

Федеральное агентство по образованию РФ

Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия

(СибАДИ)

Кафедра строительной механики

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Методические указания к выполнению
расчетно-графических работ
для студентов строительных специальностей

Составители Г.Г. Воробьев, А.И. Громовик

Омск
Издательство СибАДИ
2005

УДК 624.04
ББК 38. 113

Рецензент канд.техн. наук, доц. В.А. Уткин

Работа одобрена методическими комиссиями факультетов АДМ и ПГС в качестве методических указаний для выполнения расчетно-графических работ по строительной механике для студентов строительных специальностей факультета АДМ: 291000, 291100, 291300; факультета ПГС: 290300, 290600, 290700, 291400, 291500.

Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений: Методические указания к выполнению расчетно-графических работ для студентов строительных специальностей./ Сост.: Г.Г.Воробьев, А.И. Громовик. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2005. – 28 с.

Содержатся основные теоретические положения по расчету статически неопределимых рам методом перемещений. В приведенном числовом примере на предложенных схемах показывается последовательность выполнения задания, приводятся результаты расчетов и их графическая интерпретация. Пример соответствует содержанию самостоятельных домашних работ, предусмотренных программой курса. Приводится список рекомендуемой литературы.

Ил. 29. Библиогр.: 5 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Определение числа основных неизвестных и выбор основной системы.....	4
2. Система канонических уравнений метода перемещений.....	6
3. Построение эпюр изгибающих моментов в основной системе.....	6
3.1. Построение эпюры \bar{M}_1 от поворота первой связи на угол $\bar{Z}_1 = 1$	6
3.2. Построение эпюры \bar{M}_2 от поворота второй связи на угол $\bar{Z}_2 = 1$	7
3.3. Построение эпюры \bar{M}_3 от линейного перемещения третьей связи $\bar{Z}_3 = 1$	8
3.4. Построение суммарной эпюры моментов \bar{M}_S	10
3.5. Построение эпюры моментов от внешней нагрузки в основной системе.....	10
4. Определение коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений.....	11
4.1. Коэффициенты $r_{11}, r_{12}, r_{13}, R_{1F}$	11
4.2. Коэффициенты $r_{21}, r_{22}, r_{23}, R_{2F}$	12
4.3. Коэффициенты $r_{31}, r_{32}, r_{33}, R_{3F}$	14
5. Проверка коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений.....	15
6. Решение системы канонических уравнений.....	17
7. Построение суммарной эпюры изгибающих моментов.....	18
8. Проверка эпюры изгибающих моментов.....	20
8.1. Статическая проверка.....	20
8.2. Деформационная проверка.....	20
9. Построение эпюры поперечных сил.....	22
10. Построение эпюры продольных сил.....	24
11. Проверка правильности построения эпюр N и Q	25
Библиографический список.....	25
Приложение.....	26

ВВЕДЕНИЕ

Метод перемещений является одним из важнейших методов расчета статически неопределимых систем. Суть этого метода заключается в том, что под действием внешней нагрузки рама (балка) претерпевает различные деформации.

Зная эти деформации, можно определить внутренние усилия.

В качестве основных неизвестных в методе перемещений принимают независимые углы поворота жестких узлов и линейные смещения всех узлов, включая опорные.

Общее число неизвестных метода перемещений n называют степенью кинематической неопределимости системы.

Рассмотрим статически неопределимую раму (рис.1).

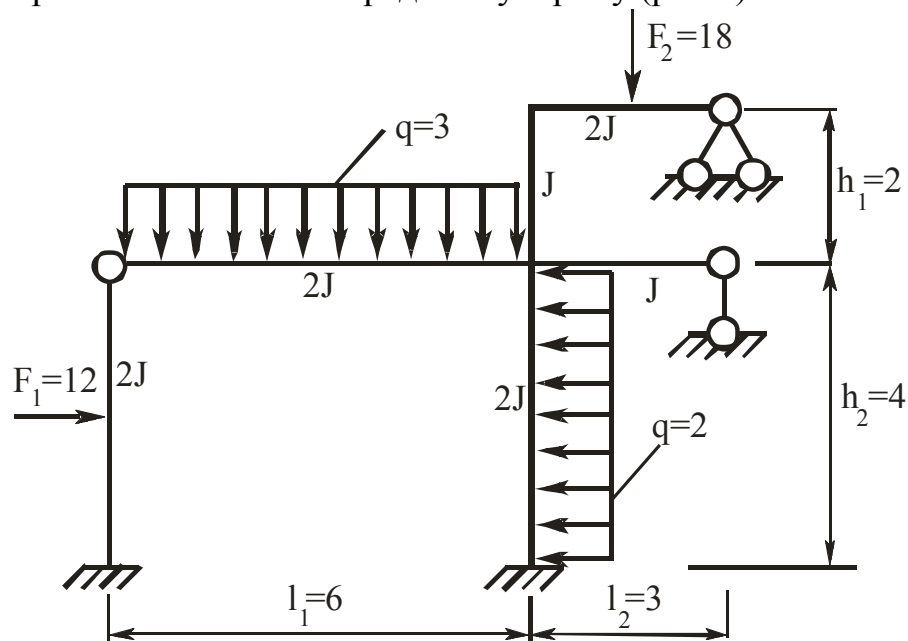


Рис. 1

В исходных данных сосредоточенные силы имеют размерность кН, распределенные нагрузки – кН/м, линейные параметры – м.

1. Определение числа основных неизвестных и выбор основной системы

Число неизвестных определяется по формуле

$$n = n_y + n_d,$$

где n_y - число жестких узлов рамы; n_d - число возможных линейных перемещений узлов рамы.

В заданной раме число жестких узлов $n_y = 2$.

Для определения n_d необходимо в каждом узле заданной системы поставить шарнир и затем воспользоваться формулой

$$n_d = 2Ш - C - C_o,$$

где $Ш$ - число шарниров (кратность шарниров не учитывается); C_o - число опорных стержней; C - число стержней, соединяющих узлы рамы.

Для определения n_d рассмотрим систему (рис. 2).

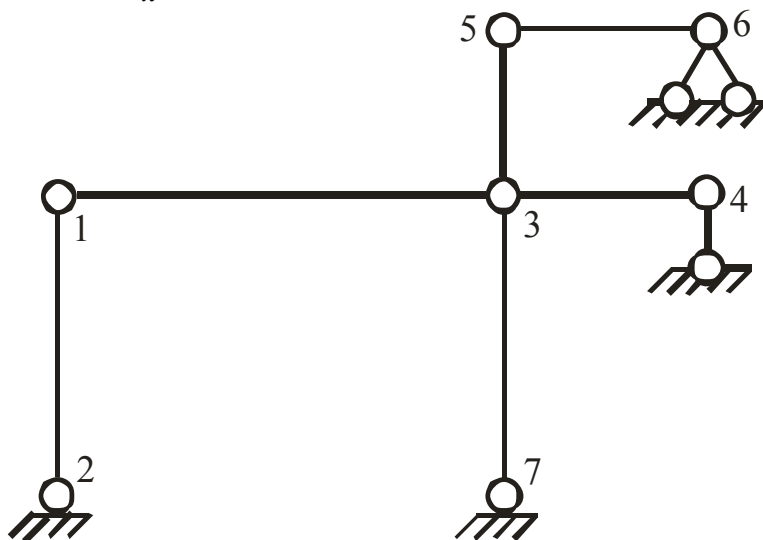


Рис. 2

В данной системе имеем:

$$Ш = 7; C = 6; C_o = 7; n_d = 2 \cdot 7 - 7 - 6 = 1.$$

Всего основных неизвестных будет $n = 2 + 1 = 3$.

Опорные стержни, препятствующие линейным смещениям узлов, ставят в том узле, где возможно смещение (в данном случае узел 4).

Принятая для расчета основная система имеет вид (рис. 3).

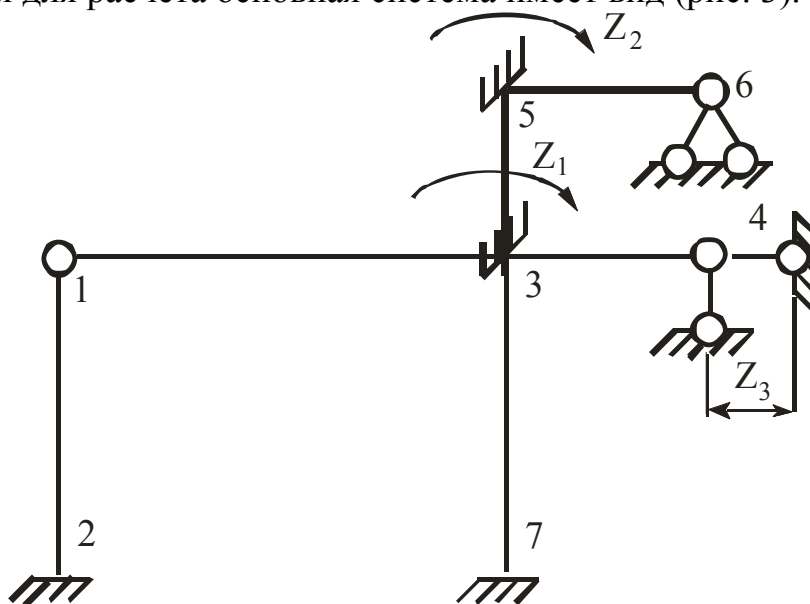


Рис. 3

Основная система рамы при расчете по методу перемещений – это, по существу, совокупность однопролетных балок с упруго защемленными концами, или с одним упруго защемленным концом, а другим – шарнирно опертым концом (см. приложение).

Реактивные усилия в балках от внешней нагрузки, поворота и линейного смещения их концов находят по методу сил. В приложении приведены формулы для их определения.

Следует отметить, что вводимые в основную систему метода перемещений защемляющие связи отличаются от обычной жесткой заделки тем, что оказывают препятствие лишь повороту узла и не мешают его линейной подвижности.

2. Система канонических уравнений метода перемещений

Уравнений столько, сколько всего связей (заделок и стержней) добавлено к раме. Каждое из уравнений – это условие равновесия, означающее, что сумма реактивных усилий от углов поворота, смещений и нагрузки в любой добавленной связи равно нулю. Канонические уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1F} &= 0; \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2F} &= 0; \\ r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3F} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где r_{ij} – составляющая реакции i -й связи, вызванная перемещением j -й связи $Z_1 = 1$ и $Z_2 = 1$, представляющих единичные моменты, а при неизвестном линейном смещении $Z_3 = 1$ – единичные продольные силы; R_{iF} – то же от заданного внешнего воздействия. При этом первый индекс соответствует номеру дополнительной связи, реакция в которой должна равняться нулю, для которого составляется уравнение равновесия, а второй индекс – номеру связи, которая вызывает реактивный момент или усилие в рассматриваемом узле.

3. Построение эпюр изгибающих моментов в основной системе

Для построения эпюр изгибающих моментов в основной системе от единичных перемещений связей и внешней нагрузки для вариантов защемления одного конца балки а другого шарнирно опертого и балки с двумя защемленными концами используем табличные данные, приведенные в приложении данного пособия.

3.1. Построение эпюры \bar{M}_1 от поворота первой связи на угол $\bar{Z}_1 = 1$

Для наглядности изобразим деформации элементов рамы, вызванные поворотом по часовой стрелке первой связи на угол $\bar{Z}_1 = 1$ (рис. 4).

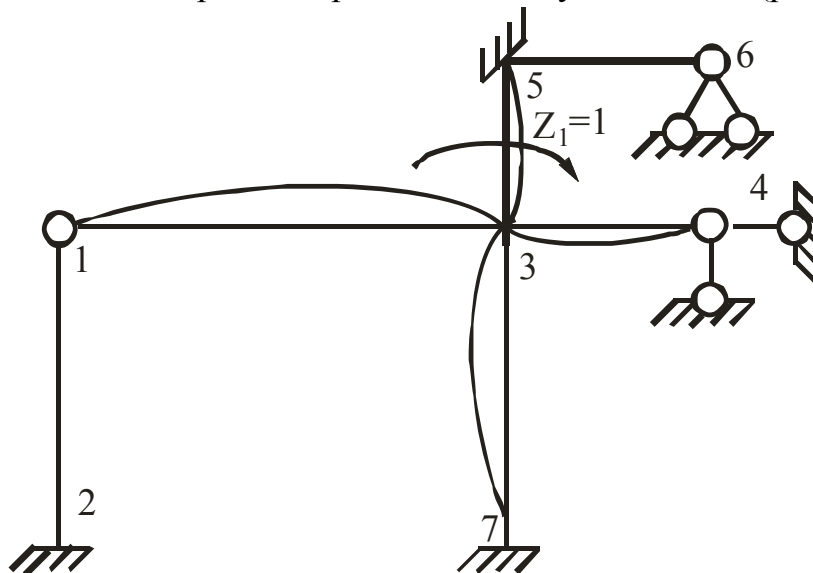


Рис. 4

Из рис. 4 видно, что изгиб испытывают только стержни 1-3, 3-4, 3-5 и 3-7. При построении эпюры \bar{M}_1 на стержнях 1-3 и 3-4 понадобится решение для балки с одним защемлением и другим шарнирно опертым концом.

На стержнях 3-5 и 3-7 понадобится решение для балки с обоими защемленными концами. Полная эпюра моментов \bar{M}_1 имеет вид (рис. 5).

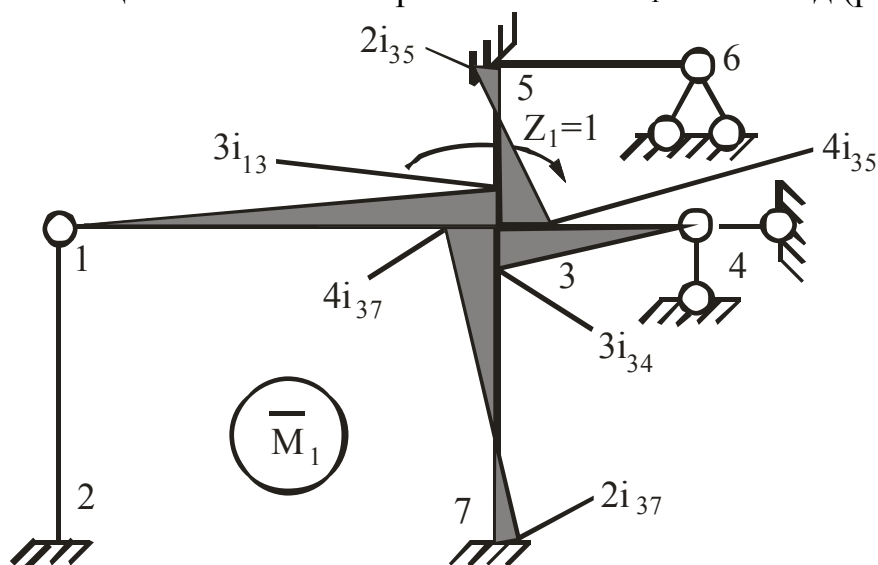


Рис. 5

Величина i называется погонной жесткостью элементов рамы и обозначается $i = EJ / l$.

Для элемента 1-3 $i_{13} = 2EJ / 6 = EJ / 3$. Для элементов 3-4 $i_{34} = EJ / 3$; 3-5 $i_{35} = EJ / 2$; 3-7 $i_{37} = 2EJ / 4 = EJ / 2$.

3.2. Построение эпюры \bar{M}_2 от поворота второй связи на угол $\bar{Z}_2 = 1$

При повороте пятого узла на угол $\bar{Z}_2 = 1$ деформация элементов рамы имеет вид (рис. 6).

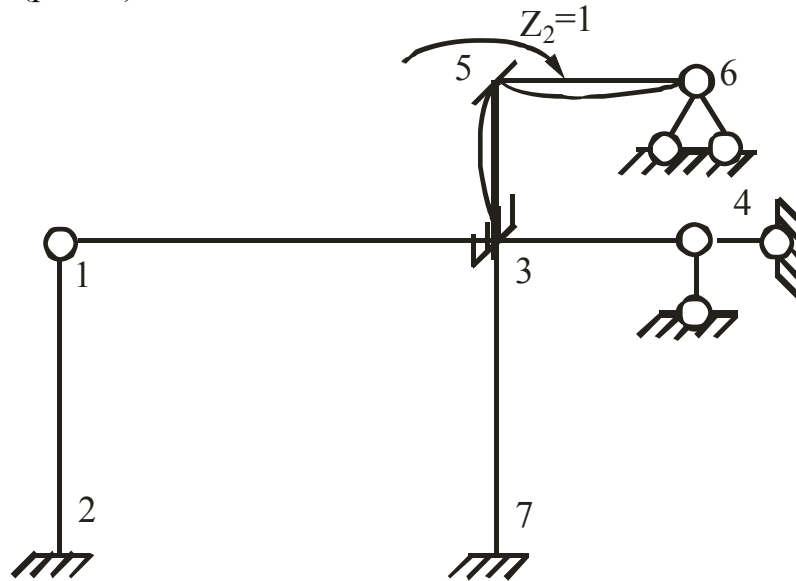


Рис. 6

При построении эпюры \bar{M}_2 на стержнях 3-5 и 5-6 используем решение для балки с заделанными концами и балки с одним заделанным, а другим шарнирно опертым концами.

Полная эпюра моментов \bar{M}_2 приведена на рис. 7. Для элемента 5-6 $i_{56} = 2EJ / 3$.

3.3. Построение эпюры \bar{M}_3 от линейного перемещения третьей связи на $\bar{Z}_3 = 1$

При перемещении четвертого узла на величину $\bar{Z}_3 = 1$ деформация элементов рамы примет вид (рис. 8).

Стержни 1-3, 3-4 и 5-6 от линейного смещения узла 4 на величину, равную единице, не изгибаются, а испытывают только продольные усилия.

Узел 3 перемещается поступательно, не поворачиваясь.

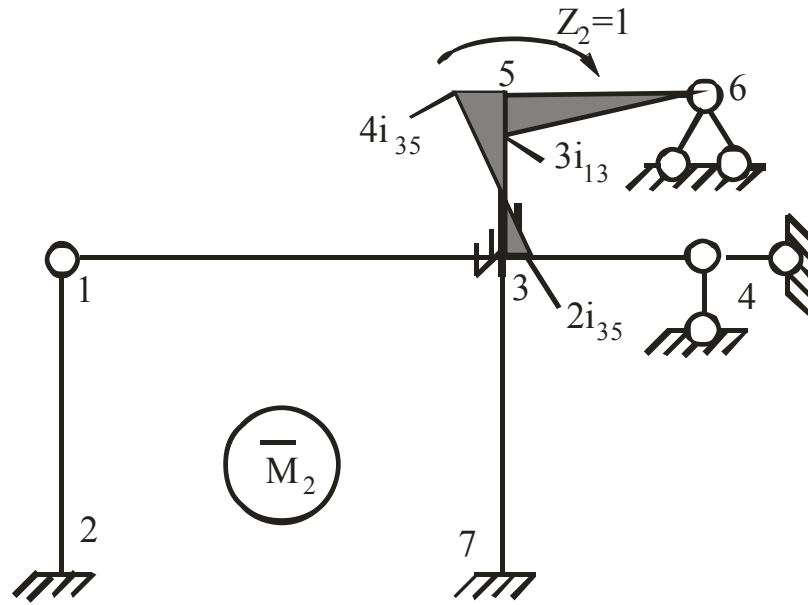


Рис. 7

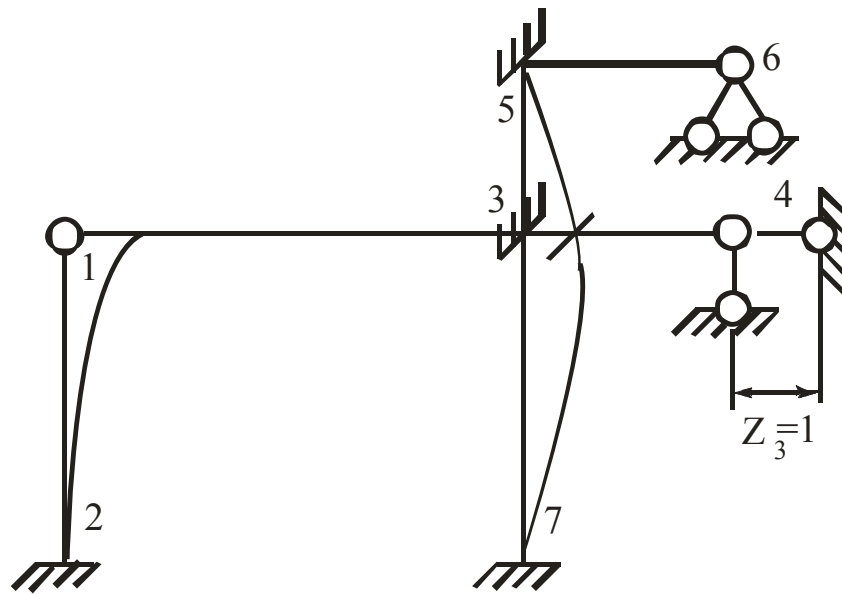


Рис. 8

Эпюра моментов \overline{M}_3 приведена на рис. 9. Погонная жесткость элемента 1-2 $i_{34} = 2EJ / 4 = EJ / 2$.

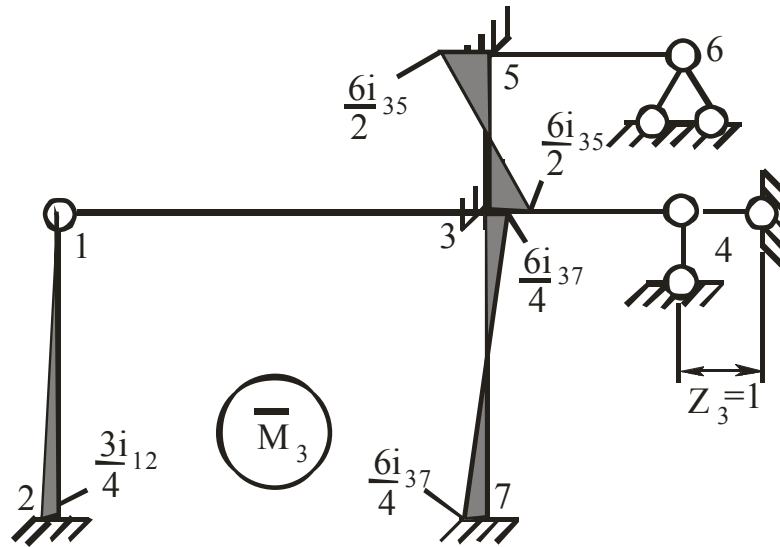


Рис. 9

3.4. Построение суммарной эпюры моментов \overline{M}_s

Суммарная эпюра моментов $\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3$ строится для контроля правильности вычисления коэффициентов r_{ii} и r_{ij} системы канонических уравнений (рис. 10).

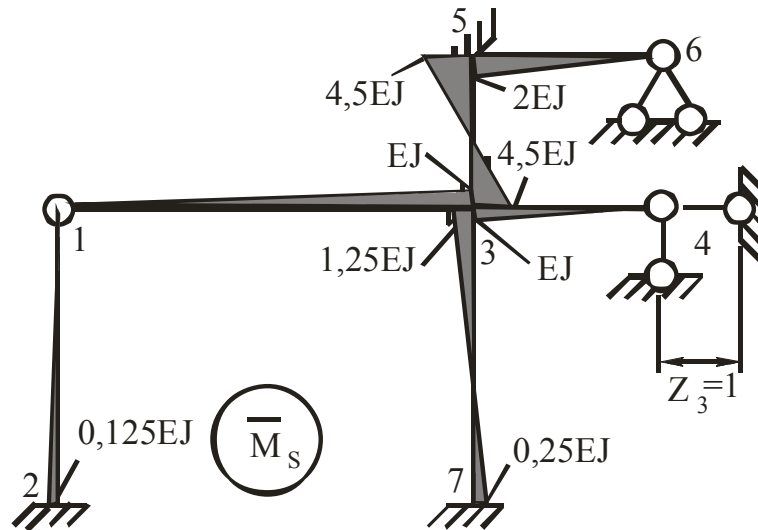


Рис. 10

3.5. Построение эпюры моментов от внешней нагрузки в основной системе

При построении эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки используем табличные данные приложения. Эпюра M_F изображена на рис. 11.

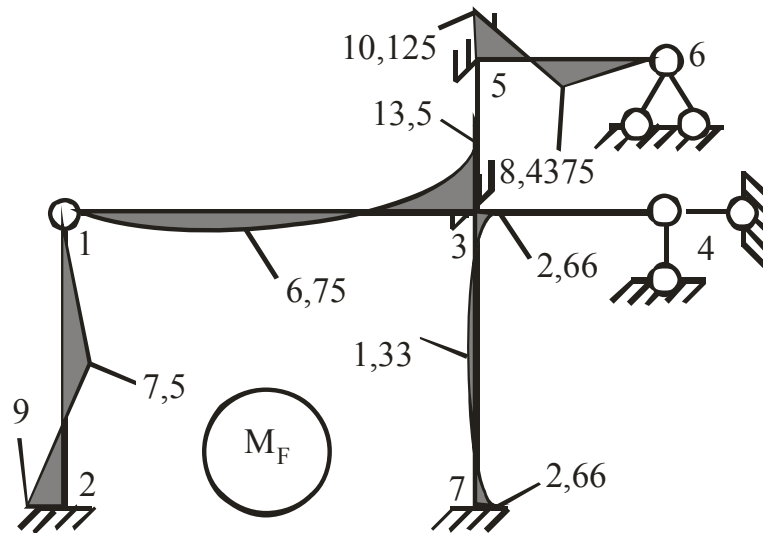


Рис. 11

4. Определение коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений

Коэффициенты и свободные члены определяются статическим способом, который основан на использовании равновесия узлов рамы или отдельных ее частей.

4.1. Коэффициенты $r_{11}, r_{12}, r_{13}, R_{1F}$

Эти коэффициенты представляют собой реактивные моменты в первой связи (первый индекс), от поворота первой и второй связи на единичные узлы, линейного смещения третьей связи на единицу и внешней нагрузки (второй индекс).

Для определения коэффициента r_{11} вырезаем на эпюре \overline{M}_1 узел 3 и рассматриваем его равновесие (рис. 12).

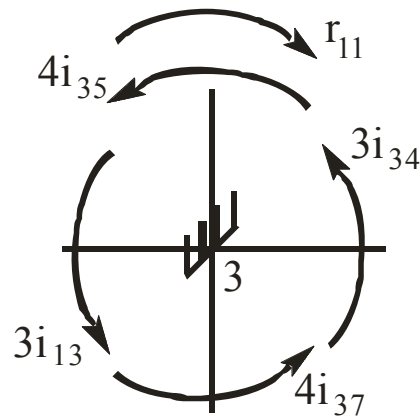


Рис.12

$$\Sigma M_3 = 0;$$

$$r_{11} - 3i_{34} - 4i_{37} - i_{13} - 4i_{35} = 0; r_{11} = 6EJ \text{ (значения } i_{ij} \text{ см. с. 8).}$$

Для определения коэффициента r_{12} вырезаем на эпюре \overline{M}_2 узел 3 и рассматриваем равновесие узла 3 в состоянии 2 (рис.13):

$$\Sigma M_3 = 0;$$

$$r_{12} - 2i_{35} = 0; r_{12} = EJ.$$

Коэффициенты R_{1F} и r_{13} определяем путем вырезания узла 3 из эпюр \overline{M}_s и M_F (рис. 14 а, б).

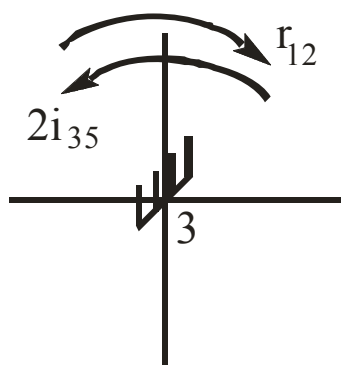


Рис. 13

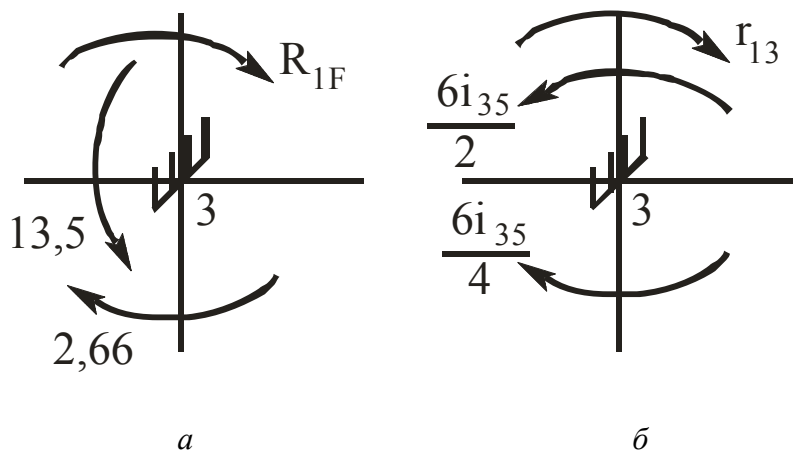


Рис. 14

$$\Sigma M_3 = 0;$$

$$r_{13} - 3i_{35} + 1,5i_{37} = 0; r_{13} = 0,75EJ;$$

$$R_{1F} + 2,66 - 13,5 = 0; R_{1F} = 10,83 \text{ кН.}$$

4.2. Коэффициенты r_{21} , r_{22} , r_{23} , R_{2F}

Эти коэффициенты представляют собой реактивные моменты во второй связи от угловых и линейных смещений всех связей и от внешней нагрузки.

Коэффициент r_{21} определяем путем вырезания узла 5 из эпюры \overline{M} .

На основании условия взаимности коэффициентов при неизвестных $r_{mn} = r_{nm}$ можно принять $r_{12} = r_{21} = EJ$.

Коэффициент r_{22} - реактивный момент во второй связи от поворота ее на $\overline{Z}_2 = 1$, определяется путем вырезания узла 5 на эпюре \overline{M}_2 (рис. 15).

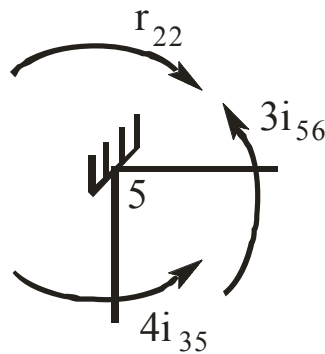


Рис. 15

$$\sum M_5 = 0;$$

$$r_{22} - 3i_{56} - 4i_{35} = 0; \quad r_{22} = 4EJ.$$

Коэффициент r_{23} - реактивный момент во второй связи от перемещения третьей связи на $\overline{Z}_3 = 1$. Он определяется вырезанием узла 5 на эпюре \overline{M}_3 (рис. 16).

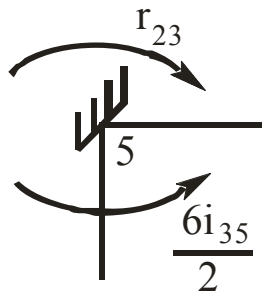


Рис. 16

$$\sum M_5 = 0;$$

$$r_{23} - 6i_{35} / 2 = 0; \quad r_{23} = 1,5EJ.$$

Коэффициент R_{2F} определяем путем вырезания узла 5 из эпюры M_F (рис. 17).

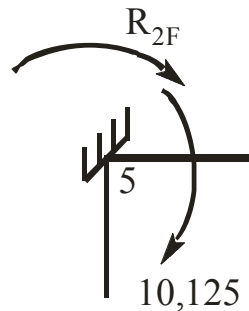


Рис. 17

$$\begin{aligned} \Sigma M_5 &= 0; \\ R_{2F} + 10,125 &= 0; \quad R_{2F} = -10,125EJ. \end{aligned}$$

Примечание. Реактивные моменты направляются по часовой стрелке, а моменты, взятые из эпюры моментов, направляются так, чтобы они могли растягивать соответствующие волокна в элементе рамы у вырезанного узла.

4.3. Коэффициенты r_{31} , r_{32} , r_{33} , R_{3F}

Для определения реакций r_{31} , r_{32} , r_{33} , R_{3F} в эпюрах \bar{M}_1 , \bar{M}_2 , \bar{M}_3 и M_F (рис. 5, 7, 9 и 11) вырежем область вокруг узлов 1 и 3 (рис. 18 а, б, в, г) и составим уравнения проекций сил на горизонтальную ось X .

Эти силы определяются как горизонтальные, полученные из эпюр моментов, и приведены в приложении в виде опорных реакций.

Положительными будем считать смещения, при которых узлы рамы сместятся вправо.

$$а) \Sigma X = -1,5EJ + 0,75EJ + r_{31} = 0; \quad r_{31} = 0,75EJ;$$

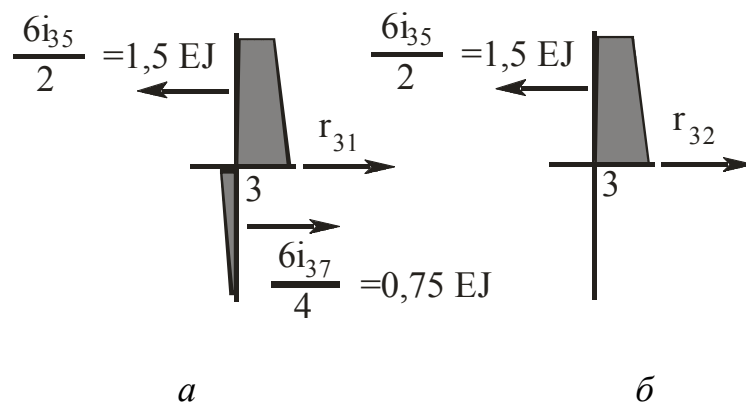


Рис. 18 (начало)

$$б) \sum X = -1,5EJ + r_{32} = 0; r_{32} = 1,5EJ;$$

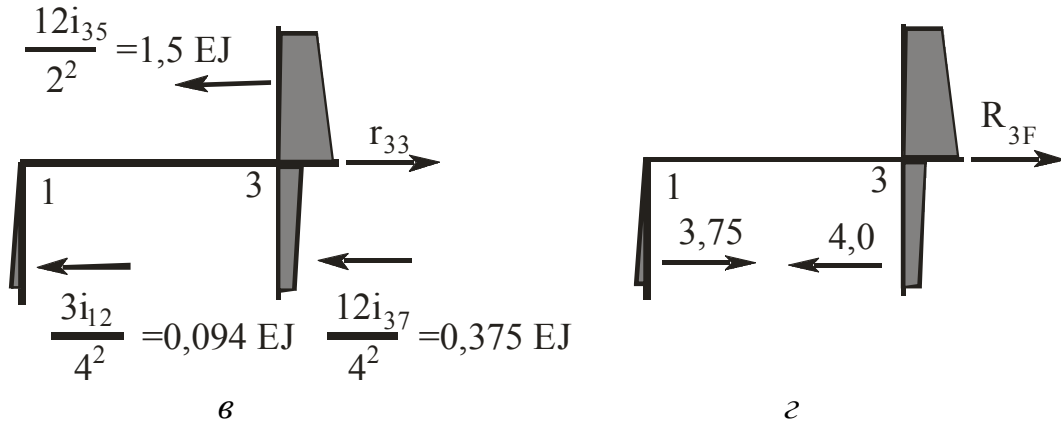


Рис. 18 (окончание)

$$в) \sum X = -1,5EJ - 0,375EJ - 0,094EJ + r_{33} = 0; r_{33} = 1,969;$$

$$г) \sum X = 3,75 - 4 + R_{3F} = 0; R_{3F} = 0,25 \text{ кН.}$$

Заметим, что $r_{13} = r_{31}$, $r_{23} = r_{32}$.

5. Проверка коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений

Универсальная проверка коэффициентов канонических уравнений выполняется по формуле

$$\sum \int \overline{M}_s^2 \cdot dx / EJ = \sum r,$$

где $\sum r$ - сумма коэффициентов от единичного воздействия. Эпюра \overline{M}_s умножается сама на себя способом перемножения эпюр (способ Верещагина).

Эпюры моментов элементов рамы 1-2, 1-3, 3-4, 5-6 перемножаются способом треугольника, а эпюры моментов элементов 3-5 и 3-7 – способом трапеции.

$$\begin{aligned} \sum \int \overline{M}_s^2 \cdot dx / EJ &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \right. \\ &\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{6} (4 \cdot 4,5^2 - 2 \cdot 4,5^2) + \frac{4}{12} (2 \cdot 1,25^2 + 2 \cdot 0,25^2 - \\ &\left. - 2 \cdot 1,25 \cdot 0,25) \right] = \frac{18,369}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum r &= r_{11} + r_{22} + r_{33} + 2(r_{12} + r_{13} + r_{23}) = \frac{1}{EJ} (6 + 4 + 1,969 + \\ &+ 2(1 + 0,75 + 1,5)) = \frac{18,469}{EJ}. \end{aligned}$$

Сравнивая результаты, убеждаемся в том, что коэффициенты вычислены правильно. Незначительная погрешность в 0,5% - результат округления тысячных или десятитысячных знаков после запятой.

Для проверки свободных членов канонических уравнений используем формулу

$$\sum \int_l M_F^1 \cdot \bar{M}_s \cdot dx / EJ = -\sum R_{nF},$$

где M_F^1 - эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной удалением лишних связей, в том числе и тех, реакции которых принимались за основные неизвестные в методе перемещений. Рама пять раз статически неопределима.

Построим эпюру M_F^1 в основной системе (рис. 19). Перемножение эпюр M_F^1 и \bar{M}_s необходимо выполнить по способу Верещагина, беря площади криволинейных эпюр моментов, а ординаты линейных эпюр под центрами тяжести криволинейных.

Участок 1-2. $-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} = -2,25.$

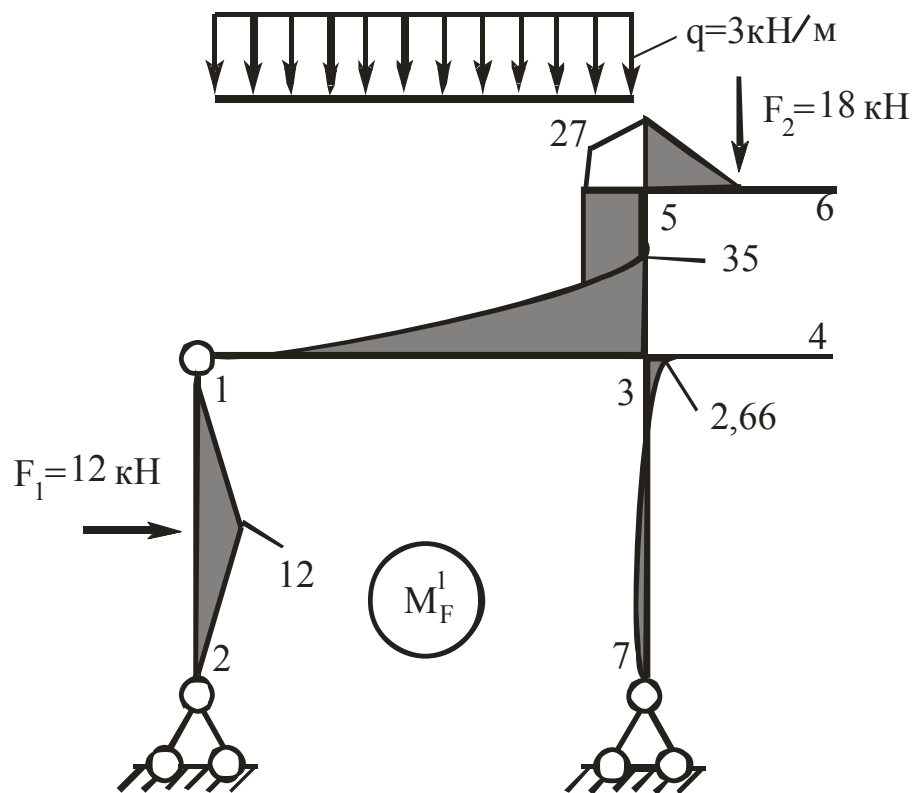


Рис. 19

Участок 1-3. Эпюру следует разбить на две: треугольник и квадратную параболу:

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 35 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{3 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 35 - 13,5 = 21,5.$$

Участок 3-5. Коэффициент равен нулю, т.к. на эпюре \overline{M}_s имеются кососимметричные треугольники.

Участок 3-7. Эта эпюра разбивается на треугольник и квадратную параболу:

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,0833 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,833 + 10,666 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,625 - 10,666 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,125 = -3,331.$$

Участок 5-6. Эпюры перемножаются по правилу трапеций:

$$-\frac{1,5}{6 \cdot 2EJ} (2 \cdot 2 \cdot 27 + 1 \cdot 27) = -16,875.$$

Сумма всех значений от перемножения эпюр:

$$-2,25 + 21,5 - 3,331 - 16,875 = -0,956.$$

Сумма свободных членов $R_{nF} = 10,83 - 10,125 + 0,25 = 0,955$.

Сравнение результатов показывает, что коэффициенты определены верно.

6. Решение системы канонических уравнений

Подставив в систему канонических уравнений значения коэффициентов и свободных членов при делении каждого уравнения на EJ , получим:

$$\begin{aligned} 6Z_1 + Z_2 + 0,75Z_3 &= 10,83 / EJ; \\ Z_1 + 4Z_2 + 1,5Z_3 &= 10,125 / EJ; \\ 0,75Z_1 + 1,5Z_2 + 1,969 &= -0,25 / EJ. \end{aligned}$$

Решение этой системы дает $Z_1 = -2,174 / EJ$; $Z_2 = 3,936 / EJ$; $Z_3 = -2,296 / EJ$.

Знаки у первой и третьей единичных эпюр изменятся на обратные, т.к. Z_1 и Z_2 имеют отрицательные значения.

7. Построение суммарной эпюры изгибающих моментов

Ординаты суммарной эпюры изгибающих моментов вычисляют по формуле:

$$M = M_F^1 + \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \bar{M}_3 \cdot Z_3.$$

Для наглядности вычислений изобразим эпюры, полученные умножением единичных эпюр на значения соответствующих неизвестных (рис. 20).

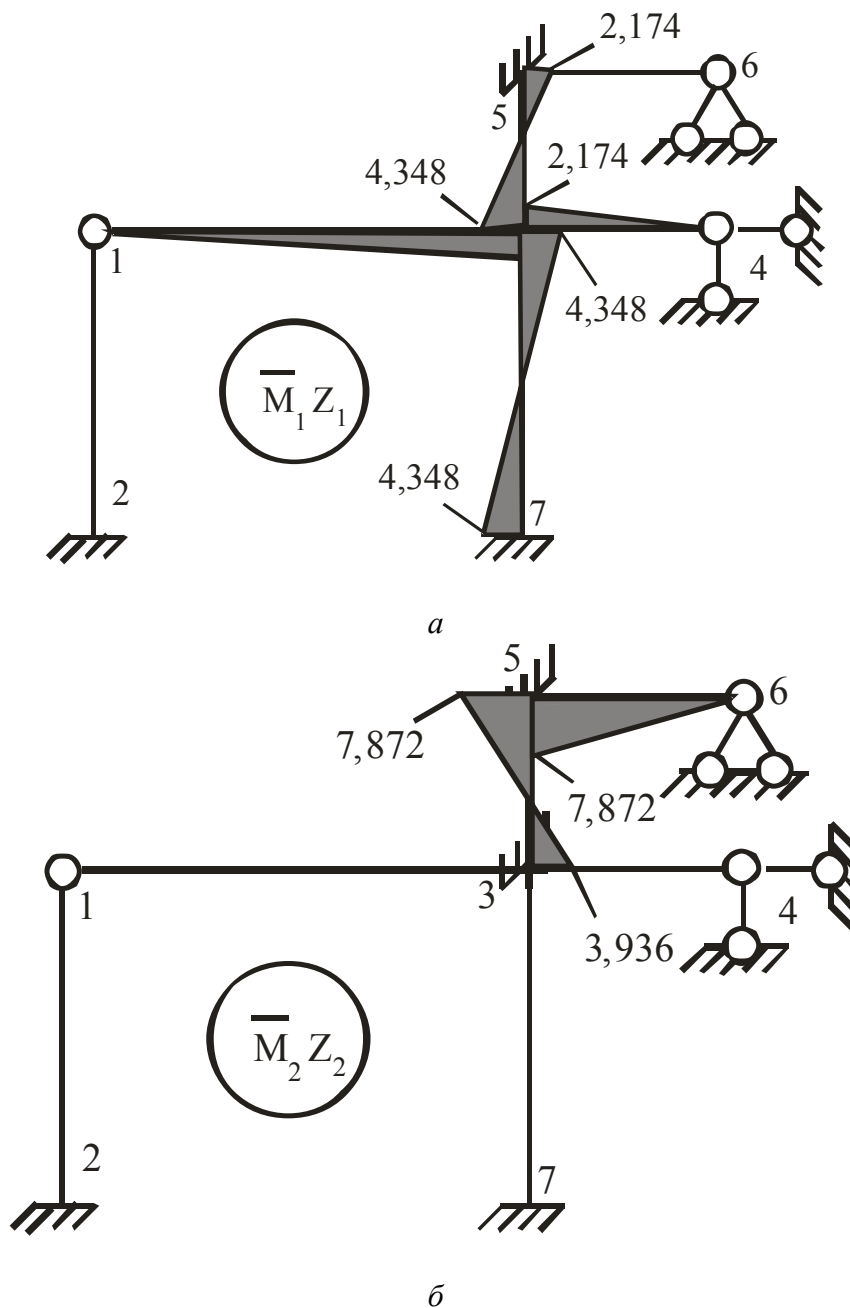


Рис. 20 (начало)

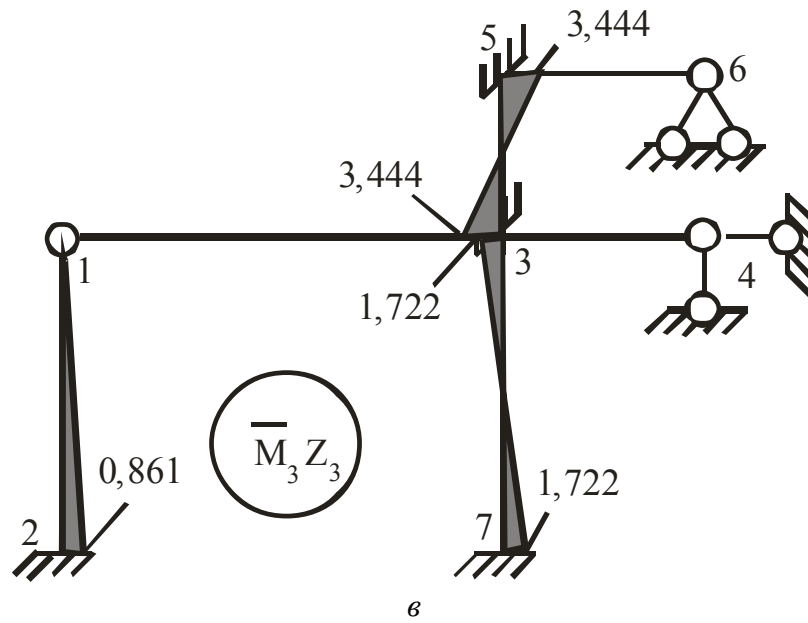


Рис. 20 (окончание)

Просуммировав ординаты эпюр $\bar{M}_1 \cdot Z_1$; $\bar{M}_2 \cdot Z_2$; $\bar{M}_3 \cdot Z_3$ с соответствующими ординатами эпюры M_F (см. рис. 11), получим результирующую эпюру моментов M (рис. 21).

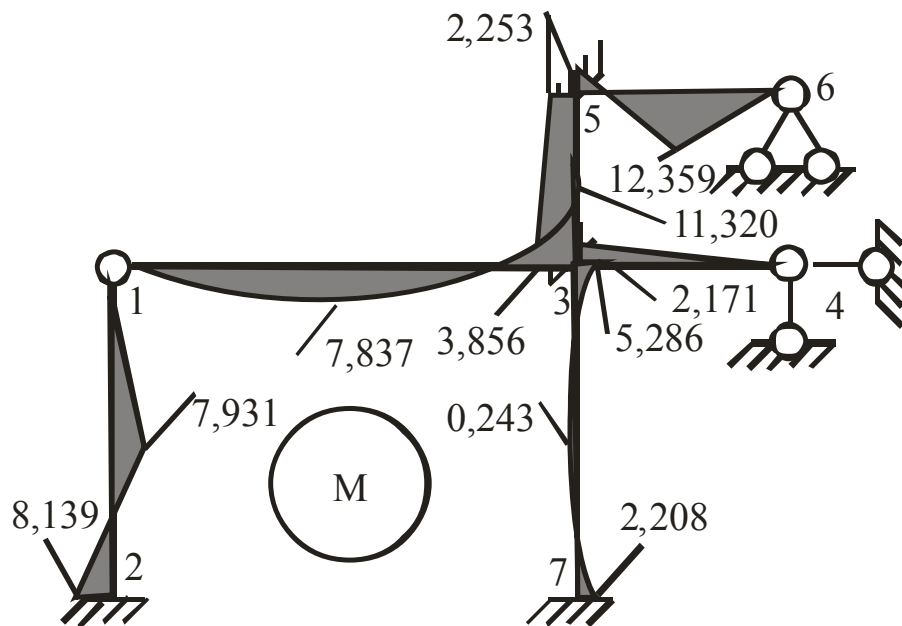


Рис. 21

8. Проверка эпюры изгибающих моментов

8.1. Статическая проверка

Статическая проверка в методе перемещений, в отличие от аналогичной проверки в методе сил, дает вполне надежную гарантию правильности решения задачи, но при условии, что исходные единичные и грузовая эпюры построены правильно.

Проверим равновесие узлов рамы (рис. 22).

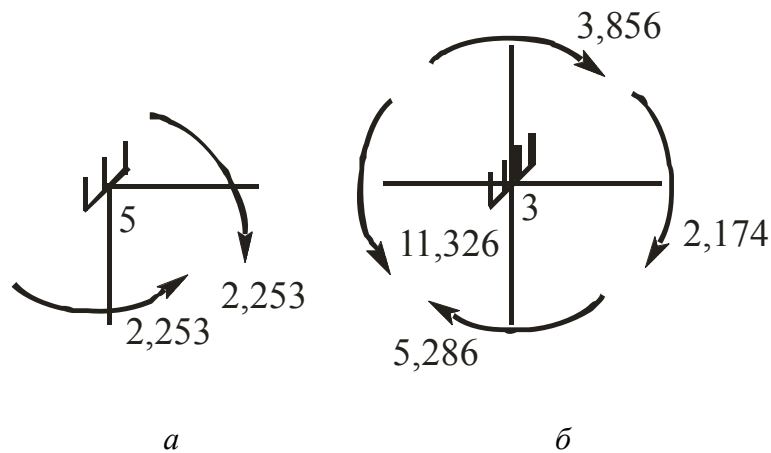


Рис. 22

Узел 5 (рис. 22, а): $\sum M_5 = 2,253 - 2,253 = 0$.

Узел 3 (рис. 22, б): $\sum M_3 = 2,174 + 5,286 - 11,326 + 3,856 = 0$.

Погрешности нет, поэтому можно считать, что узлы рамы находятся в равновесии. Если нет уверенности в правильности построения исходных эпюр, то помимо статической проверки необходимо выполнить деформационную проверку.

8.2. Деформационная проверка

Отбросив в заданной системе лишние связи, получим основную систему (метод сил) и убедимся в отсутствии перемещений в направлении отброшенных связей, т.е. проверим, выполняется ли равенство

$$\sum \int \frac{\overline{M}_i \cdot M \cdot dx}{EJ} = 0,$$

где \overline{M}_i – эпюра от единичного воздействия в методе сил.

Основная система показана на рис. 23.

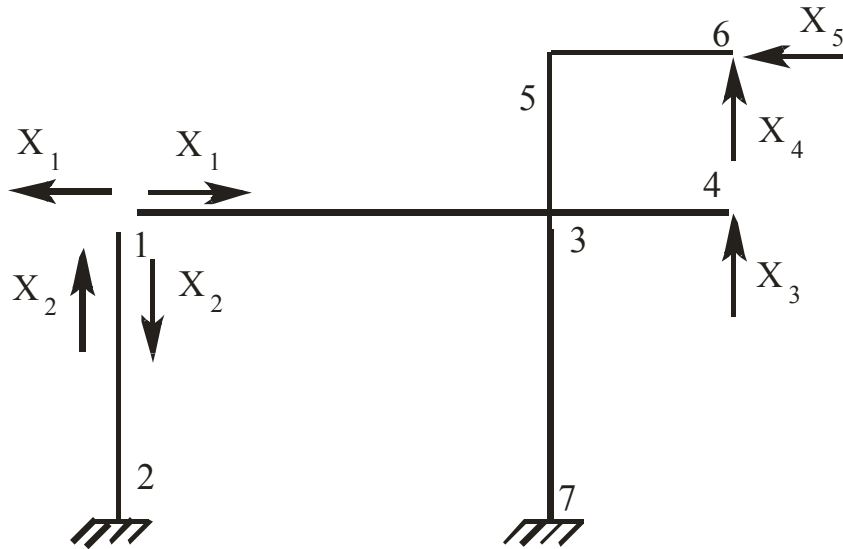


Рис. 23

Рассмотрим частный случай, когда отсутствует горизонтальное перемещение узла 6, тогда в основной системе от единичной силы $\bar{X}_5 = 1$ примет вид (рис. 24)

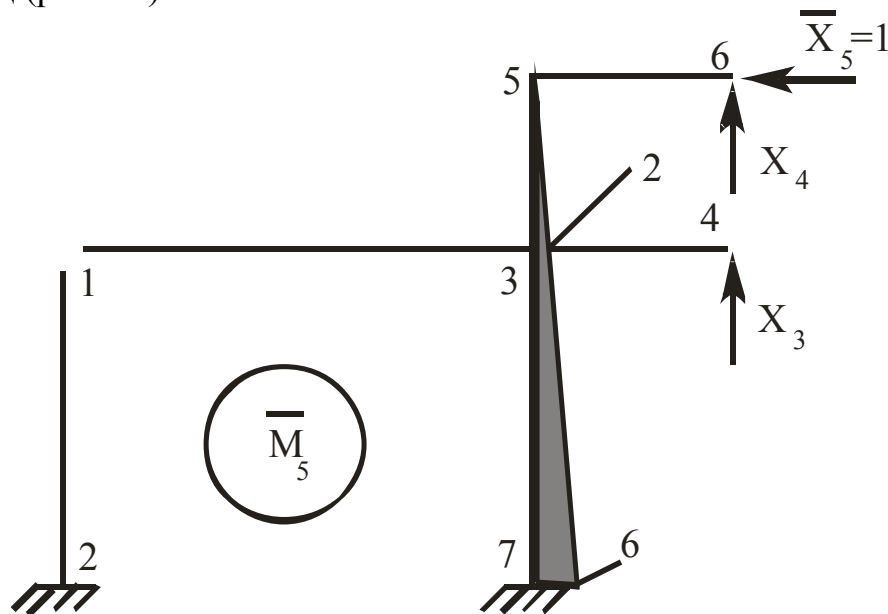


Рис. 24

Перемножив эпюру \bar{M}_5 с эпюрой M , получим:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{\bar{M}_5 \cdot M \cdot dx}{EJ} &= -\frac{2}{6EJ} (2 \cdot 3,856 \cdot 2 + 2,253 \cdot 2) + \frac{4}{6 \cdot 2EJ} \times \\ &\times (2 \cdot 2 \cdot 5,286 + 2 \cdot 6 \cdot 2,208 + 5,286 \cdot 6 + 2,208 \cdot 2) - \frac{2 \cdot 4^3}{12 \cdot 2} \cdot 4 = \\ &= -6,6433 + 27,924 - 21,33 = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать отсутствие перемещений по направлениям сил X_1 , X_2 , X_3 и X_4 .

9. Построение эпюры поперечных сил

Поперечная сила в сечении элемента рамы определяется по формуле

$$Q = Q^o + \frac{M_{np} - M_{лев}}{l},$$

где Q^o – поперечная сила в сечении балки от заданной нагрузки; M_{np} – момент в правом узле балки с учетом знака; $M_{лев}$ – момент в левом конце балки.

Эпюра поперечных сил строится для каждого элемента в отдельности (рис. 25).

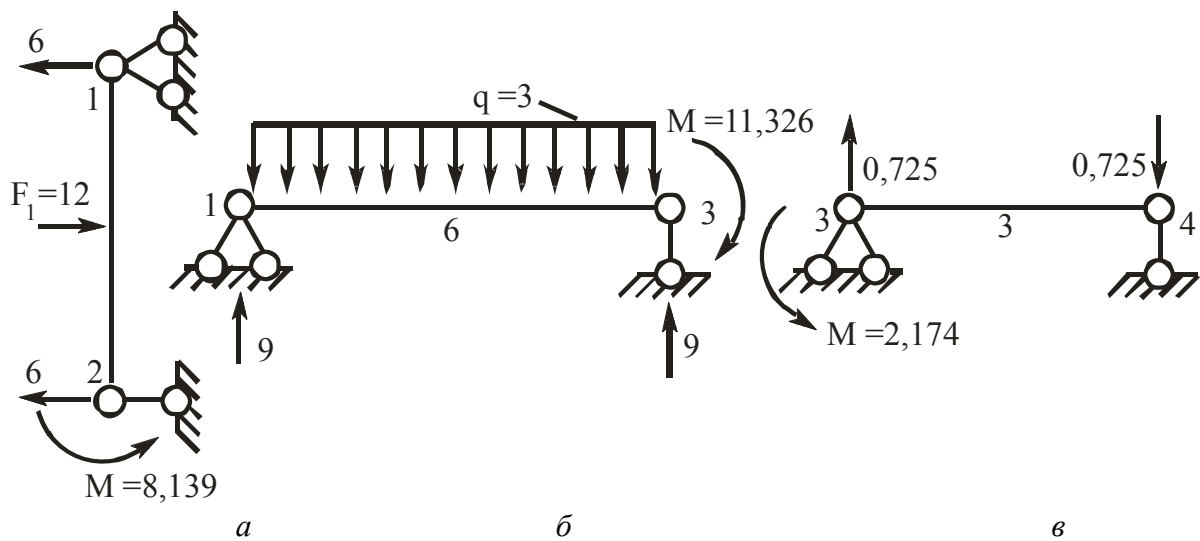


Рис. 25 (начало)

Элемент 1–2 (рис. 25, а): $Q_{12} = -6 + \frac{0 + 8,139}{4} = -3,965$ кН;

$$Q_{21} = 6 + \frac{0 + 8,139}{4} = 8,035$$
 кН.

Элемент 1–3 (рис. 25, б): $Q_{13} = 9 + \frac{-11,326}{6} = 7,112$ кН;

$$Q_{31} = -9 + \frac{-11,326}{6} = -10,888$$
 кН.

Элемент 3–4 (рис. 25 в): $Q_{34} = Q_{43} = 0 + \frac{2,174}{3} = 0,725$ кН.

Элемент 3–5 (рис. 25 з): $Q_{35} = Q_{53} = 0 + \frac{-2,253 + 3,856}{2} = 0,802$ кН.

Элемент 3–7 (рис. 25 д): $Q_{37} = 4 + \frac{-2,208 + 5,286}{4} = 4,77$ кН;

$$Q_{73} = -4 + \frac{-2,208 + 5,286}{4} = -3,23 \text{ кН. Элемент 5-6 (рис. 25 e):}$$

$$Q_{56} = 9 + \frac{2,253}{3} = 9,751 \text{ кН;}$$

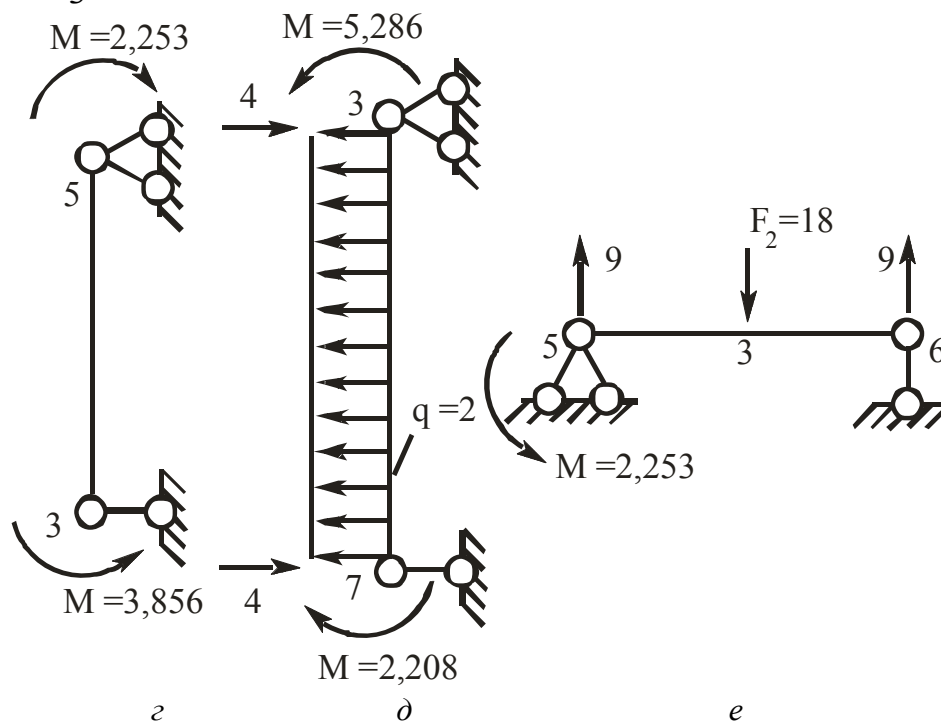


Рис. 25 (окончание)

$$Q_{65} = -9 + \frac{2,253}{3} = -8,249 \text{ кН.}$$

По полученным данным строим эпюру Q (рис. 26).

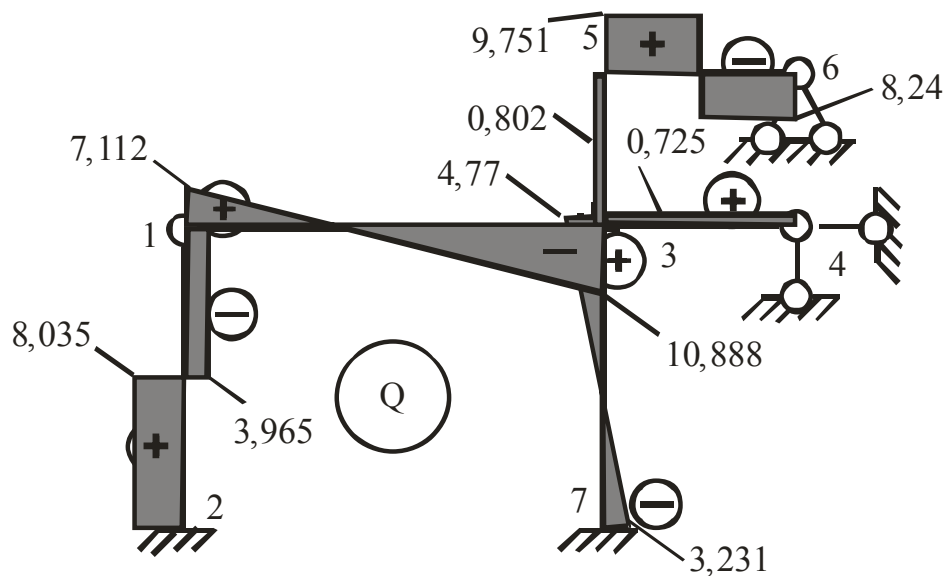


Рис. 26

10. Построение эпюры продольных сил

Продольные силы в элементах рамы определим из условия равновесия ее узлов проецированием сил на оси X и Y (рис. 27).

Узел 1 (рис. 27, *а*): $\sum X = -N_{13} + Q_{12} = 0$; $N_{13} = 3,965$ кН;

$\sum Y = N_{12} - Q_{13} = 0$; $N_{12} = 7,112$ кН.

Элементы 1-2, 1-3 сжаты. Силы направлены к узлу 1.

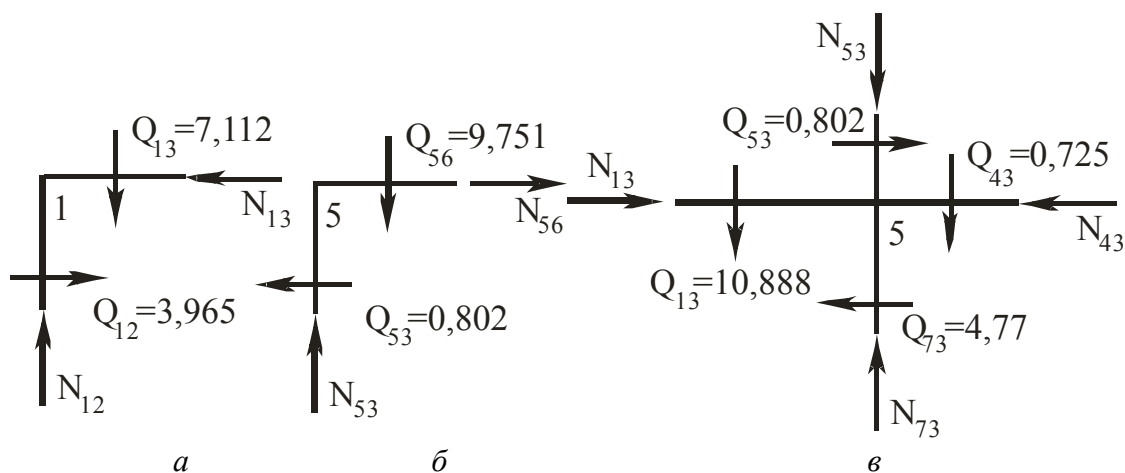


Рис. 27

Узел 5 (рис. 27, *б*): $\sum X = -Q_{53} + N_{56} = 0$; $N_{56} = 0,802$ кН;

$\sum Y = N_{53} - Q_{56} = 0$; $N_{53} = 9,751$ кН.

Элемент 5-6 растянут. Сила N_{56} направлена от узла 5.

Эпюра N представлена на рис. 28.

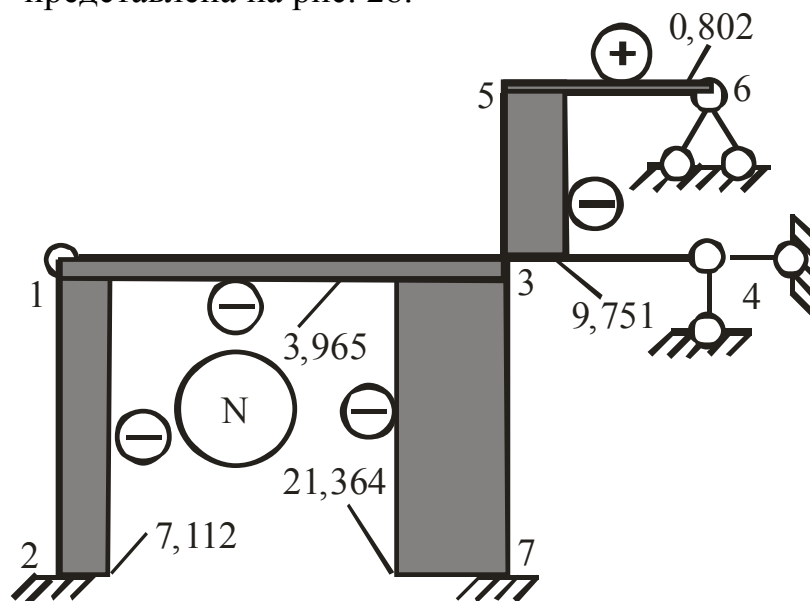


Рис. 28

Узел 3 (рис. 27, *в*): $\sum X = N_{13} + Q_{53} - N_{34} - Q_{37} = 0$;

$$N_{34} = 3,965 + 0,802 - 4,77 = 0; \quad \Sigma Y = -Q_{31} - N_{53} - Q_{34} + N_{37} = 0;$$

$$N_{37} = 10,888 + 9,751 + 0,725 = 21,364 \text{ кН.}$$

Примечание. В стержне 3-4 с подвижной опорой 4 продольная сила отсутствует, т.к. стержень имеет свободное продольное перемещение (см. рис. 28).

11. Проверка правильности построения эпюр Q и N

Для проверки правильности построения эпюр Q и N достаточно убедиться в том, что для рамы в целом или отдельных ее частей выполняется условие равновесия.

Отбросим опорные связи и заменим их опорными реакциями (рис. 29).

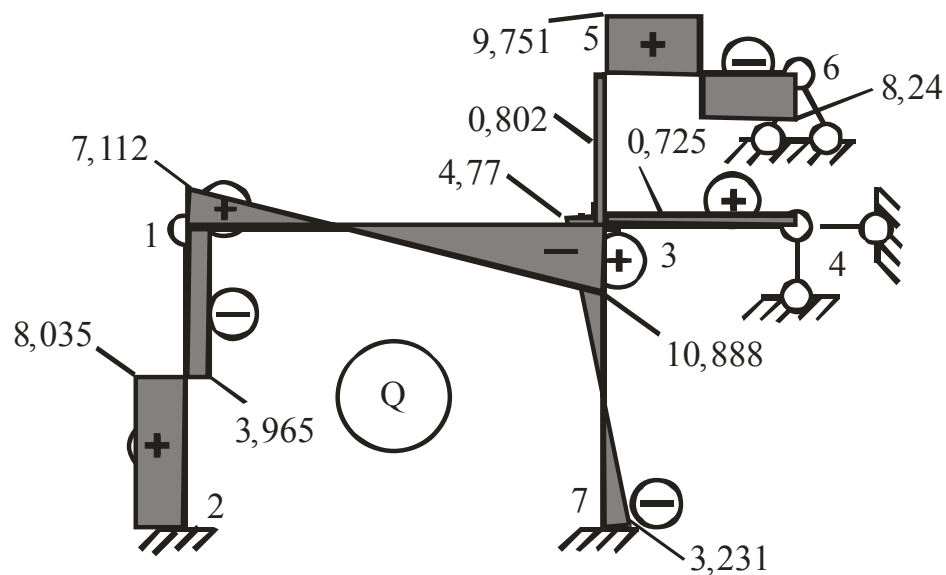


Рис. 29

$$\Sigma X = 12 - 8,035 + 3,231 - 8 + 0,802 = 0;$$

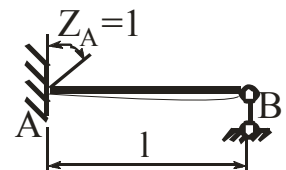

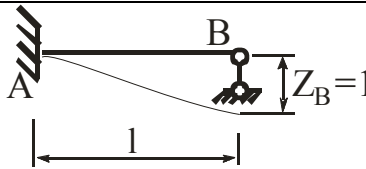

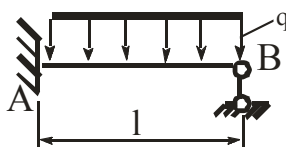
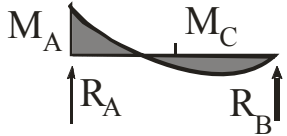
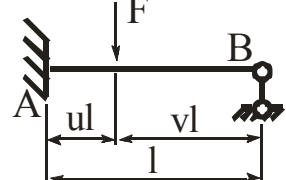

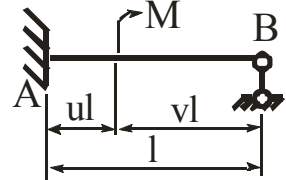
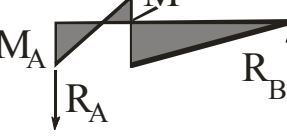
$$\Sigma Y = 7,112 - 18 + 21,364 - 18 - 0,725 + 8,24 = 0.$$

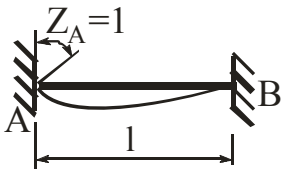
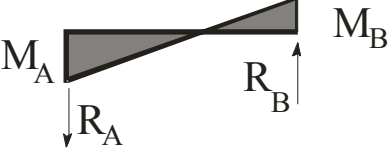
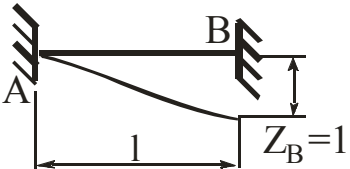
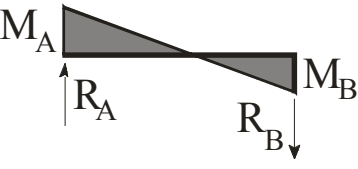
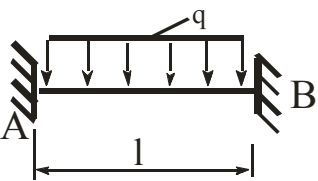
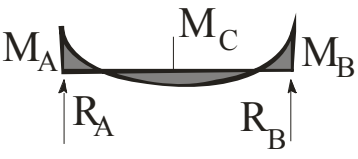
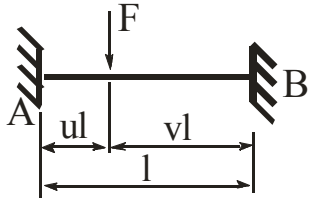
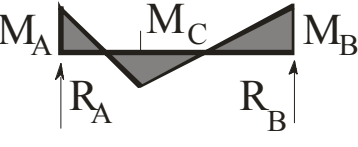
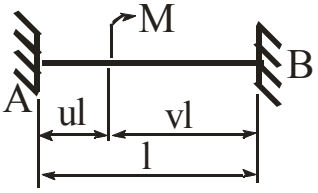
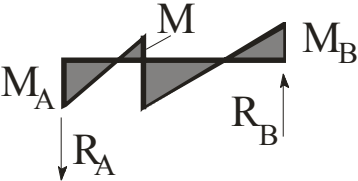
Условие равновесия выполняется. Следовательно, эпюры N и Q построены правильно.

Библиографический список

1. Смирнов В.А. и др. Строительная механика: Учебник для вузов. – М.: Стройиздат, 1984. – 208 с.
2. Ржаницын А.Р. Строительная механика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
3. Снитко Н.К. Строительная механика: Учебник для втузов. – Изд. 2-е, доп. – М.: Высшая школа, 1972. – 488 с.
4. Строительная механика/ Дарков А.В. и др.; Под ред. А.В. Даркова. М.; Высшая школа, 1976. – 600 с.

Приложение

№ п/п	Схема балки и воздействие на нее	Эпюра изгибающих моментов и реакции	Формулы
1	2	3	4
1			$M_A = \frac{3EJ}{l};$ $R_A = R_B = \frac{3EJ}{l^2}$
2			$M_A = -\frac{3EJ}{l^2};$ $R_A = R_B = \frac{3EJ}{l^3}$
3			$M_A = -\frac{ql^2}{8};$ $M_C = \frac{ql^2}{16};$ $R_A = \frac{5ql}{8}; R_B = \frac{3ql}{8}$
4			$M_A = -\frac{Fl}{2}v(1-v^2);$ $M_C = \frac{Fl}{2}u^2v(3-u);$ $R_A = \frac{Fv}{2}(3-v^2);$ $R_B = \frac{Fu^2}{2}(3-u)$
5			$M_A = \frac{M}{2}(1-3v^2);$ $R_A = R_B$ $R_A = \frac{3M}{2l}(1-v^2)$

1	2	3	4
6			$M_A = \frac{4EJ}{l};$ $M_B = -\frac{2EJ}{l};$ $R_A = R_B = \frac{6EJ}{l^2}$
7			$M_A = -\frac{6EJ}{l^2};$ $M_B = \frac{6EJ}{l^2};$ $R_A = R_B = \frac{12EJ}{l^3}$
8			$M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12};$ $M_C = \frac{ql^2}{24};$ $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$
9			$M_A = -Fluv^2;$ $M_B = -Flu^2v;$ $M_C = Fl2u^2v^2;$ $R_A = v^2(1 - 2u)F;$ $R_B = u^2(1 + 2v)F$
10			$M_A = v(2 - 3v)M;$ $M_B = -u(2 - 2u)M;$ $R_A = R_B = \frac{6uv}{l}M$

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ
МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Методические указания
к выполнению расчетно-графических работ
для студентов строительных специальностей

Составители: Геннадий Георгиевич Воробьев,
Анатолий Иванович Громовик

Редактор Т.И. Калинина

* * *

Подписано к печати
Формат 60 x 90 1/16. Бумага писчая.
Оперативный способ печати
Гарнитура Таймс
Усл. п. л. 1,75, уч.-изд. л.1,75
Тираж 300 экз. Заказ ____.
Цена договорная

* * *

Издательство СибАДИ
644099, Омск, ул. П. Некрасова, 10

Отпечатано в ПЦ издательства СибАДИ
644099, Омск, ул. П. Некрасова, 10