

## 2. Учет симметрии при расчете статически неопределимых стержневых систем

Использование метода сил для расчета систем с высокой степенью статической неопределимости связано с решением совместной системы большого количества линейных уравнений. Даже самый экономичных метод решения таких систем – алгоритм Гаусса – требует  $n^3$  вычислительных операций (где  $n$  – число уравнений, т.е. степень статической неопределимости системы), при условии, что все коэффициенты системы отличны от нуля. В связи с этим нужно стремиться так выбрать основную систему, чтобы возможно большее число побочных единичных перемещений  $\delta_{ik}$ , ( $i \neq k$ ) и свободных членов  $\Delta_{iF}$  обратилось в ноль.

Основным средством для достижения этой цели является использование симметрии. Стержневая система является симметричной, если симметричны не только оси и опорные закрепления (геометрическая симметрия), но и жесткости (упругая симметрия). При этом внешняя нагрузка может быть и несимметричной.

При выборе основной системы лишние неизвестные следует выбирать в виде симметричных и обратно симметричных усилий. Симметричные неизвестные создают симметричные эпюры моментов, а обратно симметричные неизвестные – кососимметричные эпюры. Такие эпюры обладают свойством взаимной ортогональности, т.е. результат их перемножения равен нулю:

$$\delta_{ik} = \sum_1^n \int_{s_0}^{s_1} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} ds = 0 \quad (14.18)$$

Ортогонализация эпюр может достигаться различными способами:

1) выбор симметричной основной системы; 2) выбор симметричных и обратносимметричных неизвестных; 3) группировка неизвестных; 4) устройство жестких консолей (способ упругого центра); 5) использование статически неопределимой основной системы; 6) разложение произвольной нагрузки на симметричную и обратносимметричную составляющие.

Рассмотрим раму, имеющую ось геометрической симметрии (рис.19, а). Заменим внешнюю нагрузку ей статически эквивалентной, такой, что она представляет сумму симметричной (рис.19, б) и кососимметричной (рис.19, в) нагрузок относительно оси геометрической симметрии.

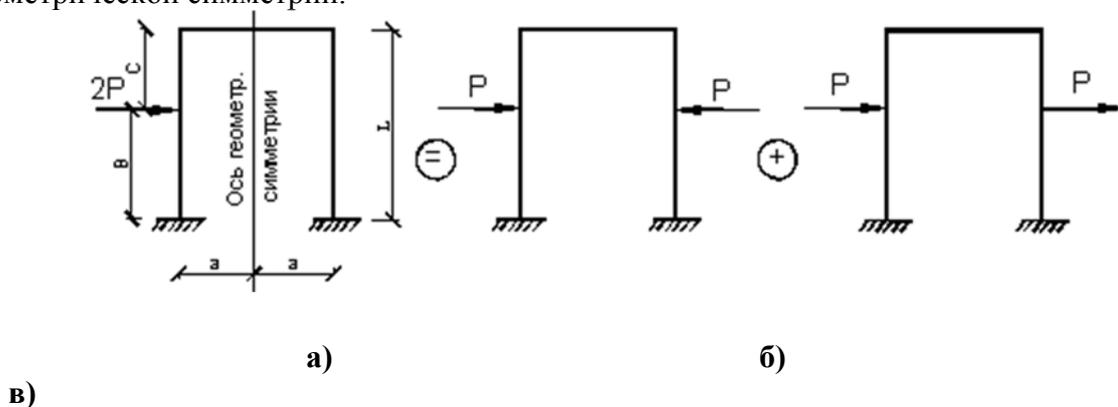


Рис. 19

Аналогично можно классифицировать внутренние силовые факторы в произвольном сечении стержневой системы (рис.20).

Изгибающие моменты  $M_x, M_y$ , нормальная сила  $N$  являются зеркальным отражением друг друга относительно плоскости поперечного сечения. Эти внутренние силовые факторы назовём симметричными. Остальные (перерезывающие силы  $Q_x, Q_y$  и крутящий момент  $M_z$ ) назовём антисимметричными или кососимметричными силовыми факторами.

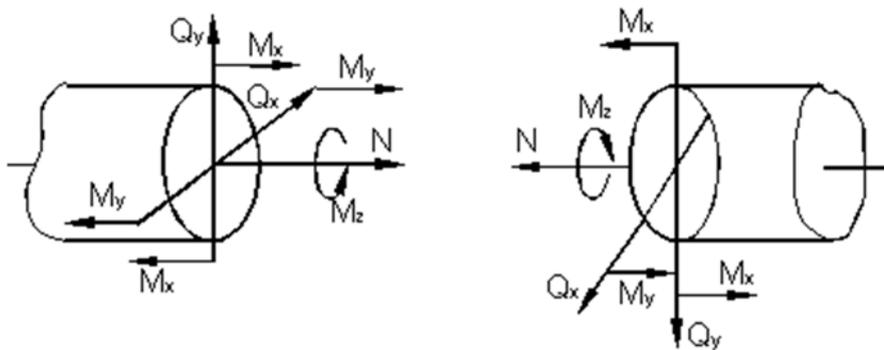


Рис. 20

Докажем теперь положение:

*у геометрически симметричной рамы в плоскости симметрии при симметричной внешней нагрузке обращаются в нуль кососимметричные внутренние силовые факторы, а при кососимметричной внешней нагрузке – симметричные силовые факторы (рис.21).*

Канонические уравнения метода сил для изображённой на рис.19 трижды статически неопределимой рамы имеют вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_1(P) = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_2(P) = 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_3(P) = 0. \end{cases} \quad (14.19)$$

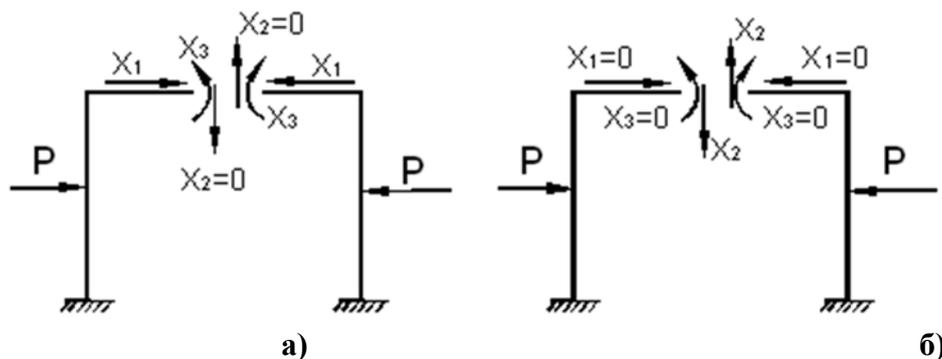


Рис. 21

На рис. 22 приведены эпюры изгибающих моментов от единичных сил.

На основании этих эпюр находим:

$$\begin{cases} EJ\delta_{12} = \left(\frac{1}{2}l \cdot l\right)\alpha - \left(\frac{1}{2}l \cdot l\right)\alpha \equiv 0, \\ EJ\delta_{23} = -(l \cdot \alpha)1 + (l \cdot \alpha)1 - \left(\frac{1}{2}\alpha \cdot \alpha\right)1 + \left(\frac{1}{2}\alpha \cdot \alpha\right)1 \equiv 0. \end{cases}$$

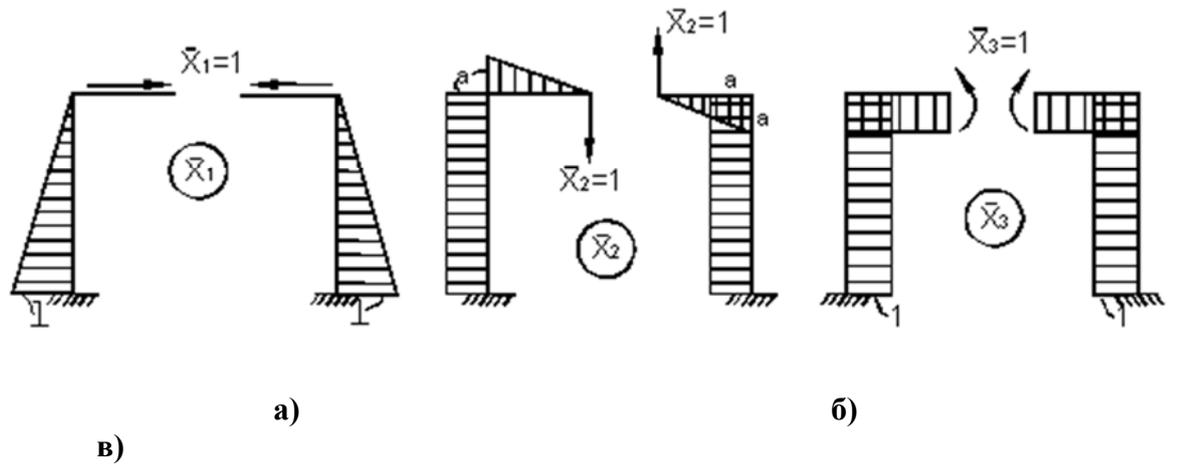


Рис. 22

Следовательно, канонические уравнения (14.19) принимают вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_1(P) = 0, \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_2(P) = 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_3(P) = 0. \end{cases} \quad (14.20)$$

На рис. 23 приведены эпюры моментов от внешних симметричной (рис.23, а) и косимметричной (рис.23, б) нагрузок.

В первом случае симметричной внешней нагрузки имеем:

$$EJ\Delta_2(P) = \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)a - \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)a = 0.$$

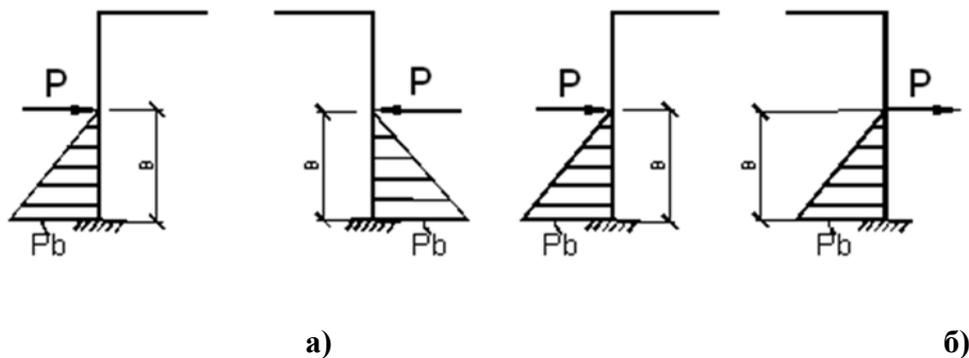


Рис. 23

Из (14.20) следует  $X_2 = 0$ , т.е. при симметричной внешней нагрузке обращается в нуль косимметричный силовой фактор (перерезывающая сила), что и требовалось доказать.

Во втором случае косимметричной внешней нагрузки имеем:

$$\begin{cases} EJ\Delta_1(P) = \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)\left(l - \frac{1}{3}b\right) - \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)\left(l - \frac{1}{3}b\right) = 0, \\ EJ\Delta_3(P) = -\left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)1 + \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)1 = 0. \end{cases}$$

Канонические уравнения (14.20) принимают вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 = 0, \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 = 0, \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_2(P) = 0. \end{cases} \quad (14.21)$$

Т.к. определитель системы двух первых уравнений (14.21)

$$|\delta| = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{13} \\ \delta_{31} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2 \neq 0,$$

то  $x_1 = x_3 = 0$ , что и требовалось доказать.

Полученные результаты могут быть распространены на пространственные стержневые системы.