иначе говоря, девиатор напряжений характеризует формоизменение в окрестности рассматриваемой точки.

## 10.12. КЛАССИФИКАЦИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

Выше было указано, что напряженное состояние в любой точке может быть сведено к растяжению и сжатию по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Иначе говоря, напряженное состояние в точке вполне определяется тремя главными напряжениями в этой точке. В частных случаях одно или два главных напряжения могут быть равны нулю. Соответственно различают три вида напряженного состояния в точке: объемное, плоское и линейное.

Напряженное состояние называется объемным или трехосным, если все три главных напряжения не равны нулю (рис. 10.15, а). Такое напряженное состояние возникает, например, при всестороннем гидростатическом сжатии монолитного тела, в зоне контакта зубьев шестерен или шарика и кольца шарикоподшипника, при ковке в закрытых штампах и т. д.

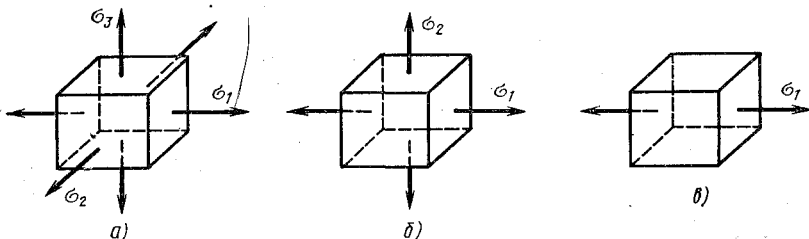


Рис. 10.15

Напряженное состояние называется плоским или двухосным, если одно из главных напряжений равно нулю (рис. 10.15, б).

Этот вид напряженного состояния наиболее часто встречается в расчетах. Такое напряженное состояние существует при кручении бруса круглого сечения. Если не учитывать давления продольных волокон друг на друга вследствие его незначительности, то можно считать, что такого же типа напряженное состояние наблюдается и в бруске, работающем на изгиб и кручение, кручение и растяжение и т. д., а также при изгибе и растяжении тонких пластин, в тонкостенных сосудах и т. п.

Напряженное состояние называется линейным или одноосным, если два из трех напряжений равны нулю (рис. 10.15, в).

В таком напряженном состоянии находятся точки гладкого образца при испытаниях на растяжение. Если не учитывать давления между продольными волокнами, то можно считать, что такое напряженное состояние имеет место при изгибе прямого бруса; при внецентренном растяжении и сжатии и т. п.

Напряженное состояние может быть задано также компонентами напряжений, как показано, например, на рис. 10.1. Значения главных напряжений в этом случае находятся из уравнения (10.8), а положение главных площадок определяется решением системы уравнений (10.13).

В случае плоского напряженного состояния задача определения главных напряжений и главных площадок значительно упрощается.

### 10.13. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Плоское напряженное состояние имеет место во всех случаях, когда компоненты напряжений параллельны одной плоскости, например, при  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ , не равных нулю, и  $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{xz}, \tau_{zy}, \tau_{yz}$  — равных нулю (рис. 10.16).

Определим главные напряжения по заданным компонентам.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_i \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\sigma_i [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2] = 0.$$

Приравнявая нулю каждый из сомножителей, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_i + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 &= 0; \\ \sigma_i &= 0. \end{aligned}$$

Решая квадратное уравнение, находим

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (10.21)$$

Решение  $\sigma_i = 0$  приводит к уже известной главной площадке, перпендикулярной оси  $z$ . На этой площадке, как следует из рис. 10.16,

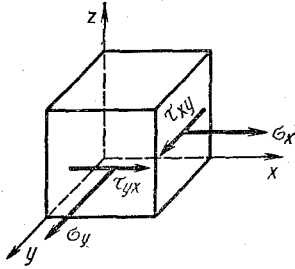


Рис. 10.16

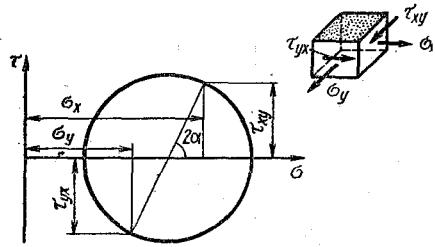


Рис. 10.17

$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0$ . Второе и третье решения определяют напряжения на двух остальных главных площадках, параллельных оси  $z$ . Какому из найденных трех главных напряжений надо присписать индекс 1, 2 или 3, можно решить только после вычислений по формулам (10.21).

Для определения положения главных площадок, параллельных оси  $z$ , нет необходимости в решении всей системы (10.13), так как нормаль к каждой из них расположена в плоскости  $x, y$ .

Поскольку в этом случае направляющие косинусы нормали к главной площадке  $l_i = \cos \alpha$ ;  $m_i = \cos \beta = \sin \alpha$ ;  $n_i = \cos 90^\circ = 0$ , то для определения угла  $\alpha$  достаточно только одного, например первого уравнения системы (10.13):

$$(\sigma_x - \sigma_i) \cos \alpha + \tau_{yx} \sin \alpha = 0.$$

Отсюда находится тангенс угла, на который нужно повернуть ось  $x$ , чтобы она совпала с направлением нормали к главной площадке с напряжением  $\sigma_i$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_i - \sigma_x}{\tau_{xy}}. \quad (10.22)$$

Положительным значениям  $\operatorname{tg} \alpha$  при правой системе координатных осей  $x, y, z$  соответствует поворот против часовой стрелки, а отрицательным — по часовой стрелке.

На рис. 10.17 изображена диаграмма Мора для плоского напряженного состояния. Укажем, как строить эту диаграмму, если плоское напряженное состояние задано не главными напряжениями, а компонентами напряжений. Порядок построения диаграммы в этом случае непосредственно вытекает из способа определения напряжений на наклонных площадках по этой диаграмме. Предположим, что напряженное состояние задано компонентами  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ . Для построения диаграммы отложим на горизонтальной оси в выбранном масштабе напряжение  $\sigma_x$ , а на вертикальной прямой, проведенной из конца отрезка  $\sigma_x$ , отложим  $\tau_{xy}$ , причем положительные значения  $\tau_{xy}$  будем откладывать выше, а отрицательные — ниже оси абсцисс. Из конца отрезка  $\sigma_y$  также отложим  $\tau_{yx}$ , но в сторону, противоположную напряжению  $\tau_{xy}$ . Затем соединим прямой концы отрезков, соот-



ветствующих  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{xy}$ , и на этой прямой как на диаметре построим окружность (см. рис. 10.17). Полученная диаграмма и есть круговая диаграмма напряжений для плоского напряженного состояния.

Точки пересечения построенной окружности с осью абсцисс определяют главные напряжения, а координаты всех остальных точек окружности — нормальные и касательные на площадках, угол наклона которых к первой площадке определен равенством

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (10.23)$$

В частном случае плоского напряженного состояния при  $\sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2$  радиус окружности, построенной на напряжениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , равен нулю. Это значит, что все площадки, перпендикулярные к третьей главной площадке, свободны от касательных напряжений, т. е. все эти площадки являются главными. Но это не означает, что при данных условиях в точке не существуют площадки с касательными напряжениями. Существование таких площадок доказывается кругами напряжений, построенными на главных напряжениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_3 = 0$ , а также  $\sigma_2$  и  $\sigma_3 = 0$ . На диаграмме эти круги совпадают. Как следует из этой диаграммы (рис. 10.18), максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max} = \sigma_1/2 = \sigma_2/2$  будут действовать в четырех площадках, составляющих с первой и третьей, а также со второй и третьей углы  $45^\circ$ .

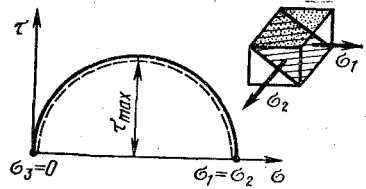


Рис. 10.18

#### 10.14. ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ В БРУСЕ

Предположим, что прямой брус подвергается одновременному воздействию изгибающих, скручивающих и растягивающих (сжимающих) нагрузок. Выразим главные напряжения в какой-либо точке бруса через напряжения на площадке его поперечного сечения, проходящей через эту точку.

От изгиба в поперечном сечении бруса возникнут нормальные и касательные напряжения, от кручения — только касательные, а от растяжения или сжатия — только нормальные. Каждое из указанных напряжений может быть вычислено по расчетным формулам, выведенным в предыдущих разделах курса.

Полагая, что принцип независимости действия сил справедлив\*, и суммируя на этом основании одноименные напряжения, получаем полные нормальные и касательные напряжения на площадке поперечного сечения при совместном действии изгиба, кручения и растяжения (сжатия) бруса. Направим оси координат так, чтобы ось  $x$

\* Примером нагружения бруса, когда принцип независимости действия сил несправедлив, служит случай продольно-поперечного изгиба прямого бруса.

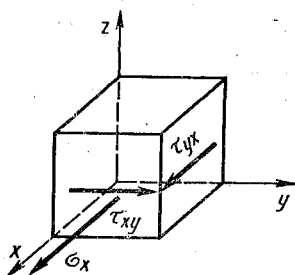


Рис. 10.19

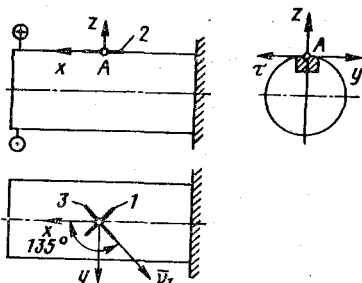


Рис. 10.20

совпадала с нормалью к площадке поперечного сечения, а ось  $y$  — с вектором суммарного касательного напряжения на этой площадке (рис. 10.19). Вследствие такого выбора осей координат компоненты напряжений в рассматриваемой точке будут  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau$ , а  $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$ , где  $\sigma$  и  $\tau$  — суммарные нормальные и касательные напряжения на площадке поперечного сечения. Напряжения  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  принимаются равными нулю, так как давление продольных волокон друг на друга весьма мало и им можно пренебречь. Таким образом, в рассматриваемой точке имеет место частный случай плоского напряженного состояния, так как не только  $\sigma_z = 0$ , но и  $\sigma_y = 0$ .

Главные напряжения найдем, полагая в (10.21)  $\sigma_y = 0$ . Получим

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2};$$

$$\sigma_2 = 0. \tag{10.24}$$

Второе слагаемое в выражении для  $\sigma_{1,3}$  всегда больше первого. Следовательно, в брус, в отличие от общего случая плоского напряженного состояния, сразу можно главным напряжениям  $\sigma_i$  присписать индексы.

Максимальное касательное напряжение в брус определим по формуле (10.16), подставляя в нее выражения (10.24) для  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

Получим

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \tag{10.25}$$

Положение главных площадок находится по формуле (10.22). Для первой главной площадки эта формула принимает вид

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma}{\tau}. \tag{10.26}$$

**Пример.** Определить главные напряжения и главные площадки в точке  $A$  при кручении бруса круглого поперечного сечения (рис. 10.20).

**Решение.** Направим оси координат, как показано на рис. 10.20. Напряжения на площадке поперечного сечения вблизи точки  $A$

$$\tau_{xy} = \frac{M_K}{W_K} = -\tau; \quad \sigma_x = 0; \quad \tau_{xz} = 0.$$

Площадка, перпендикулярная оси  $z$ , совпадает с боковой поверхностью бруса. Через эту поверхность никаких внешних нагрузок не передается (скручивающие пары приложены в плоскостях, перпендикулярных оси бруса), поэтому напряжения  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ . Следовательно, указанная площадка является второй главной площадкой. Остальные главные напряжения в точке  $A$  найдем по формулам (10.24):

$$\sigma_1 = +\frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2} = \tau; \quad \sigma_3 = -\frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2} = -\tau.$$

Тангенс угла между нормалью к первой главной площадке и осью  $x$  согласно формуле (10.26)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau - 0}{-\tau} = -1.$$

Таким образом, нормаль составляет с положительным направлением оси  $x$  угол  $135^\circ$ . Этот угол надо отсчитывать от положительного направления оси  $x$  в сторону положительного направления оси  $y$ . На рис. 10.20 главные площадки обозначены их номерами: первая площадка 1, вторая — 2 и третья — 3.

### 10.15. ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ЗАВИСИМОСТЯМИ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ

При деформации тела его точки перемещаются, расстояния между ними изменяются и изменяются также углы между отрезками, соединяющими эти точки.

Совокупность линейных и угловых деформаций по всем направлениям, проходящим через данную точку тела, называется деформированным состоянием в точке тела.

Линейные деформации характеризуются относительными удлинениями  $\varepsilon_r$  по различным направлениям, исходящим из данной точки.

Относительное удлинение  $\varepsilon_r$  в точке  $A$  в направлении, определяемом направлением отрезка  $AB = dr$ , представляет собой относительное приращение расстояния между точками  $A$  и  $B$  в результате деформации тела:

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB}, \quad (10.27)$$

где  $A'$  и  $B'$  — положение точек  $A$  и  $B$  после деформации.

Относительные деформации в направлении координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  обозначаются, как известно из предыдущих разделов курса, через  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$ . Угловые деформации характеризуются углами сдвига, представляющими собой изменение первоначального прямого угла между каждой парой ортогональных отрезков, исходящих из данной точки. Углы сдвига в координатных плоскостях обозначаются  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$ .

Линейные деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  в направлении осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  прямоугольной системы координат и углы сдвига  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  в координатных плоскостях называются компонентами деформаций в данной точке тела.

Как компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  полностью определяют напряженное состояние в точке тела, так и компоненты деформаций  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  полностью определяют деформи-

рованное состояние в точке тела. Более того, оказывается, что имеет место полная аналогия в математических зависимостях теории напряженного и теории деформированного состояний. Так, выражение для относительной деформации  $\epsilon_r$  по любому направлению, определяемому в осях  $x$ ,  $y$  и  $z$  направляющими косинусами  $l$ ,  $m$  и  $n$ , через компоненты деформаций имеет вид

$$\epsilon_r = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl. \quad (10.28)$$

Формула (10.28) отличается от формулы (10.4) для  $\sigma_v$  только тем, что  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{zx}$  заменяются не  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$ , а  $\gamma_{xy}/2$ ,  $\gamma_{yz}/2$  и  $\gamma_{zx}/2$ , в то время как  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , и  $\sigma_z$  заменяются  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\epsilon_z$ .

Указанная выше аналогия распространяется не только на математические зависимости, но и на свойства напряженных и деформированных состояний.

Оказывается, что в каждой точке тела существует по крайней мере три такие взаимно перпендикулярные оси, углы между которыми в процессе деформации не изменяются. Эти оси называются главными осями деформаций, а относительные удлинения по этим осям — главными деформациями в данной точке.

Главные деформации обозначаются символами  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$ , причем  $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$ . Главные деформации  $\epsilon_i$  находятся из уравнения

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x - \epsilon_i & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y - \epsilon_i & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z - \epsilon_i \end{vmatrix} = 0, \quad (10.29)$$

а направления осей главных деформаций определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} 2(\epsilon_x - \epsilon_i)l_i + \gamma_{xy}m_i + \gamma_{zx}n_i &= 0; \\ \gamma_{yx}l_i + 2(\epsilon_y - \epsilon_i)m_i + \gamma_{yz}n_i &= 0; \\ \gamma_{zx}l_i + \gamma_{zy}m_i + 2(\epsilon_z - \epsilon_i)n_i &= 0; \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 &= 1. \end{aligned} \quad (10.30)$$

В направлении главных деформаций относительные удлинения достигают экстремальных значений, т. е.  $\epsilon_1$  — наибольшая, а  $\epsilon_3$  — наименьшая линейная деформация в точке тела.

В изотропном теле направления главных осей напряженного и главных осей деформированного состояний совпадают.

#### 10.16. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Связь между компонентами напряжений и компонентами деформаций в пределах упругих деформаций устанавливается законом Гука, согласно которому компоненты деформаций линейно зависят от компонентов напряжений.

Для изотропного тела эти зависимости установлены в предыдущих разделах курса (см. разд. 2.25, 3.1 и 3.2) и имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)];\end{aligned}\tag{10.31}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},$$

где  $E$  и  $G$  — модули упругости соответственно при растяжении и сдвиге;  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Соотношения (10.31) называются обобщенным законом Гука для изотропного тела.

#### 10.17. УДЕЛЬНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ И ЕЕ ДЕЛЕНИЕ НА УДЕЛЬНУЮ ЭНЕРГИЮ ИЗМЕНЕНИЯ ОБЪЕМА И УДЕЛЬНУЮ ЭНЕРГИЮ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ

В общем случае нагружения тела по граням его элемента, например, параллелепипеда с размерами ребер, равными  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , будут действовать как нормальные  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , так и касательные  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zy}$  напряжения (см. рис. 10.1). Подсчитаем потенциальную энергию, накопленную в этом элементе при деформации тела.

Искомая энергия будет равна сумме работ внешних для выделенного элемента нормальных сил  $\sigma_x dy dz$ ,  $\sigma_y dz dx$ ,  $\sigma_z dx dy$  на удлинения ребер параллелепипеда  $\varepsilon_x dx$ ,  $\varepsilon_y dy$ ,  $\varepsilon_z dz$  и касательных сил  $\tau_{xy} dy dz$ ,  $\tau_{yz} dx dz$ ,  $\tau_{zx} dx dy$  на соответствующих им перемещениях  $\gamma_{xy} dx$ ,  $\gamma_{yz} dy$ ,  $\gamma_{zx} dz$  граней параллелепипеда.

Учитывая, что нагрузки прикладываются к телу статически, получаем

$$U = \frac{dx dy dz}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}).$$

Удельная энергия, т. е. энергия, накопленная в единице объема элемента, будет

$$u = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \varepsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2} + \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2} + \frac{\tau_{yz} \gamma_{yz}}{2} + \frac{\tau_{zx} \gamma_{zx}}{2}, \tag{10.32}$$

где  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$  — относительные удлинения ребер параллелепипеда, вызванные всеми действующими на него силами.

В главных осях выражение (10.32) для удельной энергии деформации примет уже известный из предыдущих разделов вид:

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}. \tag{10.33}$$

Если выразить компоненты деформаций через компоненты напряжений с помощью соотношений (10.31) закона Гука, то выражение для  $u$  запишется так:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2] \quad (10.34)$$

или в главных напряжениях

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \quad (10.35)$$

В разд. 10.11 было установлено, что заданное напряженное состояние (см. рис. 10.14) всегда можно представить как сумму напряженных состояний, одно из которых характеризует только объемную деформацию элемента тела, а второе — лишь изменение формы элемента.

Соответственно такому представлению заданного напряженного состояния можно условно разделить удельную энергию деформации  $u$  на энергию, связанную с изменением объема  $u_0$ , и удельную энергию  $u_\Phi$ , связанную с изменением только формы элемента в окрестности исследуемой точки, т. е. представить как сумму:  $u = u_0 + u_\Phi$ .

Найдем сначала энергию  $u_0$  изменения объема. Изменение объема при всестороннем растяжении элемента, по граням которого действуют напряжения  $\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ , будет таким же, как и при заданном напряженном состоянии. Поэтому для определения  $u_0$  надо в (10.34) подставить  $\sigma$  вместо  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  и положить  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ . Тогда

$$u_0 = \frac{1}{2E} [3\sigma^2 - 2\mu \cdot 3\sigma^2].$$

После подстановки  $\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ , получим

$$u_0 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2. \quad (10.36)$$

Энергию формоизменения  $u_\Phi$  найдем как разность  $u_\Phi = u - u_0$ .

$$u_\Phi = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2] - \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2.$$

Заменяя в последнем выражении  $G$  на  $\frac{E}{2(1+\mu)}$  и приводя подобные члены, находим

$$u_\Phi = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)].$$

Выражению для  $u_\Phi$  можно придать окончательно такой вид:

$$u_\Phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \quad (10.37)$$

или в главных напряжениях

$$u_\Phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (10.38)$$

В случае всестороннего равномерного растяжения  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$  и  $\sigma_3 = \sigma$ , как и следовало ожидать, энергия формоизменения  $u_\Phi = 0$ .

### 10.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ГЛАВНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТА

При экспериментальных исследованиях напряжений, возникающих в деталях машин и конструкций, на поверхности детали устанавливаются различного рода тензодатчики, регистрирующие деформации ее поверхностного слоя.

В последнее время широкое распространение получили проволочные и фольговые тензодатчики сопротивления, представляющие собой сложенную змейкой тонкую проволочку или полоску фольги, обклеенную с двух сторон бумагой (рис. 10.21).

Датчики тщательно наклеиваются на деталь так, чтобы базовый размер  $l_0$  совпадал с направлениями, в которых желательно измерить деформации.

При нагружении детали длина  $l_0$  проволочки датчика изменяется настолько, насколько изменяется длина поверхностного слоя детали под датчиком и пропорционально изменению длины проволочки изменяется и ее омическое сопротивление  $R$ .

По величине относительного  $\Delta R/R$  изменения омического сопротивления проволочки судят о величине ее удлинения. Обычно регистрирующие приборы позволяют сразу определить относительные удлинения размера  $l_0$ .

Итак, наклеивая датчики в различных направлениях, находят относительные удлинения по различным направлениям, исходящим из исследуемой точки поверхности детали.

Чтобы решить вопрос о том, какое количество датчиков и в каких направлениях надо наклеивать для определения главных напряжений, требуется исследовать вид напряженного состояния в рассматриваемой точке. Для этого вырежем в окрестности данной точки бесконечно малый параллелепипед так, чтобы одна из его граней совпала с поверхностью детали, другая была ей параллельна, а остальные четыре грани были бы нормальны к этой поверхности. Если в данном месте поверхность детали свободна

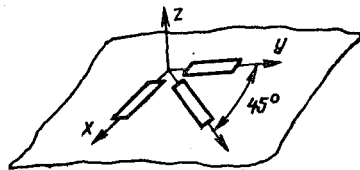


Рис. 10.21

от нагрузки, то на грани параллелепипеда, совпадающей с этой поверхностью, напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$  равны нулю и в исследуемой точке будет иметь место плоское напряженное состояние, определяемое компонентами напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ .

Связь между напряжениями и деформациями описывается законом Гука, который в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu\sigma_y]; & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu\sigma_x]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Запишем выражения (10.39) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y]; & \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x]; \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Если компоненты  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  известны, то нетрудно определить главные напряжения по формулам (10.21) и положение главных площадок по формуле (10.22).

Таким образом, для определения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  надо экспериментально найти  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$ .

Для определения  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  надо наклеить два датчика в исследуемом месте в направлении осей  $x$  и  $y$  (см рис. 10.21).

Величину  $\gamma_{xy}$  можно найти так. Запишем выражение (10.28) для относительного удлинения  $\varepsilon_r$  в заданном направлении для случая плоского напряженного состояния:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \gamma_{xy} lm.$$

Если  $\varepsilon_r$  известно, то  $\gamma_{xy} = \frac{1}{lm} [\varepsilon_r - \varepsilon_x l^2 - \varepsilon_y m^2]$ . Наиболее удобно расположить дополнительный датчик под углом  $45^\circ$  к оси  $x$  или, как говорят, наклеить розетку датчиков. Итак, полагая  $l = m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , находим

$$\gamma_{xy} = 2 \left[ \varepsilon_{45^\circ} - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right]. \quad (10.41)$$

Затем по формулам (10.40) вычисляем  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ .

Главные деформации в плоскости  $x$ ,  $y$  находим по формуле, аналогичной (10.21):

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

или, учитывая (10.41), имеем

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (2\varepsilon_{45^\circ} - \varepsilon_x - \varepsilon_y)^2}. \quad (10.42)$$

Таким образом, постановка розетки из трех датчиков позволяет определить как главные напряжения и главные деформации в точке поверхностного слоя детали, так и их направления.



**РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ  
ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ**

---

В данной главе рассматриваются методы расчета на прочность при сложном состоянии в опасных точках деталей из однородных изотропных материалов при постоянных во времени напряжениях и нормальных температурных условиях, при которых не сказывается явление ползучести.

Расчет ведется по напряжениям в наиболее нагруженной (опасной) точке детали, положение и напряженное состояние в которой считается известным. При этом предполагается, что текучесть или разрушение материала в каждой точке детали полностью определяется напряженным состоянием только в этой точке и не зависит от поведения материала в любой другой точке детали, даже сколь угодно близкой к опасной точке.

**11.1. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ  
ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ  
В ОПАСНОЙ ТОЧКЕ**

Разработка теоретических основ и методов, позволяющих решить вопрос о прочности деталей машин и конструкций, является конечной целью сопротивления материалов.

Термин «прочность» понимается в сопротивлении материалов в самом широком смысле и включает в себя по существу выполнение всех условий, при которых будет обеспечено выполнение деталью ее функционального назначения в процессе работы машины или конструкции.

Между тем деталь не может выполнить свое назначение не только в случае ее разрушения, но и при образовании пластических деформаций в таких объемах, которые недопустимо искажают форму и размеры детали. Именно поэтому в качестве предельных напряжений  $\sigma_{пр}$ ,  $\tau_{пр}$  при расчете на прочность в случае растяжения, изгиба или кручения брусьев принимается предел прочности  $\sigma_b$ ,  $\tau_b$  для хрупких материалов и предел текучести  $\tau_t$ ,  $\sigma_t$  — для пластичных материалов.

Таким образом, в одном случае в качестве предельного состояния в опасной точке детали принимается переход материала в окрестности этой точки из упругого состояния в пластическое, а в другом — разрушение материала, выражающееся в образовании трещин в окрестности данной точки.

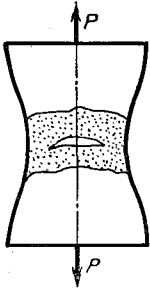


Рис. 11.1

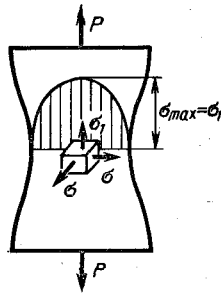


Рис. 11.2

Если подходить к трактовке прочности как к переходу материала из одного механического состояния в другое, то детального исследования самого механизма образования пластических деформаций или механизма разрушения проводить не требуется. Достаточно установить лишь условия и численные значения параметров (например, напряжений), при которых эти процессы начинаются.

Это не означает, конечно, что инженера вообще не интересует механизм разрушения или образования пластических деформаций.

В настоящее время механизм образования пластических деформаций более или менее ясен, тогда как механизм разрушения изучен еще недостаточно и общепринятой теории разрушения пока нет. Однако уже имеющиеся сведения позволяют с определенной долей достоверности сформулировать условия перехода от упругого к пластическому состоянию и условия, при которых начинается разрушение материала. Эти условия характеризуются критериями пластичности и критериями разрушения. На формулировке некоторых из указанных критериев остановимся несколько позже.

Опыт показывает, что при прочих равных условиях (одинаковых температуре испытания, скорости нагружения и т. п.) начало образования в дальнейшем развитие пластических деформаций, как и начало хрупкого разрушения в окрестности опасной точки тела, зависит от вида напряженного состояния в этой точке.

Зависимость механических свойств материала от вида напряженного состояния проявляется уже при испытаниях образцов из пластичных материалов на одноосное растяжение. Известно, что цилиндрические образцы из пластичной малоуглеродистой стали при испытаниях на одноосное растяжение разрушаются по типу чашка—конус. Исследования показывают, что после образования шейки в центре ее наименьшего сечения начинается отрыв частиц материала друг от друга и образуется симметричная относительно оси образца поперечная трещина (рис. 11.1). В то же время материал вблизи поверхности шейки продолжает деформироваться пластически до разрушения от сдвига по плоскости действия  $\tau_{max}$ , наклоненным к оси образца под углом  $45^\circ$ .

Хрупкий характер разрушения материала вблизи центра шейки объясняется тем, что после ее образования в окрестности центра наиболее напряженного сечения шейки создается трехосное растяжение (рис. 11.2). Образование пластических деформаций здесь затруднено и при достижении растягивающими напряжениями предельных для данного материала значений начинается отрыв частиц материала друг от друга, характерный для хрупкого типа разрушения.

После образования поперечной трещины (дна чашки) вся нагрузка в этом сечении передается через внешнюю не разрушившуюся цилиндрическую часть шейки. Напряженное состояние здесь одноосное, что и определяет пластический характер деформирования материала образца вблизи поверхности шейки и разрушения по плоскостям сдвига, образующим поверхность конуса. В то же время испытания такого хрупкого при одноосном нагружении материала, как мрамор, на осевое сжатие с одновременным поперечным давлением показали, что с увеличением поперечного давления мрамор становится все более пластичным. Таким образом, хрупкий мрамор в условиях трехосного сжатия проявляет пластические свойства.

Приведенные примеры свидетельствуют о том, что любой материал обладает способностью как к пластическому течению, так и к хрупкому растрескиванию. Но какой из этих двух процессов начнется раньше, зависит от структуры материала и вида напряженного состояния. Поэтому существующее разделение материалов на хрупкие и пластичные является условным и производится по результатам испытания на простое растяжение и сжатие. Правильнее говорить о хрупком и пластичном (вязком) характере разрушения материала. Первое происходит при очень малых, а второе — при значительных остаточных деформациях. Соответственно при сложном напряженном состоянии следует говорить не о предельном напряжении  $\sigma_T$  или  $\sigma_B$ , а о предельном напряженном состоянии в опасной точке детали. Поясним это понятие.

Пусть напряженное состояние в опасной точке определено главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , отношения которых обозначим

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = K_2; \quad \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = K_3.$$

Напряженные состояния, для которых коэффициенты  $K_2$  и  $K_3$  одинаковы, называются подобными.

Будем пропорционально увеличивать напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , не изменяя  $K_2$  и  $K_3$ , до тех пор, пока в этой точке не образуются массовые пластические деформации (начнется течение материала) или не появится трещина. Значения напряжений  $\sigma_1^{пр}$ ,  $\sigma_2^{пр}$  и  $\sigma_3^{пр}$ , при которых наступает одно из указанных явлений, называются предельными, а напряженное состояние — предельным напряженным состоянием, подобным данному. Экспериментальным путем установлено, что для одного и того же материала при различных соотношениях между главными напряжениями, т. е. при различных  $K_2$  и  $K_3$ , предельные напряжения  $\sigma_1^{пр}$ ,  $\sigma_2^{пр}$  и  $\sigma_3^{пр}$  различны.

Если предельные напряжения для напряженного состояния, подобного исследуемому, известны, то запас прочности детали можно определить из соотношения:

$$n = \frac{\sigma_1^{пр}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2^{пр}}{\sigma_2} = \frac{\sigma_3^{пр}}{\sigma_3}.$$

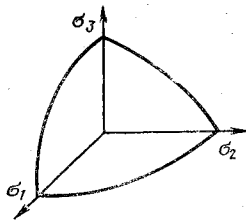


Рис. 11.3

Предельные напряжения можно определить только опытным путем на образцах с равномерным полем напряжений во всей их рабочей части. При испытании образец нужно нагружать так, чтобы отношение главных напряжений в образце  $K_2 = \sigma_2/\sigma_1$  и  $K_3 = \sigma_3/\sigma_1$  в процессе эксперимента не изменялось и было равно заданному значению коэффициентов  $K_2$  и  $K_3$ . Значения напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , при которых образуются массовые пластические деформации или начинается разрушение, и будут

предельными напряжениями для материала образца при данном напряженном состоянии.

Для каждого материала предельные напряжения суть функции отношений главных напряжений:  $\sigma_1^{пр} = f_1(K_2, K_3)$ ;  $\sigma_2^{пр} = f_2(K_2, K_3)$ ;  $\sigma_3^{пр} = f_3(K_2, K_3)$ .

Определив опытным путем  $\sigma_1^{пр}$ ,  $\sigma_2^{пр}$  и  $\sigma_3^{пр}$  для различных значений  $K_2$  и  $K_3$ , можно было бы построить поверхность предельных напряжений для каждого материала (рис. 11.3). Таких поверхностей следовало бы построить две: одна соответствовала бы переходу материала из упругого в пластическое состояние, а вторая — разрушению материала. Если бы такие поверхности удалось построить и найти их уравнения или каким-либо способом изобразить их плоскими графиками, то определение предельных значений напряжений для данного материала при любых значениях коэффициентов  $K_2$  и  $K_3$  не представляло бы затруднений.

Однако для построения поверхностей предельных напряжений потребовалось бы подвергнуть экспериментальному изучению для каждого материала все виды напряженных состояний при различных соотношениях между главными напряжениями, которые могут встретиться на практике. Постановка таких опытов требует специальных и весьма сложных машин и измерительных приборов. На пути экспериментального осуществления объемного напряженного состояния и измерения величин действующих при этом напряжений возникают непреодолимые пока трудности. Например, до сих пор никому не удалось экспериментально исследовать случай трехосного равномерного растяжения.

Сложность определения предельных напряжений заставляет искать обходные пути для оценки опасности напряженного состояния в детали. Такими путями являются так называемые теории прочности.

Термин «теории прочности», как и термин «расчеты на прочность», введен в курс сопротивления материалов давно и стал общепринятым. Однако в последнее время термин «теории прочности» стал подвергаться обоснованной критике, поскольку его применяют как к случаю разрушения (нарушения прочности) материала, так и к совершенно иному явлению — переходу материала в пластическое состояние.

Более подходящим считается термин «теории предельного состояния», которого мы и будем в основном придерживаться в дальнейшем.

## 11.2. НАЗНАЧЕНИЕ ТЕОРИЙ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Основной задачей теорий предельного состояния является установление условий начала текучести или разрушения материала при сложном напряженном состоянии на основании экспериментальных данных, полученных для того же материала при испытаниях на растяжение, сжатие или чистый сдвиг. Иначе говоря, необходимо установить условия равноопасности различных напряженных состояний.

Два напряженных состояния называются равноопасными, если при одновременном увеличении всех компонентов напряжений в одно и то же число раз материал в этих двух состояниях одновременно либо перейдет в состояние текучести, либо начнет разрушаться.

При построении теорий предельного состояния принято исследуемое напряженное состояние сравнивать с одноосным растяжением (рис. 11.4) как наиболее типичным и легко осуществимым в лабораторных условиях напряженным состоянием.

Заметим, что сопоставление сложного напряженного состояния с одноосным растяжением возможно только в том случае, когда при достижении напряжениями предельных значений материал в сложном напряженном состоянии и при одноосном растяжении переходит в одноименное предельное состояние. Если, например, при сложном напряженном состоянии материал начинает разрушаться, а при одноосном растяжении переходит в пластическое состояние, то такие напряженные состояния сопоставлять нельзя.

Для сопоставления равноопасности различных напряженных состояний необходимо из всего многообразия фактов, обуславливающих переход материала в новое механическое состояние (текучесть или разрушение), выделить одну величину, которая бы с достаточной достоверностью определяла такой переход при различных напряженных состояниях. Эту величину, в зависимости от того, какой процесс — текучесть или разрушение — рассматривается, называют критерием пластичности (текучести) или критерием разрушения.

Критерии текучести и критерии разрушения устанавливаются на основании некоторых предположений — гипотез об условиях, определяющих возникновение текучести или разрушения материала. Приемлемость той или иной гипотезы, а следовательно, и соответствующего этой гипотезе критерия проверяется практикой, путем сопоставления результатов теоретических расчетов с экспериментальными данными. Таким же путем устанавливаются пределы применимости исходной гипотезы, если она достаточно хорошо подтверждается для некоторого класса напряженных состояний.

Были предложены различные критерии. Каждому критерию

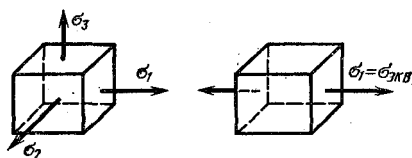


Рис. 11.4

соответствует своя теория предельного состояния. Мы рассмотрим четыре наиболее распространенные теории. В двух из них используются критерии разрушения, а две другие устанавливают условия пластичности.

Согласно каждой теории элемент материала, находящийся в сложном напряженном состоянии, и образец из того же материала, подвергнутый осевому растяжению, равноопасны, если значения критерия, вычисленные для элемента и образца, одинаковы.

Главное напряжение  $\sigma_1$  в образце, подвергнутом осевому растяжению и находящемся в равноопасном с рассматриваемым элементом состоянии, называется эквивалентным напряжением и обозначается символом  $\sigma_{\text{эКВ}}$ .

Следовательно, если  $\sigma_{\text{эКВ}}$  достигает предела текучести или предела прочности при одноосном растяжении, то в элементе также начнется течение или разрушение материала. Если же  $\sigma_{\text{эКВ}}$  будет меньше предельного напряжения  $\sigma_{\text{пр}}$  при одноосном растяжении, то рассматриваемый элемент и образец будут обладать одинаковым запасом прочности.

Существует и иной подход: устанавливаются условия равноопасности не путем введения какого-либо критерия, а путем систематизации непосредственно экспериментальных результатов. Такой феноменологический подход, т. е. подход, основанный на логическом описании явления, используется при построении так называемой теории предельных напряженных состояний Мора.

### 11.3. ТЕОРИЯ НАИБОЛЬШИХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Эта теория связывает разрушение материала с достижением наибольшим (растягивающим или сжимающим) нормальным напряжением предельного значения. Указанное главное напряжение и принимается в качестве критерия прочности.

Согласно данной теории разрушение элемента, находящегося в сложном напряженном состоянии, начнется, когда наибольшее по абсолютной величине главное напряжение станет равным пределу прочности материала при одноосном растяжении или сжатии.

При трехосном и двухосном растяжении наибольшим нормальным напряжением является  $\sigma_1$ . Следовательно, в этом случае, как утверждает первая теория прочности, разрушение материала начнется при

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 = \sigma_{\text{в. р.}} \quad (11.1)$$

а условие прочности записывается так:

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_{\text{р}} = \frac{\sigma_{\text{в. р.}}}{n} \quad (11.2)$$

При трехосном и двухосном сжатии в качестве критерия прочности принимается  $\sigma_3$ . Условие начала разрушения выражается равенством

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_3 = \sigma_{\text{в. сж.}}$$

а условие прочности имеет вид

$$\sigma_3 \leq [\sigma]_{\text{сж}} = \frac{\sigma_{\text{в. сж}}}{n}. \quad (11.2^*)$$

Главные напряжения в бруске определены равенствами (10.24). Подставляя значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  в условие прочности (11.2) или (11.2 \*), получаем расчетную формулу для бруска по первой теории прочности:

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (11.3)$$

где  $\sigma$  и  $\tau$  — напряжения на площадке поперечного сечения бруска. Эта теория не получила подтверждения в целом ряде экспериментов. Например, кубик из однородного материала при всестороннем равномерном (гидростатическом) сжатии не разрушается при весьма больших давлениях, в то время как согласно первой теории он должен разрушаться по достижении сжимающими напряжениями предела прочности  $\sigma_{\text{в. сж}}$  при одноосном сжатии. В первой теории не учитывается возможность появления пластических деформаций, поэтому она неприменима для пластичных материалов и для напряженных состояний, приводящих к пластическим деформациям. Теория применяется иногда при расчете конструкций из очень хрупких материалов (бетон, камень, кирпич), для которых она дает более или менее удовлетворительные результаты при напряженных состояниях в исследуемой точке с главными напряжениями разных знаков ( $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_3 < 0$ ).

#### 11.4. ТЕОРИЯ НАИБОЛЬШИХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ УДЛИНЕНИЙ

В этой теории в качестве критерия разрушения принято наибольшее по абсолютной величине относительное удлинение. Теория утверждает, что два элемента из одного и того же материала, один из которых находится в сложном напряженном состоянии, а другой в одноосном (рис. 11.4), будут равноопасны, если их наибольшие по абсолютной величине относительные удлинения будут одинаковы.

Наибольшее относительное удлинение при трехосном напряженном состоянии согласно обобщенному закону Гука возникает в направлении первого или третьего из главных напряжений. Если  $\sigma_1 > |\sigma_3|$ , то наибольшее относительное удлинение

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)],$$

а при  $\sigma_1 < |\sigma_3|$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2)].$$

При эквивалентном одноосном напряженном состоянии

$$\varepsilon_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{эКВ}}}{E}.$$

Условие эквивалентности по второй теории

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (11.4)$$

или

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Разрушение материала произойдет при достижении эквивалентным напряжением  $\sigma_{\text{экр}}$  предела прочности. Условием прочности будет равенство

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_p = \frac{\sigma_{\text{в.р.}}}{n}.$$

Расчетную формулу для бруса находим, подставляя в условие прочности выражения для главных напряжений (10.24). После несложных преобразований получим

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (11.5)$$

Для черных металлов  $\mu = 0,3$ ; для них

$$\sigma_{\text{экр}} = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (11.6)$$

Эта теория для многих материалов не получила экспериментального подтверждения. Ее обычно называют второй теорией.

### 11.5. ТЕОРИЯ НАИБОЛЬШИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Пластические деформации есть результат сдвигов в материале, причем плоскости сдвигов практически совпадают с плоскостями действия наибольших касательных напряжений. Это обстоятельство послужило основанием для выбора в качестве критерия пластичности величины наибольшего касательного напряжения.

Согласно этой теории, называемой третьей теорией, материал переходит в состояние текучести, если максимальное касательное напряжение достигает некоторого определенного для данного материала значения.

Ввиду того, что при сложном напряженном состоянии элемента (см. рис. 11.4)

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

а при одноосном растяжении образца

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma_{\text{экр}}}{2},$$

условие равноопасности элемента и образца из одного и того же материала получает вид

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (11.7)$$

Условие, определяющее начало текучести материала по третьей теории,

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T \quad (11.8)$$

называется условием пластичности Треска—Сен-Венана.



Условие прочности:

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}. \quad (11.8^*)$$

Запас прочности определяется по напряженному состоянию в опасной точке:

$$n = \frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{эКВ}}}.$$

Расчетное уравнение (11.8) по третьей теории для бруса согласно формулам (10.24) имеет вид

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}. \quad (11.9)$$

Третья теория устанавливает начало текучести, а не разрушения. Но так как появление остаточных деформаций в деталях обычно недопустимо, эту теорию можно использовать при расчетах на прочность.

Третья теория не применима для хрупких материалов или для напряженных состояний, приводящих к хрупкому разрушению. Теория дает хорошие результаты для пластичных материалов с одинаковым пределом текучести при растяжении и сжатии, например, для стали. Для материалов, неодинаково работающих на растяжение и сжатие, третья теория опытами не подтверждается.

Существенным недостатком теории является то, что в ней не учитывается влияние на прочность материала второго (среднего) главного напряжения  $\sigma_2$ .

Приведем расчетную формулу по третьей теории прочности для бруса круглого поперечного сечения, работающего одновременно на кручение и изгиб. Пусть брус круглого сечения испытывает кручение и изгиб в двух плоскостях (рис. 11.5). В поперечном сечении бруса действуют изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$  и крутящий момент  $M_k = M_x$ . Любая центральная ось для круга является главной центральной осью инерции. Поэтому моменты  $M_y$  и  $M_z$  можно геометрически сложить и в дальнейшем рассматривать изгиб бруса в плоскости действия суммарного изгибающего момента  $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ .

Нормальные напряжения достигают максимальных значений в точках  $A$  и  $B$  сечения (в точке  $A$  — наибольшее растягивающее напряжение, а в точке  $B$  — наибольшее сжимающее), касательные — в контурных точках сечения. Следовательно, опасными при совместном изгибе и кручении бруса будут точки  $A$  и  $B$  сечения.

Если материал бруса имеет равные пределы текучести при растяжении и сжатии (а только для таких материалов и применима третья теория), то точки  $A$  и  $B$  равноопасны.

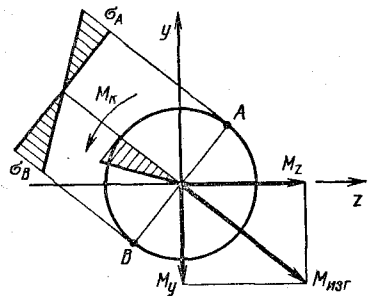


Рис. 11.5

Рассмотрим, например, точку  $A$ . В этой точке имеет место плоское напряженное состояние. Компоненты напряжений

$$\sigma_A = \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{изг}}} \quad \text{и} \quad \tau_A = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{к}}}.$$

Определим эквивалентное напряжение для точки  $A$  по формуле (11.9). Учитывая, что для круга  $W_{\text{к}} = 2W_{\text{изг}}$ , получаем

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{к}}^2}}{W_{\text{изг}}}. \quad (11.10)$$

Здесь  $M_{\text{изг}}^2 = M_z^2 + M_y^2$ ;  $M_{\text{к}} = M_x$ , поэтому формулу (11.10) можно записать так:

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_{\text{изг}}}. \quad (11.11)$$

Условие прочности бруса

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_{\text{изг}}} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{T}}}{n}.$$

Запас прочности по пределу текучести

$$n = \frac{\sigma_{\text{T}}}{\sigma_{\text{экр}}}.$$

Подчеркиваем, что формулой (11.10) можно пользоваться только для брусев круглого сечения (сплошных и полых). Для брусев некруглых сечений она неприменима.

## 11.6. ТЕОРИЯ УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ

В конце прошлого столетия было высказано предположение, что переход материала в пластическое состояние связан с достижением удельной потенциальной энергии некоторого предельного значения. Однако это предположение не получило экспериментального подтверждения. Было замечено, что при гидростатическом сжатии в теле накапливается большое количество потенциальной энергии, а материал не переходит в пластическое состояние.

Впоследствии было сделано предположение, что материал переходит в пластическое состояние после того, как предельного значения достигает не вся потенциальная энергия, а только та ее часть, которая обусловлена изменением формы тела. Это предположение и было положено в основу рассматриваемой теории предельного состояния, называемой часто теорией энергии формоизменения.

Согласно теории, течение материала начинается в тот момент, когда в какой-либо точке тела удельная энергия изменения формы достигает предельного значения, вполне определенного для каждого материала.

Согласно (10.38) удельная потенциальная энергия изменения формы при сложном напряженном состоянии

$$u_{\Phi} = \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

При одноосном растяжении образца  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Поэтому в образце при простом растяжении удельная энергия изменения формы  $u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_1^2$ .

Согласно энергетической теории, элемент и образец из того же материала, подвергнутый осевому растяжению, будут равноопасны, если удельная потенциальная энергия изменения формы в рассматриваемом элементе равна удельной потенциальной энергии изменения формы в образце. Условие равноопасности элемента и образца запишется так:

$$\frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_{\text{эKB}}^2 = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Отсюда получаем расчетную формулу для эквивалентного напряжения по энергетической теории:

$$\sigma_{\text{эKB}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (11.12)$$

Течение материала в опасной точке детали начнется при

$$\sigma_{\text{эKB}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_T. \quad (11.13)$$

Равенство (11.13) называется условием пластичности Хубера—Мизеса. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{эKB}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \frac{\sigma_T}{n} = [\sigma]. \quad (11.14)$$

Подставляя значения главных напряжений в брус в формулу (11.14), после несложных преобразований получаем расчетное уравнение для бруса:

$$\sigma_{\text{эKB}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (11.15)$$

Отметим, что существуют другие трактовки физического смысла рассматриваемой теории, не связывающие ее с потенциальной энергией деформации. Так, величина

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

пропорциональна касательному напряжению на площадке, равнонаклоненной к главным площадкам в исследуемой точке. И следовательно, для построения данной теории можно в качестве критерия пластичности принять октаэдрическое касательное напряжение.

Теория прочности энергии формоизменения устанавливает начало течения, а не разрушения материала. Поэтому она неприменима для хрупких материалов.

Эта теория, как показывают опыты, дает хорошие результаты для пластических материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Для материалов, имеющих различные пределы текучести при растяжении и сжатии, эта теория опытами не подтверждается.

Возможность применения рассматриваемой теории для материалов с  $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.сж}$  подтверждена опытами только для плоского напряженного состояния и трехосного напряженного состояния с главными напряжениями разных знаков.

Энергетическая теория формоизменения по сравнению с третьей теорией прочности обладает тем преимуществом, что в ней учитывается влияние всех трех главных напряжений, а выражение для  $\sigma_{эпв}$  имеет симметричный характер и не изменяется при циклической замене индексов у главных напряжений.

### 11.7. ТЕОРИЯ МОРА

Согласно этой теории предельное состояние (текучесть или разрушение) материала наступает тогда, когда определенная совокупность нормального и касательного напряжений на одной из площадок достигает некоторого предельного значения, зависящего от свойств материала и вида напряженного состояния.

Рассмотрим круговую диаграмму напряжений (рис. 11.6). Множество точек любого вертикального отрезка  $MN$  на этой диаграмме определяет все площадки с одинаковыми нормальными и различными касательными напряжениями, причем наибольшие касательные напряжения действуют на площадке, определяемой точкой  $N$  диаграммы. Эта точка находится на большой окружности диаграммы, координаты которой определяют напряжения на площадках, перпендикулярных ко второй главной площадке (см. разд. 10.9). Следовательно, из всего множества площадок с одинаковыми по величине нормальными напряжениями  $\sigma_v$  площадка с наибольшим касательным напряжением  $\tau_v$  перпендикулярна ко второй главной площадке. Естественно предположить, что именно в одной из этих площадок и будет опасное сочетание  $\sigma_v$  и  $\tau_v$ .

Напряжения  $\sigma_v$  и  $\tau_v$  в указанных площадках определяются значениями только крайних главных напряжений и не зависят от величины второго главного напряжения. С точки зрения рассматриваемой теории, напряженные состояния, круговые диаграммы которых изображены на рис. 11.7, равноопасны, так как они характеризуются одной и той же большой окружностью диаграммы. Как показывает опыт, влияние промежуточного (второго) главного напряжения на

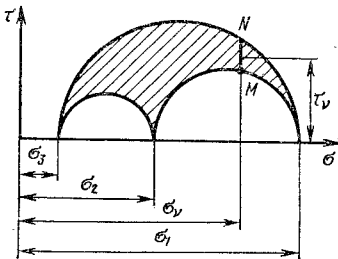


Рис. 11.6

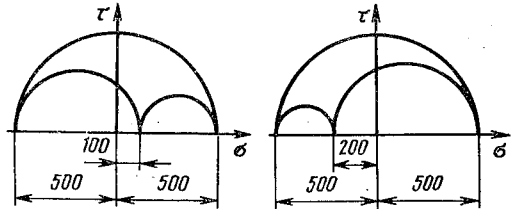


Рис. 11.7

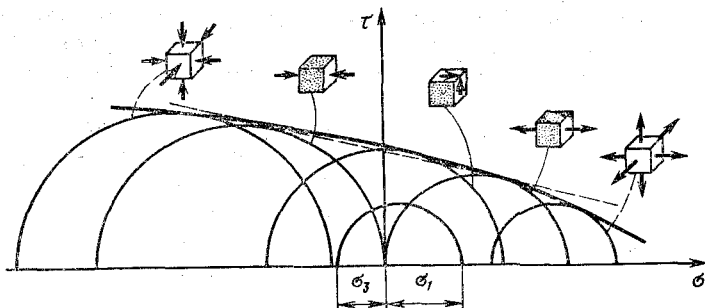


Рис. 11.8

прочность материала не очень велика. Однако опытные данные еще немногочисленны и не решают окончательно вопроса о роли второго главного напряжения.

Большой круг диаграммы напряжений, построенный на предельных значениях главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , будем называть кругом предельных напряжений. Представим себе, что был испытан ряд образцов из одного и того же материала при различных нагружениях — одноосном растяжении, растяжении в двух и трех направлениях, растяжении в одном и сжатии в другом направлении, при одноосном сжатии, и т. д. Каждый образец путем пропорционального увеличения нагрузок доводился до предельного состояния, т. е. до начала образования значительных пластических деформаций или до разрушения, и в результате были определены предельные напряжения материала для различных напряженных состояний. Если круги предельных напряжений для всех исследованных напряженных состояний построить на одном графике, то они расположатся на нем примерно так, как показано на рис. 11.8.

Естественно, что результаты испытаний необходимо представлять графически отдельно для случая перехода материала в состояние текучести и отдельно для случая разрушения образцов.

Огибающая кругов предельных напряжений называется кривой предельных напряжений и определяет координатами своих точек предельную совокупность касательных и нормальных напряжений для данного материала при различных напряженных состояниях. Если напряженное состояние в опасной точке детали таково, что большой круг ее диаграммы напряжений коснется кривой предельных напряжений для материала детали, то согласно теории Мора в этой точке начнется разрушение или текучесть материала. Если же главные напряжения в опасной точке таковы, что большой круг напряжений расположен внутри области, ограниченной осью абсцисс и кривой предельных напряжений (см. рис. 11.8), то деталь будет обладать некоторым запасом прочности.

Построим на диаграмме огибающую больших кругов напряжений для напряженных состояний в  $n$  раз меньшей интенсивности, чем предельные напряженные состояния. В результате получим кривую

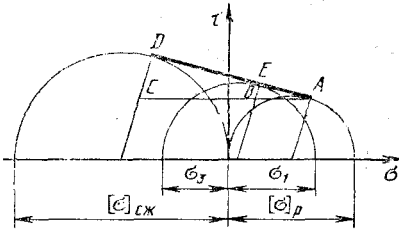


Рис. 11.9

ний имеет малую кривизну. Для упрощения расчетной формулы принято заменять кривую предельных напряжений на данном участке прямой касательной к кругам предельных напряжений для осевого растяжения и сжатия (см. рис. 11.8). Запас прочности, определяемый по этой прямой, будет несколько меньше истинного.

Разделим предельные напряжения при простом растяжении и сжатии на один и тот же запас прочности  $n$  и построим круги напряжений для полученных значений допускаемых напряжений  $[\sigma]_p$  и  $[\sigma]_{сж}$ . Касательная к этим кругам будет прямой допускаемых напряжений, соответствующих запасу прочности  $n$ . Если напряженное состояние в исследуемой точке детали таково, что его большей круг напряжений касается построенной прямой допускаемых напряжений, то это напряженное состояние равноопасно как одноосному растяжению, так и одноосному сжатию, к кругам которых проведена касательная. Поэтому напряжение указанного осевого растяжения  $[\sigma]_p$  можно рассматривать как эквивалентное напряжение  $\sigma_{эKB}$  для исследуемого напряженного состояния.

Установим аналитическую зависимость между главными напряжениями исследуемого напряженного состояния и равноопасного ему одноосного растяжения. Опустим из центров кругов напряжений перпендикуляры на прямую допускаемых напряжений (рис. 11.9) и проведем из точки  $A$  прямую, параллельную оси абсцисс. Получим два подобных треугольника  $ACD$  и  $ABE$ . Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BE}{AB}.$$

Как видно из рис. 11.9,

$$CD = \frac{1}{2} [\sigma]_{сж} - \frac{1}{2} [\sigma]_p; \quad AC = \frac{1}{2} [\sigma]_{сж} + \frac{1}{2} [\sigma]_p;$$

$$BE = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) - \frac{1}{2} [\sigma]_p; \quad AB = \frac{1}{2} [\sigma]_p - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3).$$

Подставляя найденные значения сторон треугольников в записанное выше равенство отношений этих сторон, получаем

$$\frac{[\sigma]_{сж} - [\sigma]_p}{[\sigma]_{сж} + [\sigma]_p} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) - [\sigma]_p}{[\sigma]_p - (\sigma_1 + \sigma_3)}.$$

равноопасных состояний с коэффициентом запаса прочности  $n$ . Если большей круг диаграммы напряжений для опасной точки детали коснется этой кривой, то запас прочности детали будет равен  $n$ .

На участке между кругами предельных напряжений для одноосного растяжения и осевого сжатия кривая предельных напряжений

Отсюда

$$[\sigma]_p [\sigma]_{сж} - [\sigma]_{сж} \sigma_1 + [\sigma]_p \sigma_3 = 0.$$

Учитывая, что напряжение при осевом растяжении  $[\sigma]_p$  принято в качестве эквивалентного для рассматриваемого напряженного состояния, запишем последнее уравнение так:

$$\sigma_{эКВ} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{сж}} \sigma_3.$$

Вводя обозначение  $\nu = [\sigma]_p / [\sigma]_{сж}$ , получаем расчетное уравнение теории прочности предельных напряженных состояний:

$$\sigma_{эКВ} = \sigma_1 - \nu \sigma_3. \quad (11.16)$$

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{эКВ} = \sigma_1 - \nu \sigma_3 \leq [\sigma]_p.$$

При вычислении  $[\sigma]_p$  и  $[\sigma]_{сж}$  был принят один и тот же запас прочности, поэтому коэффициент  $\nu$  равен отношению предельного напряжения при растяжении к предельному напряжению при сжатии. Для хрупких материалов  $\nu = \sigma_{в,р} / \sigma_{в,сж}$ , для пластичных  $\nu = \sigma_{т,р} / \sigma_{т,сж}$ . Для бруса формула эквивалентности (11.16) запишется так:

$$\sigma_{эКВ} = \frac{1-\nu}{2} \sigma + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (11.17)$$

Если пластичный материал имеет равные пределы текучести при растяжении и сжатии, то  $\nu = 1$ , и рассматриваемая теория, как видно из формул (11.7) и (11.16), дает те же результаты, что и третья теория. Для очень хрупких материалов  $\nu$  есть правильная малая дробь, и теория Мора для них дает результаты, приближающиеся к результатам расчета по первой теории. Теория Мора, как и третья теория, имеет тот недостаток, что в ней не учитывается влияние второго главного напряжения на прочность материала. Кроме того, сложность построения кривой предельных напряжений и необходимость получения простых расчетных формул заставляет заменить эту кривую прямой линией. Такая замена упрощает аналитическое решение задачи, но ограничивает пределы применимости формулы (11.16) областью диаграммы между кругами для одноосного растяжения и сжатия. Возможность применения этой формулы для расчетов на прочность при трехосном растяжении или сжатии требует специальной экспериментальной проверки.

Принципиальным преимуществом теории Мора перед рассматриваемыми ранее теориями является то, что она целиком базируется на опытных данных, и всегда имеется возможность внести в эту теорию уточнения путем аппроксимации огибающей предельных кругов не прямой линией, а некоторой кривой.

Например, можно учесть в расчетных формулах механические характеристики материала не только при одноосном растяжении

и сжатии, но и при чистом сдвиге, аппроксимируя кривую предельных напряжений кривой второго порядка

$$\tau^2 = A\sigma^2 + B\sigma + C, \quad (11.18)$$

касательной к кругам предельных напряжений при одноосном растяжении, сжатии и чистом сдвиге. Определяя коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  из условия соприкосновения кривой (11.18) с указанными кругами, получаем расчетное уравнение теории Мора в виде

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \frac{1-\nu}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2} \sqrt{(1+\nu)^2 (\sigma_1 + \sigma_3)^2 - 4\eta^2 \sigma_1 \sigma_3}, \quad (11.19)$$

где для пластичных материалов

$$\nu = \frac{\sigma_{\text{T. P}}}{\sigma_{\text{T. СЖ}}}; \quad \eta = \frac{\sigma_{\text{T. P}}}{\tau_{\text{T}}},$$

а для хрупких

$$\nu = \frac{\sigma_{\text{В. P}}}{\sigma_{\text{В. СЖ}}}; \quad \eta = \frac{\sigma_{\text{В. P}}}{\tau_{\text{В}}}.$$

В том случае, когда кривая (11.18) вырождается в прямую, имеем  $\eta = 1 + \nu$ , и уравнение (11.19) принимает вид (11.16).

Для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие,  $\nu = 1$ , и уравнение (11.19) принимает вид

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_3)^2 - \eta^2 \sigma_1 \sigma_3}. \quad (11.20)$$

Если в последнем уравнении принять  $\eta = \frac{\sigma_{\text{T}}}{\tau_{\text{T}}} = 2$ , то придем к уравнению теории максимальных касательных напряжений  $\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3$ . Если же принять  $\eta = \sqrt{3}$ , то получим расчетное уравнение для случая  $\sigma_2 = 0$  по теории удельной энергии изменения формы:

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3}.$$

Для бруса из (11.19) имеем

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \frac{1-\nu}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sqrt{(1+\nu)^2 \sigma^2 + 4\eta^2 \tau^2}.$$

При  $\nu = 1$  получаем

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + \eta^2 \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{\sigma_{\text{T}}}{\tau_{\text{T}}}\right)^2 \tau^2}. \quad (11.21)$$

### 11.8. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПРЕДЕЛАМИ ТЕКУЧЕСТИ ПРИ ПРОСТОМ РАСТЯЖЕНИИ И ЧИСТОМ СДВИГЕ ПО РАЗЛИЧНЫМ ТЕОРИЯМ

Представляет интерес сравнение соотношений между пределами текучести при чистом сдвиге и одноосном растяжении (рис. 11.10), определяемых различными теориями, с результатами экспериментов.



Согласно опытным данным, для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, предел текучести при чистом сдвиге.

$$\tau_T = (0,5 \dots 0,65) \sigma_T \quad (11.22)$$

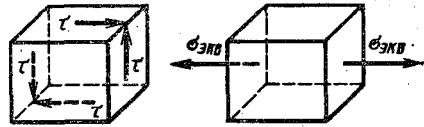


Рис. 11.10

Определим соотношения между  $\tau_T$  и  $\sigma_T$ , устанавливаемые различными теориями. Условием начала текучести по каждой теории является равенство  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_T$ .

Ввиду того, что чистый сдвиг есть частный случай плоского напряженного состояния в брусе при  $\sigma = 0$  и  $\tau \neq 0$ , предельное значение эквивалентного напряжения для чистого сдвига можно определить по расчетным формулам для бруса, положив в них  $\sigma = 0$ ;  $\tau = \tau_T$ .

Из уравнения (11.3) по первой теории прочности найдем  $\tau_T = \sigma_T$ . По второй теории согласно формуле (11.6)  $1,3\tau_T = \sigma_T$  или  $\tau_T = 0,77\sigma_T$ .

По третьей теории на основании уравнения (11.9) имеем  $\tau_T = 0,5\sigma_T$ .

Согласно теории наибольшей энергии изменения формы (11.15)  $\sqrt{3} \tau_T = \sigma_T$ . Отсюда  $\tau_T = 0,577\sigma_T$ . Расчетное уравнение (11.17) теории Мора для пластичных материалов с  $\sigma_{T, p} = \sigma_{T, сж}$  дает те же результаты, что и третья теория, а уравнение (11.21) приводит к результатам, устанавливаемым соотношением (11.22).

Сопоставление результатов опыта с полученными теоретическими соотношениями между  $\tau_T$  и  $\sigma_T$  показывает, что для брусев из пластичных материалов с  $\sigma_{T, p} = \sigma_{T, сж}$  наилучшие результаты дает уравнение (11.21). Хорошие результаты получаются также по теории энергии формоизменения и третьей теории. Первая и вторая теории, как видно из приведенного сравнения, не подтверждаются результатами эксперимента и для расчета пластичных материалов применяться не могут.

Если принять одинаковые запасы прочности по пределу текучести при чистом сдвиге и простом растяжении, то по разным теориям прочности получим различные соотношения между допускаемым напряжением на сдвиг  $[\tau]$  и на растяжение  $[\sigma]$ .

По третьей теории прочности  $[\tau] = 0,5 [\sigma]$ , по теории энергии формоизменения  $[\tau] = 0,577 [\sigma]$ , по формуле (11.21) теории Мора

$$[\tau] = \frac{\tau_T}{\sigma_T} [\sigma].$$

Таким образом, выбрав теорию прочности и установив величину  $[\sigma]$ , нельзя уже произвольно выбирать значение  $[\tau]$ , а надо находить его из соотношения, устанавливаемого выбранной теорией прочности.

### 11.9. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ВЫБОРЕ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ПРИ РАСЧЕТАХ

Обзор многочисленных теорий предельных состояний показывает, что совершенной теории еще нет. Каждая из существующих теорий справедлива только в определенных условиях и для определенного класса материалов.

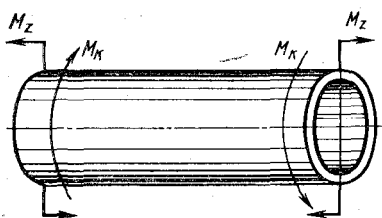


Рис. 11.11

Изложенными теориями можно уверенно пользоваться только при напряженных состояниях с главными напряжениями разных знаков. Возможность применения этих теорий в случаях трехосного растяжения или сжатия требует дополнительной экспериментальной проверки.

При выборе теории прочности в случае плоского напряженного состояния и объемного напряженного состояния с главными напряжениями разных знаков надо учитывать свойства материала. Если материал пластичен и одинаково работает на растяжение и сжатие, то следует пользоваться теорией наибольшей энергии формоизменения или третьей теорией. Если пластичный материал неодинаково работает на растяжение и сжатие, то следует применить теорию Мора. Расчет хрупких материалов при указанных напряженных состояниях следует производить по теории Мора.

**Пример.** Определить запас прочности по пределу текучести тонкостенной трубы, изгибаемой моментами  $M_z = 1000 \text{ Н}\cdot\text{м}$  и скручиваемой парами сил, момент которых  $M_k = 1000 \text{ Н}\cdot\text{м}$  (рис. 11.11). Труба выполнена из стали 30ХГС, для которой  $\sigma_{т.р} = 1240 \text{ МПа}$  и  $\nu = \sigma_{т.р}/\sigma_{т.сл} = 0,88$ . Сечение трубы  $40 \times 36 \text{ мм}$ .

**Решение.** При данном нагружении трубы все ее сечения равноопасны. Нормальное и касательное напряжения в опасной точке на площадке поперечного сечения:

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} = \frac{M_z}{\pi R^2 \delta} = \frac{10^6}{3,14 \cdot 19^2 \cdot 2} = 441 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_k}{2F_k \delta} = \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 19^2 \cdot 2} = 220,5 \text{ МПа}.$$

Материал трубы различно работает на растяжение и сжатие ( $\nu \neq 1$ ). Поэтому расчет трубы следует вести по теории Мора. Применяя формулу (11.17), получаем

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{1 - 0,88}{2} 441 + \frac{1 + 0,88}{2} \sqrt{441^2 + 4(220,5)^2} = 608,6 \text{ МПа}.$$

Запас прочности трубы

$$n = \frac{\sigma_{т}}{\sigma_{\text{экр}}} = \frac{1230}{608,6} \approx 2.$$

### 11.10. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ВО ВРЕМЕНИ НАПРЯЖЕНИЯХ

Вблизи различного рода отверстий, надрезов, выточек и, вообще, мест резкого изменения поперечных размеров распределение напряжений становится существенно неравномерным, и возникают зоны повышенных напряжений.

Например, при одноосном равномерном растяжении напряжениями  $\sigma$  тонкой пластинки шириной  $H$  с небольшим ( $d \ll H/5$ ) круг-

лым отверстием распределение напряжений по поперечному сечению, проходящему через центр отверстия, оказывается существенно неравномерным с пиками напряжений в точках  $A$  и  $B$  контура отверстия (рис. 11.12). Точное решение показывает, что нормальные напряжения в радиальных сечениях на контуре отверстия изменяются по закону  $\sigma_\theta = \sigma(1 - 2 \cos 2\theta)$  и в точках  $A$  и  $B$  при  $\theta = \pi/2$  достигают величины  $\sigma_{\max} = 3\sigma$ , а при  $\theta = 0$ , т. е. в сечении, параллельном линии действия нагрузки, действуют сжимающие напряжения  $\sigma_\theta = -\sigma$ , равные по величине приложенным к пластинке напряжениям.

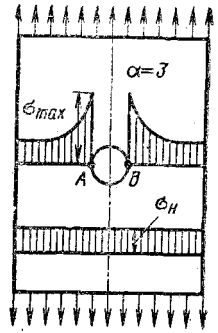


Рис. 11.12

Неравномерность распределения напряжений по поперечному сечению имеет место и при центральном растяжении ступенчатого бруса (рис. 11.13), причем максимальные напряжения быстро уменьшаются по мере уменьшения радиуса  $\rho$  закругления переходной части (галтели). Большие местные напряжения возникают также в зоне контакта деталей (контактные напряжения).

Явление возникновения значительных местных напряжений называется концентрацией напряжений, а причина, вызвавшая концентрацию, — концентратором напряжений. Концентрация напряжений характеризуется коэффициентом концентрации  $\alpha$ . Величину  $\alpha$  также называют теоретическим коэффициентом концентрации.

Коэффициентом концентрации  $\alpha$  называется отношение действительного напряжения  $\sigma_{\max}$  в наиболее напряженной точке к номинальному  $\sigma_n$  напряжению в той же точке, т. е.

$$\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{\tau_{\max}}{\tau_n}.$$

Номинальными называются напряжения, вычисленные по формулам сопротивления материалов, не учитывающим явление концентрации напряжений. В тех случаях, когда возникают трудности в вычислении номинальных напряжений в сечении с концентратором напряжений, за номинальные принимают напряжения в неослабленном сечении детали.

В настоящее время методами теории упругости и экспериментальными методами (обычно путем испытания образцов из оптически активного материала в поляризованном свете) определены величины коэффициентов концентрации для многих практически важных случаев. Расчетные формулы, таблицы и графики для определения коэффициентов концентрации  $\alpha$  приводятся в справочной литературе.

На рис. 11.14 представлен характер зависимости коэффициента концентрации  $\alpha$  от отношения радиуса галтели  $\rho$  к диаметру  $d$  в случае осевого растяжения ступенчатого бруса.

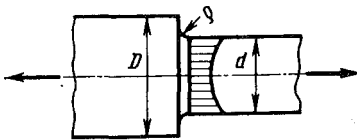


Рис. 11.13

При одноосном равномерном растяжении пластинки с малым эллиптическим отверстием наибольшие напряжения возникают на концах  $A$  и  $B$  оси отверстия, перпендикулярной линии действия растягивающих пластинку сил (рис. 11.15), причем коэффициент концентрации напряжений в этих точках:

$$\alpha = 1 + 2 \frac{a}{b}; \quad \alpha = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}}, \quad (11.23)$$

где  $a$  — полуось эллипса, перпендикулярная линии действия нагрузки;  $b$  — полуось, параллельная линии действия нагрузки;  $\rho$  — радиус кривизны контура отверстия в точках  $A$  и  $B$ .

Для круглого отверстия  $b = a$  и из (11.23) получаем указанное выше значение  $\alpha = 3$ .

Концентрация напряжений, как следует из (11.23), растет с увеличением отношения  $a/b$  и соответственно с увеличением отношения  $a/\rho$ .

В случае сильно вытянутого эллиптического отверстия, которое можно рассматривать как трещину (узкую щель), напряжения в ее вершине могут достигать весьма большой величины\*. Этим объясняется, почему трещины, перпендикулярные к линии действия растягивающих сил, имеют тенденцию к распространению. Развитие трещины иногда можно приостановить, высверливая отверстия на ее концах, что увеличивает радиус  $\rho$  закругления вершины трещины и уменьшает поэтому концентрацию напряжений в данном месте.

Причиной высокой концентрации напряжений в деталях являются также различного рода входящие углы (в вершинах наружных углов, наоборот, напряжения равны нулю). Например, при кручении вала круглого сечения с продольной шпоночной канавкой напряжения в точках  $B$  контура поперечного сечения (рис. 11.16) равны нулю, а напряжения в вершинах  $A$  входящих углов канавки будут недопустимо большими при малых радиусах закругления в точках  $A$ .

Концентрация напряжений всегда носит местный характер и быстро

\* Согласно (11.23) коэффициент концентрации  $\alpha \rightarrow \infty$  при  $\rho \rightarrow 0$ , но эта формула выведена в предположении, что деформации малы и справедлив закон Гука, и поэтому она теряет смысл при больших значениях напряжений.

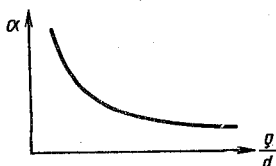


Рис. 11.14

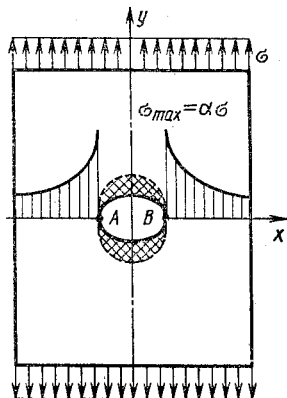


Рис. 11.15

убывает от места ее возникновения, причем скорость затухания тем больше, чем больше максимальные напряжения в зоне концентрации. Кроме того, образование зоны повышенных напряжений вблизи очага концентрации всегда сопровождается появлением областей пониженных напряжений.

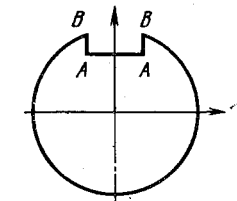


Рис. 11.16

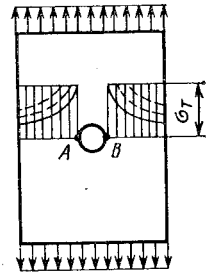


Рис. 11.17

На рис. 11.15 показано распределение напряжений вдоль оси  $x$  в пластинке с эллиптическим отверстием, и заштрихованы области пониженных напряжений.

Обычно в зоне концентрации напряжений усложняется и характер напряженного состояния. Например, в окрестности отверстия при одноосном растяжении пластинки напряженное состояние становится плоским.

Рассмотрим теперь влияние концентрации напряжений на прочность детали при постоянных во времени напряжениях.

Согласно методу расчета по напряжениям в опасной точке, несущая способность детали, т. е. способность детали выполнять свое назначение в конструкции, будет исчерпана, как только в окрестности хотя бы одной ее точки материал перейдет в пластическое состояние или образуется трещина.

В случае равномерного распределения напряжений по всему объему детали (или по ее опасному сечению) переход материала в предельное механическое состояние действительно означает исчерпывание несущей способности детали.

В тех случаях, когда поле напряжений существенно неравномерно с пиками напряжений вблизи очагов концентрации, распределение напряжений при возрастании нагрузки весьма зависит от пластичности материала.

Для пластичных материалов характерны большие деформации при малом приращении напряжений за пределом текучести. Поэтому после возникновения пластических зон в местах концентрации рост напряжений в этих зонах практически прекращается. Возрастание нагрузки ведет к интенсивному росту напряжений в упругих областях и, как следствие, к расширению пластических зон. В результате распределение напряжений в детали становится все более и более равномерным. На рис. 11.17 показано распределение напряжений в пластинке с круглым отверстием при чисто упругом (сплошная линия) и упруго пластическом состоянии с различными степенями развития пластических зон (пунктирные линии). Картина распределения напряжений, представленная на этом рисунке, является приближенной.

Именно выравниванием поля напряжений объясняется тот факт, что концентрация напряжений обычно не снижает прочности деталей, выполненных из пластичных материалов. Так, при статических

испытаниях образцов из пластичных материалов малые отверстия, выточки и надрезы на образцах не уменьшают величины предела прочности  $\sigma_b$ . Однако при напряжениях, переменных во времени (см. гл. 12), концентрация напряжений существенно снижает прочность и в случае пластичного материала.

Для деталей из пластичных материалов предельной может быть такая нагрузка, при которой перемещения точек детали, вызванные развитием зон пластических деформаций, нарушает ее нормальное функционирование в конструкции. Определение предельной нагрузки требует решения задачи о напряженном и деформированном состоянии детали или всей конструкции при напряжениях, больших предела упругости. Некоторые сведения о расчетах за пределом упругости приведены в гл. 13.

В случае хрупкого материала не происходит выравнивание поля напряжений, и высокая концентрация напряжений сохраняется до самого момента начала разрушения, т. е. до момента образования трещин в зоне концентрации. Таким образом, концентрация напряжений существенно снижает прочность деталей, выполненных из очень хрупких материалов.

Однако появление даже сравнительно больших локализованных трещин не всегда приводит к разрушению детали или конструкции. В зависимости от целого ряда факторов, таких, как величина и время действия нагрузки, геометрия детали, трещиностойкость (вязкость) материала, характер изменения поля напряжения, вызванного образованием трещины, и т. п., возникшие трещины могут либо остановиться и не обнаруживать тенденции к дальнейшему развитию, либо наоборот, могут оказаться неустойчивыми, склонными к лавинному распространению.

Современные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что разрушение не является мгновенным актом, а представляет собой развивающийся с большей или меньшей скоростью процесс слияния микротрещин, пор и иных дефектов материала в макротрещины, а затем и магистральные трещины. Таким образом, трещины зарождаются и развиваются задолго до начала разрушения детали. Поэтому для решения вопроса о прочности детали требуются определенные сведения о самом процессе разрушения и особенно о причинах и условиях распространения трещин. Эти проблемы рассматриваются в недавно возникшей ветви механики твердого тела, называемой механикой разрушения.

### 11.11. О МЕХАНИКЕ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Известно, что реальная прочность конструкционных материалов в десятки, а иногда и сотни раз меньше теоретической прочности, т. е. прочности на отрыв двух слоев атомов (или прочности на разрыв одиночной цепочки атомов), равной примерно одной десятой величины модуля упругости ( $\sigma_c \approx \frac{E}{2\pi}$ ). Только на тонких нитях (стеклянных, кварцевых и т. д. и на тонких нитевидных кристаллах,

так называемых усах) удалось достигнуть прочности, приближающейся к теоретической. Однако с увеличением толщины нитей и усов их прочность на разрыв быстро уменьшается. Характер изменения величины разрушающего напряжения от диаметра нитей и усов имеет вид, представленный на рис. 11.18.

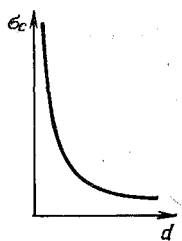


Рис. 11.18

Столь значительная разница в теоретической и реальной прочности конструкционных материалов объясняется различного рода дефектами, неизбежно присутствующими в каждом материале. Такими дефектами являются прежде всего дефекты кристаллической решетки (дислокации, вакансии, внедрения и т. п.), наличие различного рода микропор и включений и т. д.

К дефектам, возникающим при изготовлении материала в металлургическом производстве, добавляются дефекты, появляющиеся в процессе изготовления детали при механической обработке, сварке, закалке и т. д., а также дефекты, появляющиеся в процессе эксплуатации конструкций или машин как результат взаимодействия их деталей друг с другом и с окружающей, часто агрессивной средой.

Именно малым количеством и малыми размерами дефектов в тонких нитях и усах можно объяснить их высокую прочность.

О существенном влиянии состояния поверхностного слоя на прочность детали свидетельствует опыт, проведенный академиком А. Ф. Иоффе (1920 г.). В этом опыте определялась прочность кристалла каменной соли при испытании на воздухе и в воде. Оказалось, что в результате растворения в воде всегда имеющего повреждения поверхностного слоя разрушающее напряжение для кристалла возросло с 45 до 1600 МПа и почти достигло теоретического значения, равного приблизительно 2000 МПа.

Установление закономерностей начального этапа разрушения требует исследования дефектов кристаллов на атомном уровне и представляет предмет интенсивных исследований методами химии, физики твердого тела и материаловедения.

Когда же трещина (или система трещин) по какой-либо причине возникла и захватила достаточное количество зерен, чтобы материалу можно было приписать свойство сплошности и однородности, дальнейшее развитие трещин может быть исследовано методами механики сплошной среды. Раздел механики деформируемого тела, в котором исследуется проблема распространения трещин, называют механикой хрупкого разрушения.

В основе механики хрупкого разрушения лежит представление о том, что материал всегда имеет какие-либо дефекты, которые отождествляются с некоторой системой начальных трещин. Эти трещины вызывают значительную концентрацию напряжений на их фронте, которая при некоторых условиях приводит к быстрому росту трещин.

Каждая из трещин, как показал Гриффитс (1920 г.), начинает расти только после того, как средние напряжения в теле достигнут некоторого критического именно для данной трещины значения,

зависящего от ее размеров, ориентировки по отношению к направлению действующей нагрузки и физико-механических свойств материала.

В своей теории распространения трещин, которая положена в основу современной механики хрупкого разрушения, Гриффитс исходил из следующих соображений.

Для расширения трещины требуется затратить некоторую энергию, равную в случае идеально хрупкого материала работе сил поверхностного натяжения (поверхностной энергии) на вновь образовавшихся свободных поверхностях трещины, которые до начала ее развития не существовали.

Источником необходимой для этого энергии является потенциальная энергия деформации, накопленная в теле, как в аккумуляторе энергии. Часть упругой энергии освобождается при увеличении размеров трещины вследствие роста объема охватывающих почти всю поверхность трещины областей пониженных напряжений (см. заштрихованные области на рис. 11.15).

Освободившаяся в результате уменьшения напряжений и деформаций в части материала тела упругая энергия как бы стекает к краям трещины — местам концентрации напряжений, где и происходит преобразование упругой энергии в поверхностную. Этот процесс реализуется при напряжениях, близких к теоретической прочности хрупкого материала. При определенном значении нагрузки такие напряжения возникают на контуре трещины вследствие высокой концентрации напряжений в этом месте. Таким образом, причиной хрупкого разрушения является концентрация напряжений, возникающая на фронте трещины.

Рассмотрим теперь возможные соотношения между приращениями упругой и поверхностной энергии тела с трещиной.

Если количество  $\Delta U$  освобожденной упругой энергии будет меньше энергии  $\Delta S$ , необходимой для соответствующего увеличения свободных поверхностей трещины, т. е. в случае  $\Delta U < \Delta S$ , то трещина расти не будет. Если же освобождающаяся энергия превзойдет энергию, требующуюся для разрыва материала на фронте трещины, т. е.  $\Delta U > \Delta S$ , то начнется лавинообразное распространение трещины.

Критерием начала развития трещины является равенство

$$\Delta U = \Delta S. \quad (11.24)$$

Из этого равенства следует, что хрупкое разрушение может развиваться без какой-либо дополнительной работы внешних сил только за счет соответствующего уменьшения потенциальной энергии деформации тела. Поскольку естественным состоянием тела является состояние, соответствующее минимуму потенциальной энергии, то трещина всегда имеет тенденцию к неограниченному росту.

Если в тонкой, подвергнутой одноосному растяжению пластинке (рис. 11.19) образовалась малая по сравнению с размерами пластинки поперечная трещина, то потенциальная энергия деформации пла-



стинки уменьшится, как показал Гриффитс \*, на величину

$$\Delta U = \frac{\pi l^2 \sigma^2}{E}, \quad (11.25)$$

где  $\sigma$  — номинальные напряжения в пластинке;  $2l$  — длина трещины. Толщина пластинки для простоты принята равной единице.

При увеличении размера трещины на  $dl$  упругая энергия пластинки уменьшится

на  $d(\Delta U) = \frac{2\pi\sigma^2 l}{E} dl$ , а энергия поверхностного натяжения  $\Delta S = 4\gamma l$  увеличится на  $4\gamma dl$ , где  $\gamma$  — необратимая работа, затраченная на создание единицы площади свободной поверхности трещины.

Согласно критерию (11.24) трещина начинает самопроизвольно расти при

$$\frac{\pi\sigma^2 l}{E} = 2\gamma. \quad (11.26)$$

Равенство (11.26) устанавливает связь между минимальной длиной (называемой критической) начальной трещины, величиной напряжения, при котором эта трещина начинает расти, и физико-механическими свойствами материала. График зависимости критической длины трещины  $2l_k$  от величины действующего напряжения  $\sigma$  в пластинке

$$l_k = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2} \quad (11.27)$$

представлен на рис. 11.20. Аналогичные закономерности развития трещин имеют место и в телах более сложной формы.

Итак, для каждой величины напряжения  $\sigma$  в каждом конкретном материале существует своя критическая длина  $2l_k$  трещины и, пока напряжения в материале не достигли критического для данной трещины значения  $\sigma_c$ , эта трещина расти не будет. Именно поэтому реальные материалы обладают свойством прочности, несмотря на наличие в них трещин и иных дефектов.

Критическая длина трещины быстро уменьшается с ростом уровня напряжений (см. рис. 11.20) и при больших эксплуатационных напряжениях может быть очень малой — порядка нескольких микрон. Этим частично объясняется повышенная чувствительность высокопрочных материалов к различного рода дефектам их структуры.

Дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования показали, что заключения о росте трещины, когда ее размеры до-

\* Гриффитс рассматривал трещину как узкое эллиптическое отверстие в пластинке.

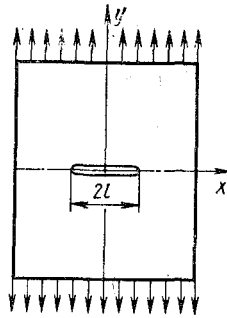


Рис. 11.19

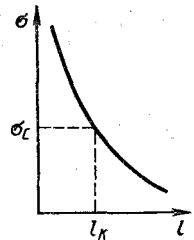


Рис. 11.20

стигают некоторой критической величины, справедливы не только для очень хрупких материалов типа стекла, керамики и т. п., но и для конструкционных материалов, разрушение которых сопровождается пластической деформацией.

На контуре трещины в упруго пластическом материале образуются сначала значительные по величине пластические деформации порядка десятков процентов и лишь затем, когда исчерпывается способность материала пластически деформироваться, происходит отрыв берегов трещины друг от друга, причем затраты энергии  $\gamma_p$  на создание пластических деформаций при образовании единицы свободной поверхности трещины могут во много раз превышать интенсивность поверхностной энергии  $\gamma$ . Для металлов, например,  $\gamma_p \approx 10^3 \gamma$ .

Оказалось также, что все соотношения, полученные для идеально хрупких материалов, справедливы и для упруго пластических тел, если пластические деформации образуются только в узком слое, примыкающем непосредственно к поверхности трещины. Такой случай разрушения называют квазихрупким. Надо только в этих соотношениях заменить  $\gamma$  на сумму  $\gamma + \gamma_p$ .

Так, например, для тонкой пластинки из упруго пластического материала с малой поперечной трещиной критическая длина  $2l_k$  трещины связана с растягивающими пластинку напряжениями соотношением

$$l_k = \frac{2(\gamma + \gamma_p)E}{\pi\sigma^2}. \quad (11.28)$$

Величину  $\gamma + \gamma_p$  называют удельной энергией диссипации, энергией разрушения или эффективной поверхностной энергией.

Из (11.28) следует, что параметр

$$\sigma \sqrt{\lambda l_k} = \sqrt{2(\gamma + \gamma_p)E} \quad (11.29)$$

можно рассматривать как величину постоянную для каждого материала. Чем больше этот параметр, тем больше критическая длина трещины, т. е. тем больше сопротивление материала развитию трещины.

Способность материала сопротивляться развитию трещин называется вязкостью или трещиностойкостью.

Вязкость зависит, в первую очередь, от способности материала пластически деформироваться, т. е. способности поглощать энергию на необратимые процессы перед разрушением. Именно поэтому пластичные металлы с относительно невысокими пределами прочности обладают высокой трещиностойкостью, что является лучшей гарантией от внезапных разрушений.

В то же время в высокопрочных жестких материалах затраты энергии на образование необратимых пластических деформаций малы и в них при нагружении тела аккумулируется много потенциальной энергии. Эта энергия выделяется в больших количествах при росте трещин, что приводит при определенных условиях к лавинному их распространению и полному разрушению тела.

Однако вязкость определяется не только пластическими свойствами, но и структурой материала — наличием в нем блокирующих развитие трещин поверхностей раздела, подобных границам между компонентами армированных материалов. Именно благодаря наличию поверхностей раздела многие композиционные материалы, например стеклопластики, обладают вязкостью, несмотря на то, что составляющие их компоненты являются хрупкими материалами.

В более широком смысле вязкость — это способность структуры материала блокировать развитие трещин.

Вязкость присуща сложному, неоднородному материалу, тогда как однородные материалы всегда проявляют свойство хрупкости.

Следует иметь в виду, что далеко не всякие границы раздела в материале вызывают торможение трещин. Объяснить это можно особенностями распределения напряжений вблизи фронта трещины и величинами сил сцепления материала на поверхности раздела.

В кончике трещины в растянутом теле возникает высокая концентрация напряжений  $\sigma_y$ , быстро убывающая по мере удаления от трещины вдоль оси  $x$  (см. рис. 11.15). Но на некотором расстоянии от этого кончика возникает вытянутая вдоль оси  $x$  (в направлении трещины) область растягивающих напряжений  $\sigma_x$ , параллельных трещине и нормальных к линии действия нагрузки.

По некоторым оценкам наибольшая величина этих растягивающих напряжений  $\sigma_x$  лишь примерно в пять раз меньше максимального значения напряжений  $\sigma_y$  на кончике трещины.

Область растягивающих напряжений движется всегда впереди трещины и первой подходит к поверхности раздела. Если силы сцепления на этой поверхности будут достаточно велики, то поверхность раздела не разрушится, трещина пересечет ее и распространится дальше. Если же поверхность раздела недостаточно прочна, то эта граница разрушится на некотором участке, прежде чем к нему подойдет основная трещина. Образуется новая трещина, перпендикулярная основной и параллельная линии действия нагрузки, а такие трещины обычно не развиваются. Встреча основной трещины с разрушившейся поверхностью раздела приводит к резкому увеличению радиуса на фронте этой трещины, а следовательно, и к резкому уменьшению концентрации напряжений на кончике трещины. В результате рост основной трещины прекращается.

Таким образом, трещина в процессе роста, по-видимому, сама создает возможность затормозить ее развитие при оптимальном сочетании прочности основного материала и сил сцепления на границах раздела.

Энергетический подход Гриффитса оказался весьма трудоемким для исследования хрупкого и квазихрупкого разрушения тел сложной формы при сложных схемах нагружения. Однако то обстоятельство, что вершина трещины, где сосредоточен механизм разрушения, играет роль стока освобождающейся потенциальной энергии, которая здесь же расходуется на разрушение материала, позволило сформулировать условие разрушения материала на кончике трещины исходя из рассмотрения полей напряжений и деформаций непосредственно

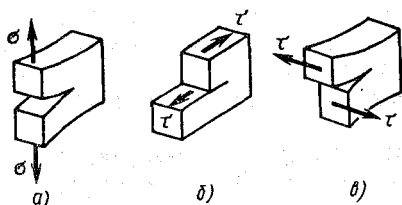


Рис. 11.21

вблизи вершины трещины. Такой «силовой» подход был предложен Ирвином в 1957 г. Им же был сформулирован критерий локального разрушения в вершине трещины, полностью эквивалентный энергетическому критерию Гриффитса, но более удобный для практических приложений, так как позволяет оценивать опасность

разрушения по интенсивности напряженного состояния в локализованной области на фронте трещины.

Определение теоретическим путем напряжений и деформаций в окрестности кончика трещины, где напряженное состояние существенно трехмерное, а материал не подчиняется закону Гука, представляет сложную и до сих пор не разрешенную задачу. Поэтому для определения полей напряжений и деформаций на фронте трещины пользуются решениями, полученными методами линейной теории упругости, чем и объясняется наименование такого подхода — линейная механика трещин.

Согласно решениям теории упругости, распределение напряжений в окрестности кончика прямолинейной трещины описывается формулами

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right); \\ \sigma_y &= \frac{L}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right); \\ \tau_{xy} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Здесь  $r$  и  $\theta$  — полярные координаты рассматриваемой точки с полюсом в вершине трещины;  $K$  — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом интенсивности напряжений. Его размерность, как следует из (11.30),  $\text{МН}/\text{м}^{3/2}$ .

Коэффициент интенсивности напряжений зависит от ряда факторов, в том числе и от типа раскрытия трещины при ее распространении.

В случае, когда берега трещины расходятся друг от друга вследствие отрыва частиц на ее фронте (рис. 11.21, а), этому коэффициенту приписывают индекс I и обозначают  $K_I$ . В случае, когда берега трещины сдвигаются друг относительно друга в направлении самой трещины (рис. 11.21, б), этот коэффициент обозначают  $K_{II}$ , а в случае сдвига берегов перпендикулярно направлению трещины (рис. 11.20, в), коэффициент интенсивности напряжений обозначают  $K_{III}$ .

Из формул (11.30) следует, что напряжения  $\sigma_x \rightarrow \infty$ ,  $\sigma_y \rightarrow \infty$ ,  $\tau_{xy} \rightarrow \infty$  по мере приближения к трещине ( $r \rightarrow 0$ ), что является естественным следствием применения линейной теории упругости. Однако в линейной механике этой физически невозможной ситуации

приписывается определенный смысл, для чего рассматриваются не напряжения на самом фронте трещины, а интенсивность поля напряжений в некотором объеме материала, окружающем кончик трещины. Эта интенсивность как раз и определяется коэффициентом интенсивности напряжений.

Коэффициенты интенсивности напряжений  $K$  имеют исключительно важное фундаментальное значение в механике хрупкого разрушения. Задачам их определения посвящено большое количество теоретических исследований.

Аналитическое определение коэффициентов интенсивности напряжений в телах сложной формы и при сложных схемах нагружения представляет собой значительные математические трудности, и поэтому для решения этой задачи широко используются численные методы с реализацией их на ЭВМ.

Сравнительно просто находятся коэффициенты интенсивности напряжения в пластинках с трещинами несложной формы. Так, при растяжении пластины неограниченных размеров со сквозной центральной трещиной размером  $2l$ , перпендикулярной линии действия нагрузки (см. рис. 11.19), коэффициент интенсивности напряжений

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \quad (11.31)$$

Для трещин, развивающихся в таких пластинках от сдвига,

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi l}; \quad K_{III} = \tau \sqrt{\pi l}. \quad (11.31^*)$$

Для пластин ограниченных размеров, при ином расположении и ориентации трещины в выражения (11.32) вводятся поправочные функции  $f_{Ik}$ ;  $f_{IIk}$ ;  $f_{IIIk}$ , и коэффициенты интенсивности напряжений записывают в виде

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} f_{Ik}; \quad K_{II} = \tau \sqrt{\pi l} f_{IIk}; \quad K_{III} = \tau \sqrt{\pi l} f_{IIIk}. \quad (11.32)$$

Так, например, коэффициент интенсивности напряжений в растягиваемой полосе для сквозной поперечной трещины длиной  $2l$  и выходящей на свободную поверхность  $K_I = 1,58\sigma \sqrt{\pi l}$ , тогда как для центральной поперечной трещины той же длины согласно (11.31)  $K_I = \sigma \sqrt{\pi l}$ .

Таким образом, трещина в поверхностном слое, выходящая на поверхность, опаснее внутренней трещины.

Сравнивая формулы (11.29) и (11.31), приходим к заключению, что коэффициент интенсивности напряжений можно трактовать как величину, характеризующую приток энергии к вершине трещины при ее развитии, что подтверждает эквивалентность энергетического и силового критерия разрушения.

Коэффициент интенсивности напряжения растет с ростом средних напряжений  $\sigma$  в детали и при некотором значении  $\sigma = \sigma_c$ , когда трещина начнет развиваться (начнется разрушение), коэффициент интенсивности напряжений достигнет предельного значения

$$K = K_c. \quad (11.33)$$

Согласно критерию (11.33), трещина начнет расти, как только коэффициент интенсивности напряжений достигнет критического значения, характерного для данного материала.

Для трещины в поле растягивающих напряжений условие (11.33) записывается как

$$K_I = K_{Ic}. \quad (11.34)$$

Величина  $K_{Ic}$  является численной характеристикой трещиностойкости, или иначе, вязкости разрушения в случае развития трещины разрывного типа и является фундаментальной характеристикой материала.

Критическое значение коэффициента интенсивности напряжений  $K_{Ic}$  определяется экспериментально путем испытания образцов определенной формы и размеров с искусственно созданными начальными трещинами.

В процессе испытания регистрируется зависимость между нагрузкой на образец  $P$  и величиной расхождения  $v$  берегов начальной трещины и устанавливается критическое значение  $P_c$  нагрузки. По критической нагрузке  $P_c$  вычисляются критические напряжения в образце  $\sigma_c$ , а по ним — значение коэффициента  $K_{Ic}$ . Например, при испытаниях на растяжение плоского образца со сквозной поперечной трещиной длиной  $2l_0$  величина  $K_{Ic}$  вычисляется по формуле (11.31), которая в этом случае будет иметь вид:

$$K_{Ic} = \sigma_c \sqrt{\pi l / I_h}. \quad (11.35)$$

Найденная экспериментальным путем величина  $K_{Ic}$  принимается в качестве механической характеристики материала, определяющей его трещиностойкость (вязкость).

Однако для того, чтобы экспериментально найденную величину  $K_{Ic}$  действительно можно было принять в качестве механической характеристики, подобной пределу текучести  $\sigma_T$  и пределу прочности  $\sigma_B$ , необходимо выполнение определенных условий, относящихся к формам и размерам образцов, размерам начальной трещины и условиям нагружения образцов в процессе испытания. Эти условия обосновываются теоретически и регламентируются стандартами.

Критерий (11.33) начала распространения трещины позволяет записать условие прочности тел с трещинами в виде

$$K < K_c \quad (11.36)$$

и определить тем самым допустимый размер трещины  $2l$  в случае заданных нагрузок или допустимое значение напряжений  $\sigma$ , если известен размер трещины.

Например, при расчете детали в форме пластины, имеющей сквозную трещину размера  $2l$ , по известному значению  $K_{Ic}$  можно найти разрушающее напряжение  $\sigma_c$  из соотношения (11.35)

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi l / I_h}}. \quad (11.37)$$

Для обеспечения прочности при наличии дефектов напряжения в детали не должны превышать величины  $[\sigma] = \sigma_c/n$ , т. е.

$$\sigma \leq \frac{K_{Ic}}{\sqrt{nl}f_{1B}n}. \quad (11.38)$$

Запас прочности  $n$  при этом выбирается несколько меньше, чем при обычном расчете на прочность, поскольку  $\sigma_c < \sigma_B$ .

Из соотношения (11.38) можно найти допускаемые напряжения  $[\sigma]$  в детали при данных размерах дефектов, либо установить допускаемые размеры  $[l]$  дефектов, соответствующих действующим в детали напряжениям  $\sigma$ . Запас прочности детали с трещинами определяется из соотношения

$$n = \frac{\sigma_c}{\sigma}. \quad (11.39)$$

Для предупреждения внезапных разрушений существенно, к какому типу принадлежит трещина при достижении предельного условия  $K = K_c$ . Если в предельном состоянии трещина равновесна, т. е. ее длина увеличивается только при условии роста нагрузки, что можно объяснить сравнительно малым запасом потенциальной энергии в детали, то опасности немедленного полного разрушения нет. Признаком равновесия трещины является неравенство

$$\frac{\partial K}{\partial l} < 0 \text{ или } \frac{\partial P}{\partial l} > 0, \quad (11.40)$$

где  $P$  — нагрузка на деталь.

Если трещина неравновесна, то при предельном состоянии  $K = K_c$  начинается лавинное распространение трещины.

Лавинному распространению трещины часто предшествует ее медленный рост, связанный с постепенным развитием деформаций в вершине трещины и накоплением рассеянных повреждений. Чем больше трещиностойкость материала, тем медленнее происходит этот процесс. Условием неустойчивости трещины является неравенство

$$\frac{\partial K}{\partial l} > 0. \quad (11.41)$$

В заключение отметим, что механика хрупкого разрушения уже на настоящей стадии ее развития позволяет объяснить многие эффекты хрупкого разрушения, прогнозировать с той или иной степенью достоверности разрушение отдельных элементов сложной формы и правильно ставить прочностные эксперименты и интерпретировать их результаты.

#### 12.1. ЯВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ

В процессе эксплуатации различного рода конструкций и машин напряжения во многих их деталях многократно изменяются как по величине, так и по знаку.

Опыт показывает, что детали, подвергнутые воздействию переменных напряжений, разрушаются при напряжениях, значительно меньших предела прочности, а иногда и предела пропорциональности материала.

Явление прогрессивного разрушения под действием переменных напряжений носит название усталости материала.

Термин усталость не отражает сущности явления, но он был введен еще в прошлом веке и является общепринятым.

В настоящее время в связи с увеличением скоростей движения летательных аппаратов и деталей машин и связанным с этим возрастанием частот изменения напряжений при одновременном росте их уровня (вследствие стремления уменьшить массу конструкции) именно усталость в подавляющем большинстве случаев является причиной разрушения.

Усталостное разрушение начинается с образования в наиболее слабом месте детали сначала микро-, а затем макротрещины, которая при переменной нагрузке имеет тенденцию прогрессивно развиваться. Развитие трещин идет особенно интенсивно, если напряжения изменяются не только по величине, но и по знаку.

Чаще всего усталостные трещины возникают у поверхности детали, но иногда и в толще материала.

Образование и развитие усталостной трещины постепенно уменьшает рабочую часть сечения и в конце концов настолько ослабляет его, что наступает внезапное разрушение детали.

Поверхность усталостного излома детали имеет две совершенно различные зоны (рис. 12.1). Одна из них — зона распространения трещины *А* в результате взаимного трения и наклепа от повторяющегося нажатия поверхностей трещины друг на друга имеет гладкую, притертую поверхность. Другая зона *Б* даже в случае пластичного материала имеет крунозернистую структуру, такую же, как и поверхность разрушения образца из чугуна, при одноосном статическом растяжении.

Именно поэтому вначале разрушение при переменных напряжениях приписывали «перерождению» или «кристаллизации» (уста-



лости) материала, делающей его хрупким. Дальнейшие исследования показали, что механические свойства и микроструктура материала около места усталостного разрушения такие же, как и до нагружения детали.

С хрупким характером разрушения пластичного материала в зоне шейки мы уже встречались при испытании образцов на одноосное растяжение в условиях статического нагружения (см. разд. 11.1). Хрупкий характер разрушения, по виду очень похожий на усталостный в его крупнозернистой зоне, получается при статическом изгибе образца из пластичного материала с острым надрезом. В вершине надреза возникает объемное напряженное состояние, и поэтому развитие пластических деформаций здесь затруднено. Роль такого надреза при переменных напряжениях выполняет первоначальная трещина. Таким образом, по-видимому, одной из главных причин хрупкого характера разрушения в зоне *B* является трехосное напряженное состояние материала, возникающее на границе трещины.

Усталостное разрушение происходит, как правило, без заметной пластической деформации детали.

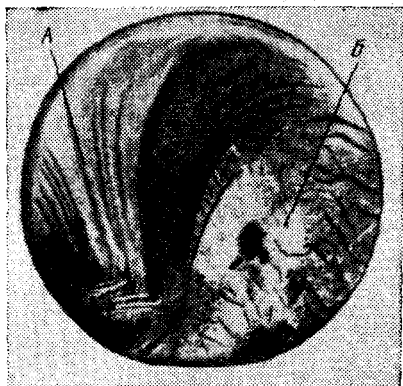


Рис. 12.1

## 12.2. МЕХАНИЗМ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ

Механизм усталостного разрушения чрезвычайно сложен, и многие его детали остаются пока неясными.

Согласно современным представлениям, усталостное разрушение непосредственно связано с неоднородностью строения материалов.

Реальный металл состоит из большого числа весьма малых по размерам и связанных между собой кристаллов, между которыми имеются поры и неметаллические включения.

Кристаллы, как правило, обладают анизотропией. Кристаллические тела представляют собой конгломерат большого числа различно ориентированных кристаллов (зерен), и поэтому в достаточно больших объемах металлы проявляют свойства изотропии. Если же в ориентации зерен наблюдается упорядоченность, вызванная, например, прокаткой, протяжкой и т. п., то материал будет проявлять некоторую анизотропность.

При нагружении детали напряженность различных зерен будет различной, так как вследствие анизотропии свойств кристаллов и случайной ориентировки их кристаллографических осей жесткость каждого кристалла в направлении действия нагрузки будет отличаться от жесткости соседних кристаллов. Вычисляемые по форму-

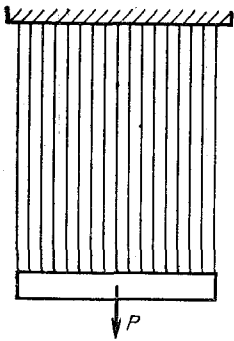


Рис. 12.2

лам сопротивления материалов напряжения являются лишь статистическим осреднением напряжений, действующих в различных зернах.

Неравномерность распределения усилий по зернам, расположенным в плоскости одного и того же сечения детали, легко представить себе, если вспомнить, что распределение усилий по элементам статически неопределимых систем, например, при растяжении зависит от соотношений жесткостей этих элементов. Наглядная механическая модель для описания процесса накопления усталостных повреждений, предложенная В. В. Болотиным, представляет собой многократно статически неопределимую стержневую систему, состоящую из большого числа

одинаковых по длине, но с различными сечениями и механическими свойствами стерженьков, подвешенных к неподвижной опоре и прикрепленных к абсолютно жесткому брусу (рис. 12.2). Случайные распределения механических свойств стерженьков позволяют моделировать случайную структуру поликристаллического материала.

Вначале, при нагружении детали, как и при нагружении стержневой системы, в ее наиболее слабых (наименее благоприятно ориентированных), как и в наиболее нагруженных зернах, появляются пластические деформации. На этом первом этапе деформирования материала основную роль играют дислокационные искажения кристаллической решетки; группы дислокаций, которые всегда имеют место в кристаллах, перемещаются при циклическом нагружении и постепенно концентрируются на каком-либо участке кристалла.

При повторных нагружениях пластические деформации от цикла к циклу накапливаются, и на определенной стадии циклического деформирования в отдельных зернах образуются линии скольжения.

Микроскопические и рентгеноскопические исследования показывают, что линии скольжения в отдельных зернах появляются уже на ранней стадии деформирования.

По мере развития линий скольжения в кристаллах начинается процесс упрочнения, связанный с блокировкой плоскостей скольжения. Аналогичное явление упрочнения после текучести наблюдается и при испытаниях на растяжение образцов их пластичных материалов.

Упрочнение отдельных кристаллов и их групп ведет к перераспределению напряжений между зернами.

Напряжения в упрочняющихся кристаллах повышаются, и, наконец, когда возможности к упрочнению кристалла исчерпываются, в нем образуются зародыши микротрещины по какой-либо плоскости скольжения. При последующих циклах нагружения размеры зародышей микротрещин увеличиваются, и происходит процесс разрушения зерна, снижающий его способность сопротивления образованию трещины. Именно сочетание процессов упрочнения

и разрыхления и ведет к образованию микротрещин в теле зерен \*.

Слияние возникших микротрещин создает благоприятные условия для появления и дальнейшего развития макротрещины, причем наличие начальных дефектов (пор, включений и т. п.) в материале ускоряет данный процесс.

На этом заканчивается первая (инкубационная) стадия усталостного разрушения. На первую стадию приходится от 60 до 90 % разрушающего числа циклов.

На вторую стадию — от начала образования первой макроскопической усталостной трещины и до окончательного разрушения — приходится меньшая часть разрушающего числа циклов. График, показывающий зависимость длины  $l$  усталостной трещины от числа циклов при отсутствии концентрации напряжений, представлен на рис. 12.3 кривой 1. На второй стадии развитие трещины быстро увеличивается и перед самым разрушением идет так же быстро, как и при статическом разрушении хрупких материалов.

При наличии концентрации напряжений усталостные трещины появляются уже после наработки образцами 20 ... 30 % от числа циклов до разрушения. Однако вначале они развиваются медленнее, чем при отсутствии концентрации напряжений, потому что быстро выходят из областей высоких напряжений, локализованных в окрестности источников концентрации напряжений. Но постепенно скорость роста трещин возрастает и образцы с концентрацией напряжений показывают меньшую усталостную прочность, чем без концентрации (рис. 12.3, кривая 2).

Если зарождение усталостной трещины обусловлено, главным образом, действием касательных напряжений, то ее развитие связано с действием нормальных напряжений и происходит по площадкам действия наибольших нормальных напряжений. Например, при переменном кручении трещина на поверхности вала возникает в плоскости действия  $\tau_{\max}$ , а распространяется дальше по площадкам растягивающих  $\sigma_{\max}$ , наклоненным к оси вала под углом  $45^\circ$  (рис. 12.4).

Развитие трещины во второй стадии вызвано высокой концентрацией напряжений на ее фронте. Зачастую фронт усталостной трещины продвигается вперед отдельными скачками, свидетельством чему являются характерные бороздки на поверхности разрушения.

Образование зародышей усталостных трещин связано с накоплением значительных пластических деформаций, но только в микрообъемах, и именно поэтому усталостное разрушение происходит без заметной пластической деформации всей детали.

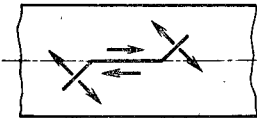


Рис. 12.4

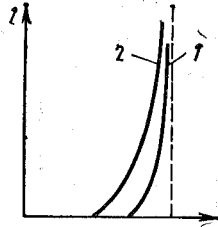


Рис. 12.3

\* В металлах со слабыми границами зерен (литые легкие сплавы) наблюдается зарождение и развитие трещин по этим границам.

Законченной теорией усталостного разрушения еще нет. В настоящее время интенсивно развиваются вероятностные методы расчетов на усталость, как более перспективные и эффективные. Одновременно продолжается процесс накопления экспериментальных фактов, на основе которых уточняются существующие и создаются новые расчетные методы.

### 12.3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Характер изменения напряжений во времени отличается большим разнообразием. Часто конструкции испытывают действие нагрузок, случайным образом изменяющихся во времени, или, как говорят, представляющих собой случайный процесс. Такой нестационарный вид имеют нагрузки на самолет в процессе полета, нагрузки при действии волн на корпуса судов и т. п.

В то же время можно привести много примеров, когда напряжения в деталях машин и даже конструкций представляют собой периодическую функцию времени. Напряжения в детали могут изменяться по периодическому закону в некоторых случаях и при постоянной нагрузке. Например, напряжение изгиба в точке  $A$  поперечного сечения вала, нагруженного постоянной по величине и сохраняющей свое направление силой  $P$  (рис. 12.5), за время одного поворота успевает из растягивающего превратиться в сжимающее и снова в растягивающее.

Рассмотрим сначала случай, когда напряжения в детали изменяются во времени периодически, не затрагивая пока вопросы усталостной прочности при нестационарном нагружении.

Однократная смена напряжений, т. е. совокупность последовательных значений напряжений за один период, называется циклом.

Если максимальное значение напряжений ( $\sigma_{\max}$  или  $\tau_{\max}$ ) и минимальное значение напряжений ( $\sigma_{\min}$  или  $\tau_{\min}$ ) численно равны между собой, но противоположны по знаку, то цикл изменения напряжения называется симметричным (рис. 12.6). Если же максимальные и минимальные напряжения не равны между собой, то цикл называется асимметричным (рис. 12.7).

Степень асимметрии цикла характеризуется коэффициентом асимметрии

$$R_{\sigma} = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (12.1)$$

Цикл, минимальное напряжение которого равно нулю, называется отнулевым (пульсирующим) (рис. 12.8).

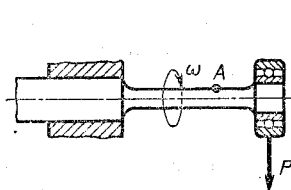


Рис. 12.5

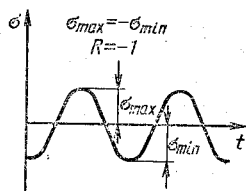


Рис. 12.6

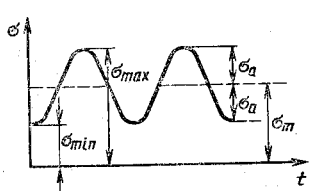


Рис. 12.7

Коэффициент асимметрии симметричного цикла  $R_\sigma = -1$ , а для отнулевого цикла  $R_\sigma = 0$ . В случае постоянных напряжений  $R_\sigma = 1$ .

Величина

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (12.2)$$

называется амплитудой, а

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (12.3)$$

— средним напряжением цикла.

Всякий асимметричный цикл можно представить как результат наложения симметричного цикла на постоянное среднее напряжение.

Опыт показывает, что разрушение материала при переменных напряжениях наступает не сразу, а после многократного изменения нагрузки, причем число циклов, при котором происходит разрушение, оказывается тем меньше, чем выше максимальное напряжение цикла.

Экспериментально установлено, что число циклов, при котором происходит разрушение, зависит не только от величины максимального (по абсолютному значению) напряжения, но и от амплитуды колебания напряжений  $\sigma_a$ ; чем больше  $\sigma_a$  при одном и том же  $\sigma_{\max}$ , тем меньше перемен нагрузки выдержит материал. Поэтому из всех циклов наиболее опасным является симметричный.

Экспериментальным путем также установлено, что для многих материалов существует такое значение максимального напряжения, зависящее от степени асимметрии цикла, при котором материал выдерживает еще неограниченное число перемен нагрузки (циклов).

Наибольшее по абсолютному значению напряжение цикла, при котором еще не происходит усталостное разрушение, называется пределом выносливости.

Пределы выносливости обозначаются символами  $\sigma_R$  или  $\tau_R$  с указанием в индексе значения коэффициента асимметрии цикла, для которого эти величины определялись. Так,  $\sigma_{-1}$  и  $\tau_{-1}$  представляют собой пределы выносливости при симметричном цикле, а  $\sigma_0$  и  $\tau_0$  — при отнулевом цикле.

#### 12.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ. ПРЕДЕЛ ОГРАНИЧЕННОЙ ВЬНОСЛИВОСТИ

Предел выносливости материала определяется путем испытания идентичных образцов при различных значениях  $\sigma_{\max}$  (но при неизменном коэффициенте асимметрии  $R$ ) и регистрации количества циклов, при котором происходит разрушение каждого образца.

Для этой цели используется партия (не менее 10 согласно ГОСТ 2860—65), образцов обычно круглого сечения диаметром 7 ... 10 мм. Во избежание концентрации напряжений образцам при-

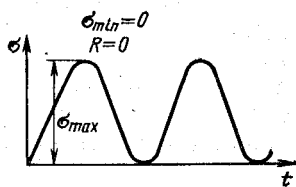


Рис. 12.8

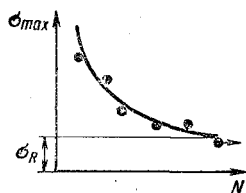


Рис. 12.9

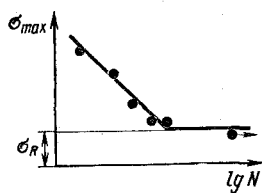


Рис. 12.10

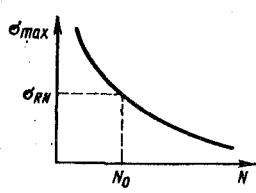


Рис. 12.11

дается плавная форма, а поверхность тщательно шлифуется или полируется.

Предел выносливости зависит от размеров поперечного сечения образца. Поэтому всегда указывается, на образцах какого диаметра определялась эта усталостная характеристика.

Первый образец испытываемой партии нагружается так, чтобы максимальные напряжения превышали предел выносливости при данном коэффициенте асимметрии цикла, и по счетчику на машине устанавливается количество циклов, которое выдержал образец перед разрушением. Количество циклов, выдерживаемых образцом или деталью перед разрушением, называется циклической долговечностью.

В каждом последующем образце при том же коэффициенте асимметрии цикла создается максимальное напряжение, меньшее, чем в предыдущем, а также регистрируется число  $N$  циклов, при котором эти образцы разрушаются.

Результаты испытаний представляются графически в виде кривой усталости. По оси ординат откладывается  $\sigma_{\max}$  — максимальное напряжение цикла, при котором испытывался образец, а по оси абсцисс — число  $N$  циклов, которое выдержал образец перед разрушением.

Обычно на каждом уровне напряжений  $\sigma_{\max}$  испытывается несколько образцов, и по результатам испытаний определяется среднее значение разрушающего числа циклов. Именно это значение  $N$  и откладывается по оси абсцисс при построении кривых усталости. Вид кривой усталости для черных металлов приведен на рис. 12.9.

Часто кривые усталости строят в полулогарифмических или двойных логарифмических координатах, откладывая по оси абсцисс логарифм числа циклов  $\lg N$ , соответствующих поломке образца, а по оси ординат — максимальное напряжение цикла  $\sigma_{\max}$  или  $\lg \sigma_{\max}$ . Кривая усталости в полулогарифмических координатах имеет вид, представленный на рис. 12.10. Она состоит из двух прямых, причем вторая прямая почти горизонтальна.

Эксперименты показывают, что образцы из большинства черных металлов, выдержавшие  $10^7$  циклов, обычно не разрушаются при дальнейшем увеличении числа перемен нагрузки. Кривая усталости для таких материалов асимптотически приближается к горизонтальной прямой. Отрезок, отсекаемый этой прямой на оси ординат, определяет предел выносливости материала  $\sigma_R$ ,  $\tau_R$  при данном коэффициенте асимметрии цикла  $R$  (см. рис. 12.9).

Для цветных металлов, строго говоря, не существует такого числа циклов, выдержав которые образец не разрушается при дальнейшем испытании. Кривые усталости цветных металлов не имеют горизонтальной асимптоты (рис. 12.11). В таких случаях можно говорить лишь о пределе ограниченной выносливости  $\sigma_{RN}$ .

Пределом ограниченной выносливости называется максимальное напряжение цикла, при котором материал выдерживает перед разрушением наперед заданное число циклов  $N$ , называемое базой испытания.

Для сталей предел ограниченной выносливости, определенный на базе  $N = 10^7$ , как указывалось выше, можно принять за предел выносливости, так как если стальной образец выдержал  $10^7$  циклов, то он может выдержать практически неограниченное число циклов. Для цветных металлов за предел выносливости принимается ограниченный предел, определенный на базе от  $5 \cdot 10^7$  до  $10^8$  циклов.

Наиболее простыми являются машины, предназначенные для испытаний на переменный изгиб с вращением при симметричном цикле изменения напряжений. Схема такой машины, в которой образец работает как консольная балка, представлена на рис. 12.5. Имеются также машины, в которых образец работает на переменный чистый изгиб как двухопорная балка.

При испытаниях на переменное растяжение (сжатие) и переменное кручение применяются машины более сложной конструкции. Обычно эти машины приспособлены для испытаний при асимметричном цикле.

Результаты экспериментальных исследований показали, что пределы выносливости одного и того же материала при растяжении и кручении меньше предела выносливости при изгибе. Например, при симметричном цикле предел выносливости при растяжении

$$(\sigma_{-1})_p = (0,7 \dots 0,8) \sigma_{-1}, \quad (12.4)$$

а при кручении

$$\tau_{-1} = (0,4 \dots 0,7) \sigma_{-1},$$

где  $\sigma_{-1}$  — предел выносливости при изгибе. В справочной литературе обычно приводятся значения  $\sigma_{-1}$ , полученные по результатам испытаний на переменный изгиб.

Были предприняты многочисленные исследования для установления связи предела выносливости  $\sigma_{-1}$  с другими механическими характеристиками материала. Эти исследования показали, что для сталей

$$\sigma_{-1} \approx 0,5\sigma_B,$$

а для цветных металлов зависимость менее определена:

$$\sigma_{-1} = (0,25 \dots 0,5) \sigma_B,$$

где  $\sigma_B$  — предел прочности материала.

Данные соотношения надо рассматривать как ориентировочные, но они показывают, что предел выносливости для некоторых цветных металлов почти в четыре раза меньше предела прочности.

## 12.5. ЗАВИСИМОСТЬ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ ОТ СТЕПЕНИ АСИММЕТРИИ ЦИКЛА. ДИАГРАММА ПРЕДЕЛЬНЫХ АМПЛИТУД

Предел выносливости материала зависит от степени асимметрии цикла. Эта зависимость изображается графически в виде диаграммы предельных напряжений.

Иногда диаграмму предельных напряжений строят в координатах  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_m$ . Чаще применяется диаграмма, в которой по оси абсцисс откладывается предельное значение среднего напряжения цикла  $\sigma_m$ , а по оси ординат — предельное значение амплитуды цикла  $\sigma_a$ . Она называется диаграммой предельных амплитуд. Такая диаграмма представлена на рис. 12.12. Из этой диаграммы исключают ту область, где максимальные напряжения  $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$  превосходят предел текучести. Для этого проводят прямую  $BF$ , отсекающую на осях координат отрезки, равные  $\sigma_T$ . Сумма координат любой точки этой прямой равна, очевидно,  $\sigma_T$ . После исключения указанной области диаграмма будет ограничена кривой  $AC$  и прямой  $BC$ , причем на участке  $BC$  диаграммы  $\sigma_{\max} = \sigma_R = \sigma_T$ , а участок  $AC$  соответствует циклам, протекающим в области чисто упругих деформаций, так как  $\sigma_R = \sigma_m + \sigma_a < \sigma_T$ .

Луч, выходящий из начала координат, наклонен к оси абсцисс под углом  $\alpha$ , тангенс которого

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R}. \quad (12.5)$$

Отсюда следует, что для определения по диаграмме предела выносливости при заданном коэффициенте асимметрии  $R$  надо вычислить  $\alpha$  по формуле (12.5), провести луч из начала координат под найденным углом  $\alpha$  к оси  $\sigma_m$  и определить координаты точки пересечения этого луча с предельной кривой  $\sigma_a = f(\sigma_m)$ .

Координаты точки  $M$  пересечения луча с кривой  $\sigma_a = f(\sigma_m)$  (см. рис. 12.12) в принятом масштабе определяют предельные значения  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$ , а их сумма  $\sigma_m + \sigma_a = \sigma_R$  — предел выносливости при данном  $R$ .

Диаграммы предельных напряжений, как указывалось выше, строятся по результатам испытаний на усталость образцов из исследуемого материала. Особую сложность представляет получение опыт-

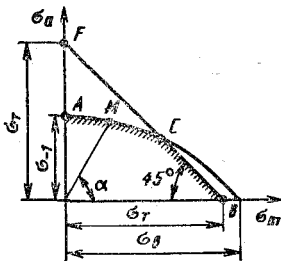


Рис. 12.12

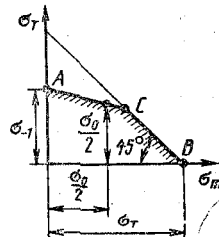


Рис. 12.13



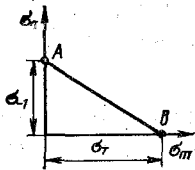


Рис. 12.14

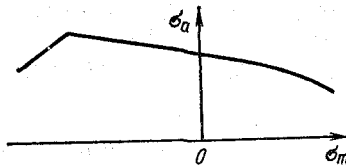


Рис. 12.15

ных точек в области сжимающих  $\sigma_m$  и в области растягивающих напряжений  $\sigma_m$ , когда  $\sigma_m$  превышает предел текучести.

Если для построения диаграммы предельных амплитуд не имеется достаточного числа экспериментальных точек, то ее строят приближенно. Приближенная, или, как ее часто называют, схематизированная диаграмма  $\sigma_m, \sigma_a$  представлена на рис. 12.13. Начальный участок диаграммы заменяется прямой, проходящей через две точки, соответствующие предельному симметричному циклу ( $\sigma_a = \sigma_{-1}, \sigma_m = 0$ ) и предельному отнулевому циклу ( $\sigma_a = \sigma_m = \sigma_0/2$ ).

Такая схематизация была предложена С. В. Серенсенем и Р. С. Кинасошвили.

При более грубом приближении диаграмму иногда заменяют не ломаной  $ACB$ , а прямой  $AB$  (рис. 12.14), завышая этим запас прочности при расчетах.

В области сжимающих средних напряжений предельные амплитуды вначале заметно возрастают, а затем быстро уменьшаются. Диаграмма предельных амплитуд в области  $\sigma_m < 0$  показана на рис. 12.15.

Особенно заметно увеличиваются предельные амплитуды у хрупких материалов и легированных сталей. Менее заметно проявляется это явление у конструкционных сталей и алюминиевых сплавов.

## 12.6. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ХАРАКТЕР ЯВЛЕНИЯ УСТАЛОСТИ

Усталостное разрушение и особенно его первая стадия носит ярко выраженный статистический характер, так как зависит от индивидуальных особенностей поликристаллического строения каждого образца. Так, даже при самом строгом соблюдении однородности условий испытаний образцы из одного и того же материала при одинаковых максимальных напряжениях разрушаются, как показывают эксперименты, при существенно различных количествах циклов. Разброс разрушающих величин циклов может достигать при этом двух и более порядков. Величина разброса увеличивается с уменьшением уровня максимальных напряжений и соответствующим увеличением количества циклов, необходимых для разрушения образца.

В последние годы интенсивно развиваются вероятностные методы расчетов на прочность при напряжениях, переменных во вре-

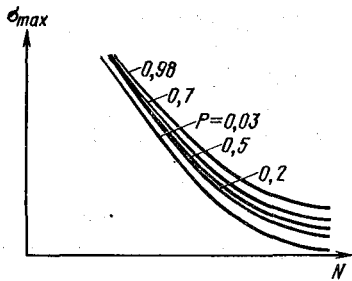


Рис. 12.16

ются в возрастающем порядке. Полученные таким образом вариационные ряды

$$(\lg N)_1 < (\lg N)_2 < (\lg N)_3 < \dots < (\lg N)_i < \dots < (\lg N)_n$$

служат исходной информацией для вероятностной оценки усталостных характеристик материала. Вероятность разрушения  $P$  при данном  $(\lg N)_i$  на каждом уровне  $\sigma_{\max}$ , приблизительно равная отношению числа  $i$  образцов, разрушившихся при числе циклов, меньшем  $(\lg N)_i$ , к числу всех  $n$  образцов испытываемой партии, доведенных до разрушения на данном уровне  $\sigma_{\max}$ , вычисляется по формуле

$$P = \frac{i - 0,5}{n}.$$

Полученная таким образом зависимость между максимальными напряжениями  $\sigma_{\max}$  цикла, долговечностью  $N$  и вероятностью разрушения  $P$  представляется в виде семейства кривых усталости, построенных для различных вероятностей разрушения  $P$  (рис. 12.16). Кривая, построенная по средним значениям экспериментально найденных долговечностей  $N$  (см. рис. 12.9), соответствует напряжениям, вызывающим разрушения при заданном числе циклов с вероятностью, близкой к 0,5.

## 12.7. МАЛОЦИКЛОВАЯ УСТАЛОСТЬ

Характер усталостного разрушения существенно зависит от уровня циклически изменяющихся напряжений. Так, при максимальных напряжениях  $\sigma_{\max}$  цикла, меньших предела упругости материала, усталостное разрушение имеет хрупкий характер и происходит вследствие накопления повреждений и развития магистральной трещины без заметной пластической деформации всей детали.

В тех случаях, когда максимальные напряжения цикла превосходят предел упругости, пластические деформации возникают в больших объемах материала. От цикла к циклу пластические деформации накапливаются и, наконец, при сравнительно небольшом количестве циклов достигают предельной величины, соответствующей

мени. Эти методы основываются на вероятностной оценке рассеяния усталостных характеристик материала, определяемых путем испытания достаточно большой партии совершенно идентичных образцов на различных уровнях максимальных напряжений цикла.

Логарифмы разрушающих чисел циклов для всех  $n$  образцов, испытанных на каждом уровне максимальных напряжений, располагаются

разрушению материала при однократном статическом нагружении. Таким образом, усталостное разрушение при достаточно высоких уровнях напряжений сопровождается заметной пластической деформацией всей детали и по своему характеру ближе к разрушению при статическом однократном нагружении. Поэтому такой тип разрушения при циклически изменяющихся напряжениях называют квазистатическим.

В связи с различными физическими процессами разрушения материала при высоких и низких уровнях максимальных напряжений цикла, принято различать два вида усталости — многоцикловую и малоцикловую.

Многоцикловая усталость — усталость материала, при которой усталостное повреждение или разрушение происходит в основном при упругом деформировании. Малоцикловая усталость — усталость материала, при которой усталостное повреждение или разрушение происходит при упругопластическом деформировании.

Точной границы между многоцикловой и малоцикловой усталостью установить, естественно, нельзя. Условно в качестве такой границы принимается  $N = 10^4$  циклов, и ветвь кривой усталости, расположенную левее вертикальной прямой с абсциссой  $N = 10^4$ , относят к малоцикловой усталости, а правую ветвь — к многоцикловой усталости.

Характер разрушения в области малоцикловой усталости существенно зависит от способности материала к накоплению пластических деформаций при циклическом нагружении.

Материалы, у которых остаточная деформация от цикла к циклу уменьшается, а суммарная пластическая деформация стремится к определенному пределу, называются циклически упрочняющимися. К таким материалам относятся, например, алюминиевые сплавы АК8, В95. Разрушение циклически упрочняющихся материалов всегда имеет усталостный характер, связанный с накоплением повреждений, образованием трещин и их развитием. Даже при самых высоких уровнях напряжений не наблюдается квазистатический вид разрушения.

Циклически разупрочняющиеся материалы характеризуются увеличением от цикла к циклу остаточных деформаций и интенсивным ростом суммарной пластической деформации. К циклическому разупрочнению склонны некоторые стали повышенной прочности.

Для циклически стабильных материалов характерна одинаковая величина остаточной деформации во всех циклах.

В области малоцикловой усталости циклически стабильные и разупрочняющиеся материалы имеют квазистатический вид разрушения. Долговечность деталей из таких материалов существенно зависит от степени асимметрии цикла; чем больше асимметрия цикла, тем больше скорость накопления пластических деформаций и тем меньше требуется циклов для разрушения.

Интенсивность процесса накопления пластических деформаций при циклическом нагружении зависит также от скорости нагружения и разгрузки и времени выдержки при  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ , т. е. от ча-

стоты и формы цикла, поскольку пластические деформации развиваются во времени (эффект последействия). Особенно заметно проявляется эта зависимость при повышенных температурах. Однако в области малоциклового усталости и при нормальной температуре долговечность значительно уменьшается с уменьшением частоты изменения напряжений. Как следует из данных, приведенных в разд. 12.8, долговечность образцов из алюминиевого сплава Д16Т уменьшается почти в 3,5 раза при уменьшении частоты с 2000 циклов в минуту до 15 циклов в минуту.

Малоцикловое разрушение может быть вызвано не только действием переменных нагрузок, но и повторными тепловыми воздействиями. Если температурные расширения в детали стеснены опорными устройствами или окружающими частями детали с неизменной температурой, то в такой детали возникнут температурные напряжения, которые могут достигнуть предела текучести. В результате появятся пластические деформации.

Разрушение, вызванное знакопеременной пластической деформацией, являющейся следствием циклических изменений температуры, называется термической усталостью.

В настоящее время вопросы малоциклового и термической усталости интенсивно исследуются, накапливаются экспериментальные данные и проводится их теоретическое обобщение.

Одним из способов повышения сопротивления деталей циклическому разрушению в условиях малоциклового усталости является изготовление их из циклически упрочняющихся металлов.

## 12.8. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ

Установлено, что на величину предела выносливости влияют концентрация напряжений, состояние поверхности, абсолютные размеры детали и многие другие факторы. Рассмотрим влияние основных факторов.

**Концентрация напряжений.** В отличие от случая постоянных во времени напряжений (см. 11.10), при переменных нагрузках концентрация напряжений вызывает снижение предела выносливости деталей, выполненных не только из хрупких, но и из пластичных материалов.

Влияние концентрации напряжений на предел выносливости зависит от чувствительности материала к концентрации напряжений и учитывается в расчетах с помощью так называемого эффективного коэффициента концентрации.

Эффективным коэффициентом концентрации называется отношение предела выносливости  $\sigma_{-1}$  образца без концентратора напряжений к пределу выносливости  $(\sigma_{-1})_к$  образца с концентратором напряжений, выполненного из того же материала и имеющего такие же поперечные размеры рабочей части, что и первый образец.

Эффективные коэффициенты концентрации для нормальных напряжений обозначаются

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1})_K}, \quad (12.6)$$

а для касательных напряжений —

$$K_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{(\tau_{-1})_K}.$$

Эффективные коэффициенты  $K_{\sigma}$  и  $K_{\tau}$  больше единицы и обычно меньше теоретических коэффициентов концентрации  $\alpha_{\sigma}$  и  $\alpha_{\tau}$ . Между  $K$  и  $\alpha$  существует такое приближенное соотношение:

$$\begin{aligned} K_{\sigma} &= 1 + q_{\sigma} (\alpha_{\sigma} - 1); \\ K_{\tau} &= 1 + q_{\tau} (\alpha_{\tau} - 1), \end{aligned} \quad (12.7)$$

где  $q_{\sigma}$ ,  $q_{\tau}$  — коэффициенты чувствительности материала к концентрации напряжений.

Чувствительность материала к концентрации напряжений зависит прежде всего от свойств материала и возрастает с повышением предела прочности. Поэтому применение высокопрочных материалов при переменных нагрузках не всегда является целесообразным.

Для легированных сталей

$$q_{\sigma} = 0,8 \dots 0,9,$$

для углеродистых

$$q_{\sigma} = 0,5 \dots 0,6.$$

Как показывает опыт, коэффициент чувствительности  $q$  зависит также от размеров детали и ее формы. Поэтому в практических расчетах целесообразнее пользоваться эффективными коэффициентами  $K_{\sigma}$  и  $K_{\tau}$ , найденными экспериментальным путем. В справочной литературе имеются графики коэффициентов  $K_{\sigma}$  и  $K_{\tau}$  для многих видов концентраторов напряжений.

Необходимо отметить, что концентрация напряжений может быть обусловлена не только очертанием деталей, но и наличием внутренней неоднородности и трещин. Например, чешуйки графита в чугуне являются источниками весьма высокой концентрации напряжений, которая перекрывает эффект внешних концентраторов напряжений.

**Градиент напряжений.** Градиентом напряжений в данной точке сечения называется тангенс угла наклона  $\theta$  касательной, проведенной к эпюре напряжений в этой точке (рис. 12.17):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{d\sigma}{d}.$$

Градиент напряжений характеризует скорость убывания напряжений по мере удаления от места концентрации напряжений. Чем выше градиент, тем в меньшем объеме материала концентрируются высокие напряжения, тем меньше зерен материала приходится на этот объем и тем меньше

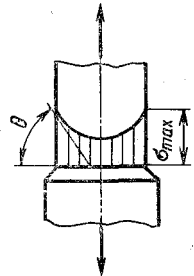


Рис. 12.17

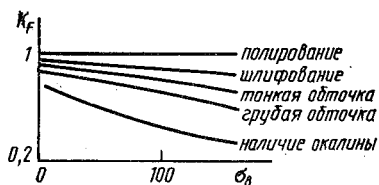


Рис. 12.18

градиент напряжений  $\operatorname{tg} \theta = 2\sigma_{\max}/d$ , а при центральном растяжении — сжатии градиент напряжений равен нулю. Этим частично объясняются меньшие значения пределов выносливости при центральном растяжении — сжатии, чем при изгибе образцов из одного и того же материала.

**Состояние поверхности.** На поверхности детали почти всегда имеются риски от обработки резцом, мелкие царапины, следы коррозии и т. д., которые являются концентраторами напряжений. Дефекты поверхности приводят к снижению сопротивления усталости детали. Опытами установлено, что предел выносливости образцов с полированной поверхностью выше, чем у шлифованных, а у шлифованных выше, чем у обработанных резцом, и т. д.

Влияние чистоты поверхности на предел выносливости оценивается коэффициентом  $K_F$ , равным отношению предела выносливости образца с заданной обработкой поверхности к пределу выносливости такого же образца, но с тщательно шлифованной поверхностью:  $K_F = \frac{(\sigma_{-1})}{\sigma_{-1}} \leq 1$ . На рис. 12.18 приведена зависимость коэффициента  $K_F$  от предела прочности  $\sigma_b$  материала для различных видов обработки поверхности.

Необходимо отметить, что применение некоторых технологических методов упрочнения поверхности детали при правильном их выполнении приводит к значительному повышению ее сопротивления усталости. К таким методам относятся:

- а) наклеп поверхностного слоя путем обдувки дробью, накатки роликом и т. п.;
- б) цементация, азотирование и цианирование поверхностного слоя;
- в) закалка токами высокой частоты.

Влияние технологических факторов на усталостную прочность оценивается коэффициентом поверхностного упрочнения  $K_V$ .

В расчетных формулах влияние состояния поверхности детали и технологических факторов учитывается коэффициентом  $K = K_F K_V$ .

Положительное влияние ряда видов технологической обработки поверхностного слоя детали связано, в первую очередь, с созданием в этом слое остаточных сжимающих напряжений, наличие которых затрудняет развитие усталостных трещин. В результате сопротивления усталости детали повышается.

Остаточные напряжения сжатия при таком широко распространенном в настоящее время способе повышения сопротивления уста-

вероятность образования здесь усталостной трещины. Поэтому чувствительность материала к концентрации напряжений несколько уменьшается с увеличением градиента напряжений. При одном и том же  $\sigma_{\max}$  градиент напряжений уменьшается с увеличением размеров поперечного сечения. При изгибе образцов

лости детали, как наклеп ее поверхности, вызывается большим пластическим деформированием поверхностного слоя при обдувке стальной дробью или прокатке роликами. Толщина поверхностного слоя при этом уменьшается, а его продольные размеры увеличиваются, вызывая упругое растяжение материала внутренней части детали. Внутренние волокна после окончания процесса наклепа стремятся уменьшить свои размеры до исходных и вызывают сжатие пластически деформированных волокон поверхностного слоя. Кроме того, пластическое деформирование вызывает повышение упругих свойств материала и, что очень существенно, сглаживает различного рода царапины, задиры на поверхности детали, являющиеся концентраторами напряжений. Все эти факторы и являются главной причиной повышения сопротивления усталости при наклепе поверхностного слоя детали. Однако надо иметь в виду, что слишком интенсивный наклеп способствует появлению в поверхностных слоях детали микротрещин, которые могут снизить ее усталостную прочность.



Рис. 12.19

При закалке токами высокой частоты и азотировании также создаются значительные сжимающие напряжения в поверхностном слое детали.

В то же время такие часто применяемые покрытия стальных деталей, как никелирование и хромирование, заметно снижают предел выносливости детали, хотя и не влияют на их статическую прочность, причем снижение сопротивления усталости тем больше, чем толще слой хрома или никеля. Объясняется это значительными остаточными растягивающими напряжениями в поверхностном слое при хромировании и никелировании. Аналогичное явление имеет место и при покрытии поверхности стальной детали слоем меди.

**Абсолютные размеры.** С увеличением абсолютных размеров поперечных сечений детали предел выносливости понижается. Это явление можно объяснить большей вероятностью присутствия крупных дефектов и групп неудачно ориентированных зерен материала с увеличением абсолютных размеров сечений.

Влияние масштабного фактора на предел выносливости оценивается в расчетах коэффициентом  $K_d$ , представляющим собой отношение предела выносливости гладкого образца данного диаметра  $D$  к пределу выносливости стандартного образца диаметром  $d = 7 \dots 10$  мм:

$$K_d = \frac{(\sigma_{-1})_D}{(\sigma_{-1})_d} < 1. \quad (12.8)$$

На рис. 12.19 приведен график зависимости коэффициента  $K_d$  от величины диаметра  $d$  для сталей.

Необходимо иметь в виду, что если эффективные коэффициенты концентрации взяты из графиков, в которых уже учтен масштабный фактор, вносить поправку на размеры детали не требуется.

**Частота изменения напряжений.** Воздействие частоты изменения напряжений на сопротивление усталости гладких образцов изучалось экспериментально, но заметного влияния частот до 5000 цикл/мин на предел выносливости не было обнаружено. Наблюдалось некоторое повышение предела выносливости при частотах выше 5000 цикл/мин.

Опытами Н. И. Марина установлено, что при максимальных напряжениях симметричного цикла, приближающихся к пределу текучести материала, частота изменения напряжений существенно скажется на долговечности образцов.

Испытания консольных образцов на изгиб с вращением при частотах 15 и 2000 цикл/мин показали, что разрушающее число циклов при частоте 2000 цикл/мин значительно выше разрушающего числа циклов при частоте 15 цикл/мин; для образцов из стали 30ХГСА — примерно в 1,5 раза, а для образцов из Д16Т — в среднем в 3,5 раза.

**Температура.** Испытания при повышенной температуре показали, что для сталей вплоть до 300 ... 400 °С и до 100 °С для легких сплавов температура не оказывает существенного влияния на предел выносливости.

При больших температурах наблюдается снижение предела выносливости (для нежаропрочных сталей до 50 % при  $t = 600$  °С), а если температура достаточно высока, то кривая усталости для сталей вообще не имеет горизонтальной асимптоты, и в этом случае можно оперировать только пределом ограниченной выносливости.

Иное влияние низких температур. С понижением температуры предел выносливости как сталей, так и легких сплавов несколько повышается.

В практических расчетах следует пользоваться экспериментальными данными по пределам выносливости при повышенных и пониженных температурах.

**Внешняя среда.** Все металлы, находясь в контакте с газообразной или жидкой средой, корродируют. На поверхности детали появляются язвочки коррозии, являющиеся причиной высокой концентрации напряжения. Особенно интенсивно развивается коррозия при действии растягивающих напряжений. Другой вид коррозии — коррозия под напряжением проявляется в виде межкристаллических и внутрикристаллических трещин почти без всяких признаков образования продуктов коррозии.

При переменных нагрузках коррозия существенно снижает сопротивление усталости, особенно легких сплавов.

В сталях снижение предела выносливости от коррозии тем больше, чем более высокопрочна сталь.

При наличии корродирующей среды на сопротивление усталости оказывает влияние и время испытания; разрушающее число циклов уменьшается при уменьшении частоты изменения напряжений, а кривая усталости даже у черных металлов не имеет горизонтальной асимптоты. Количественные характеристики снижения выносливости зависят от агрессивности внешней среды. Например, морская вода больше снижает долговечность, чем пресная, и т. п.



Влияние корродирующей среды учитывается в расчетах коэффициентом

$$K = \frac{(\sigma_{-1})_{\text{кор}}}{\sigma_{-1}}, \quad (12.9)$$

где  $(\sigma_{-1})_{\text{кор}}$  — предел выносливости при наличии агрессивной среды. Значения коэффициента  $K$  приводятся в справочной литературе.

Средством борьбы с влиянием внешней среды являются различного рода антикоррозионные покрытия.

**Коррозия трения.** Коррозия трения возникает в местах контакта деталей, подвергающихся циклическому нагружению, например в заклепочных и болтовых соединениях листов обшивок самолетов. Коррозия трения возникает и в сварных соединениях из-за упругих перемещений соединяемых деталей друг относительно друга по плоскостям их контакта.

Трение в местах контакта деталей даже в случае чрезвычайно малых относительных перемещений сопровождается разрушением поверхности соприкасающихся частей, выпадением окислившихся частей материала и постепенным образованием и развитием усталостных трещин. Признаком начала коррозии трения является выпадение окислов в местах соединений в виде красно-коричневого порошка при соединении стальных деталей и черного порошка — при соединении деталей из алюминиевых или магниевых сплавов.

Характерной особенностью разрушения от коррозии трения затянутых болтовых соединений дюралюминиевых пластин при циклическом нагружении является не только выпадение черного порошка, но и то, что разрушение происходит как правило не по ослабленному, а по сплошному сечению, проходящему под головками болтов.

Чтобы коррозия трения проявила себя, необходима наработка соединением достаточно большого количества (порядка миллиона) циклов. При больших значениях максимальных напряжений, соответствующих левой части кривой усталости, разрушение наступает после относительно небольшого числа циклов, и коррозия трения не ускоряет этот процесс.

В литературе приводятся данные о том, что эффект коррозии трения для соединений листов обшивок из алюминиевых сплавов может быть эквивалентен концентрации напряжений, обусловленной геометрией детали, с коэффициентом концентрации порядка 10.

Средства борьбы с коррозией трения — различного рода покрытия и упрочнение поверхностей трения, постановка прокладок между трущимися поверхностями, окраска этих поверхностей и т. д.

#### 12.9. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ОДНОСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ И ЧИСТОМ СДВИГЕ (ИЗГИБЕ, РАСТЯЖЕНИИ И КРУЧЕНИИ)

При переменных нагрузках обычно производится поверочный расчет на прочность, причем за основу для определения запаса прочности принимается схематизированная диаграмма предельных амплитуд  $\sigma_a$ ,  $\sigma_m$  (см. рис. 12.13).

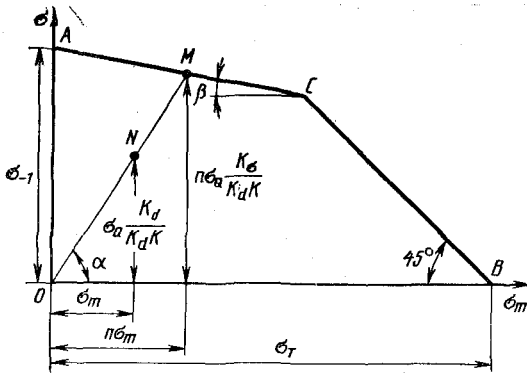


Рис. 12.20

Эта диаграмма построена по результатам испытания стандартных образцов диаметром 7... 10 мм без концентраторов напряжений и со шлифованной или полированной поверхностью. Поэтому при расчете должно быть дополнительно учтено влияние на сопротивление усталости детали всех указанных выше факторов. Влияние концентраторов напряжений на сопротивление усталости учи-

тывается эффективными коэффициентами  $K_\sigma$  и  $K_\tau$ , масштабный эффект — коэффициентом  $K_d$ , а состояние поверхности — коэффициентом  $K = K_f K_V$ .

Так как концентрация напряжений, масштабный фактор и состояние поверхности мало сказываются на прочности деталей из пластического материала при постоянных напряжениях, принято эффект концентрации, состояния поверхности и масштабного фактора относить к переменной составляющей цикла  $\sigma_a$ .

Таким образом, если задан рабочий цикл в детали, характеризуемый переменным напряжением  $\sigma_a$  и постоянным средним напряжением  $\sigma_m$ , то цикл в стандартном образце, равнопрочном данной детали, будет определяться средним напряжением

$$(\sigma_m) = \sigma_m \quad (12.10)$$

и переменным напряжением

$$(\sigma_a) = \sigma_a \frac{K_\sigma}{K_d K} \quad (12.11)$$

Предположим, что при возрастании нагрузок на деталь коэффициент асимметрии  $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$  не изменяется, т. е. циклы изменения напряжений в детали остаются подобными. Тогда напряжения  $(\sigma_m)$  и  $(\sigma_a)$  в стандартном образце, определяемые выражениями (12.10) и (12.11), следует также пропорционально увеличивать; при увеличении нагрузок в  $n$  раз получим предельные значения  $(\sigma_m)_{\text{пр}}$  и  $(\sigma_a)_{\text{пр}}$ .

Значения  $(\sigma_m)_{\text{пр}}$  и  $(\sigma_a)_{\text{пр}}$  определяются по диаграмме предельных напряжений (рис. 12.20) координатами точки  $M$  пересечения с ломаной  $ACB$  луча, проведенного из начала координат под углом  $\alpha$ , тангенс которого

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(\sigma_a)_{\text{пр}}}{(\sigma_m)_{\text{пр}}} = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \frac{K_\sigma}{K_d K} \quad (12.12)$$

Запас прочности  $n_\sigma$  находится как отношение

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_m)_{\text{пр}}}{\sigma_m}; \quad n_\sigma = \frac{(\sigma_a)_{\text{пр}}}{\sigma_a},$$

или графически как отношение отрезков (см. рис. 12.20):

$$n_\sigma = \frac{OM}{ON}.$$

Нетрудно также получить аналитические выражения для запаса прочности, причем таких выражений будет два, так как луч  $OM$  может пересечь как прямую  $AC$ , так и прямую  $CB$ .

Уравнение прямой  $AC$  можно записать как уравнение прямой с угловым коэффициентом (см. рис. 12.13)

$$(\sigma_a)_{\text{пр}} = -\psi(\sigma_m)_{\text{пр}} + \sigma_{-1},$$

где

$$\psi = \frac{\sigma_{-1} - \frac{\sigma_0}{2}}{\frac{\sigma_0}{2}} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0};$$

$$(\sigma_a)_{\text{пр}} = n_\sigma \sigma_a \frac{K_\sigma}{K_d K}; \quad (12.13)$$

$$(\sigma_m)_{\text{пр}} = n_\sigma \sigma_m.$$

Отсюда после несложных преобразований находим выражение для  $n_\sigma$ :

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{K_\sigma}{K_d K} + \psi \sigma_m}. \quad (12.14)$$

Уравнение прямой  $BC$ :

$$(\sigma_a)_{\text{пр}} + (\sigma_m)_{\text{пр}} = \sigma_T.$$

Следовательно, для второго участка диаграммы

$$n_\sigma = \frac{\sigma_T}{\sigma_a \frac{K_\sigma}{K_d K} + \sigma_m}. \quad (12.15)$$

Из двух значений  $n_\sigma$ , определяемых формулами (12.14) и (12.15), искомым запасом прочности будет меньшее значение.

В случае кручения запас прочности  $n_\tau$  определяется аналогично; расчетные формулы получатся путем замены во всех предыдущих выражениях  $\sigma$  на  $\tau$  и  $K_\sigma$  на  $K_\tau$ .

## 12.10. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

При совместном действии переменного изгиба и переменного кручения или в случае растяжения—сжатия и кручения для расчета на прочность используются теории предельного состояния (гл. 11).

Для определения  $(\sigma_a)_{\text{экв}}$  при симметричном цикле изменения  $\sigma$  и  $\tau$  и синхронном их изменении воспользуемся выражением (11.21), заменив в нем отношение  $\sigma_T/\tau_T$  на  $\sigma_{-1}/\tau_{-1}$ . Получим

$$(\sigma_a)_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2}. \quad (12.16)$$

Предельное состояние определяется равенством  $(\sigma_a)_{\text{экв}} = \sigma_{-1}$ .

$$\sigma_{-1} = \sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2}. \quad (12.17)$$

Эта зависимость хорошо подтверждается экспериментальными исследованиями. Преобразуем (12.16) к виду

$$\frac{\sigma_a^2}{\sigma_{-1}^2} + \frac{\tau_a^2}{\tau_{-1}^2} = \frac{(\sigma_a)_{\text{экв}}^2}{\sigma_{-1}^2}. \quad (12.18)$$

При симметричном цикле изменения напряжений  $\sigma_{\text{max}} = \sigma_a$ ;  $\tau_{\text{max}} = \tau_a$ :

$$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} = n_\sigma; \quad \frac{\tau_{-1}}{\tau_a} = n_\tau; \quad \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_a)_{\text{экв}}} = n. \quad (12.19)$$

Здесь  $n_\sigma$  — запас прочности при действии одних только нормальных напряжений;  $n_\tau$  — запас прочности при действии одних только касательных напряжений;  $n$  — запас прочности при совместном действии и нормальных и касательных напряжений и синхронном их изменении.

Внося (12.19) в (12.18), получим для запаса прочности  $n$  при совместном действии переменных нормальных и касательных напряжений выражения:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2} \quad \text{или} \quad n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \quad (12.20)$$

Зависимости (12.20) используют также и для определения запаса прочности при асимметричных циклах изменения  $\sigma$  и  $\tau$ , но в этом случае  $n_\sigma$  и  $n_\tau$  подсчитывают по формулам (12.14) и (12.15).

### 12.11. СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

До сих пор рассматривались вопросы сопротивления усталости при циклическом изменении напряжений с постоянной амплитудой. Рассмотрим теперь влияние нагрузок, случайным образом изменяющихся во времени. Такие нагрузки называются нестационарными.

Характер изменения напряжений в процессе эксплуатации устанавливается экспериментально путем записи показаний датчиков, расположенных в ответственных местах конструкции, на ленты осциллографа. По результатам расшифровки осциллограмм строятся графики зависимости числа повторений  $n_i$  циклов при данной амплитуде  $\sigma_{ai}$  изменения напряжений в блоке нагружения, содержащем  $n$  циклов. Эта кривая имеет вид, представленный на рис. 12.21,

и называется спектром амплитуд действующих переменных напряжений. Обычно весь диапазон амплитуд разбивается на интервалы и для каждого интервала подсчитывается количество циклов. В этом случае зависимость  $n = f(\sigma_a)$  изображается ломаной линией (см. рис. 12.21).

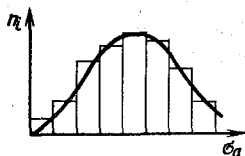


Рис. 12.21

Естественно возникает вопрос о долговечности конструкции при воздействии на нее нестационарных циклических нагрузок. Эта задача особенно важна для летательных аппаратов, долговечность которых в основном определяется усталостными свойствами конструкции.

Один из наиболее распространенных подходов к решению задачи о долговечности основан на гипотезе накопления усталостных повреждений. Предполагается, что за каждый цикл нагружения в материале накапливается определенное для данного уровня  $\sigma_{ai}$  амплитуды напряжений повреждение, мерой которого является отношение  $\frac{1}{N_i}$ , где  $N_i$  — разрушающее количество циклов при действии на конструкцию циклической нагрузки с амплитудой  $\sigma_{ai}$ . При числе  $n_i$  циклов действия напряжений с амплитудой  $\sigma_{ai}$  накопленное повреждение составит

$$D_i = \frac{n_i}{N_i}.$$

Очевидно, что если отношение  $\frac{n_i}{N_i}$  равно единице, то материал разрушится.

Предполагая далее, что накопление повреждений  $D_i$  на каждом уровне амплитуд  $\sigma_{ai}$  не зависит от истории нагружения и просто суммируется с повреждениями, вызванными предыдущими циклами, получаем условие разрушения при нестационарном напряженном состоянии в виде

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1. \quad (12.21)$$

Зависимость (12.21) называется линейным законом накопления повреждений. Согласно (12.21) разрушения при нестационарном нагружении не произойдет, если сумма

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} < 1. \quad (12.22)$$

В действительности, как показывают эксперименты, разрушения происходят в широком диапазоне (от 0,1 до 2) изменения суммы  $\sum \frac{n_i}{N_i}$ , и поэтому гипотезу линейного накопления повреждений для расчета долговечности конструкции надо применять с определенной осторожностью, так как она, как и всякая гипотеза, имеет ограниченные пределы применимости.

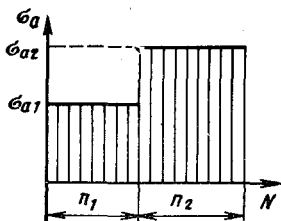


Рис. 12.22

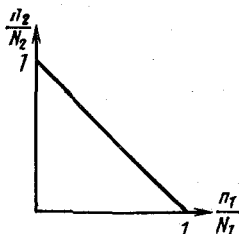


Рис. 12.23

Простейшим нестационарным режимом является одноступенчатый режим изменения напряжений с наработкой  $n_1$  циклов при амплитуде  $\sigma_{a1}$  и  $n_2$  циклов при амплитуде  $\sigma_{a2}$  (рис. 12.22). Зависимость (12.21) для этого случая

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1 \quad (12.23)$$

графически изображается прямой линией (рис. 12.23).

Опыт показывает, что гипотеза линейного суммирования позволяет достаточно точно определить долговечность, если все амплитуды превышают предел выносливости материала детали и отсутствуют резкие всплески напряжений. Кроме того, опытами показано, что линейное суммирование повреждений подтверждается при монотонном увеличении амплитуд с ростом числа циклов, и действует иной закон накопления повреждений, если сначала приложить циклическую нагрузку с амплитудами, близкими к пределу текучести материала.

Таким образом, на долговечность существенно влияет история нагружения. Экспериментально установлено, что образец, нагруженный сначала циклическими напряжениями, меньшими предела выносливости, при дальнейшем повышении амплитуд малыми порциями показывает большую долговечность, чем исходная. В то же время предварительно перенапряжение образца циклическими напряжениями выше предела выносливости приводит к противоположным результатам. Однако вредное влияние перенапряжения начинает сказываться только после некоторого предельного числа циклов перенапряжения, зависящего от величины этих напряжений.

При случайном изменении амплитуд напряжений явления усталостного упрочнения и разупрочнения будут чередоваться и отчасти нивелироваться, что оправдывает в известной степени применение гипотезы накопления повреждений к таким нестационарным режимам изменения напряжений.

Существуют методы описания процесса накопления усталостного разрушения, корректирующие линейную теорию, с тем чтобы учесть влияние накопленных в предыдущих циклах повреждений на способность материала накапливать повреждения при данной амплитуде.

Такую теорию, корректирующую линейную теорию накопления повреждений в случаях, когда наряду с малыми амплитудами напряжений действуют амплитуды  $\sigma_{ai}$ , превышающие предел выносливости детали  $\sigma_{-1D}$ , предложил В. П. Когаев в форме

$$\sum \frac{n_i}{N_i} = a,$$

и дал формулу для вычисления величины  $a$ .

Любой теоретический подход к проблеме долговечности конструкции при нестационарном изменении напряжений требует экспериментальной проверки теоретических методов.

В настоящее время исследования проводятся по двум основным направлениям. Одно из них состоит в испытании непосредственно конструкций по программе нагружения, возможно ближе подходящей к экспериментально определенному спектру нагрузок.

Другое направление исследования состоит в испытании лабораторных образцов по различным ступенчатым программам циклического нагружения, в которых изменяется последовательность чередования нагрузок разной интенсивности с различным количеством циклов их действия. Исследуется влияние параметров нагрузки на долговечность образцов и полученные закономерности используются для оценки долговечности конструкций.

Расчеты за пределами упругости привлекают все более пристальное внимание инженеров в связи с потребностями выявления дополнительных прочностных ресурсов конструкций, выполненных из пластичных материалов, повышения несущей способности деталей методами пластического деформирования, разработки технологических процессов обработки металлов давлением и т. д.

Стремление сделать конструкцию более легкой требует проведения расчетов по предельному состоянию.

#### 13.1. ПОНЯТИЕ О РАСЧЕТАХ ПО ПРЕДЕЛЬНОМУ СОСТОЯНИЮ

Напомним, что при расчете по допускаемым напряжениям предельной считается та нагрузка, при которой эквивалентное напряжение хотя бы в одной точке детали из пластичного материала достигает предела текучести.

Однако пластическая деформация в окрестности только одной точки при условии, что в других точках текучесть не достигнута, еще не означает предельного состояния детали в целом.

С ростом нагрузок материал во все большем количестве точек будет переходить в пластическое состояние и этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока пластические деформации не охватят достаточно большой объем. Когда это произойдет, перемещения точек детали станут столь значительными, что будет нарушено ее нормальное функционирование. В таких случаях говорят, что наступило предельное состояние.

Нагрузки, соответствующие предельному состоянию, называются предельными.

Допускаемая нагрузка определяется делением предельной нагрузки на запас прочности. Определенная таким образом допускаемая нагрузка всегда больше допускаемой нагрузки, определенной по методу допускаемых напряжений.

#### 13.2. СХЕМАТИЗАЦИЯ ДИАГРАММ РАСТЯЖЕНИЯ

Пластические свойства материала при простом растяжении полностью определяются диаграммой растяжения. Обычно предполагается, что диаграмма сжатия такая же (в пределах относительно



малых пластических деформаций), как и при растяжении. Уравнение диаграммы растяжения (рис. 13.1)  $\sigma = f(\epsilon)$ .

Нелинейную часть диаграммы растяжения за пределами упругости называют кривой нагрузки. Деформации, возникающие при возрастании напряжений, называют активными. При разгрузке зависимость между напряжениями  $\sigma$  и исчезающей (упругой)  $\epsilon_{\text{разгр}}$  частью общей деформации описывается, как известно, линейным уравнением

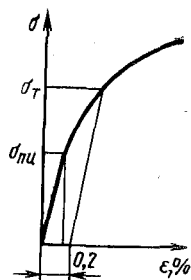


Рис. 13.1

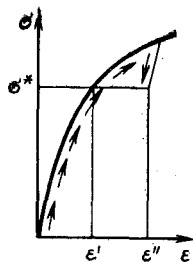


Рис. 13.2

$$\sigma = E\epsilon_{\text{разгр}}. \quad (13.1)$$

Деформация  $\epsilon_{\text{разгр}}$ , возникающая при разгрузке, называется пассивной.

Из несовпадения кривой нагрузки и разгрузки за пределами упругости следует, что главным, отличительным признаком пластической деформации является неоднозначность зависимости между напряжениями и деформациями (а не нелинейность этой зависимости), так как одному и тому же значению напряжения  $\sigma^* > \sigma_{\text{пп}}$  (рис. 13.2) соответствует одно значение  $\epsilon'$  относительного удлинения в процессе возрастания напряжений и множество значений  $\epsilon''$ , получающихся при разгрузке со значений напряжений, больших чем  $\sigma^*$ .

Существуют материалы, например отожженная медь, у которых зависимость между  $\sigma$  и  $\epsilon$  нелинейна и в пределах упругих деформаций.

Расчет на основе диаграмм растяжений, заданных графически или табличным способом, хотя и не вызывает принципиальных трудностей, но технически сложен. Поэтому в практических расчетах диаграмму растяжения часто заменяют упрощенной схематизированной диаграммой.

Схематизируется диаграмма, естественно, не на всем диапазоне изменения  $\epsilon$ , а только на той ее части, которая используется в расчетах.

Иногда диаграмма растяжения аппроксимируется на всем участке ожидаемых величин деформаций степенной функцией

$$\sigma = A\epsilon^m, \quad (13.2)$$

где  $A$  и  $m$  — коэффициенты, подбираемые из условия наилучшего приближения зависимости (13.2) к экспериментально полученной диаграмме растяжения.

Чаще в расчетах используется схематизация диаграммы отрезками прямых линий. Допустим, что диаграмма имеет площадку текучести с последующим упрочнением (рис. 13.3). Такую диаграмму можно представить в виде ломаной  $OABC$ .

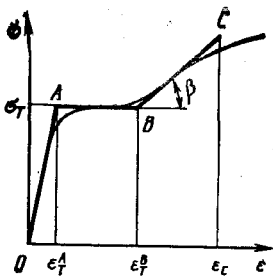


Рис. 13.3

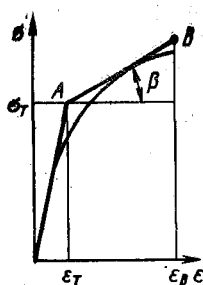


Рис. 13.4

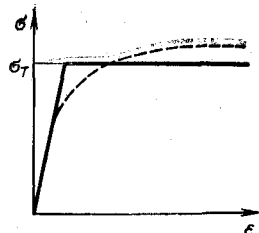


Рис. 13.5

Участок  $OA$  соответствует упругой деформации и описывается уравнением

$$\sigma = E\varepsilon; \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T^A. \quad (13.3)$$

Участок  $AB$  соответствует идеальной пластичности материала, при которой напряжение не зависит от деформации:

$$\sigma = \sigma_T \quad \text{при} \quad \varepsilon_T^A \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T^B. \quad (13.4)$$

Участок  $BC$  определяет зону упрочнения с модулем упрочнения  $E_1$ , численно равным  $\operatorname{tg} \beta$ . На этом участке связь между напряжениями и деформациями при линейной аппроксимации записывается так:

$$\sigma = \sigma_T + E_1 (\varepsilon - \varepsilon_T^B); \quad \varepsilon_T^B \leq \varepsilon \leq \varepsilon_c. \quad (13.5)$$

Если изменится длина участка, на котором надо схематизировать диаграмму прямой  $BC$ , то изменится и угол наклона этой прямой, т. е. уменьшится (с увеличением  $\varepsilon_c$ ) или увеличится (с уменьшением  $\varepsilon_c$ ) модуль упрочнения.

В тех случаях, когда диаграмма растяжения не имеет ясно выраженной площадки текучести, ее можно аппроксимировать двумя прямыми, как показано на рис. 13.4.

Дальнейшим упрощением диаграммы растяжения является диаграмма идеально упругопластического материала, представленная на рис. 13.5. Такая схематизация оправдана, например, для материалов, обладающих площадкой текучести (если ожидаемые деформации не выходят за пределы этих площадок или если можно пренебречь упрочнением материала) или в тех случаях, когда должны исследоваться большие пластические деформации, а диаграмма растяжения имеет вид, показанный на рис. 13.5.

Диаграмма идеально упругопластического материала лежит в основе расчета конструкций по нагрузкам, исчерпывающим их несущую способность.

### 13.3. РАСЧЕТ ПО НАГРУЗКАМ, ИСЧЕРПЫВАЮЩИМ НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ

Суть метода расчета конструкций по нагрузкам, исчерпывающим несущую способность конструкций, наиболее просто представить себе, рассмотрев такой пример.

Предположим, что трехстержневая система из идеально упруго-пластического материала (рис. 13.6) нагружена силой  $P$  так, как показано на рис. 13.6. Допустим, что площади сечений и материал всех стержней одинаковы. Подсчитаем предельное значение силы  $P = P_T$  при расчете по допускаемым напряжениям.

Данная система один раз статически неопределима. Раскрывая статическую неопределимость, получаем (см. разд. 2.21)

$$N_1 = N_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad N_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

При возрастании силы  $P$  напряжения в стержне 2 быстрее достигнут предела текучести, так как  $N_2 \geq N_1$ , и материал среднего стержня потечет раньше, чем боковых.

Полагая  $\sigma_2 = N_2/F = \sigma_T$ , находим предельную нагрузку при расчете по допускаемым напряжениям:  $P_T = \sigma_T F (1 + 2 \cos^3 \alpha)$ .

Однако достижение нагрузкой  $P$  значения  $P_T$  не означает, что несущая способность всей конструкции уже исчерпана, так как крайние стержни, оставаясь упругими, препятствуют развитию пластической деформации среднего стержня.

Конструкция способна воспринять большую нагрузку, но при дальнейшем возрастании силы  $P$  напряжения во втором стержне, как следует из диаграммы для идеально упругопластического материала, останутся равными  $\sigma_T$  и будут увеличиваться напряжения только в первом и третьем стержнях, пока не достигнут значений  $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_T$ . С этого момента дальнейшее возрастание нагрузки  $P$  невозможно, так как и без ее увеличения перемещения точек конструкции будут при идеальной пластичности материала неограниченно возрастать.

Значение нагрузки, при которой перемещения точек конструкции возрастают без увеличения нагрузки, т. е. система превращается в геометрически изменяемую, называется нагрузкой, исчерпывающей несущую способность конструкции.

Полагая нормальные силы в каждом из трех стержней равными  $\sigma_T F$ , находим из уравнений равновесия узла  $A$  нагрузку  $P_{пр} = \sigma_T F (1 + 2 \cos \alpha)$ , исчерпывающую несущую способность рассматриваемой фермы.

При всех значениях  $\alpha$ , не равных 0 и 90°, имеем  $P_{пр} > P_T$ . Так, при  $\alpha = 60^\circ$  расчет по нагрузкам, исчерпывающим несущую способность, в рассматриваемой задаче дает  $P_{пр}$  на 60 % больше, чем расчет предельной нагрузки  $P_T$  по методу допускаемых напряжений.

При одинаковом запасе прочности допускаемые нагрузки  $P_{пр}/n$ ,  $P_T/n$  будут находиться в таких же соотношениях, что и предельные нагрузки. Расхождение между  $P_{пр}$  и  $P_T$  не всегда бывает столь значительным, но всегда в сторону

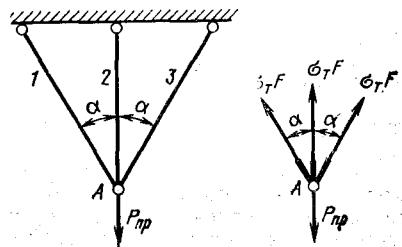


Рис. 13.6

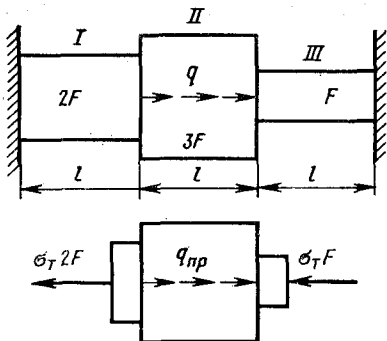


Рис. 13.7

действительная разрушающая нагрузка будет больше, чем  $P_{пр}$ . Однако при этом деформации конструкции, как правило, возрастают столь значительно, что дальнейшее использование ее становится практически нецелесообразным. Поэтому нагрузку, исчерпывающую несущую способность конструкции, можно рассматривать как разрушающую.

**Пример.** Определить нагрузку, исчерпывающую несущую способность бруса, представленного на рис. 13.7.

**Решение.** Исследуем поведение бруса при увеличении нагрузки. При малых нагрузках брус будет испытывать только упругие деформации и для определения напряжений в сечениях бруса потребовалось бы раскрыть статическую неопределенность системы.

При увеличении  $q$  материал первого или третьего участка перейдет в состояние текучести. Однако для исчерпания несущей способности бруса совершенно недостаточно возникновения текучести только на одном из этих участков. Только тогда, когда интенсивность  $q$  достигает величины, при которой текучесть охватит оба крайних участка, средняя часть бруса станет свободно перемещаться вправо и несущая способность бруса будет исчерпана. Значение предельной нагрузки  $q_{пр}$  находится из условия предельного равновесия среднего участка бруса:

$$q_{пр}l - \sigma_T F - \sigma_T \cdot 2F = 0;$$

$$q_{пр} = \frac{3\sigma_T F}{l}.$$

Рассмотренные в этом разделе примеры в пределах упругих деформаций являются один раз статически неопределимыми. Объясняется это тем, что те связи, в которых материал переходит в пластическое состояние, как бы выключаются и тем самым количество избыточных связей уменьшается.

Возможны два способа определения предельной нагрузки — кинематической и статической.

Согласно кинематическому способу предельной является та наименьшая нагрузка, при которой деформации конструкции начинают расти при постоянной нагрузке (конструкция или ее часть превращается в механизм).

В рассмотренных выше примерах схема пластического разрушения конструкции очевидна и это позволило сразу определить предельную нагрузку. Если возможны различные варианты превращения конструкции в механизм, то необходимо рассмотреть все эти варианты и для каждого составить уравнения предельного равновесия. Действительной схемой исчерпания несущей способности конструкции будет та, которая соответствует наименьшему значению нагрузки.

большой экономичности расчета по нагрузкам, исчерпывающим несущую способность конструкции.

Часто нагрузка, исчерпывающая несущую способность конструкции, считается разрушающей. Но это справедливо при неограниченной длине площадки текучести. Если материал обладает упрочнением, то при достижении деформациями значения, соответствующего началу упрочнения, для дальнейшего деформирования элемента потребуется увеличение нагрузки. Поэтому

Уравнения предельного равновесия могут быть составлены в виде уравнений равновесия или в виде уравнений работ.

Статический способ основан на определении наибольшей нагрузки, при которой еще возможно статическое равновесие конструкции. Для этого надо рассмотреть все возможные варианты распределения внутренних сил в конструкции, удовлетворяющих уравнениям равновесия и условиям ограниченности усилий ( $\sigma \leq \sigma_T$ ,  $\tau \leq \tau_T$ ). Определить для каждого варианта предельную нагрузку. Наибольшая из найденных нагрузок и будет предельной для данной конструкции.

Таким образом, в статическом методе исследуются все возможные варианты распределения внутренних усилий в элементах конструкции, а в кинематическом — все возможные варианты превращения конструкции в механизм. Последние представить легче, чем распределение усилий и в этом смысле кинематический способ имеет преимущества перед статическим.

### 13.4. РАСЧЕТ БАЛОК ПО НАГРУЗКАМ, ИСЧЕРПЫВАЮЩИМ НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ

Рассмотрим балку, лежащую на двух опорах и нагруженную в середине пролета сосредоточенной силой  $P$  (рис. 13.8). Предположим, что поперечные сечения балки имеют две оси симметрии, одна из которых расположена в плоскости действия нагрузки.

При определении предельного значения силы  $P$  будем пренебрегать, как и при расчете по допускаемым напряжениям, касательными напряжениями в поперечных сечениях балки.

При расчете по допускаемым напряжениям предельным будет такое значение силы  $P = P_T$ , при котором в наружных волокнах наиболее нагруженного сечения балки нормальные напряжения достигнут предела текучести. Предельное значение изгибающего момента при расчете по допускаемым напряжениям  $M_T = \sigma_T W_z$ . Из этого условия находится предельное значение нагрузки для рассматриваемой балки:  $P_T = 4\sigma_T W_z / l$ . Однако при  $P = P_T$  несущая способность балки не исчерпана. При дальнейшем увеличении нагрузки напряжения в крайних волокнах согласно диаграмме идеально упругопластического тела остаются постоянными и равными  $\sigma_T$ , несмотря на рост деформаций, а растут напряжения в соседних точках, пока они не достигнут величины  $\sigma_T$  (предполагается, что пределы текучести при растяжении и сжатии равны по величине).

В результате в балке появятся две пластические зоны, как показано на рис. 13.8, которые по мере роста нагрузки будут распространяться как по направлению к нейтральной линии сечения, так и в обе стороны от места их возникновения.

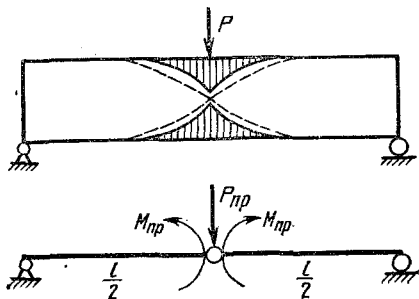


Рис. 13.8

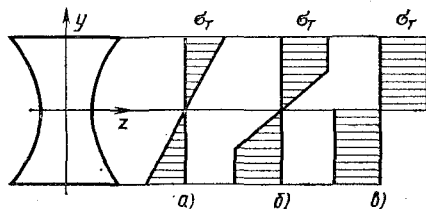


Рис. 13.9

Состояние балки, при котором часть материала находится в пластическом, а другая в упругом состоянии, называется упругопластическим (рис. 13.9, а, б, в).

В упругопластическом состоянии прогибы балки определяются деформациями ее упругой части.

С ростом нагрузки упругое ядро будет постепенно уменьшаться, а пластические зоны будут развигаться и в конце концов сольются в одну пластическую область.

При идеальной пластичности материала дальнейший рост напряжений в пластической области невозможен, но деформации в этой области могут неограниченно возрастать при постоянных напряжениях. В результате две упруго деформированные части балки начнут поворачиваться друг относительно друга вокруг центра пластической области без дальнейшего роста нагрузки на балку. Такое состояние балки можно отождествлять с появлением в сечении, где достигнута полная текучесть, шарнира (см. рис. 13.8) с постоянным моментом трения  $M_{пр}$ , равным по величине и направлению изгибающему моменту в этом сечении:

$$M_{пр} = 2 \int_{F/2} \sigma_T y dF = 2\sigma_T S_z, \quad (13.6)$$

где  $S_z$  — статический момент половины площади сечения относительно его нейтральной оси. Такой шарнир называется пластическим шарниром.

Эпюра напряжений в сечении, соответствующая образованию в нем пластического шарнира, представлена на рис. 13.9, в. Напряжения — функции непрерывные и не могут изменяться скачкообразно. Поэтому вблизи нейтральной линии должна существовать хотя бы небольшая упругая зона. Однако при определении величины предельного момента  $M_{пр}$  влиянием этой зоны можно пренебречь.

Выражение (13.6) записано в предположении, что сечение имеет две оси симметрии, одна из которых обязательно должна совпадать с плоскостью действия нагрузки.

Если сечение не имеет горизонтальной оси симметрии, то при распространении текучести по сечению нейтральная линия сместится из центра тяжести и расположится так, что разделит площадь сечения на две равные части.

Действительно, при поперечном изгибе нормальная сила  $N = 0$ . Поэтому сумма интегралов  $\int_{F_p} \sigma_T dF + \int_{F_{сж}} (-\sigma_T) dF = 0$  по растянутой  $F_p$  и сжатой  $F_{сж}$  частям сечения должна быть равна нулю. Отсюда и следует  $F_p = F_{сж}$ .

В случае несимметричного сечения предельный момент надо вычислять по формуле

$$M_{пр} = \int_{F_p} \sigma_T y dF + \int_{F_{сж}} \sigma_T y dF \text{ или } M_{пр} = \sigma_T (S_z^p + S_z^{сж}). \quad (13.7)$$

При образовании пластического шарнира двухопорная балка превращается в механизм, т. е. становится геометрически изменяемой системой, что свидетельствует об исчерпании несущей способности данной балки.

Нагрузка, исчерпывающая несущую способность балки, находится из условия предельного равновесия части балки, расположенной по одну сторону от пластического шарнира.

Для рассматриваемой балки (см. рис. 13.8) имеем  $M_{пр} = P_{пр}l/4$ .

В случае прямоугольного сечения

$$M_{пр} = 2\sigma_T S_z = \sigma_T \frac{bh^2}{4}. \quad (13.8)$$

Таким образом,  $P_{пр} = \sigma_T bh^2/l$ .

Предельная нагрузка  $P_T$  при расчете этой же балки по напряжениям в опасных точках в случае прямоугольного сечения

$$P_T = 4\sigma_T W_z/l = \frac{2}{3} \sigma_T \frac{bh^2}{l}.$$

Если принять одинаковый запас прочности, то расчет по нагрузкам, исчерпывающим несущую способность, дает в 1,5 раза большую допускаемую нагрузку, чем расчет по напряжениям в опасной точке.

### 13.5. НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК И РАМ

В статически определимой стержневой системе нет «лишних» связей, и поэтому образование хотя бы одного пластического шарнира делает систему геометрически изменяемой.

Статически неопределимая система имеет избыточные связи, поэтому для превращения ее в геометрически изменяемую при  $n$  «лишних» связях необходимо, чтобы образовалось  $n + 1$  пластических шарниров.

Однако иногда при значительно меньшем числе шарниров подвижной становится часть системы, что также надо рассматривать как исчерпание несущей способности всей системы. Например, в балке, представленной на рис. 13.10, наибольший изгибающий момент действует в сечении над катковой опорой и именно здесь образуется первый пластический шарнир. После этого консоль превращается в механизм, а нагрузка, соответствующая образованию данного шарнира, является предельной для всей балки.

Рассмотрим несколько примеров определения нагрузки, исчерпывающей несущую способность статически неопределимых балок и рам, при условии, что материал обладает идеальной пластичностью.

При нагружении балки, представленной на рис. 13.11, наибольший изгибающий момент действует в сечении заделки. Именно здесь и возникает первый пластический шарнир, но несущая способность балки при этом не будет исчерпана. При дальнейшем увеличении силы  $P$  момент в заделке расти не будет.

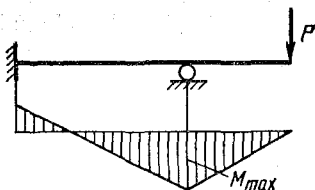


Рис. 13.10

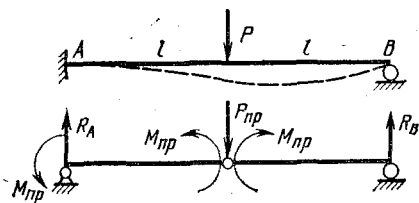


Рис. 13.11

Несущая способность балки будет исчерпана тогда, когда образуется пластический шарнир в среднем наиболее нагруженном сечении пролета балки (см. рис. 13.11).

Направления моментов  $M_{пр}$  выбраны в соответствии с характером упругой линии балки, показанной на рис. 13.11 пунктиром.

Из уравнения предельного равновесия правого участка балки  $M_{пр} - R_B l = 0$  определяем опорную реакцию  $R_B = M_{пр}/l$ , а составляя далее уравнение равновесия  $\sum m_A = 0$  всей балки

$$- M_{пр} + P_{пр} l - \frac{M_{пр}}{l} 2l = 0,$$

находим значение силы  $P_{пр}$ , исчерпывающей несущую способность балки,  $P_{пр} = 3M_{пр}/l$ .

Если бы на такую же балку действовали две равные сосредоточенные силы  $P$  (рис. 13.12, а), то потребовалось бы провести дополнительное исследование. Надо было бы рассмотреть, какой из двух вариантов — образование пластических шарниров в сечениях А и С (рис. 13.12, б) или А и D (рис. 13.12, в) — дает наименьшее предельное значение  $P_{пр}$  нагрузки.

Для схемы 13.12, б:

$$R_A = \frac{2M_{пр}}{l}; \quad P_{пр} l + P_{пр} \cdot 2l + M_{пр} - \frac{2M_{пр}}{l} \cdot 3l = 0;$$

$$P_{пр} = \frac{5}{3} \frac{M_{пр}}{l}.$$

Для схемы 13.12, в:

$$R_B = \frac{M_{пр}}{l}; \quad - M_{пр} = \frac{M_{пр}}{l} \cdot 3l - P_{пр} \cdot 2l - P_{пр} l; \quad P_{пр} = \frac{4}{3} \frac{M_{пр}}{l}.$$

Таким образом, реализуется схема 13.12, б с образованием пластических шарниров в сечениях А и D, а предельная нагрузка для балки  $P_{пр} = \frac{4}{3} \frac{M_{пр}}{l}$ .

Некоторые особенности встречаются в случае нагружения балки распределенной нагрузкой. Для иллюстрации рассмотрим трехопорную симметричную балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$  (рис. 13.13).

Эпюра изгибающих моментов при упругом состоянии балки имеет вид, представленный на рис. 13.13. Наибольший изгибающий мо-



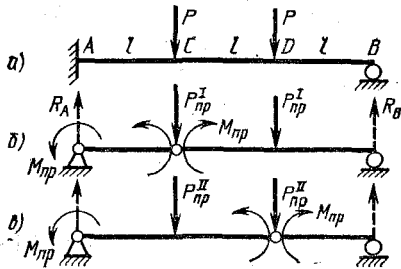


Рис. 13.12

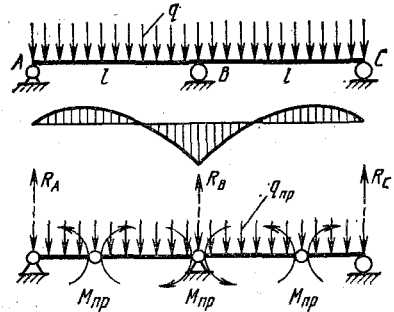


Рис. 13.13

мент  $M_{\max}$  действует в сечении над средней опорой, и в этом сечении образуется первый пластический шарнир. При дальнейшем возрастании интенсивности нагрузки  $q$  каждый пролет работает как изолированная балка на двух шарнирных опорах.

Это вызывает некоторое изменение в эпюре изгибающих моментов в пределах пролета и в положении сечения действия максимального момента на этом пролете; оно несколько сместится и станет ближе к середине пролета, чем при упругом состоянии балки. Поэтому положение двух других пластических шарниров, образование которых превращает балку в геометрически изменяемую, заранее неизвестно. Их положение можно найти из условия равенства нулю перерезывающей силы в этих сечениях (см. рис. 13.13):

$$Q = R_A - qx_0 = 0; \quad R_A = qx_0.$$

Записывая далее выражения для изгибающих моментов в сечениях, где образовались пластические шарниры,

$$M_{\text{пр}} = R_A x_0 - q_{\text{пр}} \frac{x_0^2}{2} = q_{\text{пр}} \frac{x_0^2}{2};$$

$$-M_{\text{пр}} = R_A l - q_{\text{пр}} \frac{l^2}{2} = q_{\text{пр}} l x_0 - q_{\text{пр}} \frac{l^2}{2},$$

получаем уравнения для определения величин  $q_{\text{пр}}$ ,  $x_0$  и  $R_A$ .

Решая эту систему уравнений, находим

$$q_{\text{пр}} = \frac{2M_{\text{пр}}}{l^2(\sqrt{2}-1)^2}; \quad R_A = \frac{2M_{\text{пр}}}{l(\sqrt{2}-1)};$$

$$x_0 = l(\sqrt{2}-1) = 0,41l.$$

Допускаемая нагрузка на балку определяется как часть предельной:  $[q] = q_{\text{пр}}/n$ , где  $n$  — запас прочности.

Аналогично исследуется несущая способность статически неопределимых рам.

Например, в раме, представленной на рис. 13.14, наибольшие моменты действуют в сечениях  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  (см. разд. 8.5). Сначала пластические шарниры возникнут в сечениях  $A$  и  $B$ , а затем в  $C$  и  $D$

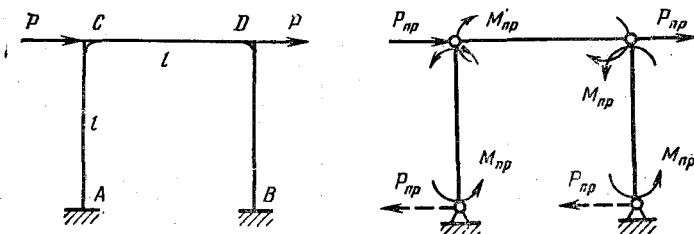


Рис. 13.14

и после этого будет исчерпана несущая способность рамы. Определяя опорные реакции и составляя уравнения равновесия  $\sum m_C = 0$  для левой стойки, находим предельную нагрузку для рамы  $P_{пр} = 2M_{пр}/l$ .

Выражения  $M_{пр}$  зависят, как известно, от формы сечения и определяются по формулам (13.9) или (13.7).

### 13.6. ЧИСТЫЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА

Предположим для простоты, что поперечное сечение бруса имеет две оси симметрии и нагрузка действует в плоскости симметрии бруса.

Определим зависимость радиуса  $\rho$  кривизны изогнутой оси бруса и напряжений в точках его поперечного сечения от изгибающего момента  $M_z$  при наличии пластических деформаций.

Эксперименты показывают, что при чистом изгибе бруса как в пределах, так и за пределами упругости справедлива гипотеза плоских сечений, т. е. деформации бруса  $\epsilon$  по ширине сечения постоянны, а по высоте сечения изменяются по линейному закону

$$\epsilon(y) = \frac{y}{\rho}. \quad (13.9)$$

Максимальные удлинения  $\epsilon_{\max}$  испытывают наиболее удаленные от нейтрального слоя волокна, причем  $\epsilon_{\max} = h/(2\rho)$ .

Допустим далее, что и за пределами упругости давление между волокнами отсутствует и каждое продольное волокно находится в состоянии одноосного растяжения (сжатия). В этом случае связь между напряжениями и деформациями для каждого волокна полностью определяется диаграммой растяжения материала бруса. Примем, что диаграмма сжатия подобна диаграмме растяжения.

Рассмотрим последовательность определения напряжений и деформаций в брус при изгибе за пределами упругости, если диаграмма растяжения задана графически.

Для этого изобразим на одном чертеже диаграмму растяжения и поперечное сечение так, как показано на рис. 13.15 и проведем горизонтальные линии, соответствующие крайним волокнам сечения и его нейтральной линии.

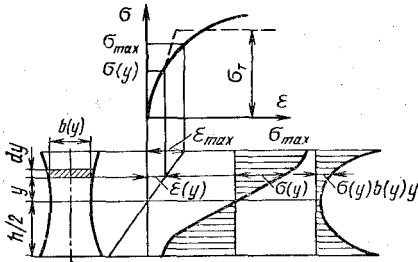


Рис. 13.15

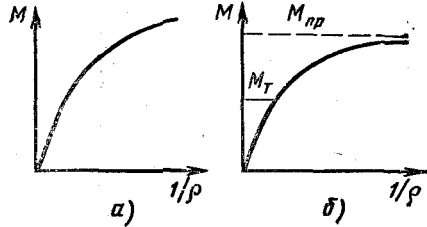


Рис. 13.16

Зададимся величиной  $\epsilon_{\max}$  и построим эюру  $\epsilon(y) = y/\rho$  в масштабе, принятом для  $\epsilon$  при построении диаграммы растяжения (рис. 13.15).

По эюре  $\epsilon$  находим  $\epsilon(y)$ , а затем по диаграмме растяжения определяем соответствующее каждому значению  $\epsilon(y)$  напряжение  $\sigma(y)$ , и по этим данным строим эюру напряжений (см. рис. 13.15).

Определим теперь величину изгибающего момента, соответствующего заданной величине  $\epsilon_{\max}$ : 
$$M_z = \int_F y \sigma dF.$$

Выделим в сечении полоску шириной  $b(y)$  и высотой  $dy$ .

Тогда  $dF = b(y) dy$ ; 
$$M_z = 2 \int_0^{h/2} y \sigma(y) b(y) dy.$$

Представим выражение для  $M_z$  в виде 
$$M_z = 2 \int_0^{h/2} B(y) dy = 2F_B,$$
 где  $B(y) = \sigma(y) b(y) y$ , а  $F_B$  — площадь половины эюры величин  $B(y)$  (см. рис. 13.15).

Таким образом находится величина изгибающего момента, соответствующая заданному значению  $\epsilon_{\max}$  и кривизны изогнутой оси 
$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\epsilon_{\max}}{h}.$$

Задаваясь рядом значений  $\epsilon_{\max}$ , или, что то же, рядом значений кривизны  $1/\rho$ , строим график зависимости  $M_z = f(1/\rho)$ . Этот график имеет вид, представленный на рис. 13.16, а.

В случае идеально упругопластического материала зависимость  $M_z$  от  $1/\rho$  имеет горизонтальную асимптоту, соответствующую предельному моменту  $M_{пр}$  в пластическом шарнире (рис. 13.16, б).

Имея кривую  $M_z = f(1/\rho)$  для заданного сечения и материала бадки, можно для любого значения  $M_z$  графически найти соответствующее ему значение кривизны  $1/\rho$ , определить  $\epsilon$  и построить эюру  $\sigma$ .

### 13.7. РАЗГРУЗКА И ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Если разгрузить конструкцию, в которой хотя бы часть деталей испытала пластические деформации, то она не примет свою первоначальную форму и размеры, так как в испытавших пластиче-

ское деформирование элементов исчезнут только упругие деформации, и размеры их будут отличаться от первоначальных. Стремление одних элементов конструкции полностью восстановить свои первоначальные размеры, а других — сохранить новые размеры в условиях, когда эти элементы связаны между собой, вызовет при разгрузке появление в элементах конструкции напряжений, называемых остаточными.

Аналогичное явление имеет место и при разгрузке тела, одни волокна которого испытали упругие, а другие пластические деформации.

Остаточные напряжения можно определить путем вычитания из напряжений  $\sigma$ , возникающих при нагружении, так называемых разгрузочных напряжений:

$$\sigma_{\text{ост}} = \sigma - \sigma_{\text{разгр}} \quad (13.10)$$

При разгрузке зависимость между напряжениями и деформациями подчиняется линейному закону

$$\sigma_{\text{разгр}} = E \varepsilon_{\text{разгр}}.$$

Следовательно, разгрузочные напряжения можно представить себе как напряжения, которые возникли бы в конструкции от заданной нагрузки при условии, что все элементы конструкции выполнены из идеально упругого материала.

Остаточные внутренние силы действуют в конструкции при отсутствии внешней нагрузки и поэтому должны быть самоуравновешенными.

При повторном нагружении конструкции она вначале будет деформироваться упруго до тех пор, пока внешние силы повторного нагружения не станут равными внешним силам первичного нагружения.

Определим остаточные напряжения при разгрузке стержневой системы (см. рис. 13.6).

Если при нагружении системы силой  $P = P_{\text{пр}}$  во всех трех стержнях возникают пластические деформации, а материал обладает свойством идеальной пластичности, то усилия во всех стержнях будут одинаковы:  $N_1 = N_2 = N_3 = \sigma_T F$ .

Если бы материал обладал идеальной упругостью, то при той же нагрузке  $P_{\text{пр}}$  усилия в стержнях были бы (см. разд. 13.3)

$$N_1 = N_3 = \frac{P_{\text{пр}} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad N_2 = \frac{P_{\text{пр}}}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

Таким образом, остаточные усилия в стержнях будут

$$N_1^{\text{ост}} = N_3^{\text{ост}} = \sigma_T F - \frac{P_{\text{пр}} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha};$$

$$N_2^{\text{ост}} = \sigma_T F - \frac{P_{\text{пр}}}{1 + 2 \cos^3 \alpha},$$

причем  $N_2^{\text{ост}} < 0$ , поскольку нормальная сила во втором стержне при упругом материале растет пропорционально росту силы  $P$ , тогда как при идеальной пластичности рост  $N_2$  прекращается при достижении силой  $P$  значения  $P_T$ . Поэтому  $\sigma_T F < \frac{P_{\text{пр}}}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$ .

Аналогично определяются остаточные усилия в стержнях, если при наибольшем значении нагрузки  $P = P_T$  пластические деформации возникают только во втором стержне. В этом случае

$$N_2 = \sigma_T F; N_1 = N_3 = \frac{P_T - \sigma_T F}{2 \cos \alpha};$$

$$N_2^{\text{ост}} = \sigma_T F - \frac{P_T}{1 + 2 \cos^3 \alpha} < 0;$$

$$N_1^{\text{ост}} = N_3^{\text{ост}} = \frac{P_T - \sigma_T F}{2 \cos \alpha} - \frac{P_T \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} > 0.$$

Легко проверить, что при первой и второй системах остаточных усилий в стержнях узел  $A$  находится в состоянии равновесия. Действительно, вырезая узел  $A$  и проектируя действующие на него силы на вертикальную ось, получаем

$$\begin{aligned} 2 \left[ \sigma_T F - \frac{P_{\text{пр}} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \right] \cos \alpha + \left[ \sigma_T F - \frac{P_{\text{пр}}}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \right] &= \\ = \sigma_T F (1 + 2 \cos \alpha) - P_{\text{пр}} &= 0, \end{aligned}$$

так как

$$P_{\text{пр}} = \sigma_T F (1 + 2 \cos \alpha).$$

Покажем теперь, как могут быть определены остаточные напряжения при упругопластическом изгибе бруса. Как было показано в разд. 13.6 при упругопластическом изгибе бруса, когда  $M_z > M_T$ , распределение напряжений по высоте сечения имеет нелинейный характер.

В случае идеально упругого материала при том же значении изгибающего момента  $M_z$  напряжения в крайних волокнах будут больше, чем при упругопластическом состоянии бруса, а распределение напряжений по высоте сечения будет линейным:

$$\sigma_{\text{разгр}} = \frac{M_z}{J_z} y.$$

Эпюры  $\sigma$  и  $\sigma_{\text{разгр}}$  приведены на рис. 13.17.

Вычитая графически из ординат эпюры  $\sigma$  ординаты эпюры  $\sigma_{\text{разгр}}$ ,

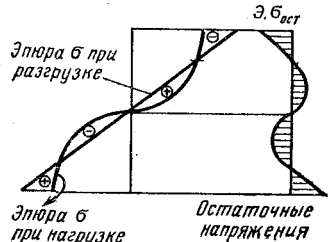


Рис. 13.17

получаем эпюру остаточных напряжений  $\sigma_{ост}$ . Эта эпюра будет иметь вид, показанный на рис. 13.17. Знаком  $\oplus$  — отмечены растягивающие остаточные напряжения, а  $\ominus$  — сжимающие.

Система остаточных сил должна быть самоуравновешенной, а это означает, что момент, создаваемый силами, действующими в верхних и нижних волокнах, уравнивается моментом сил, действующих во внутренних волокнах.

Остаточные напряжения возникают и при холодной прокатке листов. Именно поэтому коробятся толстые плиты при удалении поверхностного слоя прокатанной плиты только с одной стороны.

Определение остаточных напряжений — чрезвычайно трудная задача, решение которой выходит далеко за рамки курса сопротивления материалов.

**РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ  
ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ**

**14.1. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ**

В технике часто встречаются различного рода баки, котлы, газгольдеры и аналогичные им конструкции, представляющие собой тонкостенные оболочки симметричной формы, находящиеся под действием внутреннего или внешнего нормального давления.

Напомним (см. разд. 1.4), что оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми — толщина оболочки, — мало по сравнению с любыми другими размерами тела. Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной поверхностью.

Оболочка, срединная поверхность которой представляет собой поверхность вращения, называется оболочкой вращения. Сечение такой оболочки плоскостью, содержащей ее ось симметрии, называется меридиональным. Сечения круговой конической поверхностью, вершина которой находится на оси симметрии, а образующие нормальны к срединной поверхности оболочки, называются кольцевыми (рис. 14.1). Задача определения напряженно-деформированного состояния оболочек в общем случае чрезвычайно сложна. Ограничимся рассмотрением симметрично нагруженных внешним или внутренним давлением тонкостенных оболочек вращения, толщины  $\delta$  кольцевых сечений которых постоянны.

Условие симметрии относительно одной и той же оси формы оболочки и нагрузки и тонкостенность значительно облегчают решение задачи определения напряжений в стенке оболочки. Известно (см. разд. 8.5), что в сечениях по оси симметрии симметричной рамы перерезывающие силы, а следовательно и касательные напряжения, равны нулю. Наличие этих сил противоречило бы симметричному характеру деформации такой рамы. По этой же причине должны быть равны нулю касательные напряжения в меридиональных сечениях рассматриваемых осесимметричных оболочек. Но тогда, по свойству парности  $\tau$ , должны отсутствовать касательные напряжения и в кольцевых сечениях, так как они ортогональны меридиональ-

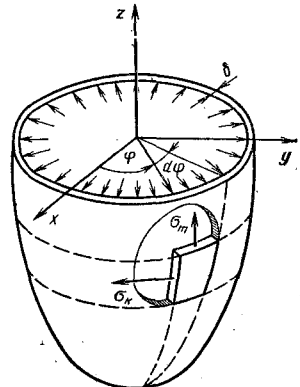


Рис. 14.1

ным сечениям. Из условия симметрии также следует, что в симметрично нагруженной оболочке вращения внутренние силы распределены симметрично относительно ее оси, т. е. не зависят от координаты  $\varphi$ , определяющей положение меридионального сечения (рис. 14.1).

Если оболочка не имеет резких изменений толщины и кривизны, жестких закреплений и если она не нагружена сосредоточенными силами и моментами, то можно считать, что по толщине ее стенки нормальные напряжения распределены равномерно.

Теория тонкостенных оболочек, в основу которой положено предположение о равномерном распределении нормальных напряжений по толщине стенки, называется безмоментной.

В безмоментных оболочках вращения, находящихся под внутренним или внешним давлением, нормальные напряжения в меридиональных и кольцевых сечениях могут быть определены из одних лишь уравнений равновесия.

Существуют силы давления и между слоями оболочки, параллельными ее срединной поверхности. Однако эти силы пренебрежимо малы по сравнению с нормальными силами в меридиональных и кольцевых сечениях и поэтому в расчетах тонкостенных оболочек они не учитываются. Аналогичное допущение — отсутствие давления между продольными волокнами принимается, как известно, в теории изгиба бруса.

#### 14.2. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТА СИММЕТРИЧНОЙ БЕЗМОМЕНТНОЙ ОБОЛОЧКИ

Выделим из симметричной оболочки двумя меридиональными и двумя коническими сечениями элемент с размерами  $ds_\kappa$  и  $ds_m$  (рис. 14.2).

Обозначим через  $\rho_m$  радиус кривизны дуги меридионального сечения, а через  $\rho_\kappa$  — радиус кривизны кольцевого сечения. Назовем нормальные напряжения  $\sigma_m$  в кольцевом сечении меридиональными, поскольку они направлены по касательной

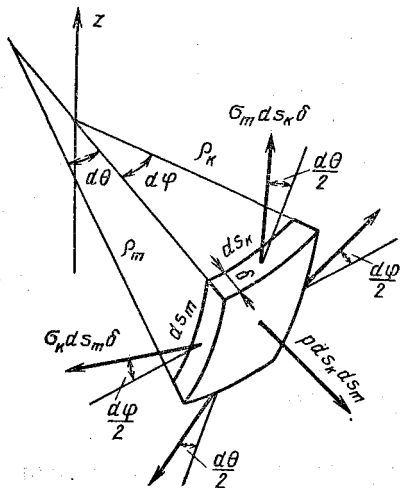


Рис. 14.2

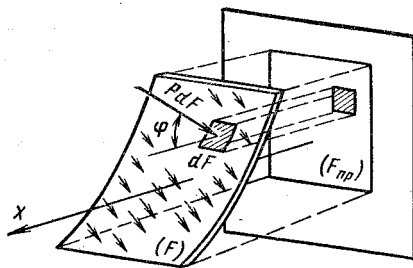


Рис. 14.3



к меридиану, а напряжение  $\sigma_h$  в меридиональном сечении — кольцевыми. Составим уравнение равновесия выделенного элемента (рис. 14.2). Проектируя все внешние силы  $\sigma_m \delta ds_h$ ,  $\sigma_h \delta ds_m$  и  $P ds_h ds_m$  на нормаль к элементу, получим

$$p ds_h ds_m - 2\delta\sigma_m ds_h \sin \frac{d\theta}{2} - 2\delta\sigma_h ds_m \sin \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что  $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$ ;  $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$  и  $d\varphi = \frac{ds_h}{\rho_h}$ ;  $d\theta = \frac{ds_m}{\rho_m}$ , получаем

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_h}{\rho_h} = \frac{P}{\delta}. \quad (14.1)$$

Это равенство называется уравнением Лапласа.

### 14.3. ТЕОРЕМА О ДАВЛЕНИИ НА КРИВОЛИНЕЙНУЮ СТЕНКУ

Предположим, что требуется найти проекцию на некоторую ось  $x$  равнодействующей равномерного нормального давления  $P$ , действующего на некоторую криволинейную поверхность  $F$ .

Искомая проекция будет, очевидно, равна пределу суммы проекций на ту же ось элементарных сил давления  $PdF$ , приходящихся на площадки  $dF$  поверхности (рис. 14.3), т. е.

$$R_x = \int_F P \cos \alpha dF = P \int_F \cos \alpha dF.$$

Здесь  $\alpha$  — угол между нормалью к площадке  $dF$  и осью  $x$ , а  $dF \cos \alpha$  — площадь проекции площадки  $dF$  на плоскость, нормальную к оси  $x$ .

Следовательно,

$$R_x = P \int_F \cos \alpha dF = PF_{пр}, \quad (14.2)$$

где  $F_{пр}$  — площадь проекции поверхности  $F$  на плоскость, нормальную к оси  $x$ .

Таким образом, доказано, что проекция на какую-либо ось равнодействующей сил нормального давления на криволинейную стенку равна произведению величины силы давления  $P$  на площадь проекции этой стенки на плоскость, нормальную к данной оси.

### 14.4. РАСЧЕТ СФЕРИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА НОРМАЛЬНОЕ ДАВЛЕНИЕ ПО БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

Определим расчетные напряжения по одной из теорий прочности для находящихся под внутренним давлением  $p$  сферических и цилиндрических сосудов постоянной толщины  $\delta$ .

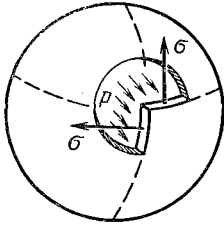


Рис. 14.4

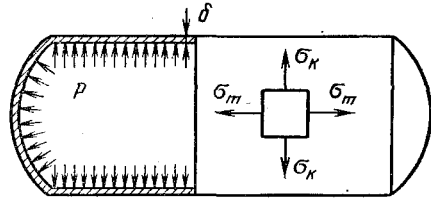


Рис. 14.5

**Сферическая оболочка** (рис. 14.4). Вследствие центральной симметрии оболочки и нагрузки имеем  $\sigma_m = \sigma_h = \sigma$ , а  $\rho_m = \rho_h = d/2$ , где  $d$  — диаметр сферы. Для этого случая формула Лапласа (14.1) дает

$$\sigma = \sigma_m = \sigma_h = \frac{Pd}{4\delta}. \quad (14.3)$$

Третье главное напряжение в связи с допущением об отсутствии давления между слоями оболочки равно нулю, т. е.

$\sigma_3 = 0$ , а  $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{Pd}{4\delta}$ . Для данного плоского напряженного состояния эквивалентное напряжение по третьей теории равно

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{Pd}{4\delta}. \quad (14.4)$$

Условие прочности сферической оболочки запишется так:

$$\frac{Pd}{4\delta} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}. \quad (14.5)$$

**Цилиндрическая оболочка** (рис. 14.5). Подставляя в (14.1)  $\rho_m = \infty$  и  $\rho_h = d/2$ , получим

$$\frac{\sigma_h}{d/2} = \frac{P}{\delta}.$$

Следовательно, кольцевое напряжение в цилиндре

$$\sigma_h = \frac{Pd}{2\delta} \quad (14.6)$$

в два раза больше напряжения в сферическом сосуде того же диаметра.

Для определения  $\sigma_m$  рассмотрим равновесие отсеченной части цилиндра. Учитывая, что проекция на ось  $x$  равнодействующей сил давления на днище согласно (14.2) равна  $P\pi d^2/4$  и от формы днища не зависит, получим

$$\sigma_m \pi d \delta = P\pi d^2/4.$$

Отсюда

$$\sigma_m = \frac{Pd}{4\delta}, \quad (14.7)$$

т. е. окружное напряжение в цилиндре в два раза больше меридионального. Следовательно, каждый элемент стенки цилиндрической

части находится в плоском напряженном состоянии с главными напряжениями

$$\sigma_1 = \frac{Pd}{2\delta}; \quad \sigma_2 = \frac{Pd}{4\delta}; \quad \sigma_3 = 0.$$

Условие прочности по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{Pd}{2\delta} \leq \frac{\sigma_T}{n}, \quad (14.8)$$

а по энергетической теории прочности

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эКВ}} &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left(\frac{Pd}{2\delta} - \frac{Pd}{4\delta}\right)^2 + \left(\frac{Pd}{4\delta}\right)^2 + \left(\frac{Pd}{2\delta}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{Pd}{\delta} \leq \frac{\sigma_T}{n}. \end{aligned} \quad (14.9)$$

**РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ,  
ДВИЖУЩИХСЯ С УСКОРЕНИЕМ**

**15.1. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖЕНИЕМ.  
СИЛЫ ИНЕРЦИИ**

Во всех предыдущих разделах мы предполагали, что нагрузки прикладываются к брусу статически, а сам брус неподвижен. Между тем многие детали машин по условиям их работы находятся в состоянии неравномерного движения. Такие детали испытывают дополнительные нагрузки, вызванные их неравномерным движением.

Для определения усилий, возникающих в движущемся теле или системе тел, наиболее удобно пользоваться принципом Даламбера. Применительно к рассматриваемым далее задачам этот принцип можно сформулировать следующим образом.

Если движущееся тело (систему тел) в какой-то момент времени представить себе находящимся в покое, но помимо сил, производящих движение, приложить к нему силы инерции, то в таком покоящемся теле будут существовать такие же внутренние усилия, напряжения и деформации, какие имеют место во время его движения. Например, при вращении груза массой  $Q$ , прикрепленного к проволоке длиной  $l$ , груз будет двигаться вокруг оси вращения с центростремительным ускорением  $j = v^2/l = \omega^2 l$ , вследствие чего в проволоке возникает растягивающее усилие.

Сила инерции груза равна произведению массы груза на ускорение его движения и направлена в сторону, противоположную направлению ускорения (рис. 15.1):

$$P = Q \frac{v^2}{l} = Q\omega^2 l, \quad (15.1)$$

где  $v$  — окружная,  $\omega = 2\pi n/60$  — угловая скорость движения груза,  $n$  — частота вращения груза (об/мин),  $l$  — радиус вращения (м), а  $Q$  — масса (кг).

Эта сила и вызывает равное ей усилие в проволоке. Сила натяжения проволоки — это вполне реальная сила, появляющаяся вследствие движения груза  $Q$  с центростремительным ускорением  $j$ . Можно узнать, при какой частоте вращения проволока разорвется. Пусть масса груза  $Q = 0,1$  кг,  $l = 1$  м, диаметр проволоки  $d = 1$  мм, а предел прочности материала проволоки  $\sigma_b = 1500$  МПа.

Растягивающее напряжение в поперечном сечении проволоки

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{Q\omega^2 l \cdot 4}{\pi d^2} = \frac{Q\pi n^2 l \cdot 4}{900 d^2} = \frac{\pi Q l}{225 d^2} n^2 = \frac{3,14 \cdot 0,1 \cdot 1}{225 \cdot 1^2} n^2 \text{ МПа.}$$

Проволока разорвется при  $\sigma = \sigma_{в}$ . Из этого условия находим предельную частоту вращения

$$n = \sqrt{\frac{1500 \cdot 225 \cdot 10}{3,14}} = 1040 \text{ об/мин.}$$

Усилие, возникающее в проволоке в результате вращения груза, может быть определено на основании закона динамики неравномерно движущихся тел и без введения сил инерции. Действительно, центростремительное ускорение сообщается грузу проволокой. Следовательно, она действует на груз с центростремительной силой, равной произведению массы груза на его ускорение. Но по закону действия и противодействия такой же силой растягивается и сама проволока, поэтому усилие в ней

$$N = Q\omega^2 l.$$

Таким образом, опираясь только на законы динамики, можно определить усилия, напряжения и деформации в любой неравномерно движущейся детали. Однако для практических целей удобнее пользоваться принципом Даламбера, так как он позволяет свести задачи динамики к задачам статики, методы решения которых подробно разработаны.

В этой главе будут рассмотрены системы большой жесткости, ускорения частиц которых мало зависят от деформации этих систем и поэтому могут быть определены методами кинематики твердого тела, изложенными в курсе теоретической механики.

## 15.2. РАСЧЕТ ПОСТУПАТЕЛЬНО ДВИЖУЩИХСЯ СИСТЕМ

Определим напряжения в канате грузоподъемного механизма, к которому подвешен груз массой  $Q$  (рис. 15.2).

При равномерном подъеме с постоянной скоростью ускорение движения груза равно нулю, поэтому напряжения в канате такие же, как и в том случае, когда груз висит на канате в состоянии покоя, т. е.  $\sigma = Qg/F$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести.

Во время разгона движение груза неравномерно, и в канате появляются дополнительные напряжения, для определения которых мысленно остановим груз и приложим к нему силу инерции. Эта сила направлена в сторону, противоположную движению груза и равна  $Q \frac{dv}{dt}$ , где  $v$  — скорость подъема.

Наибольшее усилие в канате соответствует моменту максимального ускорения груза во время разгона:

$$N_{\max} = Qg + Q \left( \frac{dv}{dt} \right)_{\max}.$$

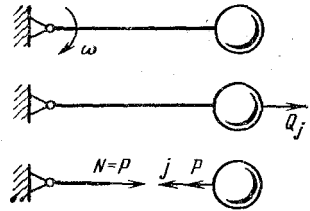


Рис. 15.1

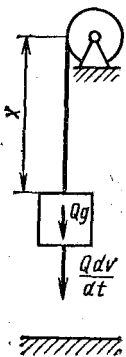


Рис. 15.2

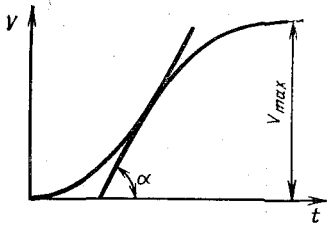


Рис. 15.3

Следовательно, максимальное напряжение в канате при подъеме груза

$$\sigma_{\max} = \frac{Qg}{F} \left[ 1 + \frac{1}{g} \left( \frac{dv}{dt} \right)_{\max} \right]$$

больше напряжений при статическом приложении груза в  $\lambda$  раз; коэффициент

$$\lambda = 1 + \frac{1}{g} \left( \frac{dv}{dt} \right)_{\max}$$

называется динамическим коэффициентом нагрузки.

Таким образом, для уменьшения растягивающего усилия в канате необходимо обеспечить плавное увеличение скорости подъема, так как при больших ускорениях напряжения в канате могут стать значительными. График изменения скорости в период разгона должен иметь вид, представленный на рис. 15.3. Тангенс наибольшего угла  $\alpha$  наклона касательной к этой кривой определяет максимальное ускорение движения груза во время подъема.

При опускании груза в начале движения величина  $\frac{dv}{dt}$  в выражении для  $\lambda$  будет иметь отрицательный знак. Следовательно, напряжения в канате в этом случае будут меньше напряжений от статического действия груза  $Q$ .

Если канат длинный, то следует учесть массу самого каната и силы инерции его частиц. В этом случае опасным будет верхнее сечение каната, усилие в котором

$$N = (Q + \rho Fx) g \left[ 1 + \frac{1}{g} \left( \frac{dv}{dt} \right)_{\max} \right],$$

где  $x$  — длина каната;  $\rho$  — плотность материала каната.

### 15.3. НАПРЯЖЕНИЯ В ТОНКОСТЕННОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ КОЛЬЦЕ

Рассмотрим случай вращения тонкостенного кольца ( $\delta \ll R$ ) с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной к плоскости кольца (рис. 15.4, а).

При вращении кольца каждый его элемент движется с центростремительным ускорением  $j = \omega^2 R$ . Силы инерции направлены в сторону, противоположную ускорениям, и при постоянном сечении распределены равномерно вдоль кольца. Интенсивность сил инерции, т. е. сила инерции, приходящаяся на единицу длины кольца,  $q = F\rho\omega^2 R$ . Здесь  $\rho$  — плотность материала,  $F$  — площадь сечения, а  $R$  — радиус средней линии кольца.

Кольцо теперь можно рассматривать как неподвижную плоскую раму, нагруженную равномерно распределенными радиальными силами интенсивностью  $q$ .

Рассекая кольцо любой диаметральной плоскостью на две части, приложим в сечениях осевые силы  $N$  и изгибающие моменты  $X_1$ .

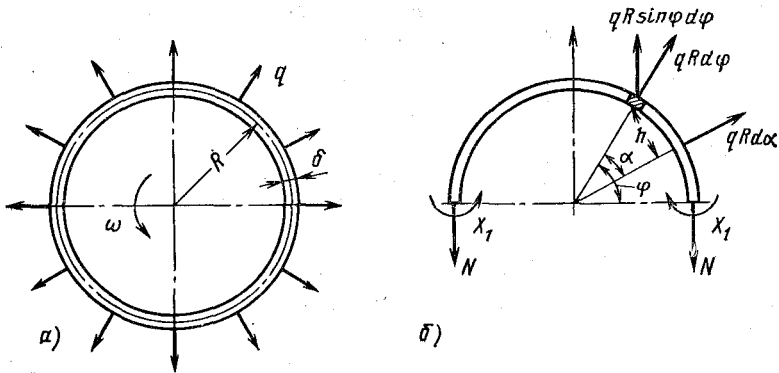


Рис. 15.4

Проектируя все силы, действующие на полукольцо, на направление оси  $y$ , получаем

$$-2N + 2 \int_0^{\pi/2} qR \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Отсюда

$$N = qR.$$

Подставляя в это выражение значение  $q$ , находим

$$N = \rho F \omega^2 R^2.$$

Для определения неизвестного  $X_1$  составим каноническое уравнение  $\delta_{1p} + \delta_{11}X_1 = 0$ , коэффициенты которого вычислим способом Мора.

Изгибающий момент в текущем сечении полукольца от силы  $N$  и распределенной нагрузки  $q$  (см. рис. 15.4, б)

$$M_z(\varphi) = qR^2(1 - \cos \varphi) - \int_0^{\varphi} qR^2 \sin \alpha d\alpha = 0,$$

а от единичной пары  $M_1\varphi = +1$ .

Следовательно,  $\delta_{1p} = 0$  и поэтому  $X_1 = 0$ , т. е. изгибающие моменты во всех поперечных сечениях кольца равны нулю. Этот результат объясняется тем, что при вращении вокруг центра кольцо сохраняет свою форму и никаких изгибных деформаций не испытывает; увеличивается только его диаметр.

Таким образом, нормальные напряжения в поперечном сечении кольца

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{\rho l^2 n^2 R^2}{900}.$$

Например, в стальном кольце ( $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$ ) радиуса  $R = 50 \text{ см}$  при  $n = 2500 \text{ об/мин}$  растягивающее напряжение

$$\sigma = \frac{7850 - 3,14^2 \cdot 2500^2 \cdot 0,5^2}{900 \cdot 10^6} = 134 \text{ МПа.}$$

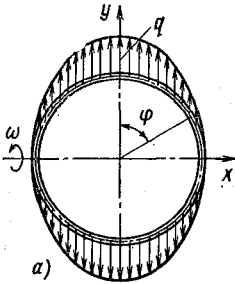


Рис. 15.5

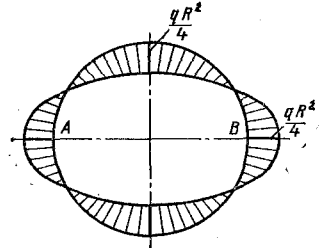
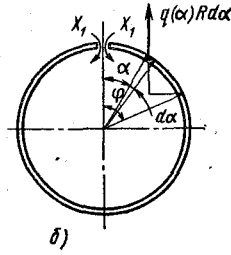


Рис. 15.6

Итак, напряжения во вращающемся кольце зависят только от окружной скорости  $v$  и плотности материала, но не зависят от площади его поперечного сечения. Поэтому увеличением размеров сечения нельзя уменьшить напряжения в тонкостенном вращающемся кольце.

Рассмотрим теперь случай равномерного вращения тонкостенного кольца вокруг его горизонтальной оси  $x$ .

Различные элементы кольца находятся на разных расстояниях от оси вращения, и поэтому силы инерции распределены неравномерно по длине кольца (рис. 15.5, а):  $q(\varphi) = \rho F \omega^2 R \cos \varphi$ . Максимальная интенсивность  $q = \rho F \omega^2 R$ . Следовательно,  $q(\varphi) = q \cos \varphi$ .

В сечениях вдоль вертикальной оси симметрии кольца будут действовать только изгибающие моменты  $X_1$ , а перерезывающие силы  $Q$  и нормальные силы  $N$  равны нулю. В отсутствие нормальных сил  $N$  в этих сечениях легко убедиться, спроектировав все силы, действующие на левое или правое полукольцо, на горизонтальную ось симметрии.

Представим эквивалентную систему, как показано на рис. 15.5, б. Изгибающий момент в текущем сечении кольца от внешней нагрузки

$$\begin{aligned}
 M(\varphi) &= - \int_0^{\varphi} q(\alpha) R (\sin \varphi - \sin \alpha) R d\alpha = \\
 &= -qR^2 \int_0^{\varphi} \cos \alpha (\sin \varphi - \sin \alpha) d\alpha = -\frac{qR^2}{2} \sin^2 \varphi,
 \end{aligned}$$

а от единичной пары  $M_1(\varphi) = +1$ .

Составим каноническое уравнение  $\delta_{1p} + \delta_{11} X_1 = 0$ . Коэффициенты  $\delta_{1p}$  и  $\delta_{11}$  этого уравнения:

$$\delta_{1p} = -\frac{4}{EJ} \int_0^{\pi/2} \frac{qR^3}{2} \sin^2 \varphi d\varphi = -\frac{\pi}{2} \frac{qR^3}{EJ};$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{EJ} \int_0^{\pi/2} R d\varphi = \frac{2\pi R}{EJ}.$$



Следовательно,

$$X_1 = -\frac{\delta_{I\rho}}{\delta_{II}} = \frac{qR^2}{4}.$$

Итак, изгибающий момент в текущем сечении рамы

$$M(\varphi) = \frac{qR^2}{4} - \frac{qR^4}{2} \sin \varphi.$$

Эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 15.6. Опасными являются сечения *A* и *B* кольца, так как в этих сечениях кроме изгибающих моментов  $M = qR^2/4$  действуют наибольшие растягивающие нормальные силы.

$$N = \int_0^{\pi/2} qR \cos \varphi d\varphi = qR.$$

Максимальные напряжения в раме

$$\sigma_{\max} = \frac{qR^2}{4W_z} + \frac{qR}{F},$$

где  $W_z$  — момент сопротивления изгибу, а  $F$  — площадь поперечного сечения кольца.

#### 15.4. РАСЧЕТ РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПРЯМОГО БРУСА

Предположим, что прямой брус постоянной толщины  $\delta$  и трапециевидного очертания в плане равномерно вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа (рис. 15.7). Определим напряжения в сечениях бруса.

Применяя принцип Даламбера, приложим к каждому элементу бруса силу инерции, равную массе этого элемента, умноженной на его центростремительное ускорение. Интенсивности сил инерции в текущем сечении бруса  $q(r) = \rho F(r) \omega^2 r$ . Здесь  $F(r)$  — площадь текущего сечения, равная, как следует из рис. 15.7

$$F(r) = \delta h(r) = \delta h \frac{2l - r}{l}.$$

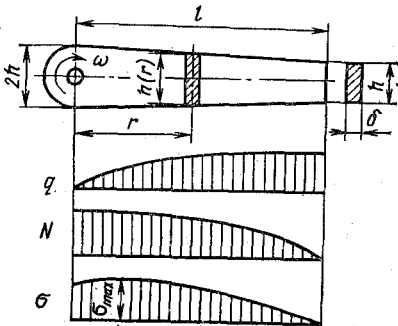


Рис. 15.7

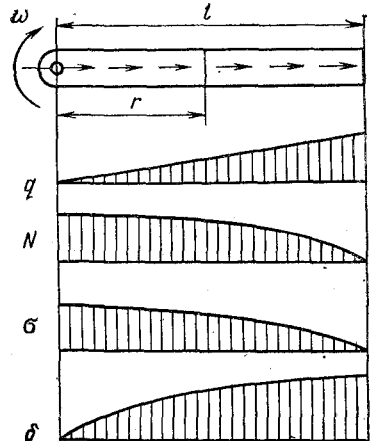


Рис. 15.8

Следовательно,

$$q(r) = \rho \delta h \omega^2 (2lr - r^2)/l.$$

Дальнейший расчет бруса ведется так же, как и в случае осевого растяжения бруса статически приложенными распределенными продольными нагрузками интенсивности  $q(r)$ .

Осевая сила  $N$  в текущем сечении бруса

$$N(r) = \int_r^l q(r) dr = \frac{\rho \delta h \omega^2}{l} \int_0^l (2lr - r^2) dr = \frac{\rho \delta h \omega^2}{3l} (r^3 - 3lr^2 + 2l^3),$$

а нормальное напряжение в этом сечении

$$\sigma(r) = \frac{N(r)}{F(r)} = \frac{\rho \omega^2}{3} \cdot \frac{r^3 - 3lr^2 + 2l^3}{2l - r}.$$

Наибольшего значения растягивающие напряжения достигают в сечении бруса при  $r = 0,193l$ :

$$\sigma_{\max} = 1,04 \frac{\rho \omega^2 l^2}{3},$$

а в корневом сечении при

$$\sigma = \frac{\rho \omega^2 l^2}{3}.$$

Эпюры интенсивности инерционной нагрузки  $q$ , осевых сил  $N$  и напряжений  $\sigma$  представлены на рис. 15.7.

В брусce постоянного сечения  $F(r) = \delta h$  (рис. 15.8) интенсивность сил инерции изменяется по длине бруса по линейному закону:  $q(r) = \rho F \omega^2 r$ , а осевые силы  $N$  и напряжения  $\sigma$  — по закону квадратной параболы:

$$N(r) = \rho F \omega^2 \int_r^l r dr = \rho F \omega^2 (l^2 - r^2)/2;$$

$$\sigma(r) = \rho \omega^2 (l^2 - r^2)/2.$$

Перемещение текущего сечения бруса

$$\delta(r) = \int_0^r \frac{N dr}{EF} = \frac{\rho \omega^2}{2E} \left( l^2 r - \frac{r^3}{3} \right).$$

Полагая в этом выражении  $r = l$ , находим удлинение всего бруса, вызванное его вращением,

$$\Delta l = \frac{\rho \omega^2 l^3}{3E}.$$

Эпюры  $q$ ,  $N$ ,  $\sigma$  и  $\delta$  для бруса постоянного сечения приведены на рис. 15.8.

В момент трогания с места и разгона до заданной частоты вращения частицы бруса будут иметь также окружные ускорения  $a =$

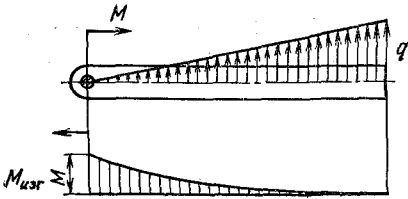


Рис. 15.9

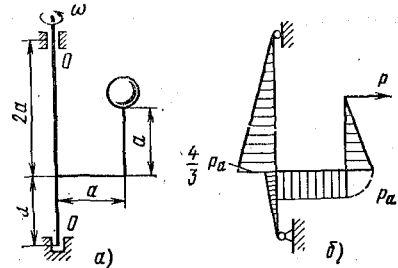


Рис. 15.10

$= \frac{dv}{dt}$ . В этом случае брус будет подвергаться не только растяжению, но и изгибу. Эпюры интенсивности изгибающей инерционной нагрузки и изгибающих моментов для бруса постоянного сечения представлены на рис. 15.9.

### 15.5. ВРАЩАЮЩИЕСЯ РАМЫ

Рассмотрим несколько примеров расчета вращающихся рам.

Стержень регулятора с прикрепленным к нему грузом массой  $Q$  вращается вокруг оси  $O-O$  (рис. 15.10, а) с постоянной угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ . Построим эпюру изгибающих моментов, полагая, что масса рамы мала по сравнению с массой груза.

Сила инерции груза  $P = Q\omega^2 a$ .

Рассматривая силу инерции груза как единственную внешнюю нагрузку на брус, строим эпюру изгибающих моментов (рис. 15.10, б). Максимальный изгибающий момент

$$M_{\max} = \frac{4}{3} Q\omega^2 a^2.$$

Рассмотрим более сложный пример. Прямоугольная рама постоянного сечения (рис. 15.11, а) вращается вокруг вертикальной оси симметрии с угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ . Определим изгибающие моменты в сечениях рамы, вызванные ее вращением.

На горизонтальных элементах рамы интенсивность сил инерции изменяется по линейному закону  $q = \rho F \omega^2 x$ . На вертикальных эле-

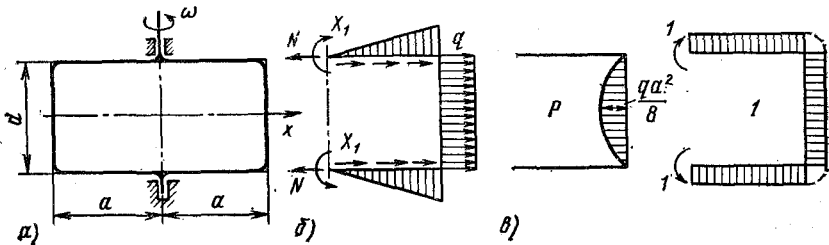


Рис. 15.11

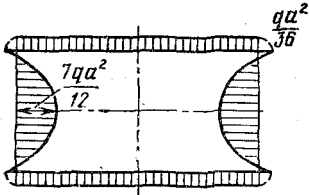


Рис. 15.12

ментах интенсивность инерционной нагрузки постоянна и равна  $q = \rho F \omega^2 a$  (направление этих сил показано на рис. 15.11, б стрелками).

Основную систему выберем, рассекая раму по вертикальной оси симметрии. Из условия симметрии системы относительно вертикальной и горизонтальной осей следует, что в сечениях по вертикальной

оси симметрии перерезывающие силы равны нулю, осевые силы согласно уравнению  $\sum x = 0$  будут

$$N = \frac{qa}{2} + \frac{qa}{2} = qa.$$

Для определения неизвестных изгибающих моментов  $X_1$  в этих сечениях составим каноническое уравнение  $\delta_{1P} + \delta_{11}X_1 = 0$ , коэффициенты которого вычислим способом Верещагина. Перемножая эпюры от внешних и единичных сил (рис. 15.11), получаем

$$EJ\delta_{1P} = -\frac{qa^3}{12}; \quad EJ\delta_{11} = 3a.$$

Подставляя значения  $\delta_{1P}$  и  $\delta_{11}$  в каноническое уравнение и решая его относительно  $X_1$ , имеем  $X_1 = qa^2/36$ .

Суммируя изгибающие моменты в сечениях рамы от заданной нагрузки и от  $X_1$ , строим эпюру изгибающих моментов (рис. 15.12). Опасными являются сечения рамы, расположенные на горизонтальной оси симметрии, изгибающие моменты в которых  $M_{\max} = \frac{7}{12} qa^2$ .

### 16.1. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Явление удара наблюдается во всех случаях, когда скорости соприкасающихся тел изменяются в течение очень малого промежутка времени.

Напряжения и деформации при ударном нагружении, называемые динамическими, оказываются значительно большими, чем те, которые возникли бы в данной системе при статическом приложении той же нагрузки.

Процесс удара жесткого груза об упругую стержневую систему протекает следующим образом. Сначала груз, движущийся с некоторой скоростью, входит в соприкосновение с системой, причем скорость его движения резко уменьшается.

Упругая система приходит в движение. Однако вследствие инерции массы системы ее частицы начинают перемещаться не одновременно. Чтобы волна деформации распространилась от места удара по всей системе, требуется некоторое время. Передний фронт волны движется по системе со скоростью распространения звука в данной среде. В стальных конструкциях, например, волна деформации распространяется со скоростью около 5000 м/с.

После соприкосновения груз движется совместно с воспринимающей удар упругой системой, причем скорость их движения по мере роста деформаций и сил упругости системы постепенно уменьшается и становится равной нулю в момент наибольшей деформации. Затем начинается обратное движение, в дальнейшем система совершает колебательные движения.

Расчет на прочность и жесткость при ударной нагрузке требует определения напряжений и деформаций системы, воспринимающей удар.

При ударе возникают деформации двух типов: местные деформации в зоне контакта и общие деформации системы. В дальнейшем рассматриваются только общие деформации системы и предполагается, что динамические напряжения не превосходят предел пропорциональности материала. Задача определения контактных напряжений в месте удара сложна и не может быть решена простыми методами.

Для приближенного определения напряжений и перемещений сечений в момент наибольшей деформации системы в практических расчетах обычно применяется энергетический метод. Этот метод

решения применим в тех случаях, когда скорость ударяющего тела мала по сравнению со скоростью распространения фронта ударной волны, а время соударения значительно больше времени распространения этой волны по всей системе.

Указанное ограничение дает основание считать, что при ударе деформации распространяются мгновенно по всей стержневой системе и все ее точки начинают движение одновременно.

### 16.2. УДАР ПАДАЮЩЕГО ГРУЗА ПО УПРУГОЙ СИСТЕМЕ, МАССА КОТОРОЙ МАЛА ПО СРАВНЕНИЮ С МАССОЙ ГРУЗА

Предположим, что груз массой  $Q$  падает с некоторой высоты  $H$  на упругую систему, масса которой мала по сравнению с массой груза. Такой системой может быть стержень, балка, ферма и т. д. Упругую систему будем считать невесомой.

Рассмотрим баланс энергии в момент наибольшей деформации системы при ударе (рис. 16.1).

Груз в процессе падения производит работу

$$A = Qg(H + \delta_d),$$

где  $\delta_d$  — динамический прогиб системы (перемещение точки удара) в момент наибольшей деформации.

Эта работа накапливается в системе в виде потенциальной энергии, которую определим как работу некоторой статической нагрузки  $R = C\delta_d$  (сила удара), вызывающей тот же прогиб, что и груз  $Q$  при ударе. Здесь  $C$  — жесткость системы в направлении удара.

Величина  $C$  находится как отношение силы к вызванному этой силой перемещению точки ее приложения в направлении действия силы.

Потенциальная энергия

$$U = \frac{R\delta_d}{2} = \frac{C\delta_d^2}{2}.$$

Приравнивая  $A$  и  $U$ , имеем

$$Qg(H + \delta_d) = \frac{C\delta_d^2}{2}.$$

Отсюда получаем для  $\delta_d$  квадратное уравнение

$$\delta_d^2 - 2\frac{Qg}{C}\delta_d - \frac{2QgH}{C} = 0,$$

решая которое находим\*

$$\delta_d = \frac{Qg}{C} + \sqrt{\frac{Q^2g^2}{C^2} + \frac{2QgH}{C}}.$$

\* Положительный знак перед радикалом взят потому, что искомыми являются наибольшие деформации. Если груз после удара остается на упругой системе, то при отрицательном знаке решение дает наибольшее отклонение точки удара при возвратном движении.

Выражение для  $\delta_d$  можно записать проще, если учесть, что  $Qg/C = \delta_{ст}$ , где  $\delta_{ст}$  — перемещение системы в месте удара при статическом приложении к ней груза  $Qg$ . Тогда

$$\delta_d = \delta_{ст} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \right). \quad (16.1)$$

Множитель

$$\lambda = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \quad (16.2)$$

называется коэффициентом динамичности или динамическим коэффициентом.

После того как найдена сила удара  $R$ , могут быть найдены обычными способами динамические напряжения и деформации системы; они, очевидно, будут в  $\lambda$  раз больше тех, которые имели бы место в системе при статическом приложении к ней груза  $Q$ , т. е.

$$\delta_d = \lambda \delta_{ст}, \quad \sigma_d = \lambda \sigma_{ст}. \quad (16.3)$$

Условие прочности запишется так:

$$(\sigma_d)_{\max} \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение.

При назначении допускаемого напряжения следовало бы учесть, что при ударном нагружении изменяются механические характеристики материала и особенно предел текучести (он оказывается выше, чем при статическом нагружении). Однако ввиду недостаточной изученности этого вопроса расчет на прочность при динамической нагрузке обычно ведут по статическим характеристикам.

Заметим, что эластичные свойства системы, как видно из формулы (16.2), смягчают удар и, наоборот, сила удара тем больше, чем больше жесткость системы.

Частный случай ударного нагружения — внезапное приложение груза, когда  $H = 0$ . В этом случае  $\lambda = 2$  и  $\sigma_d = 2\sigma_{ст}$ ,  $\delta_d = 2\delta_{ст}$ , т. е. при внезапном приложении нагрузки напряжения и деформации системы в два раза больше, чем при статическом нагружении.

Выражение для  $\lambda$  может быть упрощено в зависимости от конкретных данных задачи.

Так, в том случае, когда отношение  $2H/\delta_{ст} > 10$ , можно пренебречь первым слагаемым под радикалом в формуле (16.2) и вычислять  $\lambda$  по формуле

$$\lambda = 1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}}, \quad (16.4)$$

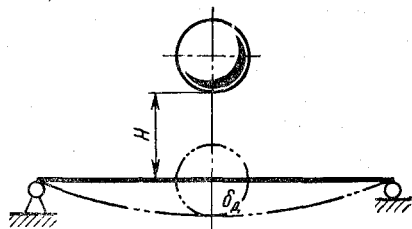


Рис. 16.1

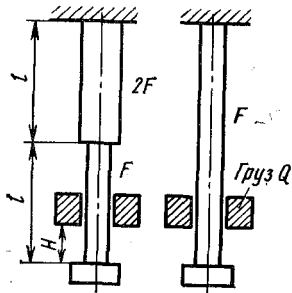


Рис. 16.2

а если  $2H/\delta_{ст} > 100$ , то

$$\lambda = \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}}. \quad (16.5)$$

**Пример.** Определить, в каком из двух показанных на рис. 16.2 стержней напряжения при ударе грузом массой  $Q$ , падающим с высоты  $H$ , будут больше.

**Решение.** В данном случае имеет место продольный удар. Перемещение нижнего концевого сечения первого стержня от статически приложенной силы  $G = Qg$  будет  $\delta_{ст}^I = \frac{3}{2} \frac{Gl}{EF}$ , а второго стержня  $\delta_{ст}^{II} = \frac{2Gl}{EF}$ . Следовательно,  $\lambda_I = \sqrt{\frac{4EFH}{3Gl}}$ ;  $\lambda_{II} = \sqrt{\frac{EFH}{Gl}}$ , а напряжение

$$\sigma_{д}^I = \sqrt{\frac{4EFH}{3Gl}} \frac{G}{F}; \quad \sigma_{д}^{II} = \sqrt{\frac{EFH}{Gl}} \frac{G}{F},$$

т. е. напряжения в первом стержне больше, чем во втором.

### 16.3. ПРИВЕДЕННАЯ МАССА. КОЭФФИЦИЕНТ ПРИВЕДЕНИЯ

Вычислим кинетическую энергию  $T$  массы, воспринимающей удар упругой системы. В процессе движения системы ее частицы перемещаются с различными скоростями.

Кинетическая энергия элементарной частицы упругой системы с массой  $dm$ , перемещающейся со скоростью  $v_i$ , равна  $\frac{v_i^2 dm}{2}$ .

Суммируя кинетические энергии всех частиц упругой системы, получаем

$$T = \int_m \frac{v_i^2 dm}{2}, \quad (16.6)$$

где интеграл распространен на всю массу системы.

Обозначим через  $v_0$  скорость какой-либо заранее выбранной точки системы, а затем умножим и разделим правую часть выражения (16.6) на массу  $m$  всей упругой системы и квадрат скорости  $v_0$ . Тогда

$$T = \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{1}{m} \int_m \left(\frac{v_i}{v_0}\right)^2 dm. \quad (16.7)$$

Введя обозначение для безразмерной величины

$$\frac{1}{m} \int_m \left(\frac{v_i}{v_0}\right)^2 dm = K_{п}, \quad (16.8)$$

запишем выражение для  $T$  в виде

$$T = \frac{K_{п}mv_0^2}{2}. \quad (16.9)$$

Таким образом, кинетическая энергия распределенной массы упругой системы выражена через кинетическую энергию некоторой сосредоточенной массы  $K_{п}m$ , движущейся со скоростью  $v_0$  опре-



деленной точки системы, называемой точкой приведения. Масса  $m_{пр}$ , равная произведению  $K_{п}m$ , называется приведенной массой, а безразмерная величина  $K_{п}$  (16.8) — коэффициентом приведения массы.

Итак, приведенная масса есть такая сосредоточенная масса, которая, двигаясь со скоростью точки приведения, имеет такую же кинетическую энергию, какой обладают все материальные точки упругой системы в процессе их движения.

В задачах удара массу системы приводят к точке удара.

Чтобы найти коэффициент приведения  $K_{п}$ , необходимо знать соотношение скоростей точек упругой системы в процессе ее деформации. Отношение скоростей равно отношению перемещений точек системы при ударе, т. е.

$$\frac{v_i}{v_0} = \frac{\delta_i}{\delta_0}. \quad (16.10)$$

Тогда

$$K_{п} = \frac{1}{m} \int_m \left( \frac{\delta_i}{\delta_0} \right)^2 dm. \quad (16.11)$$

Предположим, что форма упругой линии системы при динамическом нагружении подобна упругой линии этой же системы при статическом приложении сосредоточенной силы к точке приведения. Тогда  $\delta_i$  и  $\delta_0$  в выражении (16.11) можно рассматривать как смещения тех же точек системы при ее статическом нагружении в точке приведения некоторой сосредоточенной силой  $G$ . Коэффициент  $K_{п}$  от величины силы  $G$  не зависит.

Рассмотрим несколько примеров вычисления коэффициента приведения.

**Пример 1.** Найти коэффициент приведения массы стержня постоянного сечения к нижнему концу стержня (рис. 16.3).

**Решение.** Смещение торцового сечения бруса при статическом нагружении силой  $G$  будет  $\delta_0 = \frac{Gl}{EF}$ , а смещение текущего сечения  $\delta(x) = \frac{Gx}{EF}$ . Отношение этих смещений  $\delta(x)/\delta_0 = x/l$ .

Масса элемента стержня  $dm = \rho F dx$ , а масса всего стержня  $m = \rho Fl$ . Следовательно, коэффициент приведения массы стержня к его нижнему торцовому сечению

$$K_{п} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{x^2}{l^2} dx = \frac{1}{3},$$

а приведенная масса стержня  $m_{пр} = \frac{1}{3} \rho Fl$ .

**Пример 2.** Привести массу консоли к свободному концу (рис. 16.4).

**Решение.** Определяя прогибы балки способом Верещагина или с помощью дифференциального уравнения упругой линии, получаем

$$EJy(x) = \frac{Gx^3}{6} - \frac{Gl x^2}{2}.$$

Смещение свободного конца балки  $EJ\delta_0 = -Gl^2/3$ . Следовательно, отношение

$$\frac{y(x)}{\delta_0} = \frac{3}{2} \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3}.$$

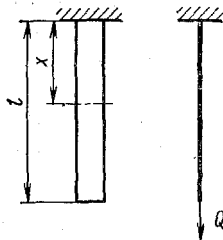


Рис. 16.3

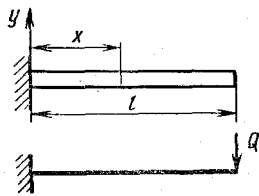


Рис. 16.4

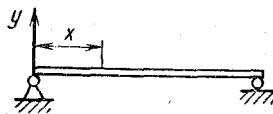


Рис. 16.5

Подставляя последнее выражение в формулу (16.11), находим

$$K_{\text{ц}} = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{3}{2} \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{33}{140}.$$

Искомая приведенная масса  $m_{\text{цр}} = \frac{33}{140} m$ .

**Пример.** Найти коэффициент приведения массы двухопорной балки к середине пролета (рис. 16.5).

**Решение.** Уравнение упругой линии балки при статическом нагружении ее силой  $G$  в середине пролета при  $x \leq l/2$  имеет вид (см. разд. 6.12)

$$y(x) = \delta_0 \left( \frac{3x}{l} - \frac{4x^3}{l^3} \right),$$

где  $\delta_0 = \frac{Gl^3}{48EJ}$  — прогиб в середине пролета. Следовательно, коэффициент приведения массы балки к середине пролета

$$K_{\text{ц}} = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \left( \frac{3x}{l} - \frac{4x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{17}{35}.$$

#### 16.4. УДАР ПО СИСТЕМЕ, МАССА КОТОРОЙ СОИЗМЕРИМА С МАССОЙ УДАРЯЮЩЕГО ГРУЗА

Влияние собственной массы, воспринимающей удар системы, на напряжения и деформации в энергетическом методе приближенно учитывается с помощью приведенной к точке удара массы системы. Реальная упругая система с распределенной массой заменяется невесомой системой с одной степенью свободы, содержащей в точке удара сосредоточенную массу  $m_{\text{цр}} = K_{\text{ц}}m$  ( $m$  — масса системы, а  $K_{\text{ц}}$  — коэффициент приведения массы).

Обозначим через  $v_0$  скорость груза в последнее мгновение перед соударением, а через  $v$  — скорость груза и системы в первое мгновение после соприкосновения его с упругой системой.

Кинетическая энергия груза и упругой системы в этот момент

$$\frac{Qv^2}{2} + \frac{K_{\text{ц}}mv^2}{2}.$$

Эта энергия в процессе деформации системы накапливается в ней в виде потенциальной энергии. В момент наибольшей деформации системы скорости движений груза и частиц упругой системы равны нулю и вся кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию деформации системы. Учитывая, что при вертикальном ударе груз опускается дополнительно на  $\delta_d$  и при этом совершает работу, равную  $Qg\delta_d$ , получаем

$$\frac{Qv^2}{2} + \frac{K_{\Pi}mv^2}{2} + Qg\delta_d = \frac{C\delta_d^2}{2}. \quad (16.12)$$

Отсюда находим  $\delta_d$ :

$$\delta_d = \frac{Qg}{C} + \sqrt{\frac{Q^2g^2}{C^2} + \frac{Q + K_{\Pi}m}{C} v^2}. \quad (16.13)$$

Для определения скорости  $v$  воспользуемся теоремой о сохранении количества движения, согласно которой

$$Qv_0 = (Q + K_{\Pi}m) v.$$

Отсюда находим скорость груза и системы после соприкосновения

$$v = \frac{Q}{Q + K_{\Pi}m} v_0. \quad (16.14)$$

Подставляя (16.14) в (16.13), находим

$$\delta_d = \frac{Qg}{C} + \sqrt{\frac{Q^2g^2}{C^2} + \frac{Q}{C} \cdot \frac{Q}{Q + K_{\Pi}m} v_0^2} \quad (16.15)$$

или

$$\delta_d = \delta_{ст} \left( 1 + \sqrt{\frac{Q}{Q + K_{\Pi}m} \cdot \frac{v_0^2}{g\delta_{ст}}} \right). \quad (16.16)$$

Следовательно,  $\delta_d = \lambda\delta_{ст}$ , где

$$\lambda = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q}{Q + K_{\Pi}m} \cdot \frac{v_0^2}{g\delta_{ст}}}. \quad (16.17)$$

Если масса системы относительно невелика, то можно положить  $K_{\Pi} = 0$ , и выражение для коэффициента динамичности примет вид

$$\lambda = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\delta_{ст}}}. \quad (16.18)$$

Из формул (16.17) и (16.18) следует, что динамические напряжения в реальной системе меньше напряжений, получаемых в результате решения, не учитывающего влияния собственной массы системы.

Если груз  $Q$  падает с высоты  $H$ , то его скорость перед соударением  $v_0 = \sqrt{2gH}$  и формула (16.17) принимает вид

$$\lambda = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q}{Q + K_{\Pi}m} \cdot \frac{2H}{\delta_{ст}}}. \quad (16.19)$$

В случае горизонтального удара, когда горизонтально движущееся тело достигает системы, имея скорость  $v_0$ , в уравнении (16.12) будет отсутствовать слагаемое  $Qg\delta_d$ , а коэффициент динамичности запишется так:

$$\lambda = \sqrt{\frac{Q}{Q + K_{\text{н}}m} \cdot \frac{v_0^2}{g\delta_{\text{ст}}}}. \quad (16.20)$$

Таким образом, при горизонтальном ударе деформации и напряжения в системе меньше, чем при вертикальном ударе груза  $Q$  по той же системе.

На практике часто встречается случай, когда масса системы пренебрежимо мала, но на ней расположена массивная деталь — буфер, воспринимающая удар груза. В этом случае коэффициент динамичности может быть подсчитан по формулам (16.17) или (16.19), если заменить в них приведенную массу  $K_{\text{н}}m$  системы массой буфера.

**УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.  
ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ****17.1. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ  
ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ**

Исследование причин разрушения различных сооружений показало, что для надежной работы конструкции под нагрузкой недостаточно сделать ее элементы прочными, необходимо еще обеспечить сохранение первоначальной формы равновесия как самих элементов, так и всей конструкции в целом.

Известно, что равновесие может быть устойчивым, безразличным и неустойчивым.

Равновесие называется устойчивым, если при малом отклонении от положения равновесия система возвращается в первоначальное положение, как только будет устранена причина, вызывающая это отклонение; равновесие называется неустойчивым, если система не возвращается в исходное положение, а отклоняется от него еще больше; равновесие называется безразличным, если новое положение системы после отклонения от исходного остается положением равновесия и после удаления внешнего воздействия.

Эти три формы равновесия можно проиллюстрировать примерами положения шарика на дне чаши, на выпуклой поверхности и на горизонтальной плоскости (рис. 17.1). В первом случае исходное положение шарика является устойчивым, так как при малых отклонениях он возвратится в первоначальное положение, как только будет устранена причина, вызвавшая отклонение. Во втором случае исходное положение шарика может служить примером неустойчивого равновесия, а в третьем — безразличного.

Мы подчеркиваем, что речь идет о малых отклонениях потому, что устойчивое равновесие при малых отклонениях может стать неустойчивым при больших отклонениях от исходного положения. Примером тому может служить положение шарика на поверхности, представленной на рис. 17.2. При больших отклонениях шарик, очевидно, не будет возвращаться, а при малых отклонениях будет возвращаться в первоначальное положение.

Сказанное относится и к упругим телам. Однако характер равновесия упругих тел существенно зависит от величины действующих на них сил. Например, прямолинейная форма равновесия длинного прямого стержня, подвергнутого осевому сжатию силой  $P$  (рис. 17.3, а), устойчива только до определенного значения сжимающей силы. Если такой стержень при малых значениях силы  $P$  несколько отклонить от исходного положения, то при устранении



Рис. 17.1



Рис. 17.2

причин, вызывающих это отклонение, он снова примет первоначальную прямолинейную форму.

Однако при возрастании силы  $P$  стержень все медленнее и медленнее будет возвращаться к своей первоначальной прямолинейной форме, и, наконец, при некотором значении силы  $P$ , называемом критическим, стержень не распрямится, а сохранит ту форму, которую ему придали (предполагаются малые отклонения стержня от прямолинейной формы). Таким образом, при значении силы  $P$ , равном критическому ( $P = P_k$ ), стержень будет находиться в условиях безразличного равновесия.

Если сила  $P$  превысит критическое значение, прямолинейная форма равновесия станет неустойчивой.

Практически изгиб стержня начинается раньше, чем сила  $P$  достигает критического значения. Это объясняется неоднородностью материала, начальным искривлением (прогибом) оси реального стержня и некоторым эксцентриситетом в приложении нагрузки. Однако прогибы реального стержня начинают быстро расти и становятся опасными только при приближении сжимающей силы к критическому значению.

Описанное явление изгиба стержня продольной силой называется продольным изгибом.

Аналогичные явления наблюдаются в различных упругих системах, содержащих гибкие сжатые части, тонкие пластинки и оболочки. Так, например, при сжатии кругового тонкостенного кольца равномерно распределенными радиальными нагрузками происходит изменение его первоначальной круговой формы, как только интенсивность сжимающей нагрузки достигает критического значения (рис. 17.3, б).

В практических расчетах на устойчивость критическую нагрузку считают разрушающей и допускаемую нагрузку определяют как часть критической:

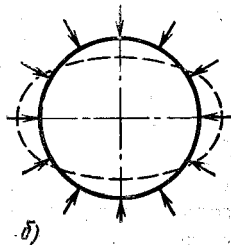
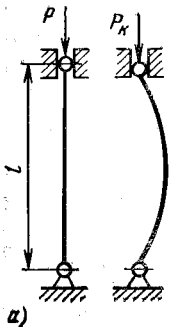


Рис. 17.3

$$P_{\text{доп}} = \frac{P_k}{n_y}, \quad (17.1)$$

где  $n_y$  — коэффициент устойчивости.

Величина коэффициента устойчивости принимается примерно равной запасу прочности. Например, для стали принимают  $n_y = 2 \dots 4$  в зависимости от условий работы конструкции,

а для неоднородных материалов запас устойчивости значительно увеличивают.

Следует иметь в виду, что потеря устойчивости может произойти при напряжениях, значительно меньших допускаемых напряжений, принятых для расчета на прочность.

Из многочисленного ряда задач в области устойчивости упругих систем мы рассмотрим только задачу об устойчивости сжатых стержней.

### 17.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ МЕТОДОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ СТЕРЖНЯ. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Впервые проблема устойчивости сжатых стержней была поставлена Леонардом Эйлером. Эйлер вывел расчетную формулу для критической силы и показал, что ее величина существенно зависит от способа закрепления стержня. Идея метода Эйлера заключается в установлении условий, при которых кроме прямолинейной возможна и смежная (т. е. сколь угодно близкая к исходной) криволинейная форма равновесия стержня при постоянной нагрузке.

Предположим, что шарнирно закрепленный по концам прямой стержень, сжатый силой  $P = P_K$ , был выведен некоторой горизонтальной силой из состояния прямолинейного равновесия и остался изогнутым после устранения горизонтальной силы (рис. 17.4). Если прогибы стержня малы, то приближенное дифференциальное уравнение его оси будет иметь такой же вид, как и при поперечном изгибе бруса:

$$EJy'' = \pm M_{изг}(x). \quad (17.2)$$

Совмещая начало координат с центром нижнего сечения, направим ось  $y$  в сторону прогибов стержня, а ось  $x$  — по оси стержня.

В теории продольного изгиба принято сжимающую силу считать положительной. Поэтому, определяя изгибающий момент в текущем сечении рассматриваемого стержня, получаем

$$M_{изг}(x) = P_K y(x) > 0.$$

Но, как следует из рис. 17.4, при выбранном направлении осей  $y'' < 0$ , поэтому знаки левой и правой частей уравнения (17.2) будут одинаковыми, если в правой части сохранить знак минус. Если изменить направление оси  $y$  на противоположное, то одновременно изменятся знаки  $y$  и  $y''$  и знак минус в правой части уравнения (17.2) сохранится.

Следовательно, уравнение упругой линии стержня имеет вид

$$EJy'' = -P_K y.$$

Полагая  $\frac{P_K}{EJ} = \alpha^2$ , получаем линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + \alpha^2 y = 0, \quad (17.3)$$

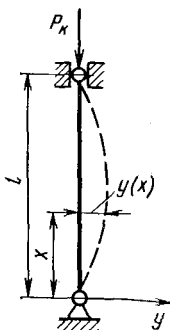


Рис. 17.4

общий интеграл которого

$$y(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x.$$

Здесь  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования, определяемые из условий закрепления стержня, так называемых граничных или краевых условий.

Горизонтальное смещение нижнего конца стержня, как видно из рис. 17.4, равно нулю, т. е. при  $x = 0$  прогиб  $y = 0$ . Это условие будет выполнено, если  $B = 0$ . Следовательно, изогнутая ось стержня является синусоидой

$$y(x) = A \sin \alpha x. \quad (17.4)$$

Горизонтальное смещение верхнего конца стержня также равно нулю, поэтому  $y(l) = A \sin \alpha l = 0$ .

Константа  $A$ , представляющая собой наибольший прогиб стержня, не может быть равна нулю, так как при  $A = 0$  возможна только прямолинейная форма равновесия, а мы ищем условие, при котором возможна и криволинейная форма равновесия. Поэтому должно быть  $\sin \alpha l = 0$ . Отсюда следует, что криволинейные формы равновесия стержня могут существовать, если  $\alpha l$  принимает значения  $\pi, 2\pi, \dots, n\pi$ . Величина  $\alpha l$  не может быть равна нулю, так как это решение соответствует случаю  $\alpha = \sqrt{\frac{P_K}{EJ}} = 0$  или  $P_K = 0$ .

Приравнявая  $\alpha l = n\pi$  и подставляя  $\alpha = \sqrt{\frac{P_K}{EJ}}$ , получаем

$$P_K = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}. \quad (17.5)$$

Выражение (17.5) называется формулой Эйлера. По ней можно вычислить критическую силу  $P_K$  при выпучивании стержня в одной из двух главных его плоскостей, так как только при этом условии справедливо уравнение (17.2), а следовательно и формула (17.5).

Выпучивание стержня происходит в сторону наименьшей жесткости, если нет специальных устройств, препятствующих изгибу стержня в этом направлении. Поэтому в формулу Эйлера надо подставлять  $J_{\min}$  — меньшей из главных центральных моментов инерции поперечного сечения стержня.

Величина наибольшего прогиба стержня  $A$  в приведенном решении остается неопределенной, она принята произвольной, но предполагается малой.

Величина критической силы, определяемая формулой (17.5), зависит от коэффициента  $n$ . Выясним геометрический смысл этого коэффициента.

Выше мы установили, что изогнутая ось стержня является синусоидой, уравнение которой после подстановки  $\alpha = n\pi/l$  в выражение (17.4) принимает вид

$$y(x) = A \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.6)$$

Синусоиды для  $n = 1, n = 2$  изображены на рис. 17.5. Нетрудно заметить, что величина  $n$  представляет собой число полуволн синусоиды.



соиды, по которой изогнется стержень. Очевидно, стержень всегда изогнется по наименьшему числу полуволн, допускаемому его опорными устройствами, так как согласно (17.5) наименьшему  $n$  соответствует наименьшая критическая сила. Только эта первая критическая сила и имеет реальный физический смысл.

Например, стержень с шарнирно опертymi концами изогнется, как только будет достигнуто наименьшее значение критической силы, соответствующее  $n = 1$ , так как опорные устройства этого стержня допускают изгиб его по одной полуволне синусоиды. Критические силы, соответствующие  $n = 2$ ,  $n = 3$  и более, могут быть достигнуты только при наличии промежуточных опор (рис. 17.6). Для стержня с шарнирными концевыми опорами без промежуточных закреплений реальный смысл имеет первая критическая сила

$$P_{\kappa} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (17.7)$$

Формула (17.5), как следует из ее вывода, справедлива не только для стержня с шарнирно закрепленными концами, но и для любого стержня, который изогнется при выпучивании по целому числу полуволн. Применим эту формулу, например, при определении критической силы для стержня, опорные устройства которого допускают только продольные смещения его концов (стойка с заделанными концами). Как видно из рис. 17.7, число полуволн изогнутой оси в этом случае  $n = 2$  и, следовательно, критическая сила для стержня при данных опорных устройствах

$$P_{\kappa} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Эту формулу можно записать в виде

$$P_{\kappa} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,5l)^2}. \quad (17.8)$$

Рассмотрим далее пример чтобы показать, какой вид имеет выражение для критической силы в случаях, когда стойка выпучивается не по целому числу полуволн синусоиды.

Предположим, что стойка с одним заземленным и другим свободным концом (рис. 17.8) сжата силой  $P$ . Если сила  $P = P_{\kappa}$ , то кроме прямолинейной

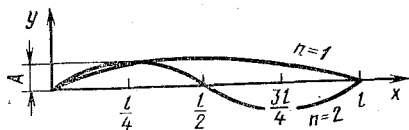


Рис. 17.5

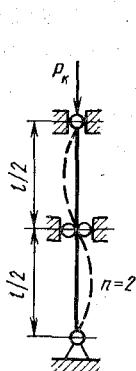


Рис. 17.6

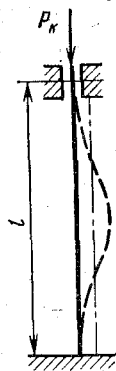


Рис. 17.7

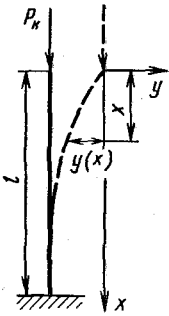


Рис. 17.8

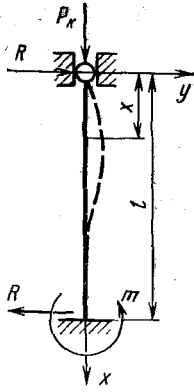


Рис. 17.9

может существовать также и криволинейная форма равновесия стойки (пунктир на рис. 17.8).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стойки в изображенной на рис. 17.8 системе координатных осей имеет вид  $EJy'' = -P_k y$  или  $y'' + \alpha^2 y = 0$ , где, как и прежде,  $\alpha^2 = P_k/(EJ)$ .

Общее решение этого уравнения:  $y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$ .

Подчиняя это решение очевидным граничным условиям:  $y = 0$  при  $x = 0$  и  $y' = 0$  при  $x = l$ , получаем  $B = 0$ ;  $A \alpha \cos \alpha l = 0$ .

Мы предположили, что стойка изогнута, поэтому величина  $A$  не может быть равна нулю. Следовательно,  $\cos \alpha l = 0$ . Наименьший отличный от нуля, корень этого уравнения  $\alpha l = \pi/2$  определяет первую критическую силу

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}, \quad (17.9)$$

которой соответствует изгиб стержня по синусоиде

$$y = A \sin \frac{\pi x}{2l}.$$

Значениям  $\alpha l = \frac{3}{2} \pi$ ,  $\alpha l = \frac{5}{2} \pi$  и т. д., как было показано выше, соответствуют большие величины  $P_k$  и более сложные формы изогнутой оси стойки, которые могут практически существовать лишь при наличии промежуточных опор.

В качестве второго примера рассмотрим стойку с одним зашечленным и вторым шарнирно опертым концом (рис. 17.9). Вследствие искривления оси стержня при  $P = P_k$  со стороны шарнирной опоры возникает горизонтальная реактивная сила  $R$ . Поэтому изгибающий момент в текущем сечении стержня  $M(x) = Rx - P_k y$ .

Дифференциальное уравнение упругой линии

$$EJy'' = Rx - P_k y \text{ или } y'' + \alpha^2 y = \frac{R}{EJ} x.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = y_0 + y^* = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{R}{P_k} x.$$

Используя условия на концах стержня, выразим постоянные  $A$  и  $B$  через  $R$ .

При  $x = 0$  прогиб  $y = 0$ , следовательно,  $B = 0$ .

При  $x = l$  угол поворота сечения равен нулю, поэтому  $y'(l) = 0$ . Из этого условия получаем

$$A = \frac{R}{P_k \alpha \cos \alpha l}.$$

Итак, имеем следующее уравнение упругой линии стержня:

$$y(x) = \frac{R}{P_k} \left( x - \frac{\sin \alpha x}{\alpha \cos \alpha l} \right).$$

Условие  $y(l) = 0$  будет выполнено, если

$$l - \frac{\sin \alpha l}{\alpha \cos \alpha l} = 0.$$

Отсюда получаем следующее трансцендентное разрешающее уравнение для определения величины  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l.$$

Наименьший корень этого уравнения определяет первую критическую силу. Это уравнение решается методом подбора. Нетрудно поверить, что наименьший, отличный от нуля, корень этого уравнения  $\alpha l = 4,493 = 1,43\pi$ .

Кроме метода подбора может быть использован графический метод. С этой целью строятся графики функций  $y = \operatorname{tg} \alpha l$  и  $y = \alpha l$ , представленные на рис. 17.10. Корни уравнения определяются абсциссами точек пересечения кривой  $y = \operatorname{tg} \alpha l$  и прямой  $y = \alpha l$ . Наименьший корень, полученный этим путем, соответствует точке  $N$  и также равен  $1,43\pi$ .

Принимая  $\alpha l = 1,43\pi$ , получаем следующее выражение для критической силы:

$$P_k = \frac{\pi^2 E J}{(0,7l)^2}. \quad (17.10)$$

Сопоставляя формулы (17.7), (17.8), (17.9) и (17.10), нетрудно заметить, что все они имеют одинаковое строение, и их можно обобщить на случай любых опорных устройств стойки, если записать формулу Эйлера в виде

$$P_k = \frac{\pi^2 E J}{(\mu l)^2}. \quad (17.11)$$

Здесь  $\mu = 1/n$  — величина, обратная числу полуволн  $n$  синусоиды, по которой изогнется стержень. Постоянная  $\mu$  называется коэффициентом приведения длины, а произведение  $\mu l$  — приведенной длиной стержня. Приведенная длина есть длина полуволны синусоиды, по которой изгибается этот стержень.

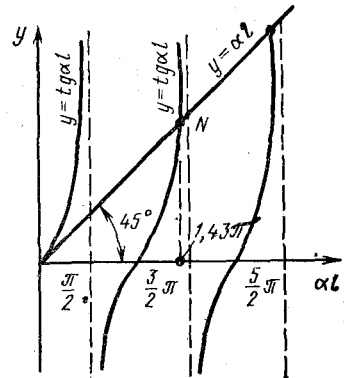


Рис. 17.10

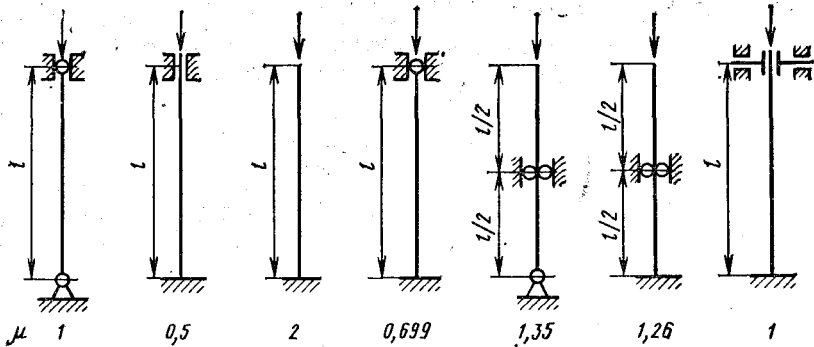


Рис. 17.11

Случай шарнирного закрепления концов стержня называется основным. Из сказанного выше следует, что критическая сила для любого случая закрепления стержня может быть вычислена по формуле для основного случая при замене в ней действительной длины стержня его приведенной длиной  $\mu l$ .

Коэффициенты приведения  $\mu$  для некоторых стоек даны на рис. 17.11.

### 17.3. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Вывод формулы Эйлера основан на интегрировании дифференциального уравнения упругой линии стержня. Это уравнение справедливо только в пределах линейной зависимости между напряжениями и деформациями, поэтому и формула Эйлера применима только до тех пор, пока критические напряжения, определяемые по этой формуле, не превосходят предела пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}}$ , т. е. при условии

$$\sigma_{\text{к}} = \frac{P_{\text{к}}}{F} = \frac{\pi^2 E J}{(\mu l)^2 F} \leq \sigma_{\text{пц}}.$$

Используя соотношение  $J = F i^2$ , где  $i$  — наименьший радиус инерции поперечного сечения стержня, можем записать это условие так:

$$\sigma_{\text{к}} = \frac{\pi^2 E i^2}{(\mu l)^2} \leq \sigma_{\text{пц}} \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{к}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц}}. \quad (17.12)$$

Безразмерная величина  $\lambda$  называется гибкостью стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}. \quad (17.13)$$

В понятие гибкость находят отражение длина стержня, геометрические параметры поперечных сечений, условия его закрепления и вид нагружения внешними силами.

Обозначим через  $\lambda_0$  значение гибкости стержня, при котором  $\sigma_{\text{к}} = \sigma_{\text{пц}}$ . Очевидно,  $\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}$ .

Согласно формуле (17.12), большим значениям гибкости соответствуют меньшие значения критических напряжений. Следовательно, формула Эйлера применима для стержней, гибкость которых

$$\lambda \geq \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пл}}}}.$$

Например, для конструкционной малоуглеродистой стали с  $\sigma_{\text{пл}} = 210$  МПа и  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа формулой Эйлера пользоваться лишь при гибкости стержня

$$\lambda \geq \lambda_0 = 3,14 \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{210}} \approx 100,$$

а для алюминиевого сплава Д16Т с  $\sigma_{\text{пл}} = 200$  МПа и  $E = 0,75 \times 10^5$  МПа при

$$\lambda \geq \lambda_0 = 3,14 \sqrt{\frac{0,75 \cdot 10^5}{200}} \approx 60.$$

#### 17.4. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗА ПРЕДЕЛАМИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ. ГРАФИК КРИТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Тщательно поставленные опыты показали справедливость формулы Эйлера для стержней большой гибкости ( $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $\sigma_{\text{к}} \ll \sigma_{\text{пл}}$ ). В то же время эти опыты подтвердили неприменимость формулы Эйлера для стержней, гибкость которых  $\lambda < \lambda_0$ . Для таких стержней формула Эйлера дает значения критических нагрузок, превышающие их действительные значения. Попытки использовать формулу Эйлера для стержней средней и малой гибкости ( $\lambda < \lambda_0$ ,  $\sigma_{\text{к}} > \sigma_{\text{пл}}$ ) приводили иногда к серьезным катастрофам.

Теория устойчивости стержней за пределом пропорциональности была развита Т. Карманом (1909 г.).

Для критической нагрузки им было получено уравнение, аналогичное по структуре формуле Эйлера:

$$P_{\text{к}} = \frac{\pi^2 T J}{(\mu l)^2} \quad (17.14)$$

и

$$\sigma_{\text{к}} = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2}, \quad (17.15)$$

где  $T$  — приведенный модуль, или модуль Кармана.

Модуль  $T$  является величиной переменной, зависящей как от величины напряжений  $\sigma_{\text{к}}$ , так и от формы сечения. Зависимость модуля  $T$  от напряжений  $\sigma_{\text{к}}$  устанавливается на основании диаграммы сжатия материала стойки в осях  $\sigma$ ,  $\epsilon$ . При напряжениях  $\sigma_{\text{к}} \ll \sigma_{\text{пл}}$  приведенный модуль  $T$  принимает значение модуля упругости  $E$ . Однако, оказалось, что определяемые формулой (17.15) критические напряжения несколько выше экспериментальных.



Рис. 17.12

Лучшее согласование с экспериментальными данными дает формула Энгессера—Шенли

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E_R}{\lambda^2}, \quad (17.16)$$

где  $E_R$  — касательный модуль упругости, численно равный тангенсу угла наклона касательной к диаграмме сжатия  $\sigma = f(\epsilon)$  материала при  $\sigma = \sigma_k$ .

Использование формул (17.14), (17.15) и (17.16) требует построения

диаграммы сжатия для материала стержня, что осложняет их применение. Поэтому в практических расчетах на устойчивость при  $\lambda < \lambda_0$  часто пользуются либо непосредственно экспериментальными данными, либо эмпирическими формулами.

Наибольшее распространение имеет линейная формула, предложенная Ф. С. Ясинским (1895 г.):

$$\sigma_k = a - b\lambda. \quad (17.17)$$

В этой формуле  $\lambda$  — гибкость стержня, а  $a$  и  $b$  — коэффициенты, зависящие от свойств материала. Например, для стали 3 при  $\sigma_b = 380$  МПа и  $\sigma_T = 240$  МПа формула (17.17) имеет вид

$$\sigma_k = 310 - 1,14\lambda.$$

По формуле (17.17) проводится расчет на устойчивость стержней средней гибкости, разрушение которых при сжатии сопровождается значительным боковым выпучиванием.

Для стержней малой гибкости ( $\lambda < \lambda_1$ ) понятие потери устойчивости неприменимо в том смысле, в каком применяется для стержней большой гибкости. Стержни, у которых длина невелика по отношению к размерам поперечного сечения, выходят из строя главным образом из-за того, что напряжения сжатия в них достигают предела текучести  $\sigma_T$  (при пластичном материале) или предела прочности  $\sigma_b$  (при хрупком материале). Поэтому для стержней малой гибкости в качестве критического напряжения принимается предел текучести  $\sigma_T$  или предел прочности  $\sigma_b$ . Четкой границы между стержнями малой и средней гибкости провести нельзя. В расчетах принимают  $\lambda_1 = (0,2 \dots 0,4) \lambda_0$ .

Выбрав  $\lambda_1$ , можно найти коэффициенты  $a$  и  $b$  в формуле (17.17), составляя уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами  $(\lambda_1, \sigma_T)$  и  $(\lambda_0, \sigma_{пл})$ :

$$\frac{\sigma_k - \sigma_T}{\sigma_{пл} - \sigma_T} = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_1}.$$

Зависимость критических напряжений  $\sigma_k$  от гибкости  $\lambda$  изображается графически в виде диаграммы критических напряжений. Такая диаграмма для стали представлена на рис. 17.12.

Для стержней малой гибкости зависимость  $\sigma_k$  от  $\lambda$  выражена горизонтальной прямой, для стержней средней гибкости — наклонной прямой (17.17), а для стержней большой гибкости — гиперболой Эйлера.

Если известна гибкость рассчитываемого стержня, то критическое напряжение может быть найдено непосредственно по диаграмме критических напряжений.

### 17.5. ПРАКТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ РАСЧЕТА НА ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

Расчет стоек на продольный изгиб затруднен тем, что критические напряжения для стоек малой, средней и большой гибкости определены различными формулами и не всегда заранее известно, какой из них надо пользоваться при определении критической нагрузки.

В расчетах стержней на продольный изгиб встречаются задачи двух типов.

**Тип первый.** Заданы размеры, материал и условия закрепления стержня и выбран коэффициент запаса устойчивости  $n$ . Требуется определить допустимую нагрузку  $P_{\text{доп}}$ .

Определяем радиус инерции  $i$  поперечного сечения и гибкость стержня  $\lambda = \mu l / i$ .

Сравнивая найденное значение  $\lambda$  с  $\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пс}}}}$ , устанавливаем, применима ли формула Эйлера. Если  $\lambda > \lambda_0$ , то формула Эйлера применима и  $P_{\text{доп}}$  можем найти из условия

$$P_k = P_{\text{доп}} n = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}.$$

Отсюда

$$P_{\text{доп}} = \frac{\pi^2 EJ}{n (\mu l)^2}. \quad (17.18)$$

Если  $\lambda < \lambda_0$ , то формула Эйлера не применима. В этом случае для определения  $P_{\text{доп}}$  можно воспользоваться формулой (17.17) или уравнениями (17.15), (17.16).

В обоих случаях можно вести также расчет, определяя  $\sigma_k$  для найденного значения  $\lambda$  непосредственно по диаграмме критических напряжений.

**Пример.** Определить допустимую нагрузку для стойки (рис. 17.13), выполненной из двутавра № 18, в случаях  $l = 4$  м и  $l = 2,5$  м, принимая запас устойчивости  $n = 2,5$ .

Данные для сечения двутавра № 18: площадь  $F = 30,6 \text{ см}^2$ ,  $i_y = 2,0 \text{ см}$ ,  $J_y = 122 \text{ см}^4$ .

**Решение.** Для материала стоек  $\lambda_0 = 100$ . Гибкость первой стойки  $\lambda = \mu l / i = 0,7 \cdot 400 / 2 = 140 > 100$ .

Поэтому для определения критической силы надо воспользоваться формулой Эйлера, а допустимую нагрузку определить по формуле (17.18):

$$P_{\text{доп}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{мин}}}{n (\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 122 \cdot 10^{-8}}{2,5 \cdot (0,7 \cdot 4)^2} = 123 \text{ кН}.$$

Гибкость второй стойки

$$\lambda = \frac{0,7 \cdot 250}{2} = 87,5 < 100.$$

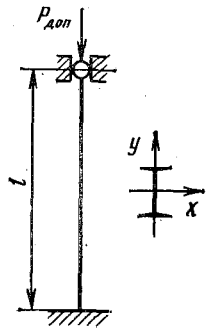


Рис. 17.13

Следовательно, выпучивание стойки происходит при  $\sigma_k > \sigma_{\text{пд}}$  и для определения допускаемой нагрузки можно воспользоваться формулой

$$P_{\text{доп}} = \frac{F}{n} (310 - 1,14\lambda).$$

Отсюда

$$P_{\text{доп}} = \frac{3060}{2,5} (310 - 1,14 \cdot 87,5) = 259 \text{ кН}.$$

**Тип второй.** Заданы нагрузка  $P$ , коэффициент запаса устойчивости  $n$ , материал, условия закрепления и форма поперечного сечения стержня. Требуется подобрать размеры сечения.

Форму сечения стараются подобрать так, чтобы моменты инерции относительно его главных центральных осей возможно меньше отличались друг от друга, т. е. чтобы  $J_1 \approx J_2$ .

В рассматриваемом случае неизвестна гибкость стержня  $\lambda$ , так как неизвестны размеры сечения, и, следовательно, неизвестно, по какой из формул для  $\sigma_k$  вести расчет. Задачу подбора размеров сечения приходится решать методом попыток.

Первоначально воспользуемся формулой Эйлера для определения  $J_{\text{min}}$ :

$$P_k = nP = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{(\mu l)^2}.$$

Затем подберем размеры, соответствующие найденному значению  $J_{\text{min}}$ .

Далее определим гибкость  $\lambda$  выбранного стержня и проверим, можно ли было вести расчет по формуле Эйлера.

Если  $\lambda > \lambda_0$ , то формула Эйлера применима и задача подбора размеров поперечного сечения решена.

Если  $\lambda \leq \lambda_0$ , то расчет по формуле Эйлера вести было нельзя и найденные размеры сечения меньше требуемых. В этом случае зададимся размерами, большими вычисленных по формуле Эйлера. Для принятых размеров определим  $P_{\text{доп}}$  с помощью одной из формул: (17.15), (17.16), (17.17), и сравним найденное значение  $P_{\text{доп}} = \sigma_k F/n$  с заданной нагрузкой  $P$ . Если разница между  $P_{\text{доп}}$  и заданной нагрузкой  $P$  меньше 5%, то останавливаемся на выбранных размерах, и расчет закончен. Если же разница между  $P_{\text{доп}}$  и  $P$  больше 5%, то расчет надо повторить, изменив размеры сечения.

## 17.6. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Определение критической нагрузки методом интегрирования дифференциального уравнения упругой линии стержня во многих практически важных случаях представляет значительные трудности, так как требует численного решения громоздких трансцендентных уравнений. Поэтому широкое распространение получил энергетический метод, позволяющий определять критические нагрузки непосредственно, не прибегая к составлению и интегрированию дифференциальных уравнений.

Энергетический метод основан на исследовании изменения потенциальной энергии при переходе стержня из прямолинейной в криволинейную форму равновесия.

Предположим, что прямой стержень, сжатый силой  $P$ , был выведен какой-либо поперечной силой из прямолинейного состояния и искривился. При этом на деформацию стержня была затрачена энергия, равная сумме работы  $A$ , произведенной поперечной силой,



и работы, совершенной силой  $P$  на смещение верхнего конца стержня (рис. 17.14). Работа силы  $P$ , равная  $P\lambda$ , всегда положительна, и произведение  $P\lambda$  не делится пополам потому, что величина этой силы  $P$  в процессе перемещения не изменяется.

Энергия, затраченная на искривление стержня, накапливается в нем в виде потенциальной энергии изгиба  $U$ :

$$A + P\lambda = U,$$

отсюда

$$A = U - P\lambda. \quad (17.19)$$

При малой величине силы  $P$  стержень будет сохранять свою прямолинейную форму, и для его искривления надо затратить некоторую энергию. Следовательно, в этом случае  $A > 0$ , а потенциальная энергия  $U > P\lambda$ , т. е. запас потенциальной энергии в искривленном стержне превышает работу, совершенную силой  $P$  на смещении  $\lambda$ . Поэтому при удалении поперечной силы стержень вернется в первоначальное состояние, так как обладает большей потенциальной энергией, чем необходимо для преодоления сопротивления силы  $P$ .

В процессе постепенного возрастания сила  $P$  достигает такого значения, при котором  $U = P\lambda$ .

В этом случае  $A = 0$  и при любом малом искривлении стержень не будет возвращаться в первоначальное прямолинейное состояние, так как кроме прямолинейной возможна и криволинейная форма равновесия.

Если величина силы  $P$  такова, что  $U < P\lambda$ , то  $A < 0$  и стержень будет изгибаться только от действия силы  $P$  без помощи поперечной силы.

Условием перехода от устойчивой формы равновесия к неустойчивой, из которого и находится критическое значение силы  $P_{кр}$ , будет равенство

$$P_{кр}\lambda = U. \quad (17.20)$$

Определим  $U$  и  $\lambda$ . Потенциальная энергия изгиба вычисляется, как было показано в теории поперечного изгиба, по формуле

$$U = \int_0^l \frac{M_{изг}^2 dx}{2EJ}.$$

Замечая, что  $M_{изг} = EJy''(x)$ , выражение для потенциальной энергии можем записать

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (y'')^2 dx. \quad (17.21)$$

Для определения  $\lambda$  выделим элемент стержня длиной  $dx$ . Длина этого элемента при искривлении стержня остается неизменной, но элемент повернется и составит с осью  $x$  угол  $\alpha$ , причем  $\text{tg } \alpha = dy/dx$ .

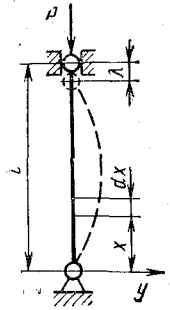


Рис. 17.14

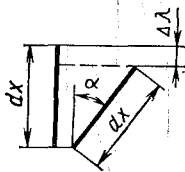


Рис. 17.15

Опускание  $\Delta\lambda$  верхнего конца оси элемента, вызванное наклоном элемента (рис. 17.15),

$$\Delta\lambda = dx - dx \cos \alpha = dx (1 - \cos \alpha) = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} dx.$$

Вследствие малости угла  $\alpha$  можно принять  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\alpha = y'$ .

Отсюда

$$\Delta\lambda = \frac{\alpha^2}{2} = \frac{(y')^2}{2} dx.$$

Суммируя  $\Delta\lambda$  по длине стержня, находим смещение его верхнего конца:

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx. \quad (17.22)$$

Подставляя выражения (17.22) и (17.21) в равенство (17.20), получаем следующую формулу для определения критической силы:

$$P_{\text{к}} = \frac{\int_0^l EJ (y'')^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx}. \quad (17.23)$$

Для определения критической силы по формуле (17.23) необходимо заранее знать уравнение изогнутой оси стержня, так как в эту формулу входят первая и вторая производные от прогибов. Если уравнение этой оси заранее неизвестно, то можно использовать уравнения (17.23) для приближенного определения критической силы. Для этого надо подобрать подходящее уравнение для изогнутой оси стержня. Эта выбранная кривая должна удовлетворять всем граничным условиям рассматриваемого стержня.

Энергетический метод дает очень небольшую погрешность, если принятая кривая прогибов надлежащим образом подобрана, причем всегда значение критической силы получается несколько выше действительного. Объясняется это тем, что стержень всегда искривляется по кривой наименьшего сопротивления, соответствующей наименьшему возможному значению коэффициента  $n$  (см. разд. 17.2). Приближенно выбранная кривая, как правило, отличается от кривой наименьшего сопротивления, требует для своей реализации большей затраты энергии  $U$  и поэтому формула (17.23) даст значения  $P_{\text{к}}$  больше действительных.

Приближенно кривые прогибов стоек представляют в виде тригонометрических

$$y(x) = a_0 + a_1 \sin x + \dots + a_n \sin nx + \\ + b_1 \cos x + \dots + b_m \cos mx$$

или алгебраических полиномов

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

коэффициенты которых подбирают так, чтобы были удовлетворены все граничные условия рассматриваемых стоек.

Приложение энергетического метода определения критических нагрузок рассмотрим на примерах.

1. Определим  $P_K$  для стойки с одним свободным и другим жестко зашлепленным концом (рис. 17.16).

Установим сначала граничные условия для рассматриваемой стойки.

Для нижнего конца стойки имеем  $y(0) = 0, y'(0) = 0$ , для верхнего  $y''(l) = 0$ .

Последнее условие вытекает из уравнения  $EJy'' = M_{изг}$ . В верхнем сечении стойки  $M_{изг} = 0$  и, следовательно,  $y''(l) = 0$ .

Указанные граничные условия удовлетворяются, если задаться уравнением упругой линии стойки в виде

$$y(x) = a \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right).$$

Первая и вторая производные от этой функции:

$$y'(x) = \frac{\pi a}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l};$$

$$y''(x) = \frac{\pi^2 a}{4l^2} \cos \frac{\pi x}{2l}.$$

Вычисляя интегралы

$$\int_0^l (y'')^2 dx = \left( \frac{\pi^2 a}{4l^2} \right)^2 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{2l} dx = a^2 \left( \frac{\pi^2}{4l^2} \right)^2 \frac{l}{2};$$

$$\int_0^l (y')^2 dx = \frac{\pi^2 a^2}{4l^2} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx = a^2 \frac{\pi^2}{4l^2} \frac{l}{2}$$

и подставляя их значения в формулу (17.23), находим критическую силу

$$P_K = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

В данном случае получено точное значение критической силы (см. формулу 17.9). Объясняется это тем, что для прогибов было выбрано выражение, являющееся точным решением дифференциального уравнения упругой линии рассматриваемой стойки.

2. Определим коэффициент приведения длины  $\mu$  для однопролетной стойки с консолью и нижним шарнирно опертым концом (рис. 17.17).

Для решения задачи зададимся уравнением изогнутой оси стержня в виде алгебраической функции  $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ . Коэффициенты этой функции подберем так, чтобы были удовлетворены граничные условия стойки:  $y(0) = 0; y'(0) = 0; y(l/2) = 0; y''(l) = 0$ . Из первого и второго условий полу-

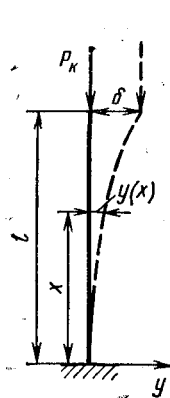


Рис. 17.16

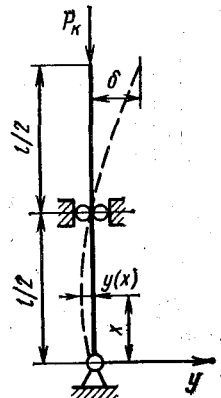


Рис. 17.17

чаем  $a_0 = 0$ ,  $a_2 = 0$ . Третье условие дает  $a_1 \frac{l}{2} + a_3 \frac{l^3}{8} + a_4 \frac{l^4}{16} = 0$ . Из четвертого условия получаем  $a_3 + 2a_4 l = 0$ .

Итак, для определения коэффициентов  $a_1$ ,  $a_3$  и  $a_4$  имеем систему уравнений:

$$8a_1 + 2a_3 l^2 + a_4 l^3 = 0;$$

$$a_3 + 2a_4 l = 0.$$

Решая эту систему, получаем  $a_3 = -2a_4 l$ ,  $a_1 = \frac{3}{8} a_4 l^3$ . Следовательно, уравнение упругой линии стержня получает вид

$$y(x) = \frac{a_4}{8} (3l^3 x - 16lx^3 + 8x^4).$$

Далее находим

$$y' = \frac{a_4}{8} (3l^3 - 48lx^2 + 32x^3), \quad y'' = 12a_4 (x^2 - lx);$$

$$(y')^2 = \frac{a_4^2}{64} (1024x^6 - 3072lx^5 + 2304l^2x^4 + 192l^3x^3 - 288l^4x^2 + 9l^6);$$

$$(y'')^2 = 144a_4^2 (x^4 - 2lx^3 + l^2x^2).$$

Интегралы  $\int_0^l (y')^2 dx = \frac{7}{8} a_4^2 l^7$ ;  $\int_0^l (y'')^2 dx = \frac{72}{15} a_4^2 l^5$ .

Подставляя найденные значения интегралов в формулу (17.23), получаем

$$P_{кр} = \frac{\int_0^l EJ (y'')^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx} = \frac{576 EJ}{105 l^2}.$$

Преобразуем это выражение к виду (17.14):

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{\pi^2 \frac{105}{576} l^2}.$$

Следовательно,

$$\mu^2 = \pi^2 \frac{105}{576},$$

и искомый коэффициент приведения длины  $\mu = \pi \sqrt{\frac{105}{576}} = 1,34$ .

Значение  $\mu$  для данной стойки, полученное интегрированием дифференциального уравнения ее упругой линии, приведено на рис. 17.11 и равно 1,35. Таким образом, погрешность приближенного решения составляет 0,6%.

## 17.7. ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Этот метод основан на исследовании движения сжатого стержня, получившего малое отклонение от положения равновесия в результате однократного воздействия какой-либо поперечной нагрузки.

При малых значениях сжимающей силы  $P$  такой стержень будет испытывать гармонические колебания с амплитудами, определяемыми начальными отклонениями. В реальных условиях эти колебания быстро затухают из-за действия различного рода сил сопротивления.

Частота колебаний стержня уменьшается с ростом силы  $P$  и для консервативных систем\* обращается в нуль, когда сила  $P$  достигает критического значения  $P_k$ .

Если сила  $P$  превысит критическое значение, то частота колебаний станет мнимой величиной, а движение стержня будет представлять собой колебания с неограниченно возрастающими амплитудами или аperiodическое возрастание прогибов при сколь угодно малых возмущениях.

Таким образом, согласно динамическому критерию устойчивости, условием перехода от устойчивой формы равновесия стержня к неустойчивой является равенство нулю частоты собственных колебаний сжатого стержня (или переход от действительных значений к мнимым).

Покажем справедливость сказанного выше на примере сжатого стержня, шарнирно опертого по концам.

Для составления уравнения свободных колебаний стержня воспользуемся следующим приемом. Запишем сначала приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня, сжатого силой  $P$  и изгибаемого поперечной нагрузкой интенсивности  $q$  (рис. 17.18):

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M_{\Pi} - Py,$$

где  $M_{\Pi}$  — изгибающий момент от поперечной нагрузки (см. разд. 18.2).

Дифференцируя последнее равенство дважды по  $x$  и учитывая, что  $\frac{d^2M_{\Pi}}{dx^2} = q$ , получаем

$$EJ \frac{d^4y}{dx^4} + P \frac{d^2y}{dx^2} = q. \quad (17.24)$$

Из (17.24) легко перейти к уравнению поперечных колебаний сжатого стержня, если рассматривать смещения  $y$  не только как функцию координат  $x$ , но и времени  $t$ , а под поперечной нагрузкой

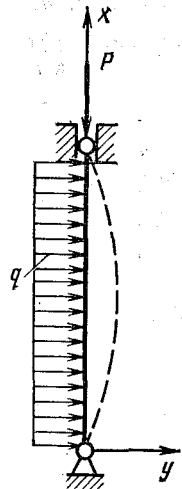


Рис. 17.18

\* Консервативными называются силы, работа которых зависит только от начального и конечного положения точек их приложения и не зависит от траектории перемещения этих точек.

понимать, согласно принципу Даламбера, силы инерции массы стержня, погонная интенсивность которых

$$q = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (17.25)$$

где  $m$  — масса единицы длины стержня.

Подставляя (17.25) в правую часть (17.24) и заменяя в левой обыкновенные производные частными, получаем уравнение свободных колебаний сжатого стержня в виде

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (17.26)$$

Решение этого уравнения будем искать в форме

$$y(x, t) = f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (17.27)$$

где  $f_n(t)$  — неизвестная пока функция времени,  $l$  — длина стержня, а  $\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$  определяет форму упругой оси стержня при колебаниях.

Выражение (17.27), как нетрудно заметить, удовлетворяет всем граничным условиям задачи, требующим, чтобы на концах стержня обращались в нуль прогибы и изгибающие моменты, т. е.  $y(0) = y(l) = 0$  и  $y''(0) = y''(l) = 0$  при любом значении  $t$ .

Подставляя (17.27) в (17.26), получаем

$$\left[ m \frac{d^2 f_n}{dt^2} + \left( EJ \frac{n^4 \pi^4}{l^4} - P \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) f_n \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = 0. \quad (17.28)$$

Последнее равенство будет выполняться при любых  $x$ , если  $f_n(t)$  будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + \frac{n^2 \pi^2}{ml^2} \left[ EJ \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - P \right] f_n = 0. \quad (17.29)$$

Введя обозначение

$$\omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{ml^2} \left[ EJ \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - P \right]; \quad (17.30)$$

запишем (17.29) так:

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + \omega_n^2 f_n = 0. \quad (17.31)$$

Здесь  $\omega_n$  — частота свободных колебаний стержня при изгибе его по  $n$  полуволнам синусоиды, т. е. частота  $n$ -го тона колебаний.

Решение уравнения (17.31) имеет вид

$$f_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t. \quad (17.32)$$

Следовательно,

$$y(x, t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (17.33)$$

Рассмотрим выражение (17.30) для частоты  $\omega_n$ . Если разность, стоящая в скобках, будет положительна для любого значения  $n$ , то выражение (17.33) будет представлять гармонические колебания с амплитудами, определяемыми начальным возмущением. Если хотя бы при одном  $n$  эта разность станет отрицательной, то  $\omega_n$  будет числом мнимым, а колебания, определяемые (17.33), будут происходить с возрастающей амплитудой, поскольку при увеличении времени  $t$  величина  $\cos it = \operatorname{ch} t$ ;  $\sin it = i \operatorname{sh} t$ ;  $i = \sqrt{-1}$  неограниченно возрастают\*.

Таким образом, прямолинейная форма равновесия стойки, сжатой силой  $P$ , будет устойчивой до тех пор, пока  $\omega_n^2 > 0$ , и будет неустойчивой при  $\omega_n^2 < 0$ ; критерием потери устойчивости рассматриваемого стержня будет обращение в нуль частоты  $\omega_n$  свободных колебаний хотя бы одного тона  $n$ .

Частота  $\omega_1$  основного тона колебаний рассматриваемого стержня (колебания по одной полуволне синусоиды) становится равной нулю, когда сила  $P$  достигает критического значения, равного согласно (17.30)

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (17.34)$$

Этот результат совпадает с полученным ранее (см. 17.7).

---

\* Заключение о неограниченном возрастании амплитуды неправомерно, так как при составлении уравнения колебаний использовали приближенное дифференциальное уравнение упругой линии стержня, справедливое лишь при малых прогибах, но тенденция к возрастанию амплитуд несомненна.

## 18.1. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА

Продольно-поперечный изгиб прямого бруса вызывается совместным действием продольных и поперечных сил.

Известно, что при поперечном изгибе небольшое изменение во взаимном расположении внешних нагрузок, вызываемое деформацией бруса, незначительно сказывается на прогибах и напряжениях, и этим изменением обычно в расчетах пренебрегают.

При совместном действии продольных и поперечных сил искривление оси бруса может существенно сказаться на величине прогибов и напряжений, если продольные силы велики.

Если продольные силы невелики, а брус обладает большой жесткостью на изгиб, то влияние этих сил на напряжения и деформации будет мало и им можно пренебречь. Подобный случай деформации бруса был рассмотрен при изучении внецентренного растяжения и сжатия.

Чтобы выяснить, сколь значительно влияние продольной силы на изгиб, необходимо определить деформации оси бруса при одновременном действии продольных и поперечных сил.

## 18.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБОВ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗОГНУТОЙ ОСИ

Рассмотрим балку, нагруженную системой поперечных сил и сжатую продольной силой  $S$  (рис. 18.1).

Направим ось  $y$  так, как показано на рис. 18.1, а ось  $x$  совместим с осью балки.

Полагая, что прогибы малы и изгиб происходит в одной из главных плоскостей балки, можем записать дифференциальное уравнение упругой линии балки в виде

$$EJy''(x) = \pm M_{\text{изг}}(x), \quad (18.1)$$

где  $M_{\text{изг}}(x)$  — изгибающий момент в текущем сечении от совместного действия продольных и поперечных нагрузок, знак плюс в правой части берется при направлении оси  $y$  вверх, а минус — при направлении этой оси вниз.

Момент  $M_{\text{изг}}(x)$  равен сумме изгибающих моментов в том же сечении от поперечных нагрузок  $M_{\Pi}(x)$  и от продольной силы  $S$ :

$$M_{\text{изг}}(x) = M_{\Pi}(x) + Sy(x). \quad (18.2)$$



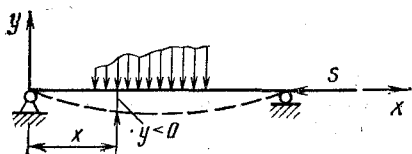


Рис. 18.1

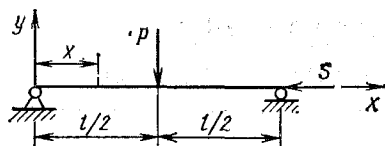


Рис. 18.2

Знаки моментов  $M_{\Pi}(x)$  и  $Sy(x)$  устанавливаются по тому же правилу, что и при поперечном изгибе, но при вычислении момента от силы  $S$  учитывается еще и знак прогиба  $y(x)$ . Так, в сечениях балки, представленной на рис. 18.1, моменты от силы  $S$  положительны, но прогибы  $y(x)$  отрицательны, поэтому уравнение (18.1) для этой балки имеет вид

$$EJy''(x) = M_{\Pi}(x) + S[-y(x)] = M_{\Pi}(x) - Sy(x). \quad (18.3)$$

При изменении направления поперечной нагрузки на противоположное прогиб  $y(x)$  и момент от силы  $S$  изменяют знаки, поэтому отрицательный знак перед произведением  $Sy(x)$  в правой части уравнения (18.3) сохранится. При этом изменится и знак момента от поперечной нагрузки, но он скрыт в обозначении  $M_{\Pi}(x)$ .

Аналогично можно показать, что при направлении оси  $y$  вниз произведение  $Sy(x)$  будет входить в правую часть уравнения (18.1) с отрицательным знаком независимо от направления поперечной нагрузки.

Таким образом, при продольно-поперечном изгибе независимо от направления оси  $y$  момент от силы  $S$  надо подставлять со знаком минус в правую часть уравнения (18.1), а перед  $M_{\Pi}(x)$  удерживать знак, определяемый выбранным направлением оси  $y$ ; знак момента  $M_{\Pi}(x)$  определяется по правилу, принятому в теории поперечного изгиба.

Введя обозначение  $\alpha^2 = \frac{S}{EJ}$ , запишем уравнение (18.3) так:

$$y'' + \alpha^2 y = \frac{M_{\Pi}(x)}{EJ}. \quad (18.4)$$

Если сила  $S$  будет не сжимающей, а растягивающей, то знак момента от осевой силы в правой части уравнения (18.3) изменится на обратный, и это уравнение при растягивающей продольной силе  $S$  будет иметь вид

$$y'' - \alpha^2 y = \frac{M_{\Pi}(x)}{EJ}. \quad (18.5)$$

Интегрируя уравнение (18.4) и подчиняя его общий интеграл граничным условиям, находим прогибы балки от совместного действия продольных и поперечных нагрузок.

Ход решения проследим на примере двухопорной балки, нагруженной поперечной силой  $P$  в середине пролета и продольной силой  $S$  (рис. 18.2).

Вследствие симметрии изогнутой оси балки достаточно составить уравнение (18.4) только для одного из двух участков, например для левого. Изгибающий момент от силы  $P$  на этом участке  $Px/2$ .

Подставляя выражение для  $M_{\text{и}}(x)$  в уравнение (18.4), получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение  $y'' + \alpha^2 y = Px/(2EJ)$ , общий интеграл которого

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + Px/(2S).$$

Прогиб балки при  $x = 0$  и угол поворота среднего сечения при  $x = l/2$  равны нулю. Следовательно, для определения постоянных интегрирования  $A$  и  $B$  имеем два условия:  $y(0) = 0$  и  $y'(l/2) = 0$ .

Из первого условия получаем  $A = 0$ , из второго  $B = -\frac{P}{2\alpha S \cos \alpha l/2}$ .

Следовательно, уравнение изогнутой оси левого участка балки запишется так:

$$y(x) = -\frac{P \sin \alpha x}{2\alpha S \cos \alpha l/2} + \frac{P}{2S} x.$$

Полагая в этом уравнении  $x = l/2$ , находим максимальный прогиб балки

$$y_{\text{max}} = \frac{Pl}{4S} - \frac{P}{2\alpha S} \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} = \frac{Pl^3}{48EJ} \frac{3(\operatorname{tg} \alpha l/2 - \alpha l/2)}{(\alpha l/2)^3}. \quad (18.6)$$

Суммируя изгибающие моменты в этом сечении от сил  $S$  и  $P$  получаем максимальный изгибающий момент от совместного действия этих сил

$$M_{\text{max}} = \frac{Pl}{4} + S(-y_{\text{max}}) = \frac{P}{2\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} = \frac{Pl}{4} \frac{\operatorname{tg} \alpha l/2}{\alpha l/2}. \quad (18.7)$$

Первые множители в правых частях этих равенств представляют собой максимальный прогиб и максимальный изгибающий момент от действия на балку одной только поперечной силы  $P$  и изменяются пропорционально изменению силы  $P$ .

Вторые множители зависят только от продольной силы  $S$  и выражают влияние этой силы на прогибы и изгибающие моменты. Зависимость их от силы  $S$  не линейная, а более сложная, так как сила  $S$  входит в эти множители под знаком тригонометрической функции.

Когда сила  $S$  мала, величина  $\frac{\alpha l}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{S}{EJ}}$  также незначительна и рассматриваемые множители близки к единице, что легко показать, раскладывая в ряд  $\operatorname{tg} \alpha l/2$ .

Таким образом, при малых значениях  $S$  влияние этой силы на прогибы и изгибающие моменты незначительно и им в расчетах, как указывалось выше, можно пренебречь. С увеличением  $S$  прогибы и моменты возрастают быстрее, чем сама сила  $S$ , и при  $\alpha l/2 \rightarrow$

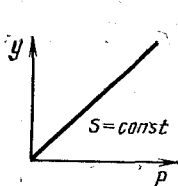


Рис. 18.3

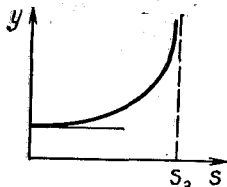


Рис. 18.4

$\Rightarrow \pi/2$  стремятся к бесконечности \*, так как  $\operatorname{tg} \alpha l/2$  стремится к бесконечности. При  $\alpha l/2 = \frac{\pi}{2}$  сила  $S$  достигает предельного значения

$$S_R = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (18.8)$$

Это предельное значение сжимающей силы называется критической нагрузкой. Критическую нагрузку называют также эйлеровой силой.

Результаты приведенного исследования показывают, что прогибы балки и изгибающие моменты пропорциональны поперечной силе  $P$  и нелинейно зависят от продольной силы  $S$ .

Графически зависимость прогибов и моментов от изменения одних поперечных сил при постоянной продольной силе представлена на рис. 18.3, а от изменения продольных сил — на рис. 18.4.

Характер зависимости прогибов и моментов от продольных и поперечных нагрузок, установленный на рассмотренном примере двухопорной балки, наблюдается в любом случае продольно-поперечного изгиба. Нелинейная зависимость прогибов и моментов, а следовательно, и напряжений от продольных сил свидетельствует о том, что при продольно-поперечном изгибе неприменим принцип независимости действия сил: полные прогибы и изгибающие моменты не могут быть найдены суммированием прогибов и моментов, вызванных действием на балку каждой из нагрузок в отдельности.

В качестве примера продольно-поперечного изгиба рассмотрим случай эксцентричного сжатия гибкого бруса постоянного сечения силами, линия действия которых параллельна оси бруса и пересекает главную ось  $y$  на расстоянии  $e$  от центра тяжести поперечного сечения (рис. 18.5).

Отсчитывая для упрощения выкладок прогибы оси стержня от линии действия силы  $P$ , т. е. полагая  $y = y^* + e$ , где  $y^*$  — действительные прогибы оси стержня, а  $e$  — эксцентриситет приложения нагрузки, составляем дифференциальное уравнение этой оси:  $y'' + \alpha^2 y = 0$ . Его общий интеграл:  $y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$ . Усло-

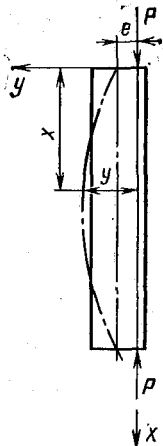


Рис. 18.5

\* Строго говоря, мы не в праве делать выводы, относящиеся к большим прогибам, так как пользовались дифференциальным уравнением упругой линии, действительным только для малых прогибов. Однако общая тенденция к значительному возрастанию прогибов с ростом  $S$  несомненна.

вия на концах стержня:  $y(0) = e$ ,  $y(l) = e$ . Отсюда находим  $A = e$ ;  $B = e(1 - \cos \alpha l) / \sin \alpha l$ . Выражение для  $B$  преобразуем так:

$$B = e \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} = e \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}}{2 \sin \frac{\alpha l}{2} \cos \frac{\alpha l}{2}} = e \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2}.$$

Подставляя найденные значения  $A$  и  $B$  в общий интеграл, получаем уравнение упругой линии стойки в выбранной системе координат осей в виде  $y = e(\cos \alpha x + \operatorname{tg} \alpha l / 2 \sin \alpha x)$ .

Максимальный прогиб  $y_{\max} = e \sec \alpha l / 2$  будет при  $x = l/2$ , а изгибающий момент в этом сечении  $M_{\max} = Pe \sec \alpha l / 2$ .

### 18.3. ПРИБЛИЖЕННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОГИБА БАЛКИ ПРИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Вычисление прогибов при продольно-поперечном изгибе связано с необходимостью составления и интегрирования дифференциального уравнения упругой линии. Выведем приближенную формулу для прогибов.

Упругую линию балки, подвергнутую одновременному действию продольных и поперечных нагрузок, при малых прогибах можно приближенно представить в виде синусоиды:

$$y_{п. н}(x) = a \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (18.9)$$

где  $n$  — число полуволн этой синусоиды на длине балки  $l$ .

Например, для балок, представленных на рис. 18.6, следует применять  $n = 1$  для балок (а) и (б),  $n = 2$  для балок (в) и (г) и  $n = 1/2$  для балок (д).

Подставляя вместо  $y(x)$  выражение (18.9) в правую часть дифференциального уравнения упругой линии балки (18.3) и интегрируя его дважды, получаем

$$EJy_{п. н}(x) = \int dx \int M_{п}(x) dx + Sa \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{l} + Cx + D.$$

Учитывая, что  $a \sin n\pi x/l = y_{п. н}$ ,  $\int dx \int M_{п}(x) dx + Cx + D = EJy_{п}(x)$ , где  $y_{п}(x)$  — прогиб от одной только поперечной нагрузки, представим это уравнение в виде

$$EJy_{п. н}(x) - S \frac{l^2}{n^2\pi^2} y_{п. н}(x) = EJy_{п}(x).$$

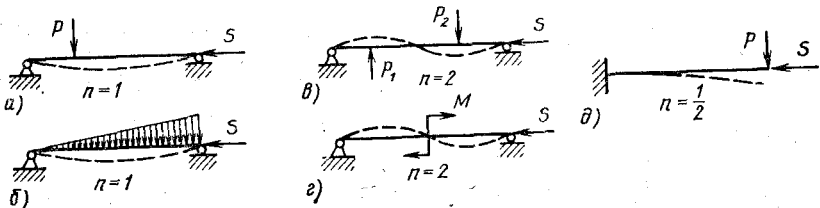


Рис. 18.6

Отсюда

$$y_{п. п}(x) = \frac{y_{п}(x)}{1 - S \frac{l^2}{n^2 \pi^2 EJ}}$$

Введя обозначение

$$S_0 = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2},$$

получаем приближенную формулу для прогибов при продольно-поперечном изгибе

$$y_{п. п} = \frac{y_{п}}{1 - \frac{S}{S_0}}. \quad (18.10)$$

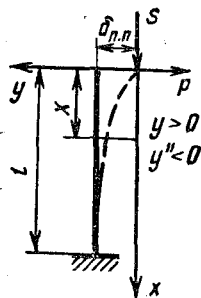


Рис. 18.7

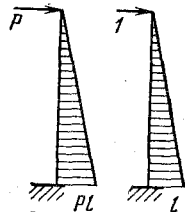


Рис. 18.8

Величина  $S_0 = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}$  представляет собой критическое значение продольной сжимающей силы, называемой эйлеровой силой, где  $J$  есть момент инерции сечения балки относительно нейтральной оси, а коэффициент  $n$  подбирается по характеру упругой линии рассматриваемой балки. Этот коэффициент, как следует из рис. 18.6, зависит от опорных устройств балки и вида поперечной нагрузки.

**Пример.** Определить максимальный прогиб для сжато-изогнутой консольной стойки постоянного сечения (рис. 18.7) по приближенной формуле и сравнить с точным его значением при  $S/S_0 = 1/4$ . Установить увеличение максимального прогиба, вызываемое продольной силой  $S$ .

**Решение.** Перемножая эпюры от поперечной и единичной сил (рис. 18.8), находим максимальный прогиб стойки только от поперечной нагрузки  $P$ :

$$\delta_{п} = \frac{Pl^3}{3EJ_z}$$

Применяя для определения наибольшего прогиба стойки от совместного действия сил  $P$  и  $S$  формулу (18.10), получаем

$$\delta_{п. п} = \frac{Pl^3}{3EJ_z} \frac{1}{1 - S/S_0},$$

где для данной стойки

$$S_0 = \frac{\pi^2 EJ_z}{4l^2}.$$

Полагая  $S/S_0 = 1/4$ , получаем

$$\delta_{п. п} = \frac{4}{9} \frac{Pl^3}{EJ_z}.$$

Таким образом, продольная сила  $S$  увеличивает прогиб стойки на 33%. Для сравнения результатов расчета по приближенной формуле с точным решением вычислим максимальный прогиб интегрированием дифференциального уравнения упругой линии стойки.

В выбранной системе осей  $y'' \leq 0$ ,  $y > 0$ ,  $M_{п} = Px > 0$ , поэтому уравнение (18.3) запишется так:

$$y'' + \alpha^2 y = -\frac{P}{EJ_z} x.$$

Общий интеграл этого неоднородного уравнения

$$y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x - \frac{P}{\alpha^2 EJ_z} x.$$

Для определения  $A$  и  $B$  используем крайевые условия:  $y(0) = 0$ , откуда  $A = 0$ ,  $y'(l) = 0$ , откуда  $B = \frac{P}{\alpha^3 EJ_z \cos \alpha l}$ . Итак, уравнение для упругой линии стойки имеет следующий вид:

$$y(x) = \frac{P \sin \alpha x}{\alpha^3 EJ_z \cos \alpha l} - \frac{Px}{\alpha^2 EJ_z}.$$

Максимальный прогиб найдем, полагая в этом уравнении  $x = l$ :

$$\delta_{п. п} = \frac{Pl^3}{3EJ_z} \left[ \frac{3 \operatorname{tg} \alpha l}{(\alpha l)^3} - \frac{3}{(\alpha l)^2} \right].$$

Выразим  $\alpha l$  через отношение продольной силы  $S$  к критическому ее значению для данной стойки:

$$\alpha l = l \sqrt{\frac{S}{EJ_z}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{S \cdot 4l^2}{\pi^2 EJ_z}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{S}{S_0}}.$$

Если  $S/S_0 = 1/4$ , то  $\alpha l = \pi/4$ , а  $\delta_{п. п} = 1,33Pl^3/(3EJ_z)$ .

Таким образом, в пределах точности вычислений приближенная формула дает значение максимального прогиба, совпадающее с точным его значением. При иных условиях закрепления стержня и более сложных поперечных нагрузках совпадение может быть худшим, однако при правильном выборе коэффициента  $n$  в выражении для силы  $S_0$  приближенная формула для прогибов дает результаты с точностью, достаточной для практических целей.

#### 18.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Изгибающий момент в текущем сечении балки (см. рис. 18.1) от совместного действия продольных и поперечных сил

$$M(x) = M_n(x) - Sy(x).$$

Дифференцируя это равенство дважды по  $x$  и перенося слагаемое с  $S$  в левую часть, получаем

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + S \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 M_n}{dx^2}.$$

Учитывая, что  $EJy'' = M$  и вторая производная от  $M_n$  согласно известным дифференциальным зависимостям при поперечном изгибе  $\frac{d^2 M_n}{dx^2} = q$ , последнее уравнение можем представить в виде

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \alpha^2 M = q. \quad (18.11)$$

Здесь, как и раньше,  $\alpha^2 = \frac{S}{EJ}$ .

Уравнение (18.11) является дифференциальным уравнением для изгибающих моментов при продольно-поперечном изгибе. Подчиняя общий интеграл этого уравнения граничным условиям, получаем выражение для изгибающих моментов в текущих сечениях балки. Таким образом, уравнение (18.11) позволяет определить изгибающие моменты непосредственно, минуя определение прогибов.

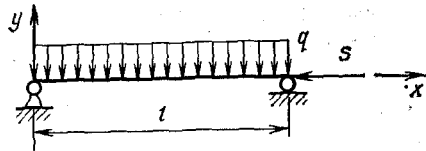


Рис. 18.9

В рассмотренном выше примере изгиба сжатой балки с одной поперечной силой  $P$  (см. рис. 18.2) интенсивность распределенной поперечной нагрузки на левом и правом участках одинакова:  $q_I(x) = q_{II}(x) = 0$ . Уравнение (18.11) для каждого из участков имеет вид

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \alpha^2 M = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения  $M(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$ .

В сечениях над концевыми шарнирными опорами изгибающие моменты равны нулю, а в том сечении, где приложена сосредоточенная сила  $P$ , перерезывающая сила  $Q$  изменяется скачком на величину силы  $P$ . Отсюда граничные условия:  $M_I(0) = 0$ ,  $M_{II}(l) = 0$ ,  $M_I(l/2) - M_{II}(l/2) = P$ . Вследствие симметрии балки имеем  $M_I'(l/2) = M_{II}'(l/2) = P/2$ ,  $M_{II}(l/2) = -P/2$ . Первое условие для левого участка дает  $A_I = 0$ , а из второго получаем:  $B_I \alpha \cos \frac{\alpha l}{2} = \frac{P}{2}$  или  $B_I = \frac{P}{2\alpha \cos \frac{\alpha l}{2}}$ .

Таким образом, изгибающие моменты на левом участке балки определены выражением

$$M_I(x) = \frac{P \sin \alpha x}{2\alpha \cos \frac{\alpha l}{2}}.$$

Максимальный момент

$$M_{\max} = M_I(l/2) = \frac{P}{2\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2}.$$

Как и следовало ожидать, это выражение совпадает с (18.7).

**Пример.** Определить изгибающий момент в текущем сечении двухопорной балки, нагруженной равномерно распространенной поперечной нагрузкой  $q$  и сжимающей силой  $S$  (рис. 18.9).

**Решение.** Подставляя в уравнение (18.11)  $q(x) = -q$ , получаем  $M'' + \alpha^2 M = -q$ . Частное решение этого неоднородного уравнения:  $M^* = -q/\alpha^2$ , а его общий интеграл  $M(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x - q/\alpha^2$ .

Постоянные интегрирования определим из граничных условий:  $M(0) = 0$ ,  $M(l) = 0$ . Первое условие дает  $A = q/\alpha^2$ , второе

$$B = \frac{q}{\alpha^2} \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} = \frac{q}{\alpha^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2}.$$

Следовательно, изгибающий момент в текущем сечении балки

$$M(x) = \frac{q}{\alpha^2} \left[ \cos \alpha x + \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha x - 1 \right].$$

Максимальный изгибающий момент найдем, полагая в этом уравнении  $x = l/2$ :

$$M_{\max} = \frac{q}{\alpha^2} \left[ \cos \frac{\alpha l}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} \sin \frac{\alpha l}{2} - 1 \right] = \frac{q \left( 1 - \cos \frac{\alpha l}{2} \right)}{\alpha^2 \cos \frac{\alpha l}{2}}.$$

### 18.5. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

В точках поперечных сечений бруса при продольно-поперечном изгибе возникают нормальные напряжения от сжатия продольными силами и от изгиба поперечными и продольными нагрузками (рис. 18.10).

В наружных волокнах балки в опасном сечении суммарные нормальные напряжения имеют наибольшие значения:

$$\sigma = -\frac{S}{F} \pm \frac{M_{\max}}{J_z} h_{\text{н. в.}} \quad (18.12)$$

В рассмотренном выше примере сжатой балки с одной поперечной силой согласно (18.7) получаем такие напряжения в наружных волокнах:

$$\sigma = -\frac{S}{F} \pm \frac{P \operatorname{tg} \frac{l}{2} \sqrt{\frac{S}{EJ_z}}}{2 \sqrt{\frac{S}{EJ_z}}} h_{\text{н. в.}} \quad (18.13)$$

Если опасное сечение симметрично относительно его нейтральной оси, то наибольшим по абсолютной величине будет напряжение в наружных сжатых волокнах:

$$\sigma_{\max} = -\frac{S}{F} - \frac{M_{\max}}{W_z}.$$

В сечении, не симметричном относительно нейтральной оси, наибольшим по абсолютной величине может быть как сжимающее, так и растягивающее напряжение в наружных волокнах.

При установлении опасной точки следует учитывать различие в сопротивлении материала растяжению и сжатию.

Учитывая выражение (18.2), формулу (18.12) можно записать так:

$$\sigma = -\frac{S}{F} \pm \frac{M_{\text{п}} + S y_{\text{п.п.}}}{J_z} h_{\text{н. в.}} \quad (18.14)$$

Применяя приближенное выражение для  $y_{\text{п.п.}}$  (18.10), получаем

$$\sigma = -\frac{S}{F} \pm \frac{M_{\text{п}} + S \frac{y_{\text{п.п.}}}{1 - S/S_0}}{J_z} h_{\text{н. в.}} \quad (18.15)$$

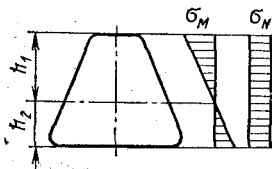


Рис. 18.10



Опасным в балках постоянного сечения будет то сечение, для которого числитель второго слагаемого имеет наибольшее значение.

Размеры поперечного сечения бруса должны быть подобраны так, чтобы  $\sigma_{\max}$  не превышало допускаемого напряжения  $[\sigma]$ .

Однако полученная зависимость между напряжениями и геометрическими характеристиками сечения сложна для проекторочного расчета; размеры сечения можно подобрать только методом повторных попыток. При продольно-поперечном изгибе проводится, как правило, поверочный расчет, назначение которого установить запас прочности детали.

При продольно-поперечном изгибе между напряжениями и продольными силами нет пропорциональности; напряжения при переменной осевой силе растут быстрее, чем сама сила, что видно, например, из формулы (18.13). Поэтому запас прочности в случае продольно-поперечного изгиба надо определять не по напряжениям, т. е. не из отношения  $n = \sigma_{\text{пр}}/\sigma_{\max}$ , а по нагрузкам, понимая под запасом прочности число, показывающее, во сколько раз надо увеличить действующие нагрузки, чтобы максимальное напряжение в рассматриваемой детали достигло предела текучести.

Определение запаса прочности связано с решением трансцендентных уравнений, так как сила  $S$  содержится в формулах (18.12) и (18.14) под знаком тригонометрической функции. Например, для балки, сжатой силой  $S$  и нагруженной одной поперечной силой  $P$ , запас прочности  $n$  согласно (18.13) находится из уравнения \*

$$\sigma_T = \frac{nS}{F} + \frac{nP \operatorname{tg} \frac{l}{2} \sqrt{\frac{Sn}{EJ_z}}}{W_z \cdot 2 \sqrt{\frac{Sn}{EJ_z}}}.$$

Для упрощения задачи можно воспользоваться формулой (18.15). Тогда для определения запаса прочности получаем квадратное уравнение:

$$\sigma_T = \frac{nS}{F} + \frac{1}{W_z} \left[ nM_D + nS \frac{ny_D}{1 - nS/S_0} \right]. \quad (18.16)$$

Заметим, что в случае, когда продольная сила остается постоянной, а изменяются по величине только поперечные нагрузки, задача определения запаса прочности упрощается, и возможно определение  $n$  не по нагрузке, а по напряжениям. Из формулы (18.15) для этого случая находим

$$\sigma_T = \frac{S}{F} + \frac{1}{W_z} \left[ nM_D + S \frac{ny_D}{1 - S/S_0} \right]. \quad (18.17)$$

**Пример.** Двухопорная дюралюминиевая балка двутаврового тонкостенного сечения сжата силой  $P$  и подвергнута действию равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивностью  $q$  и моментов  $m$ , приложенных на концах

\* Формулами для напряжений (18.12) и (18.14) можно пользоваться только до предела пропорциональности. Однако, допуская заведомо незначительную ошибку в величине  $n$ , считают возможным применять эти формулы вплоть до предела текучести.

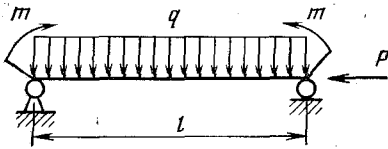


Рис. 18.11

балки, как показано на рис. 18.11. Определить напряжение в опасной точке и максимальный прогиб с учетом и без учета изгибающего действия продольной силы  $P$ , а также найти запас прочности балки по пределу текучести  $\sigma_T$ .

В расчетах принять  $q = 0,5$  кН/м =  $0,5$  Н/мм;  $P = 7,1$  кН;  $m = 40$  Н·м =  $40 \cdot 10^3$  Н·мм;  $l = 2$  м;  $E = 0,8 \cdot 10^5$  МПа;  $\sigma_T = 330$  МПа. Характеристики двутавра:  $J_z = 108 \cdot 10^8$  мм<sup>4</sup>;  $W_z = 54 \cdot 10^2$  мм<sup>3</sup>,  $F = 320$  мм<sup>2</sup>.

**Решение.** Наиболее нагруженным является среднее сечение балки. Максимальный прогиб и изгибающий момент от одной только поперечной нагрузки:

$$\delta_{\text{п}} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z} + \frac{ml^3}{8EJ_z} = \frac{5 \cdot 0,5 \cdot (2 \cdot 10^3)^4}{384 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \cdot 108 \cdot 10^8} + \frac{40 \cdot 10^3 \cdot (2 \cdot 10^3)^3}{8 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \cdot 108 \cdot 10^8} = 12 + 2,3 = 14,3 \text{ мм};$$

$$M_{\text{max}} = m + \frac{ql}{8} = 40 \cdot 10^3 + \frac{0,5 \cdot (2 \cdot 10^3)^2}{8} = 40 \cdot 10^3 + 250 \cdot 10^3 = 290 \cdot 10^3 \text{ Н·мм}.$$

Максимальный прогиб от совместного действия поперечной нагрузки и продольной силы  $P$  определим по формуле (18.10). Получим

$$S_0 = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2} = \frac{3,14^2 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \cdot 108 \cdot 10^8}{(2 \cdot 10^3)^2} = 21,3 \text{ кН};$$

$$\delta_{\text{п. п}} = \frac{\delta_{\text{п}}}{1 - \frac{S}{S_0}} = \frac{14,3}{1 - \frac{7,1}{21,3}} = 21,6 \text{ мм}.$$

Таким образом, прогиб балки от действия одной только поперечной нагрузки составляет  $\frac{14,3}{21,6} \cdot 10 = 66\%$  от ее полного прогиба.

Напряжение сжатия в опасной точке среднего сечения балки

$$\sigma_{\text{max}} = -\frac{S}{F} - \frac{M_{\text{п}} + S\delta_{\text{п. п}}}{W_z} = -\frac{7,1 \cdot 10^3}{320} - \frac{290 \cdot 10^3}{5,4 \cdot 10^3} - \frac{7,1 \cdot 10^3 \cdot 21,6}{5,4 \cdot 10^3} = -22 - 53,7 - 28,4 = -104,3 \text{ МПа}.$$

Если пренебречь изгибающим действием продольной силы  $P$ , то

$$\sigma_{\text{max}} = -22 - 53,7 = -75,9 \text{ МПа},$$

что составляет  $\frac{75,9}{104,3} \cdot 100 = 73\%$  от его полной величины.

Для определения запаса прочности  $n$  при пропорциональном увеличении всех внешних нагрузок:  $P$ ,  $q$ ,  $m$  воспользуемся формулой (18.16):

$$\sigma_T = \frac{nS}{F} + \frac{1}{W_z} \left[ M_{\text{п}}n + nS \frac{n\delta_{\text{п}}}{1 - \frac{nS}{S_0}} \right] = 22n + 53,7n + 56,5 \frac{n^2}{3-n}.$$

Подставляя  $\sigma_T = 330$  МПа, приходим к квадратному уравнению относительно  $n$ :

$$n^2 - 28,6n + 50,8 = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения  $n = 1,9$  определяет запас прочности балки по пределу текучести.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуда цикла 237  
Балка 97  
— переменного сечения 132  
Брус 6  
— малой кривизны 135  
Верещагина способ 128  
Внутренние силовые факторы 12, 13  
— симметричные, кососимметричные 160  
Гибкость стержня 300  
Гипотеза плоских сечений 18  
Жесткость 4, 134  
Журавского формула 110  
Закон парности касательных напряжений 54  
Запас прочности 34, 35  
Инварианты напряженного состояния 180  
Интеграл Мора 127, 137  
Концентрация напряжений 219, 244  
Коэффициент  
— асимметрии цикла 236  
— интенсивности напряжений 228  
— динамичности 278, 287  
— концентрации теоретический 219  
— эффективный 245  
Кривая усталости 238  
Критическая сила 294, 297  
Линия нейтральная 105, 168, 171  
Метод сечений 9  
Модуль касательный 302  
Момент сопротивления 76, 107  
Напряженное состояние 12  
— предельное 203  
— в шейке 202  
Напряжение допускаемое 35  
Наклеп 27, 246  
Перемножение эпюр 129  
Поверхность срединная 6, 271  
Принцип  
— независимости действия сил 22  
— Сен-Венана 20  
— Даламбера 276  
— сохранения начальных размеров 41  
Рама 134  
Разрушение хрупкое 28, 222, 224  
— пластичное 28  
Расчеты  
— по напряжениям 33  
— по предельным нагрузкам 36, 258  
Силовой критерий разрушения 228  
Слой нейтральный 104  
Смешанные системы 146  
Сопротивление усталости 244, 252  
Степень статической неопределимости 40, 150  
Тело идеально упругопластическое 258  
Тензор напряжений 175  
Теория оболочек безмоментная 272  
Трещиностойкость (вязкость) 226  
Точка опасная 118, 172, 201  
Уравнение Лапласа 273  
Устойчивость 4, 293  
Фактор масштабный 247  
Ферма 44, 137  
Шарнир пластический 262  
Энергетический критерий разрушения 224  
Ядро сечения 172

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Глава 1. Основные понятия и определения . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1. Введение . . . . .	3
1.2. Некоторые основные определения . . . . .	3
1.3. Классификация внешних сил . . . . .	4
1.4. Формы тел, рассматриваемых в сопротивлении материалов . . . . .	6
1.5. Опорные устройства. Опорные реакции . . . . .	7
1.6. Основные гипотезы о свойствах материала . . . . .	8
1.7. Понятие о расчетной схеме . . . . .	9
1.8. Внутренние силы. Метод сечений . . . . .	9
1.9. Напряжение. Понятие о напряженном состоянии . . . . .	11
1.10. Нормальные и касательные напряжения . . . . .	12
1.12. Виды деформаций бруса . . . . .	14
<b>Глава 2. Центральное растяжение и сжатие прямого бруса . . . . .</b>	<b>15</b>
2.1. Внутренние силовые факторы при растяжении . . . . .	15
2.2. Продольные и поперечные деформации бруса . . . . .	16
2.3. Коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) . . . . .	17
2.4. Напряжения в поперечных сечениях . . . . .	18
2.5. Напряжения в наклонных сечениях . . . . .	20
2.6. Закон Гука при одноосном растяжении. Принцип независимости действия сил . . . . .	21
2.7. Удлинения и перемещения . . . . .	22
2.8. Определение механических свойств материала при растяжении . . . . .	23
2.9. Диаграммы условных и истинных напряжений . . . . .	25
2.10. Механические характеристики материала . . . . .	25
2.11. Закон разгрузки и повторного нагружения . . . . .	27
2.12. Пластичные и хрупкие материалы . . . . .	27
2.13. Механические свойства при сжатии . . . . .	28
2.14. Влияние температуры на механические характеристики . . . . .	29
2.15. Ползучесть. Последействие и релаксация . . . . .	30
2.16. Длительная прочность . . . . .	31
2.17. Потенциальная энергия деформации . . . . .	31
2.18. О расчете на прочность . . . . .	33
2.19. Два типа расчетов на прочность . . . . .	36
2.20. Эпюры нормальных сил, нормальных напряжений и перемещений . . . . .	37
2.21. Статически неопределимые задачи при растяжении и сжатии . . . . .	40
2.22. Температурные напряжения . . . . .	47
2.23. Монтажные усилия . . . . .	49
2.24. Напряжения при двухосном растяжении и сжатии . . . . .	50
2.25. Закон Гука при двухосном и трехосном растяжении . . . . .	51
2.26. Изменение объема при трехосном растяжении . . . . .	52

2.27. Удельная потенциальная энергия деформации при трех- осном растяжении и сжатии . . . . .	53
2.28. Закон парности касательных напряжений . . . . .	54
<b>Глава 3. Сдвиг . . . . .</b>	<b>55</b>
3.1. Явление сдвига . . . . .	55
3.2. Чистый сдвиг . . . . .	55
3.3. Связь между упругими постоянными $E$ , $G$ и $\mu$ для изотроп- ного тела . . . . .	56
3.4. Потенциальная энергия деформации при сдвиге . . . . .	58
<b>Глава 4. Геометрические характеристики плоских сечений . . . . .</b>	<b>59</b>
4.1. Определения . . . . .	59
4.2. Центр тяжести сечения . . . . .	61
4.3. Зависимость между моментами инерции относительно парал- лельных осей . . . . .	63
4.4. Моменты инерции простейших фигур . . . . .	63
4.5. Вычисление моментов инерции сложных фигур . . . . .	66
4.6. Изменение моментов инерции при повороте осей координат . . . . .	66
4.7. Главные оси и главные моменты инерции . . . . .	67
4.8. Определение положения главных осей . . . . .	69
<b>Глава 5. Кручение . . . . .</b>	<b>72</b>
5.1. Внутренние силовые факторы при кручении . . . . .	72
5.2. Напряжения и деформации при кручении цилиндрического бруса круглого сечения . . . . .	74
5.3. Напряжения в различно ориентированных сечениях и харак- тер разрушения при кручении бруса круглого сечения . . . . .	78
5.4. Потенциальная энергия деформации при кручении . . . . .	79
5.5. О направлении вектора касательного напряжения в кон- турных точках сечения цилиндрического бруса . . . . .	79
5.6. Кручение тонкостенного бруса замкнутого профиля . . . . .	80
5.7. Кручение бруса прямоугольного сечения . . . . .	83
5.8. Кручение тонкостенного бруса открытого профиля . . . . .	85
5.9. Обобщение расчетных уравнений для брусев различных сечений . . . . .	87
5.10. Эпюры крутящих моментов, напряжений и углов закру- чивания . . . . .	87
5.11. Расчет на прочность при кручении . . . . .	91
5.12. Цилиндрические винтовые пружины малого шага . . . . .	92
5.13. Статически неопределимые задачи при кручении . . . . .	93
<b>Глава 6. Изгиб . . . . .</b>	<b>97</b>
6.1. Виды изгиба бруса . . . . .	97
6.2. Внутренние силовые факторы при изгибе бруса . . . . .	98
6.3. Дифференциальные зависимости при изгибе . . . . .	100
6.4. Эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов . . . . .	101
6.5. Нормальные напряжения при чистом изгибе . . . . .	104
6.6. Нормальные и касательные напряжения при поперечном изгибе. Формула Журавского . . . . .	108
6.7. Напряжения при изгибе тонкостенных балок . . . . .	112
6.8. Центр изгиба . . . . .	115
6.9. Расчеты на прочность при поперечном изгибе . . . . .	118
6.10. Рациональные формы поперечных сечений . . . . .	118
6.11. Потенциальная энергия деформации при изгибе . . . . .	120
6.12. Перемещения при изгибе. Дифференциальное уравнение упругой линии и его интегрирование . . . . .	121
6.13. Энергетический метод определения перемещений сечений балок. Интеграл Мора . . . . .	125
6.14. Способ Верещагина . . . . .	128
6.15. Балки переменного сечения . . . . .	132

Глава 7. Статически определимые стержневые системы . . . . .	134
7.1. Типы стержневых систем . . . . .	134
7.2. Напряжения и деформации в пространственном бруске малой кривизны. Интеграл Мора . . . . .	134
7.3. Плоские рамы . . . . .	138
7.4. Пространственные рамы . . . . .	142
7.5. Плоскопространственные рамы . . . . .	145
7.6. Фермы . . . . .	146
7.7. Смешанные системы . . . . .	146
7.8. Относительные перемещения сечений стержневой системы . . . . .	148
Глава 8. Статически неопределимые стержневые системы . . . . .	150
8.1. Метод сил. Канонические уравнения . . . . .	150
8.2. Вычисление коэффициентов канонических уравнений . . . . .	154
8.3. Последовательность решения статически неопределимых задач . . . . .	155
8.4. Определение перемещений сечений статически неопределимых систем . . . . .	159
8.5. О рациональном выборе основной системы. Использование прямой и обратной симметрии . . . . .	160
Глава 9. Косой изгиб. Внецентренное растяжение и сжатие . . . . .	167
9.1. Косой изгиб . . . . .	167
9.2. Внецентренное растяжение и сжатие . . . . .	170
Глава 10. Основы напряженного и деформированного состояния в точке тела . . . . .	174
10.1. Напряженное состояние в точке тела . . . . .	174
10.2. Компоненты напряжений в точке тела . . . . .	174
10.3. Напряжения на произвольно наклоненной к осям координат площадке . . . . .	176
10.4. Нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке . . . . .	177
10.5. Главные площадки и главные напряжения. Инварианты напряженного состояния . . . . .	177
10.6. Определение положения главных площадок . . . . .	181
10.7. Эллипсоид напряжений . . . . .	181
10.8. Экстремальные значения касательных напряжений и площадки их действия . . . . .	182
10.9. Круговая диаграмма напряжений (круги Мора) . . . . .	185
10.10. Напряжения на площадках, равнонаклонных к главным (октаэдрические напряжения) . . . . .	188
10.11. Понятие о шаровом тензоре и девиаторе напряжений . . . . .	189
10.12. Классификация напряженного состояния в точке тела . . . . .	190
10.13. Плоское напряженное состояние . . . . .	191
10.14. Главные напряжения и главные площадки в бруске . . . . .	193
10.15. Деформированное состояние в точке тела. Аналогия между зависимостями теории напряжений и теории деформаций . . . . .	195
10.16. Обобщенный закон Гука для изотропного тела . . . . .	196
10.17. Удельная потенциальная энергия деформации и ее деление на удельную энергию изменения объема и удельную энергию изменения формы . . . . .	197
10.18. Определение главных напряжений и главных деформаций по результатам эксперимента . . . . .	199
Глава 11. Расчеты на прочность при сложном напряженном состоянии . . . . .	201
11.1. Особенности расчета на прочность при сложном напряженном состоянии в опасной точке . . . . .	201

11.2.	Назначение теорий предельного состояния . . . . .	205
11.3.	Теория наибольших нормальных напряжений . . . . .	206
11.4.	Теория наибольших относительных удлинений . . . . .	207
11.5.	Теория наибольших касательных напряжений . . . . .	208
11.6.	Теория удельной энергии изменения формы . . . . .	210
11.7.	Теория Мора . . . . .	212
11.8.	Соотношения между пределами текучести при простом растяжении и чистом сдвиге по различным теориям . . . . .	216
11.9.	Некоторые замечания о выборе теории предельных состояний при расчетах . . . . .	217
11.10.	Концентрация напряжений и ее влияние на прочность при постоянных во времени напряжениях . . . . .	218
11.11.	О механике хрупкого разрушения . . . . .	222
<b>Глава 12. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени . . . . .</b>		<b>232</b>
12.1.	Явление усталости . . . . .	232
12.2.	Механизм усталостного разрушения . . . . .	233
12.3.	Основные понятия и определения . . . . .	236
12.4.	Определение величины предела выносливости. Предел ограниченной выносливости . . . . .	237
12.5.	Зависимость предела выносливости от степени асимметрии цикла. Диаграмма предельных амплитуд . . . . .	240
12.6.	Вероятностный характер явления усталости . . . . .	241
12.7.	Малоцикловая усталость . . . . .	242
12.8.	Факторы, влияющие на сопротивление усталости . . . . .	244
12.9.	Расчеты на прочность при одноосном напряженном состоянии и чистом сдвиге (изгибе, растяжении и кручении) . . . . .	249
12.10.	Расчет на прочность при сложном напряженном состоянии . . . . .	251
12.11.	Сопротивление усталости при нестационарных переменных напряжениях . . . . .	252
<b>Глава 13. Расчеты за пределами упругости . . . . .</b>		<b>256</b>
13.1.	Понятие о расчетах по предельному состоянию . . . . .	256
13.2.	Схематизация диаграмм растяжения . . . . .	256
13.3.	Расчет по нагрузкам, исчерпывающим несущую способность . . . . .	258
13.4.	Расчет балок по нагрузкам, исчерпывающим несущую способность . . . . .	261
13.5.	Несущая способность статически неопределимых балок и рам . . . . .	263
13.6.	Чистый упругопластический изгиб прямого бруса . . . . .	266
13.7.	Разгрузка и остаточные напряжения . . . . .	267
<b>Глава 14. Расчет простейших осесимметрично нагруженных тонкостенных оболочек вращения . . . . .</b>		<b>271</b>
14.1.	Основные допущения . . . . .	271
14.2.	Уравнения равновесия элемента симметричной безмоментной оболочки . . . . .	272
14.3.	Теорема о давлении на криволинейную стенку . . . . .	273
14.4.	Расчет сферических и цилиндрических оболочек на нормальное давление по безмоментной теории . . . . .	273
<b>Глава 15. Расчет элементов конструкций, движущихся с ускорением . . . . .</b>		<b>276</b>
15.1.	Внутренние силы, вызванные движением. Силы инерции . . . . .	276
15.2.	Расчет поступательно движущихся систем . . . . .	277
15.3.	Напряжения в тонкостенном вращающемся кольце . . . . .	278

15.4. Расчет равномерно вращающегося прямого бруса . . . . .	281
15.5. Вращающиеся рамы . . . . .	283
<b>Глава 16. Удар . . . . .</b>	<b>285</b>
16.1. Метод решения . . . . .	285
16.2. Удар падающего груза по упругой системе, масса которой мала по сравнению с массой груза . . . . .	286
16.3. Приведенная масса. Коэффициент приведения . . . . .	288
16.4. Удар по системе, масса которой соизмерима с массой ударяющего груза . . . . .	290
<b>Глава 17. Устойчивость сжатых стержней. Продольный изгиб . . . . .</b>	<b>293</b>
17.1. Понятие об устойчивости первоначальной формы равновесия . . . . .	293
17.2. Определение критической силы методом интегрирования дифференциального уравнения упругой линии стержня. Формула Эйлера . . . . .	295
17.3. Пределы применимости формулы Эйлера . . . . .	300
17.4. Устойчивость сжатых стержней за пределами пропорциональности. График критических напряжений . . . . .	301
17.5. Практические способы расчета на продольный изгиб . . . . .	303
17.6. Энергетический метод определения критической нагрузки . . . . .	304
17.7. Динамический метод определения критической нагрузки . . . . .	308
<b>Глава 18. Продольно-поперечный изгиб . . . . .</b>	<b>310</b>
18.1. Особенности расчета . . . . .	312
18.2. Определение прогибов интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси . . . . .	312
18.3. Приближенная формула для определения прогиба балки при продольно-поперечном изгибе . . . . .	316
18.4. Дифференциальное уравнение для изгибающих моментов . . . . .	318
18.5. Расчет на прочность при продольно-поперечном изгибе . . . . .	320
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>323</b>

**БОРИС ВИКТОРОВИЧ ЗАСЛАВСКИЙ**  
**КРАТКИЙ КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**

Редактор Л. Г. Грановская  
Художественный редактор В. В. Лебедев  
Технический редактор Н. Н. Скотникова  
Корректоры Л. Л. Георгиевская и О. Е. Мишина

ИБ № 4836

Сдано в набор 03.10.85. Подписано в печать 27.12.85. Формат 60×90<sup>1/16</sup>.  
Бумага книжно-журн. импортная. Гарнитура литературная. Печать высокая.  
Усл. печ. л. 20,5. Усл. кр.-отт. 20,5. Уч.-изд. л. 21,96. Тираж 18 600 экз.  
Заказ 252. Цена 1 р.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Машиностроение»,  
107076, Москва, Стромынский пер., 4.

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени  
Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой  
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства,  
полиграфии и книжной торговли. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.