

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Сопротивление материалов»

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Конспект лекций
для студентов специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское
строительство» дистанционной формы обучения

II семестр

Могилев 2014

Список литературы

1. **Дарков, А.В.** Строительная механика : учебник для строит. спец. вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 10-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2005. – 656 с.
2. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов : учебник / А.Е. Саргсян [и др.]. – 2-е изд. испр. и доп. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.
3. **Ржаницын, А.Р.** Строительная механика : учебное пособие для строительных специальностей вузов / А.Р. Ржаницын. – 2-е изд. перераб. – М. : Высш. школа, 1991. – 439 с.
4. **Борисевич, А.А.** Строительная механика : учебник для вузов / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Мн. : БНТУ, 2007. – 821 с.
5. **Селюков, В.М.** Расчетно-проектировочные работы по строительной механике : учебн. пособие для вузов / В.М. Селюков. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Высш. школа, 1989. – 205 с.

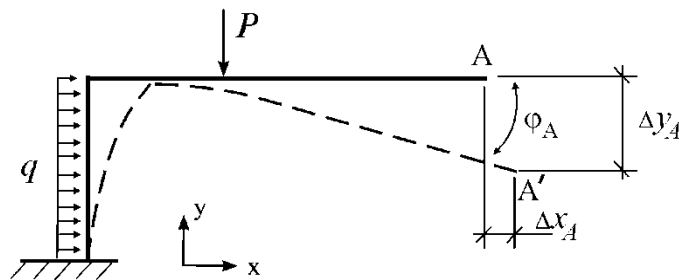
Тема 1. Определение перемещений и некоторые основные теоремы строительной механики.

Работа внешних и внутренних сил

При воздействии нагрузки, температуры и других факторов сооружения меняют свою форму, а его точки получают перемещения.

Перемещение – векторная величина, соответственно его задают через модуль и направление.

Поступательные перемещения Δ_A , $(\Delta x_A, \Delta y_A)$ будем называть линейными перемещениями, а φ_A – угловым перемещением.

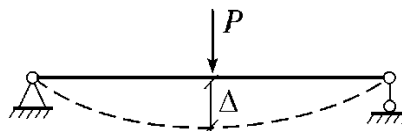


Методы определения перемещений основаны на определении работ внешних и внутренних сил. В механике рассматриваются два вида таких работ – действительные и возможные работы.

Действительным перемещением называется перемещение, вызванное силой по направлению ее действия. В упругих системах перемещение Δ прямо пропорционально действующей силе и поэтому выполняется закон Гука

$$\Delta = \delta P,$$

где коэффициент δ называется податливостью.



Действительной работой называется работа силы на ее действительном перемещении.

$$dA = P \cdot d\Delta = P \cdot \delta \cdot dP$$

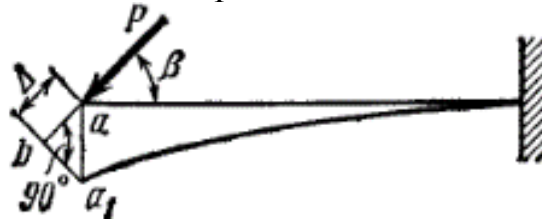
Интегрируем это выражение в пределах изменения силы от нуля до конечного значения:

$$A = \delta \cdot \int_0^P P dP = \delta \cdot \frac{P^2}{2} = \frac{P \cdot \Delta}{2}$$

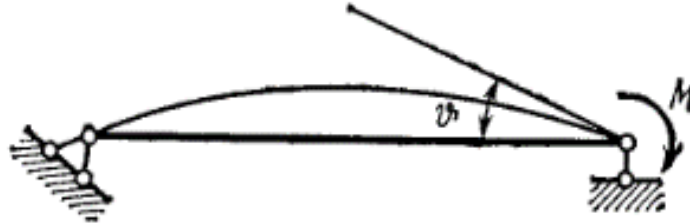
Эта формула определяет теорему Клапейрона: сила, действующая на упругую систему, совершает работу, равную половине произведения силы на перемещение.

В общем случае направление силы P может не совпадать с направлением вызванного ею перемещения. Поскольку работа определяется произведением силы на путь, пройденный по направлению этой силы, то под величиной Δ надо понимать проекцию действительного перемещения точки приложения силы по направлению силы.

Например, при действии силы P под углом β перемещение Δ измеряется отрезком ab (проекция действительного перемещения aa_1 на направление силы P).



В случае, когда к системе приложен момент M , выражение работы можно определить аналогично. Моменту в качестве перемещения соответствует угол поворота поперечного сечения бруса, к которому он приложен.

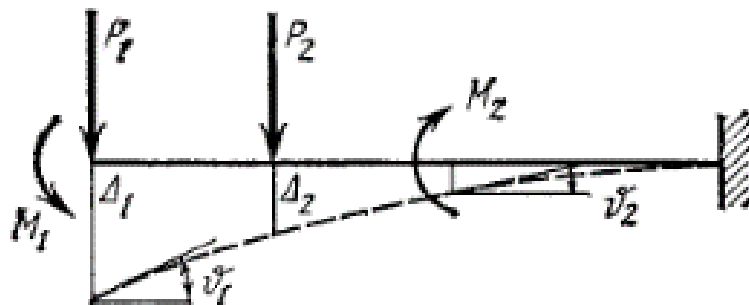


$$A = M \cdot \frac{\vartheta}{2}$$

где ϑ – угол поворота сечения балки, к которому приложен момент.

Равномерно распределенной нагрузке в качестве перемещения соответствует площадь эпюры перемещений на участке действия нагрузки.

При статическом действии на сооружение группы внешних сил работа этих сил равна половине суммы произведений каждой силы на величину соответствующего ей перемещения, вызванного действием всей группы сил. Например:



$$A = P_1 \cdot \frac{\Delta_1}{2} + P_2 \cdot \frac{\Delta_2}{2} + M_1 \cdot \frac{\vartheta_1}{2} - M_2 \cdot \frac{\vartheta_2}{2}$$

Знак минус перед последним членом выражения принят поскольку направление угла поворота ϑ_2 поперечного сечения балки, в котором приложен момент M_2 , противоположно направлению этого момента.

В идеально-упругой системе предполагается, что работа внешних сил A полностью переходит в потенциальную энергию деформации U :

$$A = U.$$

Если убрать внешние силы, упругая система возвратится в исходное положение. Эту работу совершают внутренние силы. Так как работа внешних сил W всегда положительна, то работа внутренних сил V будет отрицательной:

$$A = -V.$$

Определим работу внутренних сил плоской стержневой системы.

а) Работа продольной силы N

Пара продольных сил N , действующих на элемент dx , приводят к его чистому растяжению (рис. 1 а).

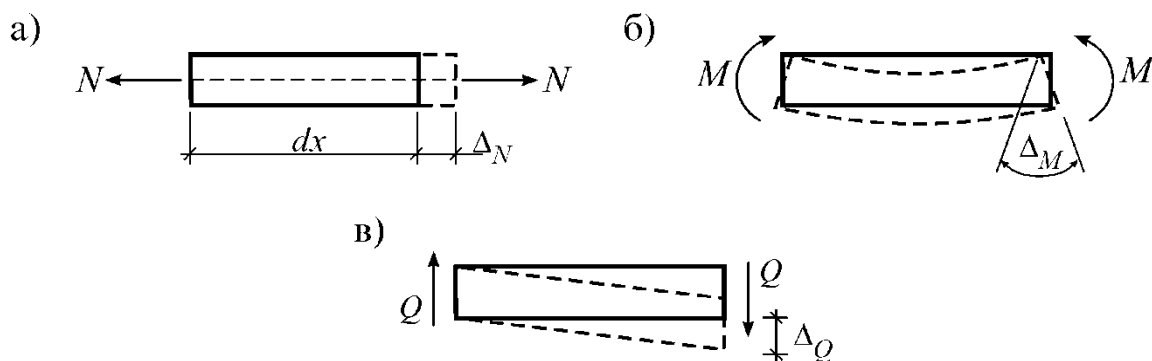


Рис. 1

По теореме Клапейрона эти силы на общей деформации элемента (действительном перемещении) Δ_N совершают действительную работу

$$-dV_N = \frac{1}{2} N \cdot \Delta_N$$

С учетом закона Гука при растяжении $\Delta_N = \frac{Ndx}{EF}$ получим

$$-dV_N = \frac{N^2}{2EF} dx,$$

где E – модуль Юнга, F – площадь сечения, EF – жесткость на растяжение.

б) Работа изгибающего момента M

Пара изгибающих моментов M , действующих на элемент dx , приводят к его чистому изгибу (рис. 1 б). На общей деформации Δ_M эти моменты совершают работу

$$-dV_M = \frac{1}{2} M \cdot \Delta_M$$

По закону Гука $\Delta_M = \frac{Mdx}{EI}$. Поэтому

$$-dV_M = \frac{M^2}{2EI} dx,$$

где I – момент инерции сечения, EI – жесткость на изгиб.

в) Работа поперечной силы Q

Действие пары поперечных сил Q приводит к чистому сдвигу элемента dx (рис. 1 в). На общей деформации Δ_Q они совершают работу:

$$-dV_Q = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta_Q.$$

По закону Гука, $\Delta_Q = \mu \cdot \frac{Qdx}{GF}$. Поэтому

$$-dV_M = \mu \cdot \frac{Q^2}{2GF} dx,$$

где μ – коэффициент формы сечения, GF – жесткость на сдвиг.

Теперь воспользуемся принципом суперпозиции:

$$-dV = -(dV_M + dV_Q + dV_N) \frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{EI} + \mu \frac{Q^2}{GF} + \frac{N^2}{EF} \right) dx$$

Если проинтегрировать это выражение по всей длине элемента l и учесть наличие в системе n стержней, получим выражение потенциальной энергии всей стержневой системы:

$$U = -V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{M^2}{EI} + \mu \frac{Q^2}{GF} + \frac{N^2}{EF} \right) dx. \quad (1)$$

Подсчеты показывают, что для системы, работающей на изгиб, первый член формулы (1) составляет – порядка 96%, второй – около 1%, третий – около 3%.

Теорема о взаимности работ

Малое перемещение, допускаемое связями системы, называется возможным перемещением. Причиной возможного перемещения могут быть другие силы, изменение температуры, осадки опор и др.

Работа силы на ее возможном перемещении называется возможной работой. Возможное перемещение обозначим Δ_{ij} , а возможную работу A_{ij} (здесь i означает направление, а j – причину).

Например, если в некоторой точке балки действует сила P_i , а затем в другой точке начнет действовать другая сила P_j , то балка в точке действия силы P_i получит возможное перемещение Δ_{ij} (рис. 2 а). Так как в это время сила P_i остается постоянной, совершаемая ею возможная работа определяется площадью прямоугольника (рис. 2 б):

$$A_{ij} = P_i \Delta_{ij}.$$

Таким образом, возможная работа равна произведению силы на возможное перемещение.

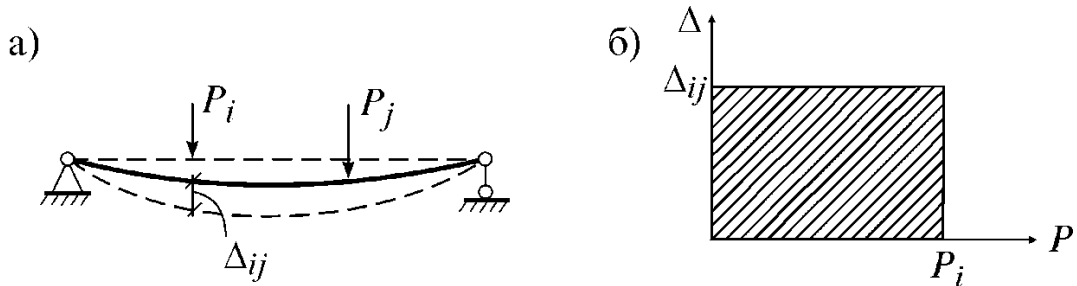


Рис. 2

При определении возможной работы следует рассматривать два состояния системы: в первом из них действуют заданные, а во втором – возможные силы.

Теорема Бетти. Возможная работа сил i -го состояния на перемещениях j -го состояния равна возможной работе сил j -го состояния на перемещениях i -го состояния.

$$P_i \Delta_{ij} = P_j \Delta_{ji}.$$

Доказательство.

Пусть на систему воздействуют силы P_1 и P_2 . Приложим их в разной последовательности и рассмотрим два состояния системы:

- 1) прикладывается сила P_1 , затем сила P_2 (рис. 3 а);
- 2) прикладывается сила P_2 , затем сила P_1 (рис. 3 б).

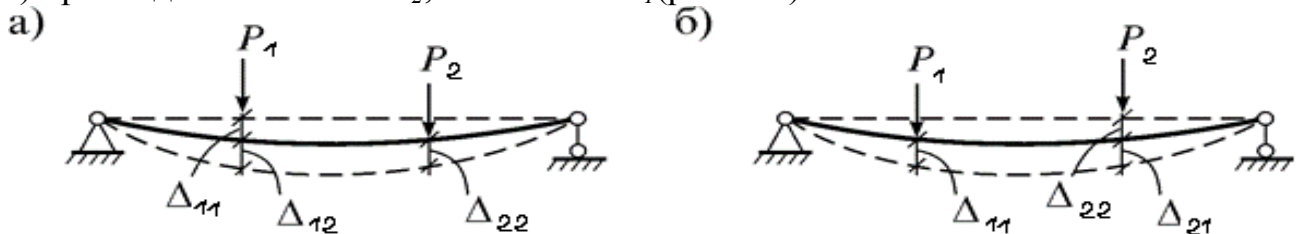


Рис. 3

Выражения работ в обоих состояниях будут:

$$A_{12} = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot \Delta_{11} + \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot \Delta_{22} + P_1 \cdot \Delta_{12}, \quad A_{21} = \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot \Delta_{22} + \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot \Delta_{11} + P_2 \cdot \Delta_{21}$$

На основании принципа суперпозиции результат воздействия этих сил не зависит от порядка их приложения. Следовательно, обе работы равны: $W_{12} = W_{21}$. Отсюда получаем

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}.$$

Теорема доказана. Ее часто называют теоремой о взаимности работ.

Теперь определим возможную работу внутренних сил. Для этого рассмотрим два состояния системы:

1) действует сила P_i и вызывает внутренние усилия M_i, Q_i, N_i ;

2) действует сила P_j , которая в пределах малого элемента dx вызывает возможные перемещения

$$\Delta_{Mj} = \frac{M_j}{EI} dx, \quad \Delta_{Qj} = \mu \cdot \frac{Q_j}{GF} dx, \quad \Delta_{Nj} = \frac{N_j}{EF} dx.$$

Внутренние усилия первого состояния на возможных перемещениях второго состояния совершат возможную работу

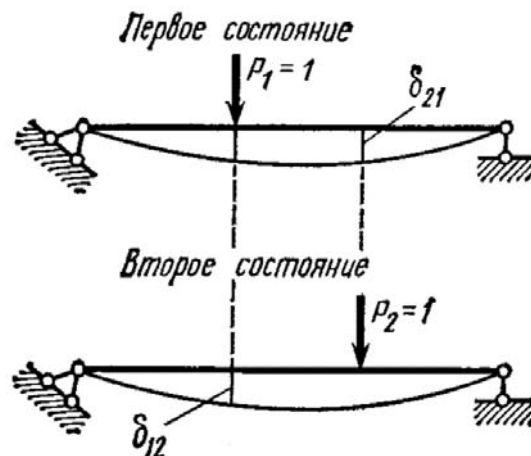
$$-dV_{ij} = M_i \Delta_{Mj} + Q_i \Delta_{Qj} + N_i \Delta_{Nj} = \frac{M_i M_j}{EI} dx + \mu \cdot \frac{Q_i Q_j}{GF} dx + \frac{N_i N_j}{EF} dx$$

Если проинтегрировать это выражение по длине элемента l и учесть наличие в системе n стержней, получим формулу возможной работы внутренних сил:

$$-V_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_0^l \left(\frac{M_i M_j}{EI} + \mu \frac{Q_i Q_j}{GF} + \frac{N_i N_j}{EF} \right) dx$$

Теорема о взаимности перемещений

Рассмотрим два состояния системы. В первом состоянии к системе приложена сила $P_1=1$, во втором сила $P_2=1$.



Обозначим перемещения, вызванные единичными силами знаком δ в отличие от перемещений, вызванных силами, не равными единице (Δ). В соответствии с этим перемещение рассматриваемой системы по направлению силы $P_2=1$ в первом состоянии (т.е. вызванное силой $P_1=1$) обозначим δ_{21} , а перемещение по направлению силы $P_1=1$ во втором состоянии обозначим δ_{12} .

На основании теоремы о взаимности работ для рассматриваемых двух состояний:

$$P_1 \cdot \delta_{12} = P_2 \cdot \delta_{21}$$

Поскольку $P_1=P_2=1$

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

Теорема о взаимности перемещений (Теорема Максвелла): для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй силы, вызванному первой силой.

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}$$

Тема 2. Общий метод определения перемещений по формуле Максвелла-Мора и способы вычисления интегралов Мора

Рассмотрим два состояния (рис. 1):

1) грузовое состояние (первое состояние) (рис. 1 а), в котором действующая нагрузка вызывает внутренние усилия M_P, Q_P, N_P ;

2) единичное состояние (второе состояние) (рис. 1 б), в котором действующая единичная сила $P=1$ вызывает внутренние усилия $\bar{M}, \bar{Q}, \bar{N}$.

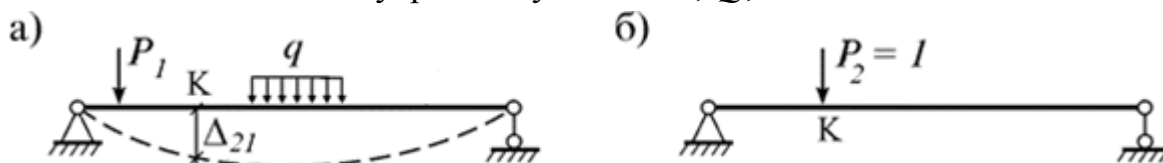


Рис. 1

Составим выражение работы A_{21} , то есть работы силы $P_2 = 1$ на перемещении Δ_{21} , возникающей от действия сил первого состояния:

$$A_{21} = P_2 \cdot \Delta_{21} = 1 \cdot \Delta_{21} = \Delta_{21}$$

Внутренние силы грузового состояния на перемещениях единичного состояния $\frac{\bar{M}}{EI} dx, \frac{\bar{Q}}{GF} dx, \frac{\bar{N}}{EF} dx$ совершают возможную работу:

$$-V_{21} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{M_P \bar{M}}{EI} + \mu \frac{Q_P \bar{Q}}{GF} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx$$

Единичная сила $P=1$ единичного состояния на перемещении грузового состояния Δ_P совершает возможную работу

$$A_{21} = 1 \cdot \Delta_P = \Delta_P.$$

По известному из теоретической механики принципу возможных перемещений в упругих системах эти работы должны быть равными, т.е. $A_{ij} = -V_{ij}$. Значит, должны быть равны и правые части этих выражений:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{M_P \bar{M}}{EI} + \mu \frac{Q_P \bar{Q}}{GF} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx$$

Эта формула называется формулой Мора и используется для определения перемещений стержневой системы от внешней нагрузки.

Рассмотрим отдельные случаи применения формулы Мора.

1. В балках (рис. 2 а) возможны три случая:

– если $\frac{l}{h} > 8$, в формуле оставляется только моменты:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_P \bar{M}}{EI} dx;$$

– если $5 \leq \frac{l}{h} \leq 8$, учитываются и поперечные силы:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{M_P \bar{M}}{EI} + \mu \frac{Q_P \bar{Q}}{GF} \right) dx$$

– если $\frac{l}{h} < 5$, формула Мора дает большие погрешности. В этом случае перемещения следует определять методами теории упругости.

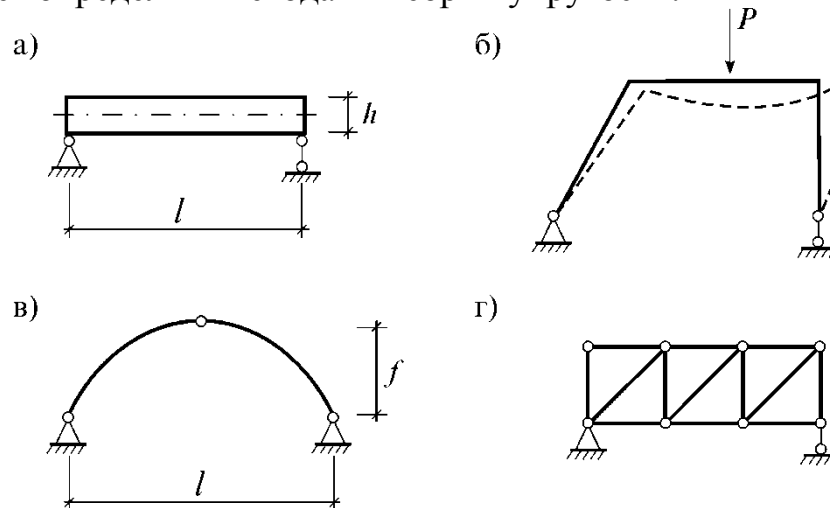


Рис. 2

2. В рамах (рис. 2 б) элементы в основном работают только на изгиб. Поэтому в формуле Мора учитываются только моменты.

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_P \bar{M}}{EI} dx$$

3. В арках (рис. 2 в) необходимо учитывать соотношение между основными размерами арки l и f :

1) если $\frac{l}{f} \leq 5$ (крутая арка), учитываются только моменты:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_P \bar{M}}{EI} dx$$

2) если $\frac{l}{f} > 5$ (пологая арка), учитываются моменты и продольные силы:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{M_P \bar{M}}{EI} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx$$

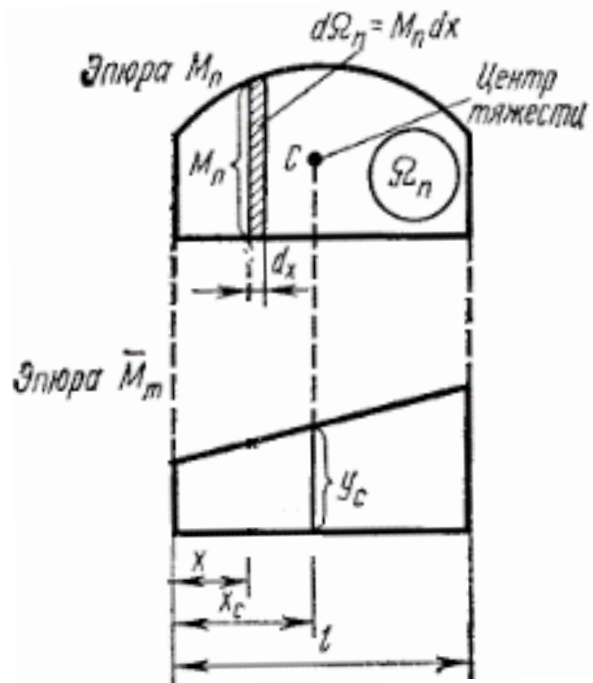
4. В фермах (рис. 2 г) возникают только продольные силы. Поэтому

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{N_P \bar{N}}{EF} dx = \sum_{k=1}^n \frac{N_{Pk} \bar{N}_k}{EF_k} l_k$$

Тема 3. Определение перемещений способом Верещагина.

Способ Верещагина.

Интеграл произведения двух функций, из которых одна линейная, а другая – произвольная, равен площади произвольной функции, умноженной на ординату из прямолинейной функции, взятую под центром тяжести площади первой функции.



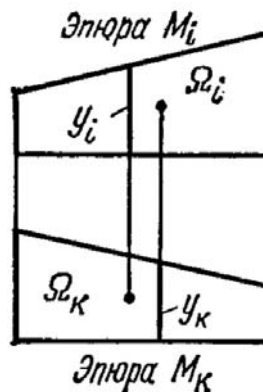
Например, имеем две эпюры моментов M_n и \overline{M}_m , тогда при использовании правила Верещагина:

$$\int_0^L \overline{M}_m \cdot M_n dx = \Omega_n \cdot y_c$$

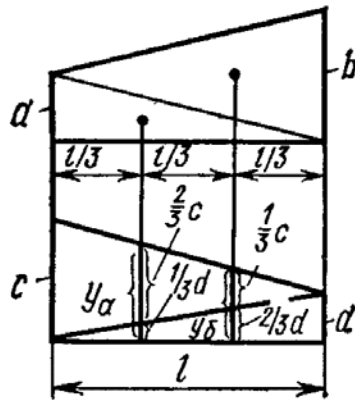
Соответственно, перемещение:

$$\Delta_{mn} = \frac{\Omega_n \cdot y_c}{E \cdot J}$$

Ордината y_c должна быть взята обязательно из прямолинейной эпюры. Если обе эпюры прямолинейны, то ординату можно взять из любой эпюры.

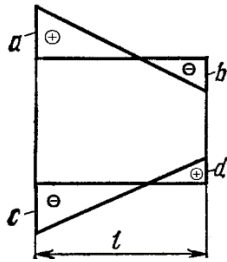


Когда перемножаются две эпюры, имеющие вид трапеции, то необходимо разбить одну из эпюр на два треугольника и умножить площадь каждого из них на ординату под его центром тяжести из другой эпюры.



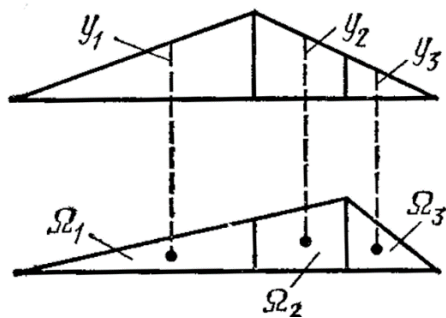
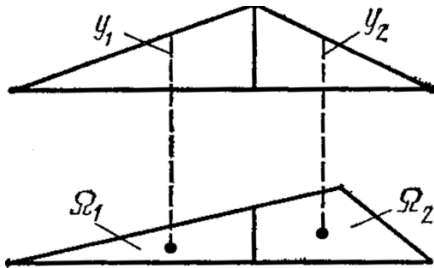
$$\frac{a \cdot l}{2} \cdot y_a + \frac{b \cdot l}{2} \cdot y_b = \frac{l}{6} \cdot (2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d + a \cdot d + b \cdot c)$$

По этой формуле можно перемножать эпюры имеющие вид перекрученных трапеций



$$\frac{l}{6} \cdot (-2 \cdot a \cdot c - 2 \cdot b \cdot d + a \cdot d + b \cdot c)$$

Если ни одна из перемножаемых эпюр не является прямолинейной, но одна из них или обе ограничены ломаными прямыми линиями, то в этом случае эпюры разбивают на участки, в пределах каждого из которых, по крайней мере, одна эпюра прямолинейна.



$$\Omega_1 \cdot y_1 + \Omega_2 \cdot y_2 + \Omega_3 \cdot y_3$$

Тема 4. Понятие и свойства статически неопределимых систем. Метод сил.

Понятие и свойства статически неопределимых систем. Степень статической неопределимости плоских систем.

Статически неопределимой называется система, внутренние усилия которой нельзя определить только из уравнений статики.

Свойства статически неопределимых систем:

1. Они надежнее, разрушение некоторых элементов не всегда приводит к разрушению всей системы;
2. Они выдерживают большую нагрузку;
3. Изменение температуры, смещение опор, неточность изготовления элементов вызывают дополнительные усилия;
4. Распределение усилий зависит от соотношений между поперечными размерами отдельных элементов.

У статически неопределимых систем есть так называемые «лишние» связи, число которых называется степенью статической неопределимости системы.

Степень статической неопределимости n простой системы определяется по следующей формуле:

$$n = 2 \cdot Ш + C_0 - 3 \cdot Д.$$

Например, степени статической неопределимости балки (рис. 1 а) и рамы (рис. 1 в) будут:

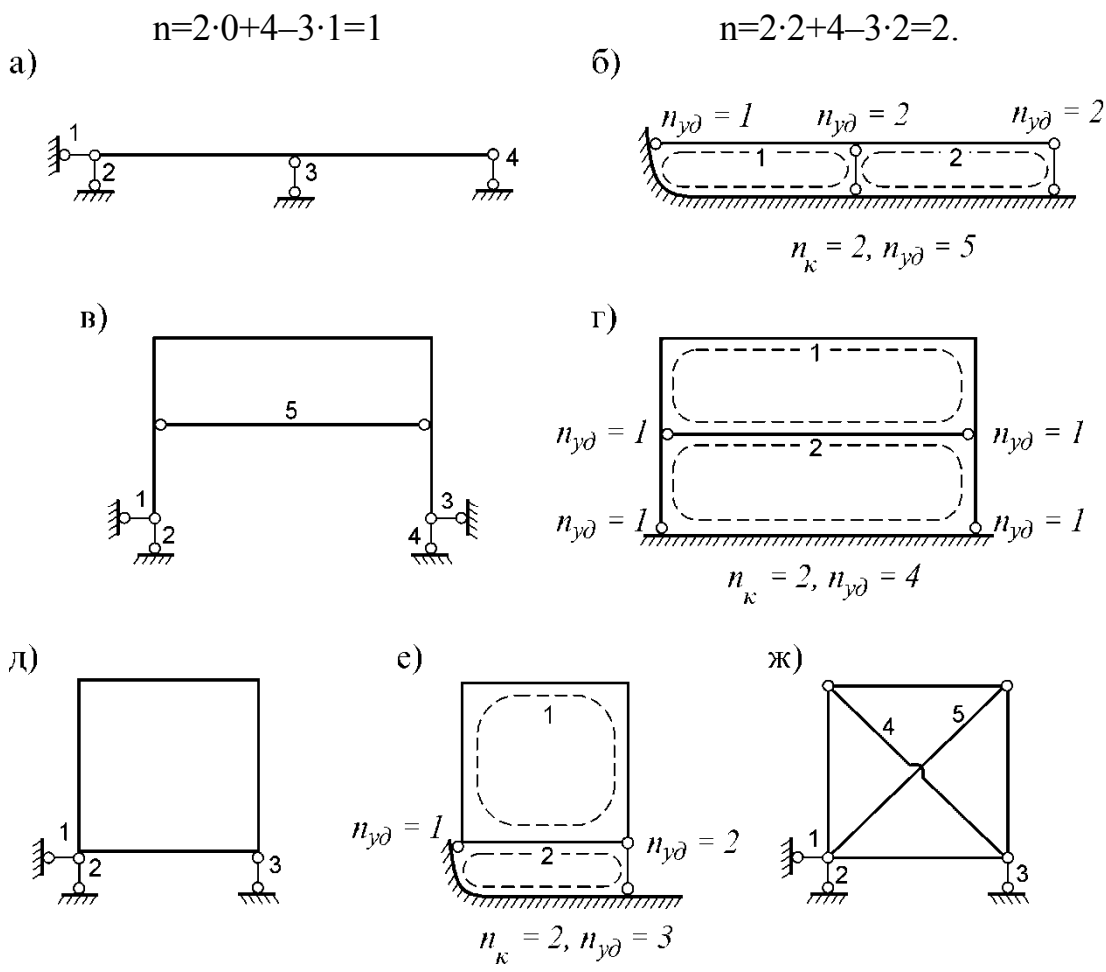


Рис. 1

Степень статической неопределимости сплошного замкнутого контура равняется трем. Поэтому степень статической неопределимости системы из замкнутых контуров

$$N=3n_k - n_{уд.}$$

где n_k - число замкнутых контуров – замкнутая цепь из элементов и связей системы;

$n_{уд}$ - число удалённых связей – связи замкнутого контура, исключенная из жесткого соединения элементов

При использовании этой формулы для балки (рис. 1 а) и рам (рис. 1 в, д) в этих системах необходимо определить общее число замкнутых контуров n_k и удаленных связей $n_{уд}$ (рис. 1 б, г, е). Тогда

– для балки: $n=3 \cdot 2 - 5 = 1$;

– для рам: $n=3 \cdot 2 - 4 = 2$, $n=3 \cdot 2 - 3 = 3$.

Степень статической неопределимости фермы определяется по формуле

$$n = n_c + n_{co} - 2n_y.$$

где n_c – число стержней;

n_y – число узлов.

Например, для фермы (рис. 1 ж): $n=6+3-2 \cdot 4=1$.

Расчет статически неопределимой системы начинается с превращения ее в статически определимую. Для этого необходимо исключить лишние связи и заменить их реакции неизвестными силами. Полученная система называется основной системой(ОС).

Например, у балки (рис. 2 а), которую далее будем называть заданной системой (ЗС), степень статической неопределимости $n=1$. Если исключить лишнюю связь (правую опору) и обозначить неизвестную реакцию через X , получим ее ОС (рис. 2 б).

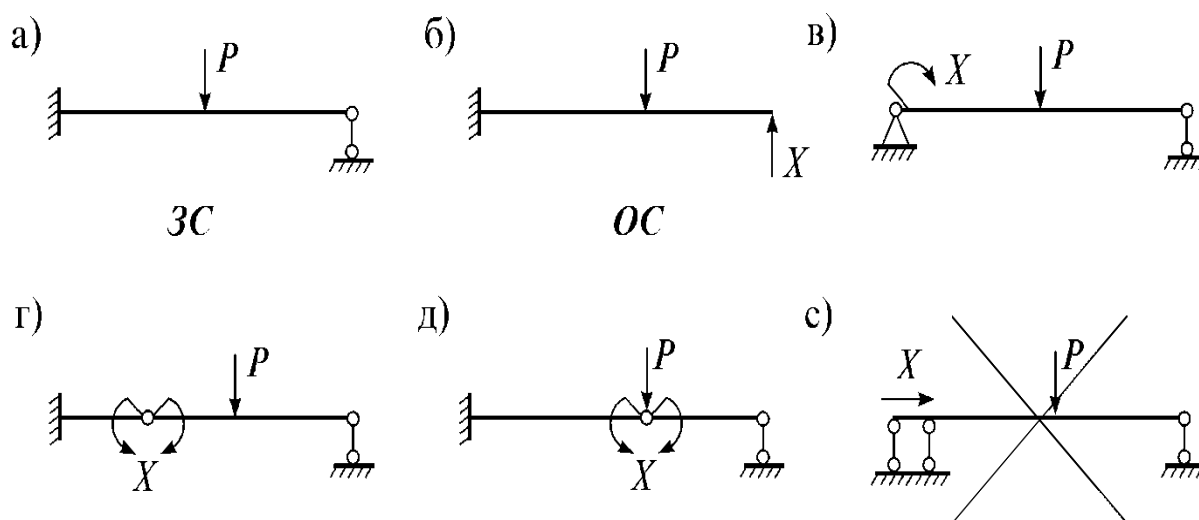


Рис. 2

Способов исключения лишних связей очень много. Например, лишнюю связь можно исключать как на рис. 2 в-е. При удалении связей необходимо следить, чтобы полученная конструкция была геометрически неизменяема (схема на рис. 2 е геометрически изменяема и для дальнейшего расчета непригодна).

Объем вычислений в разных ОС может быть разным. Поэтому из многих вариантов ОС нужно выбирать наиболее оптимальную. Например, в нашем примере первый вариант ОС (рис. 7.2 б) предпочтительнее остальных, т.к. в ней эпюры строятся легче.

Метод сил, его сущность. Канонические уравнения метода сил.

В рассматриваемом методе расчета статически неопределимых систем за основные неизвестные принимаются силы, поэтому он и называется методом сил.

Изучим метод сил на примере предыдущей балки (рис. 2 а).

Потребуем, чтобы ее ЗС (рис. 2 а) и ОС (рис. 2 б) были эквивалентными. Для этого перемещение в направлении исключенной связи должно равняться нулю: $\Delta=0$.

По принципу суперпозиции (принципу независимости действия сил), это перемещение равно сумме перемещения Δ_X (рис. 3 а) от неизвестной реакции X и перемещения Δ_P (рис. 3 б) от заданной силы P . Поэтому

$$\Delta = \Delta_X + \Delta_P = 0 \quad (1)$$

Это уравнение, учитывающее геометрические особенности системы, называется уравнением совместности деформаций.

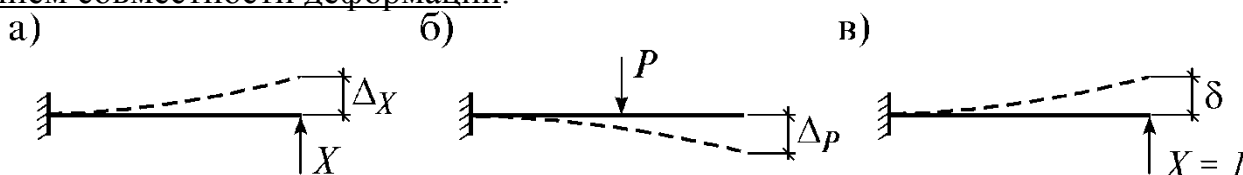


Рис. 3

Так как сила X неизвестна, перемещение Δ_X непосредственно определить нельзя. Поэтому рассмотрим единичное состояние (ЕС) основной системы, где действует только единичная сила $P=1$ (рис. 3 в).

По закону Гука, в линейно-упругой системе $\Delta_X = \delta X$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\delta X + \Delta_P = 0.$$

Его называют каноническим уравнением метода сил. Такое уравнение получается для любой одной раз статически неопределимой системы. Если известны δ и Δ_P , из него определяется неизвестная сила:

$$X = -\Delta_P / \delta.$$

Если в системе имеется n лишних связей, то нужно исключить все эти лишние связи и выбрать ОС с n неизвестными X_1, X_2, \dots, X_n . Тогда, из условий эквивалентности ЗС и ее ОС (условий равенства нулю перемещений в направлениях исключенных связей) можно составить n уравнений совместности деформаций:

$$D_1 = D_{1X_1} + D_{1X_2} + \dots + D_{1X_n} + D_{1P} = 0,$$

$$D_2 = D_{2X_1} + D_{2X_2} + \dots + D_{2X_n} + D_{2P} = 0,$$

$$\dots$$

$$D_n = D_{nX_1} + D_{nX_2} + \dots + D_{nX_n} + D_{nP} = 0$$

Здесь первый индекс при D обозначают направление перемещения, второй – причины, вызвавшие перемещение.

При рассмотрении n различных единичных состояний системы и определении податливостей δ_{ij} по различным направлениям эти уравнения приводятся к системе уравнений. Она называется системой канонических уравнений метода сил.

$$X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \dots + X_n \cdot \delta_{1n} + \Delta_{1P} = 0,$$

$$X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \dots + X_n \cdot \delta_{2n} + \Delta_{2P} = 0,$$

$$\dots$$

$$X_1 \cdot \delta_{n1} + X_2 \cdot \delta_{n2} + \dots + X_n \cdot \delta_{nn} + \Delta_{nP} = 0$$

где δ_{ii} – главные коэффициенты;
 δ_{ij} – боковые коэффициенты;
 Δ_{ip} – грузовые коэффициенты.

Коэффициент δ_{21} представляет собой перемещение по направлению силы X_2 , вызванное силой, равной единице, действующей по направлению силы X_1 .

Симметрично расположенные относительно главной диагонали боковые коэффициенты равны, т.е. $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Единичные перемещения определяются способом Верещагина, т.е. перемножением эпюр от единичных сил. Аналогично определяются грузовые коэффициенты. Затем определяются неизвестные силы X_1, X_2, X_n . Строятся эпюры изгибающих моментов от каждого найденного усилия X . Ординаты этих эпюр складываются с ординатами грузовой эпюры (от действия заданной нагрузки) – в результате получаем суммарную эпюру изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе.

Проверка коэффициентов канонических уравнений.

Существует три способа проверки коэффициентов.

1. Построчная проверка проводится для проверки всех коэффициентов одного уравнения.

Если сложить все коэффициенты при неизвестных i -го уравнения, то

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in} = \bar{M}_i \cdot \bar{M}_1 + \bar{M}_i \cdot \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_i \cdot \bar{M}_n =$$

$$= \bar{M}_i \cdot (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) = \bar{M}_i \cdot \bar{M}_\Sigma = \delta_{i\Sigma}$$

Отсюда следует, что если сумма всех коэффициентов i -ой строки системы канонических уравнений равна произведению i -ой единичной эпюры на суммарную единичную эпюру, т.е. то коэффициенты этой строки вычислены верно.

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \bar{M}_i \cdot \bar{M}_\Sigma,$$

Т.е.,

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n} = \delta_{1\Sigma} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s}{EI} ds,$$

$$\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \dots + \delta_{2n} = \delta_{2\Sigma} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_s}{EI} ds,$$

.....

$$\delta_{n1} + \delta_{n2} + \delta_{n3} + \dots + \delta_{nn} = \delta_{n\Sigma} = \sum \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_s}{EI} ds.$$

2. Универсальная проверка используется для одновременной проверки всех коэффициентов системы канонических уравнений.

Если сумма всех коэффициентов системы канонических уравнений равна произведению суммарной единичной эпюры на себя, т.е. то все коэффициенты системы канонических уравнений вычислены верно.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \bar{M}_\Sigma \cdot \bar{M}_\Sigma = \bar{M}_\Sigma^2$$

3. Постолбцовая проверка используется для проверки коэффициентов одного столбца системы канонических уравнений. Приведем правило проверки столбца из грузовых коэффициентов: если сумма всех грузовых коэффициентов равна произведению суммарной единичной эпюры на грузовую эпюру, т.е.то грузовые коэффициенты вычислены верно.

$$\sum_{j=1}^n A_{jP} = \bar{M}_\Sigma \cdot M_P .$$

Общий алгоритм расчета статически неопределимых систем по методу сил (на примере плоских рам).

Порядок расчета рамы методом сил состоит из следующих этапов:

1. Определение степени статической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Запись системы канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний.
5. Построение единичных и грузовой эпюр.
6. Определение коэффициентов канонических уравнений.
7. Решение системы канонических уравнений.
8. Построение эпюр M, Q, N.

Тема 5. Эпюры M, Q, N для рамы. Определение перемещений в статически неопределимых системах.

Построение эпюр M, Q, N для рамы и их проверка.

После подсчета и проверки коэффициентов системы канонических уравнений все они подставляются в эти уравнения, а потом система уравнений решается относительно неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n . Затем определяются внутренние усилия заданной статически неопределимой системы.

Эту задачу можно решить двумя способами:

1) подстановкой найденных величин X_1, X_2, \dots, X_n в основную систему и определением ее усилий M, Q, N;

2) используя эпюры внутренних усилий в единичных состояниях $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ и в грузовом состоянии M_p, Q_p, N_p с учетом закона Гука и принципа суперпозиции; в этом случае внутренние усилия определяются по формулам:

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot X_n + M_p$$

$$Q = \bar{Q}_1 \cdot X_1 + \bar{Q}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{Q}_n \cdot X_n + Q_p$$

$$N = \bar{N}_1 \cdot X_1 + \bar{N}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{N}_n \cdot X_n + N_p$$

При расчете рам и балок, которые подвергаются в основном только изгибным нагрузкам, обычно используется только первая из этих формул, и по ней строится эпюра изгибающих моментов M.

Эпюра Q строится по эпюре M из дифференциальной зависимости.

$$Q = \frac{M_{np} - M_{лев}}{l} \pm \frac{q \cdot l}{2}$$

где $M_{np}, M_{лев}$ – ординаты на эпюре изгибающего момента на правом и левом соответственно концах рассматриваемого участка длиной l;

q – распределенная нагрузка (\pm правило знаков для поперечной силы).

Эпюра N строится по эпюре Q способом вырезания узлов (как для фермы).

Проверка правильности построения эпюр M, Q, N:

1) статическая проверка состоит в проверке выполнения условий равновесия, т.е. $\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M_{A,B,C} = 0$. ;

2) деформационная проверка – в результате умножения окончательной эпюры изгибающих моментов M на любую из единичных эпюр должен получаться нуль:

- для всех условий $\bar{M}_i \cdot M = 0$ ($i = \overline{1, n}$) или общего условия $\bar{M}_\Sigma \cdot M = 0$.

$$\bar{M}_i \cdot M = \bar{M}_i \cdot (\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p) = \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{ip}$$

А это выражение равно нулю, так как является i-ой строкой системы канонических уравнений. Отсюда следует, что

$\bar{M}_\Sigma \cdot M = (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) \cdot M = 0$, поскольку каждый из его сомножителей равняется нулю.

Определение перемещений в статически неопределимых системах.

Перемещения статически неопределимых систем можно вычислять по известной формуле Мора. В системах с преобладанием изгибных деформаций (например, в рамах и балках) она имеет вид:

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M} \cdot M_P}{EI} dx = \frac{\bar{M} \cdot M_P}{EI}.$$

Здесь \bar{M} и M – эпюры моментов от единичной силы и нагрузки в заданной статически неопределимой системе. Построение этих эпюр связано с решением трудоемких задач раскрытия статической неопределимости.

Задача упрощается, если одну из этих эпюр строить в статически определимой основной системе и использовать формулы:

$$\Delta = \bar{M}_0 \cdot M_P \quad \text{или} \quad \Delta = \bar{M} \cdot M_P^0,$$

где \bar{M}_0 и M_P – единичная и грузовая эпюры, построенные в основной системе метода сил.

Пример: определим перемещение точки С.

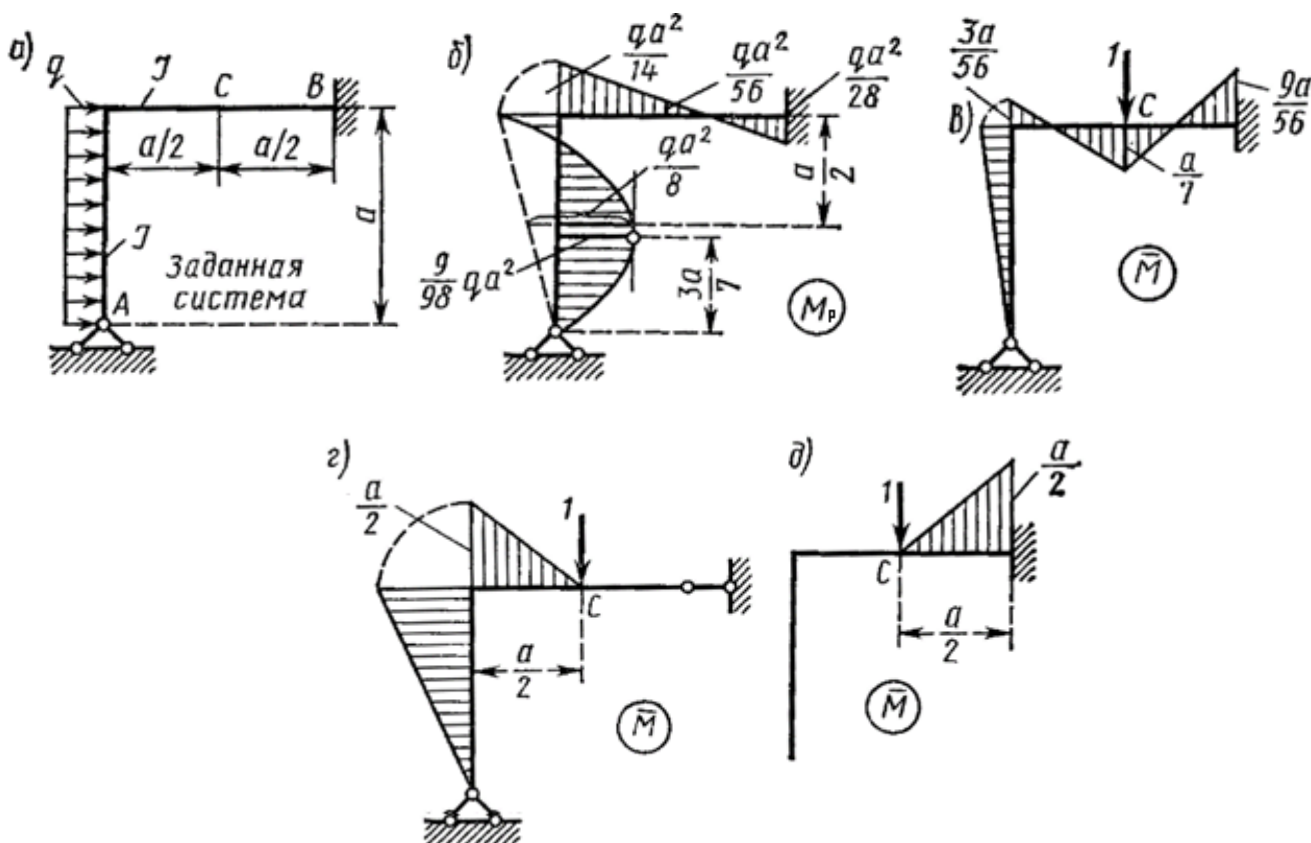


Рис. 1

Строим эпюру M (рис. 1 б) и эпюру \bar{M} (рис. 1 в).

Для вычисления перемещения точки С в статически неопределимой системе (рис. 1, а) может быть выбрана любая статически определимая система в качестве основной, а не только та, которая использовалась при расчете статически неопределимой системы (рис. 1, г, д). При этом в качестве статически определимой системы следует выбрать такую, чтобы эпюра \bar{M} строилась наиболее просто, захватывала наименьшее число участков и имела нулевые ординаты на тех участках, где эпюра M грузовая в статически неопределимой системе имеет наиболее сложное очертание (для системы, приведенной на рис.1 д)

Тема 6. Расчет неразрезных балок

Уравнение трех моментов.

Сплошная балка, перекрывающая несколько пролетов, не прерывающаяся шарнирами, называется неразрезной.

Степень статической неопределимости неразрезной балки определяется по формуле

$$n = C_0 - 3$$

Неразрезную балку обычно решают методом сил. В качестве основной системы выбирают балку с установленными над промежуточными опорами шарнирами. При таком выборе основной системы балка делится на отдельные однопролетные балки.

Если какой-либо конец балки имеет заделку (рис. 1 а), то в основной системе со стороны этого конца добавляется вместо заделки пролет длиной ноль. Консольные части балки (рис. 1 б) в основной системе отбрасываются, а их действия заменяются известными моментами.

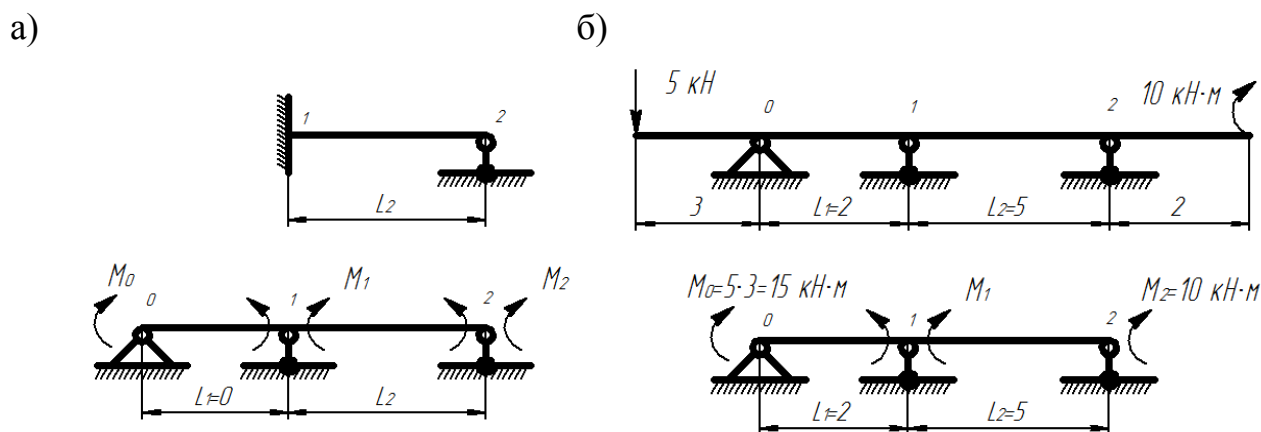


Рис. 1

Для каждой отдельной балки (между установленными шарнирами) строятся эпюры моментов от действия внешних сил, которые на ней находятся.

Каноническое уравнение метода сил для балки постоянного сечения принимает вид уравнения трех моментов и содержит не более трех неизвестных

$$M_{n-1} \cdot I_n + 2 \cdot M_n \cdot (I_n + I_{n+1}) + M_{n+1} \cdot I_{n+1} = -6 \cdot (B_n^\Phi + A_{n+1}^\Phi)$$

где M_{n-1} , M_n , M_{n+1} – моменты на опорах $n-1$, n , $n+1$;

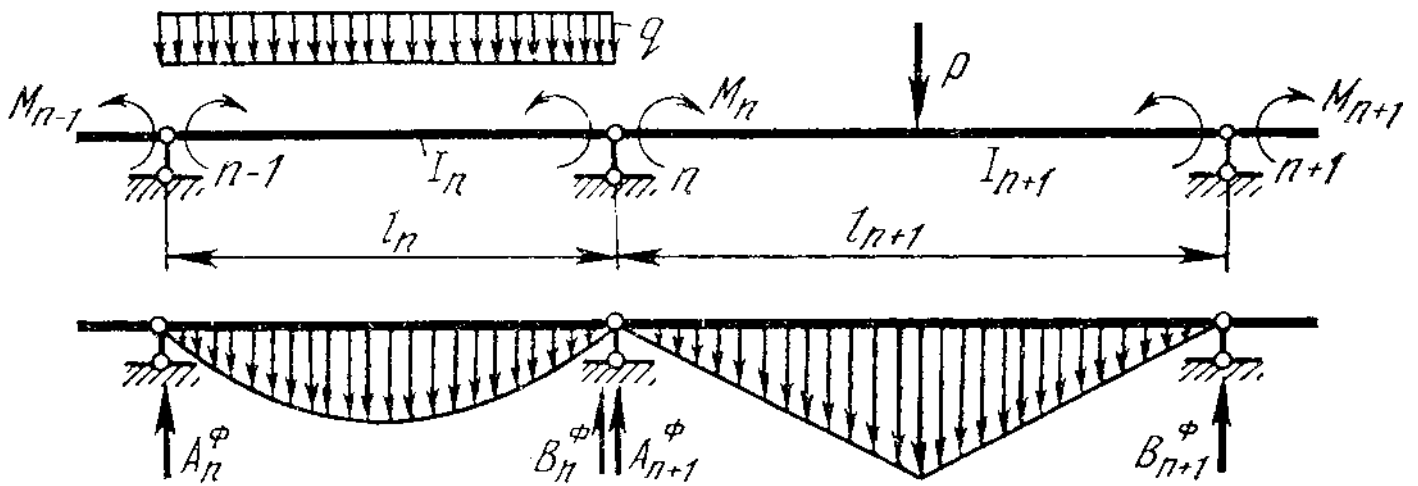
I_n , I_{n+1} – длины соответствующих пролетов;

B_n^Φ , A_{n+1}^Φ – фиктивные опорные реакции.

$$B_n^\Phi = \frac{\omega_n \cdot a_n}{I_n}, \quad A_{n+1}^\Phi = \frac{\omega_{n+1} \cdot b_{n+1}}{I_{n+1}} \quad (1)$$

где ω_n , ω_{n+1} – площади эпюр моментов для простых балок;

a_n , b_{n+1} – расстояние от центра тяжести соответствующей площади эпюры моментов до ближайшей левой опоры n или ближайшей правой опоры $n+1$.



Составляется столько уравнений трех моментов сколько лишних связей и, решив их, находятся неизвестные опорные моменты.

Строится эпюра опорных моментов $M_{оп}$ - откладываются полученные значения опорных моментов от оси и соединяются прямыми в пределах пролетов.

Эпюра M для неразрезной балки равна сумме грузовых эпюр отдельных балок M_p и эпюры опорных моментов $M_{оп}$.

Метод фокусных отношений.

Если пролеты балки загружены постоянной или временной нагрузками, то расчет можно выполнять методом моментных фокусов.

Если загрузить один из пролетов балки, то эпюры изгибающих моментов в незагруженных пролетах балки приобретают вид наклонных прямых с нулевыми ординатами в пределах пролетов. Сечения балок с нулевыми ординатами называются моментными фокусами.

Нулевая точка эпюры изгибающих моментов в пролете при расположении нагрузки справа (слева) от рассматриваемого пролета называется левым (правым) фокусом какого-либо пролета.

Любой пролет балки имеет две (левую и правую) фокусные точки, которые не зависят от нагрузки и занимают определенное положение (рис. 2).

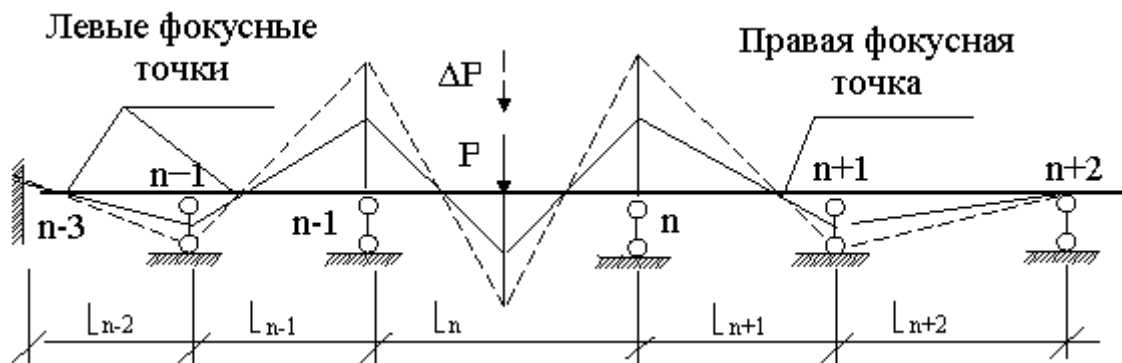
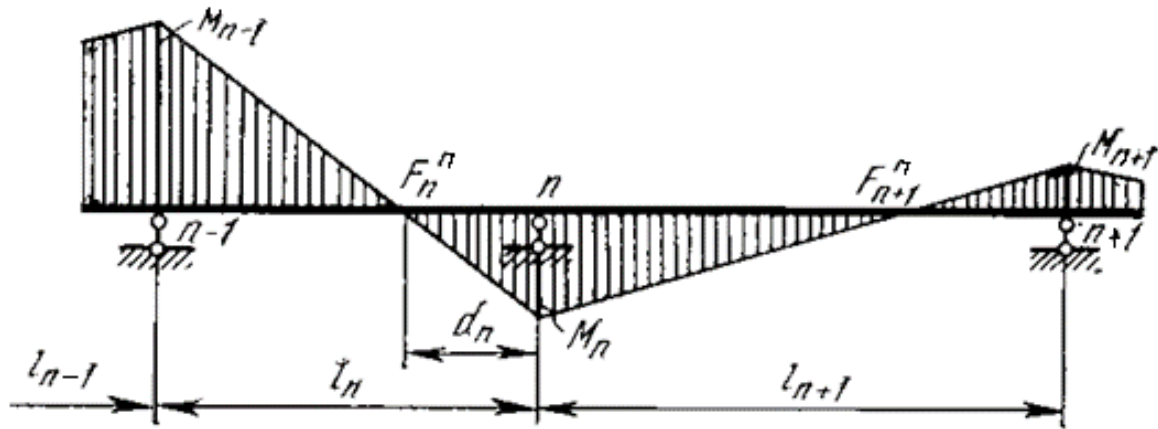


Рис. 2

Абсолютная величина отношения бо'льшего опорного изгибающего момента к меньшему в незагруженном пролете называется моментным фокусным отношением.



Левые фокусные отношения определяются по формуле:

$$K_n^{\text{Л}} = -\frac{M_n}{M_{n-1}};$$

$$K_{n+1}^{\text{Л}} = 2 + \frac{L_n}{L_{n+1}} \cdot \left(2 - \frac{1}{K_n^{\text{Л}}}\right) \quad (2)$$

Правые фокусные отношения определяются по формуле:

$$K_n^{\text{П}} = -\frac{M_{n-1}}{M_n};$$

$$K_{n-1}^{\text{П}} = 2 + \frac{L_n}{L_{n-1}} \cdot \left(2 - \frac{1}{K_n^{\text{П}}}\right) \quad (3)$$

Рассчитываются фокусные отношения всех пролетов. Вначале определяются фокусные отношения крайних пролетов и через них определяют фокусные отношения остальных пролетов по формулам (2), (3). При шарнирном опирании крайнего пролета фокусное расстояние для него равно бесконечности (∞) (рис. 3 а).

Для пролета с заделкой (она заменяется дополнительным пролетом длиной 0) фокусное отношение в заделке определяется по формуле (2) (рис. 3 б):

$$K_1^{\text{Л}} = 2 + \frac{L_0}{L_1} \cdot \left(2 - \frac{1}{K_0^{\text{Л}}}\right) = 2 + \frac{0}{L_1} \cdot \left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 2$$

а)

б)

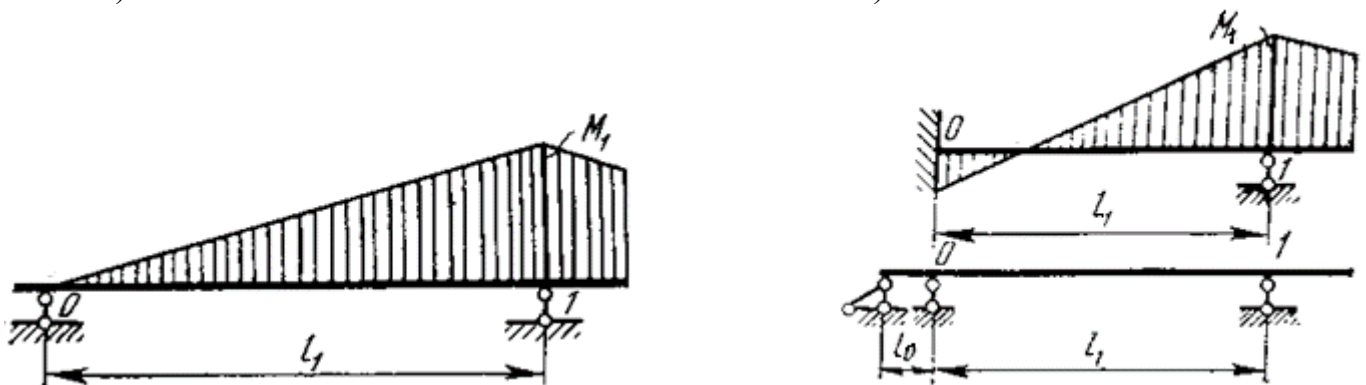
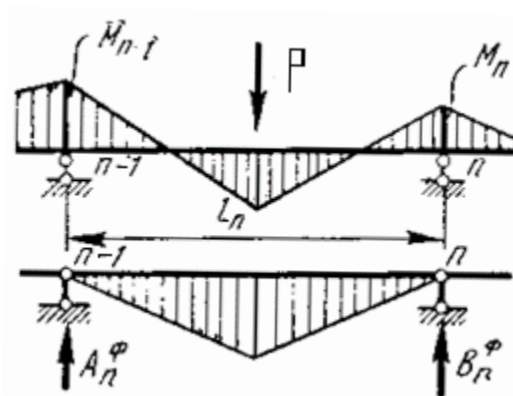


Рис. 3

Для построения эпюры изгибающих моментов при загрузке одного из пролетов вначале определяются опорные моменты по концам этого пролета по формулам:

$$M_{n-1} = -\frac{6 \cdot A_n^{\phi} \cdot K_n^{\text{П}} - 6 \cdot B_n^{\phi}}{L_n \cdot (K_n^{\text{Л}} \cdot K_n^{\text{П}} - 1)}; \quad M_n = -\frac{6 \cdot B_n^{\phi} \cdot K_n^{\text{Л}} - 6 \cdot A_n^{\phi}}{L_n \cdot (K_n^{\text{Л}} \cdot K_n^{\text{П}} - 1)},$$

где A_n^ϕ, B_n^ϕ – левая и правая фиктивные опоры соответственно (n – номер пролета) (по формуле (1)).



Моменты в остальных пролетах определяются по формулам:

$$M_{n+1} = -\frac{M_n}{K_{n+1}^{\Pi}}; \quad M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{K_{n-1}^{\Pi}}.$$

Тема 7. Метод перемещений

Сущность метода перемещений и основные допущения.

Определить внутренние усилия (M , Q , N) в статически неопределимых системах можно другим методом. В этом случае связи не исключаются, а делается наоборот – в систему вводятся дополнительные связи. За неизвестные принимаются перемещения во введенных связях, которые определяются из канонических уравнений. Поэтому этот метод называется методом перемещений.

Установим минимальное число узловых перемещений, необходимых для определения напряженно-деформированного состояния статически неопределимой стержневой системы.

С этой целью определим простейшие деформации некоторого стержня AB стержневой системы, которые он получает при переходе в новое положение $A'B'$ под воздействием внешней нагрузки (рис. 1 а).

При этом принимаются следующие гипотезы:

- 1) поперечные и продольные деформации стержней малы;
- 2) длина хорды, соединяющей концы изогнутого стержня, равна первоначальной длине стержня, т.е. первоначальное расстояние между концами прямого стержня сохраняется после деформации;
- 3) в упругом рамном узле углы между стержнями сохраняются.

Любое положение стержня $A'B'$ можно получить из начального (рис. 1 а) в результате следующих независимых перемещений:

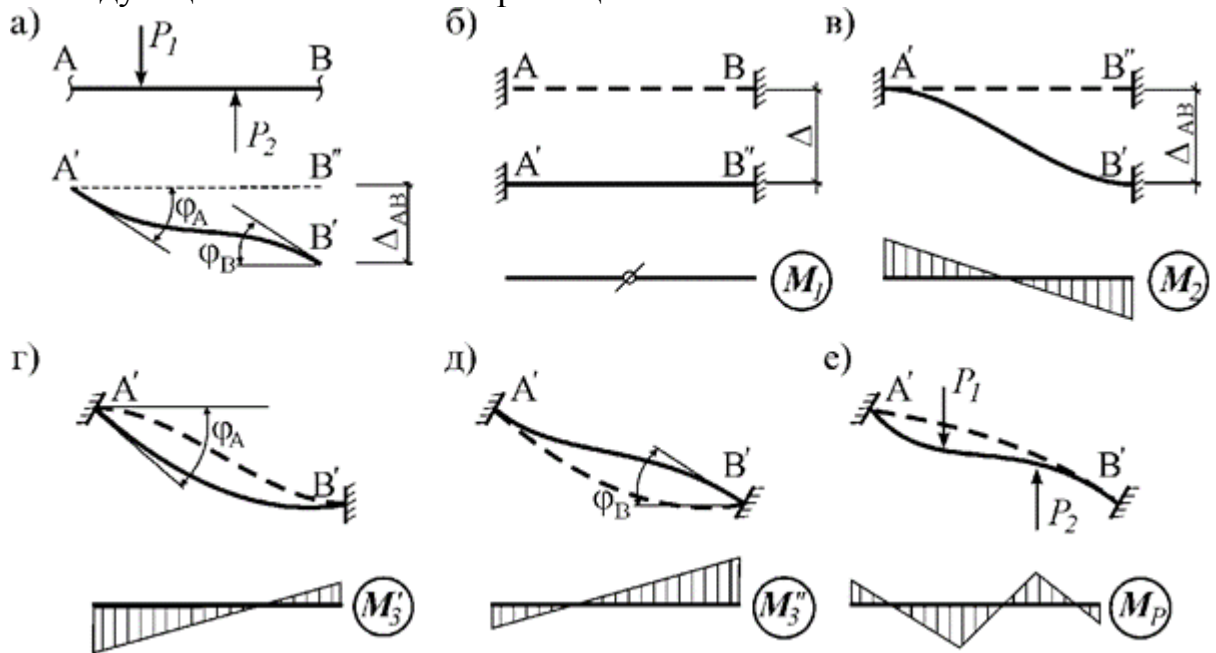


Рис. 1

1) от поступательного перемещения Δ всего стержня внутренние усилия и деформации не возникают - $M_1 = 0$ (рис. 1 б);

2) перемещение одного из концов стержня перпендикулярно его оси на величину Δ_{AB} (рис. 1 в);

3) поворот конца А на угол φ_A (рис. 1 г);

4) поворот конца В на угол φ_B (рис. 1 д);

5) перемещение точек оси стержня от действия внешней нагрузки (рис. 1 е).

Следовательно, для определения M и Q всего стержня достаточно знать три неизвестных перемещения – два угловых перемещения его концов φ_A , φ_B и одно поступательное перемещение – взаимное смещение концов стержня D_{AB} (рис. 1 а).

Неизвестные и степень кинематической неопределенности системы. Основная система метода перемещений (на примере плоских рам).

Поскольку за неизвестные принимаются угловые перемещения и поступательное перемещение, то общее число неизвестных называется степенью кинематической неопределенности и определяется по формуле.

$$n = n_{\text{угл}} + n_{\text{лин}}$$

где $n_{\text{угл}}$ – число неизвестных углов поворота узлов;

$n_{\text{лин}}$ – число неизвестных линейных перемещений.

Из третьей гипотезы следует, что число неизвестных угловых перемещений $n_{\text{угл}}$ будет равно числу рамных «жестких» узлов (рис. 2 г, д).

Например, в раме (рис. 2 а) $n_{\text{угл}} = 2$.

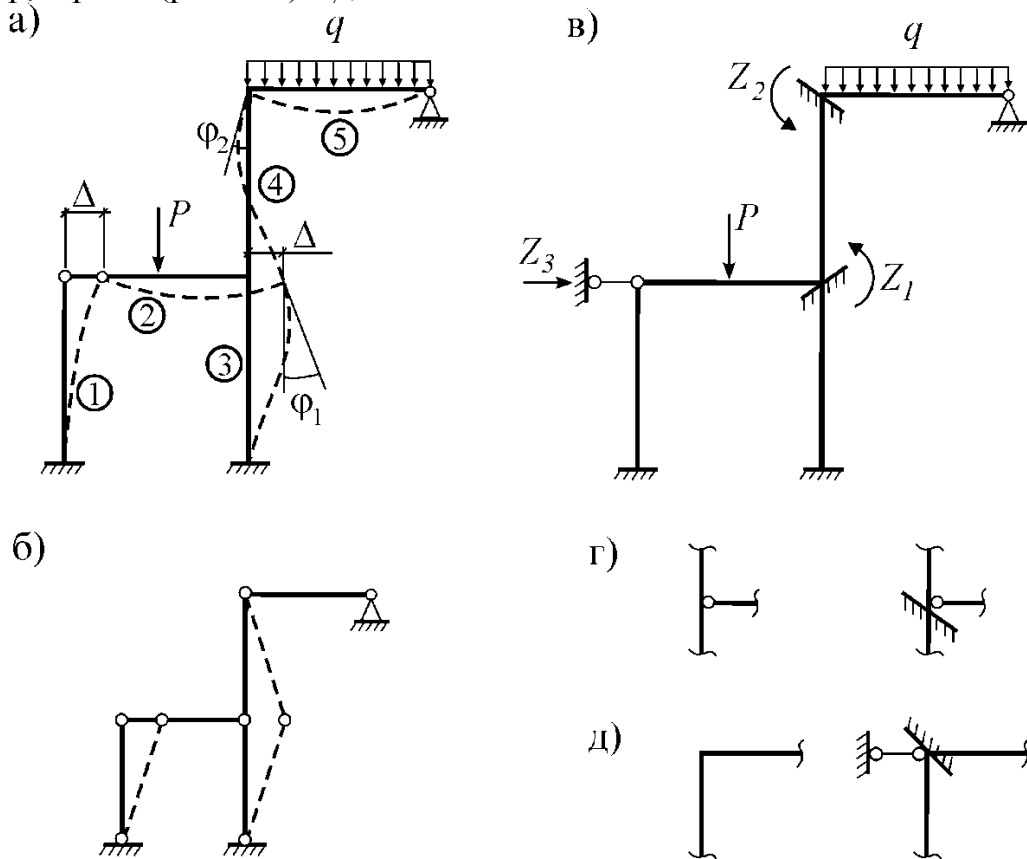


Рис. 2

Для определения числа неизвестных поступательных перемещений во все узлы рамы, включая и опоры, нужно ввести шарниры (рис. 2 б). Тогда число линейных перемещений будет легко определяться по известной формуле кинематического анализа

$$n_{\text{лин}} = 3 \cdot D - 2 \cdot Ш - C_0$$

При этом необходимо учитывать возможное наличие сложных шарниров ($k-1$). или как для фермы

$$n_{\text{лин}} = W = 2n_y - n_c - n_{C_0}.$$

где n_y – число узлов;

n_c – число стержней.

В рассматриваемой раме имеем $n_{лин} = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1$.

Число независимых линейных перемещений равно числу стержней, которые надо ввести в шарнирную схему сооружения, чтобы превратить ее в геометрически неизменяемую.

Неизвестные перемещения обозначаются: $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$.

После определения числа неизвестных в ЗС следует вводить столько же связей для исключения перемещений концов ее стержней. При этом система расчленяется на ряд однопролетных статически неопределимых балок. Полученная схема будет основной системой (ОС) метода перемещений. А сама ОС называется кинематически определимой.

Например, в рассмотренную раму введем две заделки в жесткие узлы и одну опорную связь. Полученная схема (рис. 10.2 в) будет ОС метода перемещений.

Таким образом, для получения ОС метода перемещений необходимо:

- в упругие рамные узлы заданной системы ввести $n_{угл}$ заделок;
- в направлении поступательных перемещений узлов заданной системы ввести $n_{лин}$ опорных связей (они вводятся так, чтобы система с введенными шарнирами стала геометрически неизменяемой).

Введенная заделка отличается от обычной заделки, т.к. исключает лишь угловое перемещение узла, оставляя возможность линейного смещения.

При соблюдении этих требований ОС метода перемещений будет единственной.

Пусть необходимо выбрать ОС метода перемещений для рамы (рис. 3 а). Она имеет четыре жестких узла. Значит, число угловых неизвестных $n_{угл} = 4$. Для определения числа линейных неизвестных во все узлы и опоры рамы введем шарниры (рис. 3 б). Тогда имеем: $n_{лин} = 2n_y - n_c - n_{c_0} = 2 \cdot 8 - 8 - 6 = 2$. Поэтому общее число неизвестных будет $n = n_{угл} + n_{лин} = 4 + 2 = 6$. Вводя в жесткие узлы ЗС четыре заделки и две опоры, исключающие линейные перемещения узлов рамы (последние вводятся так, чтобы механизм на рис. 3 б стал геометрически неизменяемым), получаем требуемую ОС (рис. 10.3 в).

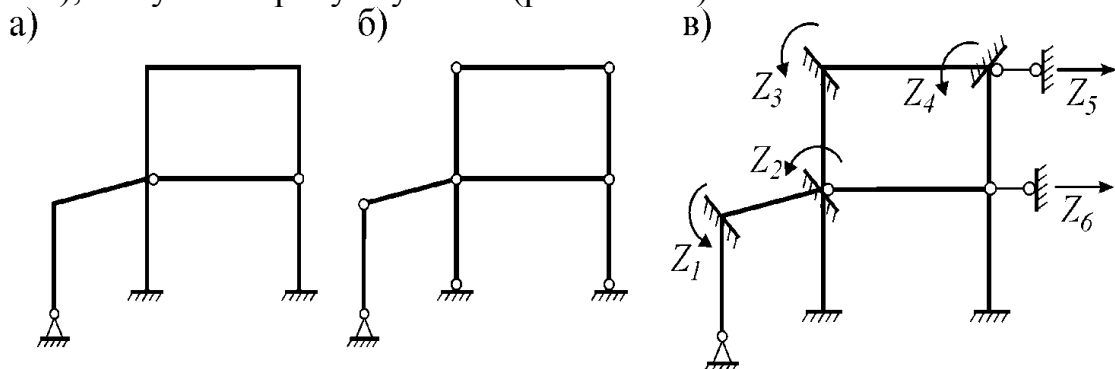


Рис. 3

Канонические уравнения метода перемещений.

Рама, приведенная на рис. 4 а, четырежды статически неопределима. При ее расчете методом сил нужно исключать четыре лишние связи и выбирать основную систему, например, такую как на рис. 4 б.

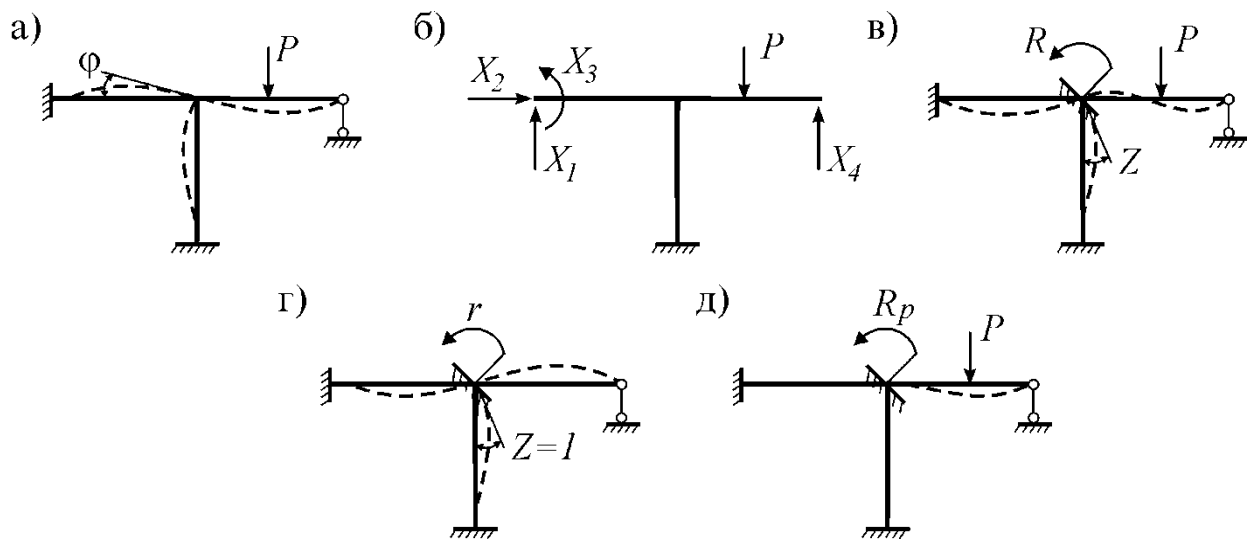


Рис. 4

При использовании же метода перемещений раму следует превратить в кинематически определяемую. Для этого в ЗС достаточно ввести $n = n_{\text{угл}} + n_{\text{лин}} = 1 + 0 = 1$ кинематическую связь (жесткую заделку – рис. 4 б). Если неизвестное угловое перемещение узла обозначить через Z , получим ОС показанную на рис. 4 в.

$$n_{\text{лин}} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$$

Потребуем, чтобы усилия и деформации ОС были такими же как у ЗС. Для этого перемещение Z должно быть равно углу поворота узла рамы ϕ (рис. 4 а), а реактивный момент во введенной заделке основной системы (рис. 4 в) должен при этом равняться нулю: $R = 0$.

Эту реакцию определим, рассматривая единичное и грузовое состояния основной системы.

В единичном состоянии введенной связи зададим единичное перемещение (угол поворота, равный единице) и определим возникающую в ней реакцию r (рис. 4 г). В грузовом состоянии приложим только внешнюю нагрузку и во введенной связи основной системы определим реакцию R_p (рис. 4 д).

С учетом упругости системы и принципа суперпозиции наше уравнение приводится к виду

$$r \cdot Z + R_p = 0.$$

где r – реактивный момент в заделке от поворота этой заделки на угол, равный 1 (или от линейного перемещения на 1).

Оно называется каноническим уравнением метода перемещений. Если известны реакции r и R_p , то из него можно найти величину узлового перемещения:

$$Z = - R_p / r.$$

Если степень кинематической неопределимости стержневой системы равна n , ее ОС получается введением n дополнительных связей с неизвестными Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Чтобы ОС была эквивалентна ЗС, реакции во введенных связях должны равняться нулю. С учетом этого можно записать n уравнений. После рассмотрения n единичных состояний, одного грузового состояния и дальнейшего определения реакций (реактивных усилий) во всех состояниях, эти уравнения приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} &= 0, \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

$$r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} = 0.$$

Все вместе они называются системой канонических уравнений метода перемещений. Здесь r_{ii} – главные коэффициенты, r_{ij} – боковые коэффициенты. Свободные члены R_{iP} являются грузовыми коэффициентами.

Коэффициенты канонических уравнений метода перемещений можно определять статическим или кинематическим способами.

Статический способ основан на определении реакций во введенных связях основной системы из уравнений статики. Для этого необходимо вырезать отдельные узлы или части основной системы и составлять уравнения равновесия (статики). Если искомая реакция является реактивным моментом, то она определяется из условия равенства нулю момента в узле $\Sigma M = 0$, если же она является реактивной силой, то определяется из уравнения проекции на ось (например, на ось x) в направлении этой реакции $\Sigma X = 0$. Статический способ достаточно прост для использования, поэтому является основным способом определения коэффициентов системы канонических уравнений.

Кинематический способ основан на определении коэффициентов канонических уравнений перемножением эпюр. Этот способ применяется при сложности определения коэффициентов статическим способом или для проверки результатов статического способа.

После определения всех коэффициентов они подставляются в систему канонических уравнений. Затем она решается и определяются неизвестные Z_1, Z_2, \dots, Z_n . После этого определяются внутренние усилия заданной статически неопределимой системы. Это выполняется аналогично методу сил. Вначале определяются моменты.

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \dots + \overline{M}_n Z_n + M_P$$

Затем по эпюре M определяются поперечные силы Q , а по ним – продольные силы N .

Алгоритм метода перемещений (на примере плоских рам).

Метод перемещений реализуется в следующей последовательности:

1. Определение степени кинематической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний.
5. Построение эпюр моментов во всех состояниях.
6. Определение коэффициентов канонических уравнений (при необходимости – их проверка).
7. Решение канонических уравнений.
8. Построение эпюр M, Q, N .
9. Проверка правильности расчета. Она проводится аналогично методу сил – статическим и кинематическим способами.

Алгоритмы метода перемещений и метода сил во многом совпадают. Но при более подробном рассмотрении можно выявить принципиально отличающиеся стороны этих методов. Рассмотрим некоторые из них:

1) в методе сил неизвестными являются силы, а в методе перемещений неизвестными являются перемещения;

2) при расчете одной и той же системы число их неизвестных часто бывает разным, поэтому одни системы выгоднее рассчитывать методом сил, другие – методом перемещений;

3) в методе сил основная система получается удалением связей, а в методе перемещений – введением связей;

4) в методе сил вариантов основной системы множество, а в методе перемещений она единственна;

5) единичные состояния в методе сил определяются воздействием единичных сил, в методе перемещений – единичных перемещений;

6) в методе сил необходимые эпюры в основной системе строятся обычным способом, а в методе перемещений – по готовой таблице;

7) коэффициенты канонических уравнений в методе перемещений определяются проще (из уравнений статики);

8) многие из боковых коэффициентов системы канонических уравнений метода перемещений равняются нулю, что упрощает ее решение.

Тема 8. Табличные значения реакций отдельного стержня.

Рассмотрим балку, которая имеет с одной стороны заделку, с другой – шарнирно-подвижную опору.

1) При равномерно распределенной нагрузке q .

Степень статической неопределимости этой системы (рис. 1 а) $n=1$. Каноническое уравнение имеет вид:

$$D_{11} \cdot X_1 + D_{1P} = 0 \quad (1)$$

При этом $D_{11} = \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1$ не зависит от внешних сил:

$$D_{11} = \frac{l^3}{3EI} \quad (2)$$

Выбирая основную систему (рис. 1 б), в единичном (рис. 1 в) и грузовом (рис. 1 д) состояниях строим единичную (рис. 1 г) и грузовую эпюры (рис. 1 е).

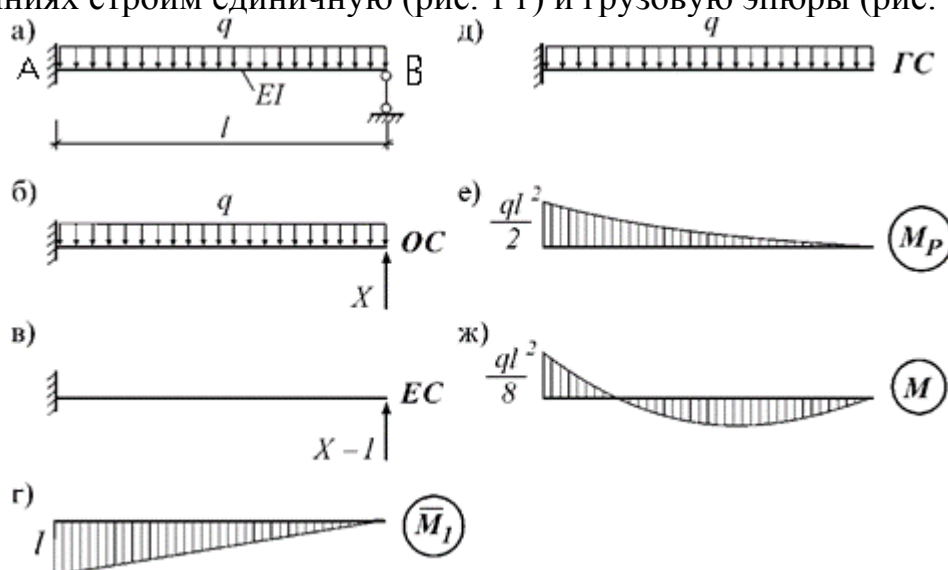


Рис. 1

Определим коэффициенты канонического уравнения:

$$D_{1P} = \overline{M} \cdot M_P = -\frac{ql^4}{8EI},$$

и неизвестную реакцию:

$$R_B = X = -\frac{D_{1P}}{\delta} = \frac{3}{8}ql.$$

После этого из уравнений статики определяем остальные реакции, а по формуле $M = \overline{M}X + M_P$ строим эпюру изгибающих моментов (рис. 1 ж).

$$M_A = -\frac{ql^2}{8}$$

2) Загружение сосредоточенной силой P (рис. 2).

Перемещение Δ_{1P} :

$$\Delta_{1P} = \int_0^{l_k} \frac{M_P \overline{M}_1}{EI} dx = -\frac{P \cdot u^2 \cdot l^2}{2 \cdot EI} \cdot l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot u + x\right)$$

Т.к. $u \cdot l + x \cdot l = l$, то $x = 1 - u$ и соответственно:

$$\Delta_{1P} = -\frac{P \cdot u^2 \cdot l^3}{6 \cdot EI} \cdot (3 - u)$$

Решив уравнения (1) и (2) определяем реакцию опоры В:

$$X_1 = R_B = \frac{P \cdot u^2}{2} \cdot (3 - u)$$

Реакция опоры А:

$$R_A = P - R_B = \frac{P \cdot v}{2} \cdot (3 - v^2)$$

Момент в опоре А:

$$M_A = -P \cdot u \cdot l + \frac{P \cdot u^2 \cdot l}{2} \cdot (3 - u) = \frac{P \cdot l \cdot v}{2} \cdot (1 - v^2)$$

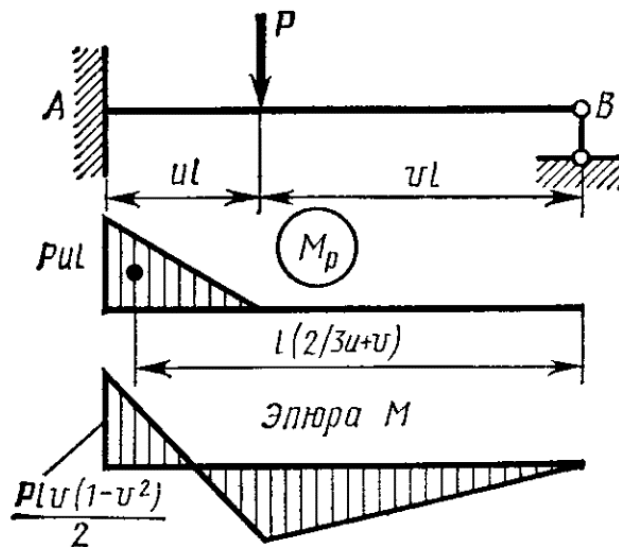


Рис. 2

3) Перемещение заделки А на величину Δ по направлению, перпендикулярному оси стержня АВ (рис. 3).

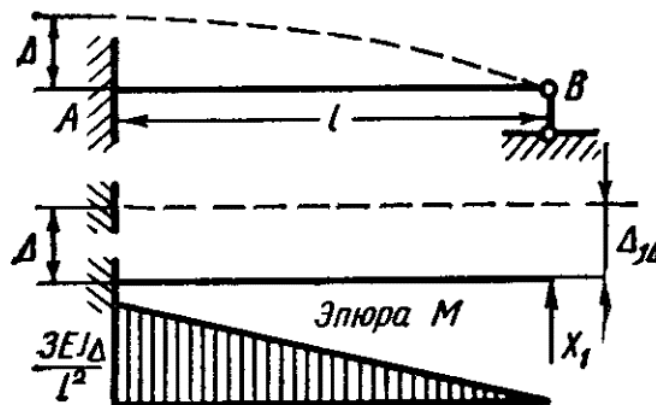


Рис. 3

Эпюры изгибающих моментов в ОС от смещения отсутствует, перемещение по направлению X_1 будет равно: $\Delta_{1\Delta} = \Delta$.

Из уравнений (1), (2) определяем реакцию опоры В:

$$X_1 = R_B = -\frac{3 \cdot EI \cdot \Delta}{l^3} = -\frac{3 \cdot EI}{l^3}$$

Реакция опоры А:

$$R_A = -X_1 = \frac{3 \cdot EI \cdot \Delta}{l^3} = \frac{3 \cdot EI}{l^3}$$

Момент в опоре А:

$$M_A = \frac{3 \cdot EI \cdot \Delta}{l^2} = \frac{3 \cdot EI}{l^2}$$

4) Поворот заделки на угол φ (рис. 4).

Перемещение по направлению X_1 от поворота заделки:

$$\Delta_{1\varphi} = -\varphi \cdot l$$

Из уравнений (1), (2) определяем реакцию опоры В:

$$X_1 = R_B = \frac{3 \cdot EI \cdot \varphi}{l^2} = \frac{3 \cdot EI}{l^2}$$

Реакция опоры А:

$$R_A = -X_1 = -\frac{3 \cdot EI \cdot \varphi}{l^2} = -\frac{3 \cdot EI}{l^2}$$

Момент в опоре А:

$$M_A = \frac{3 \cdot EI \cdot \varphi}{l} = \frac{3 \cdot EI}{l}$$

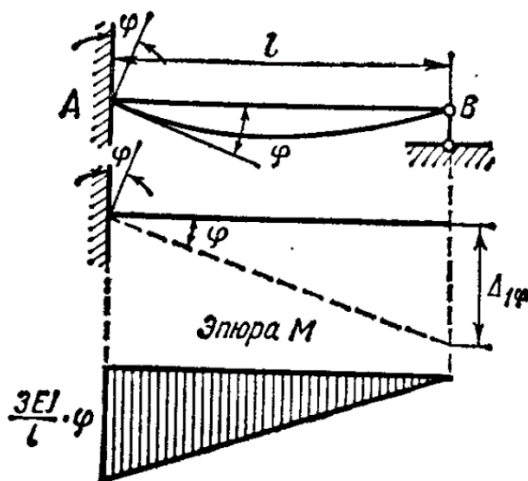


Рис. 4

Рассмотрим балку, которая имеет с обеих сторон заделку.

1) Поворот конца А стержня с заделанными концами (рис. 5).

Пусть конец А стержня с заделанными концами поворачивается на единичный угол (рис. 5 а). У этой системы степень статической неопределимости $n=3$. Однако, если не учитывать продольную деформацию, поскольку она не создает изгибающий момент, вместо заданной системы можно рассматривать стержень с правой опорой в виде ползуна (рис. 5 б) и принять $n=2$.

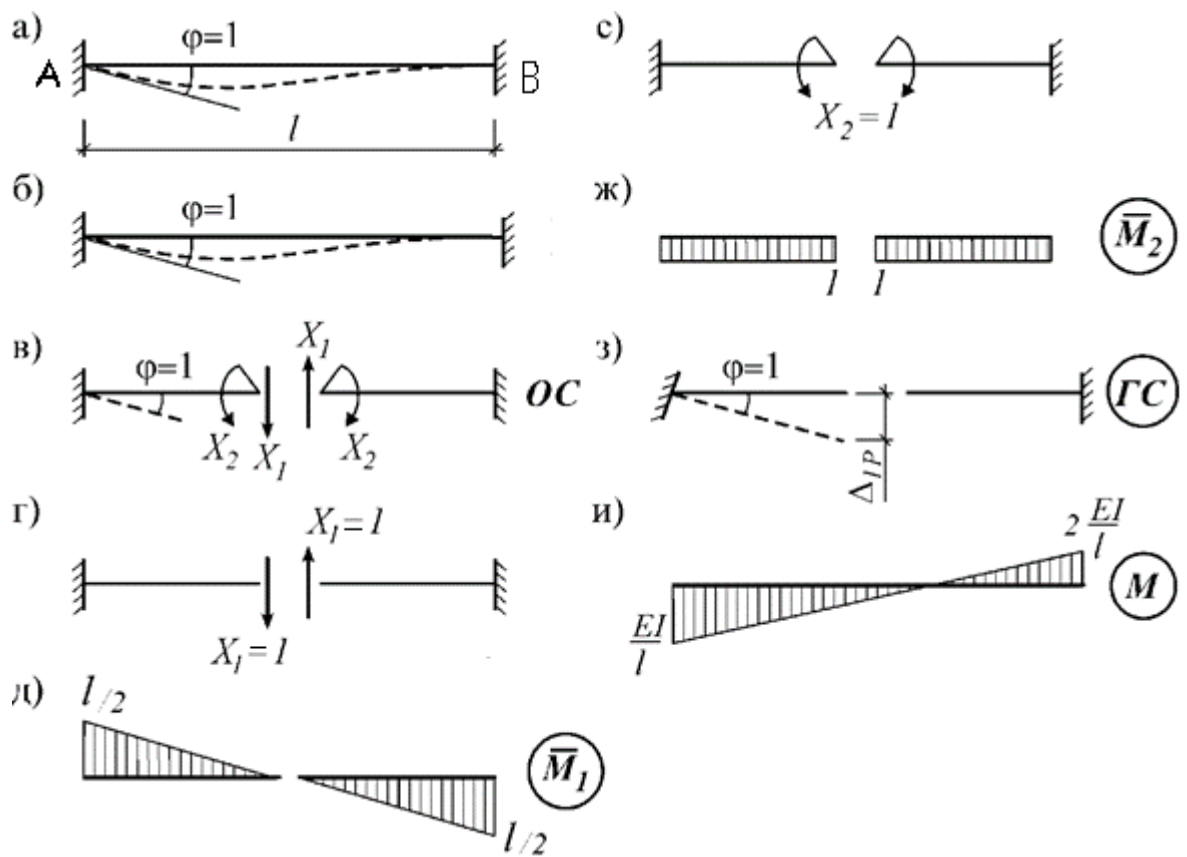


Рис. 5

Система канонических уравнений будет:

$$\partial_{11}X_1 + \partial_{12}X_2 + D_{1P} = 0,$$

$$\partial_{21}X_1 + \partial_{22}X_2 + D_{2P} = 0.$$

Если основную систему выбрать симметричной (рис. 5 в), в обоих единичных состояниях (рис. 5 г, е) единичные эпюры \bar{M}_1 , \bar{M}_2 легко строятся (рис. 5 д, ж). В грузовом состоянии (рис. 5 з) момент не возникает, поэтому $M_P = 0$.

$$\partial_{12} = \partial_{21} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 = 0$$

Соответственно,

$$\begin{cases} D_{11} \cdot X_1 + D_{1P} = 0 \\ D_{22} \cdot X_2 + D_{2P} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Определим коэффициенты канонических уравнений:

$$\partial_{11} = \bar{M}_1^2 = \frac{l^3}{12EI}, \quad \partial_{22} = \bar{M}_2^2 = \frac{l}{EI}.$$

Из рис. 5 з следует что $D_{1P} = \frac{l}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{2} \cdot l = \frac{l}{2}$ и $D_{2P} = -\varphi = -l$, а из канонических уравнений получаем $X_1 = -6 \frac{EI}{l^2}$, $X_2 = \frac{EI}{l}$.

Так как $M_P = 0$, имеем $M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2$ (рис. 5 и).

Реакция опоры В:

$$R_B = -X_1 = \frac{6 \cdot EI}{l^2}$$

Реакция опоры А:

$$R_A = X_1 = -\frac{6 \cdot EI}{l^2}$$

Момент в опоре А:

$$M_A = \frac{4 \cdot EI}{l}$$

Момент в опоре В:

$$M_B = \frac{2 \cdot EI}{l}$$

2) Перемещение заделки А на величину Δ по направлению, перпендикулярному оси стержня АВ (рис. 6).

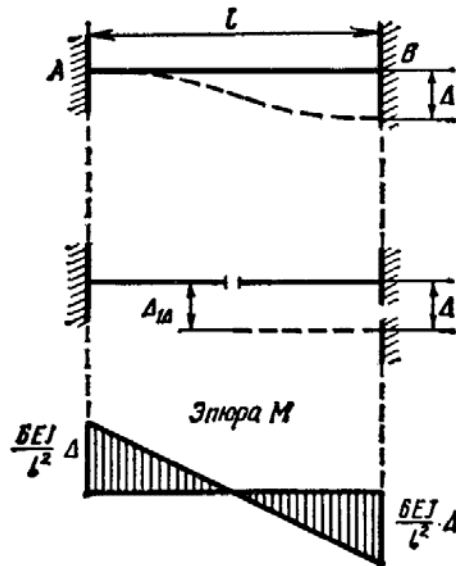


Рис. 6

Перемещения в ОС по направлениями неизвестных равны (рис 5 в) и (рис 6):

$$\Delta_{1\Delta} = \Delta,$$

Т.к. под действием перемещения не возникает момент X_2 : $\Delta_{2\Delta} = 0$

Решив уравнение (3) определяем:

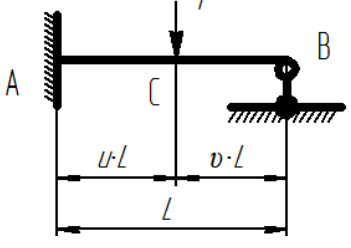
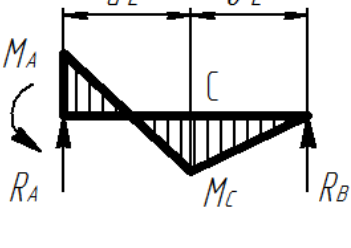
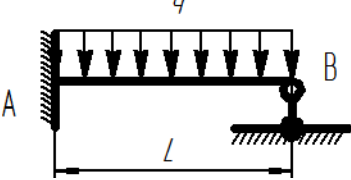

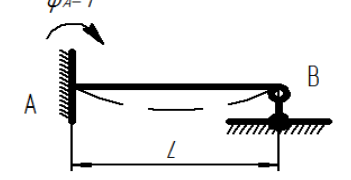
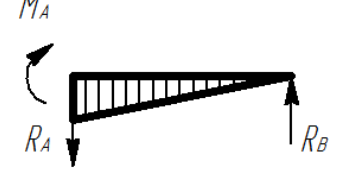
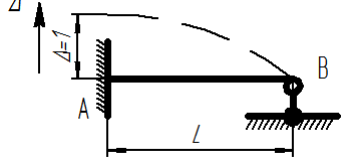

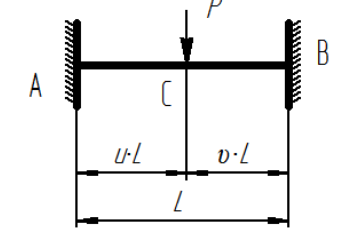
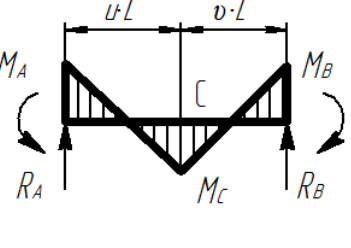
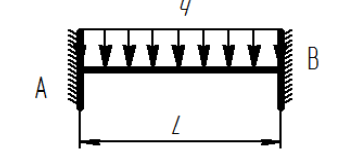

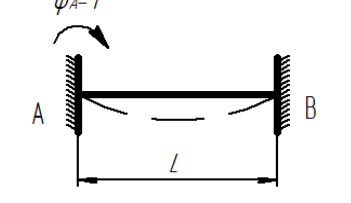

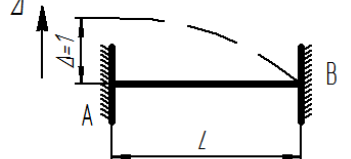

$$X_1 = \frac{12 \cdot EI \cdot \Delta}{l^3} = \frac{12 \cdot EI}{l^3}, \quad X_2 = 0$$

Опорные реакции и опорные моменты определяются по формулам:

$$R_A = -X_1 = -\frac{12 \cdot EI}{l^3}, \quad R_B = X_1 = \frac{12 \cdot EI}{l^3},$$

$$M_A = M_B = -\frac{6 \cdot EI}{l^2}$$

Аналогичные расчеты проводятся для всех типовых случаев, встречающихся в различных основных системах. Результаты их расчетов сводятся в единую таблицу метода перемещений.

№ п/п	Схема балки	Эпюры изгибающих моментов и реакции	Формулы
1			$M_A = \frac{P \cdot L \cdot v}{2} \cdot (1 - v^2);$ $M_C = \frac{P \cdot L \cdot u^2 \cdot v}{2} \cdot (3 - u);$ $R_A = \frac{P \cdot v}{2} \cdot (3 - v^2);$ $R_B = \frac{P \cdot u^2}{2} \cdot (3 - u).$
2			$M_A = \frac{q \cdot L^2}{8};$ $R_A = \frac{5}{8} \cdot q \cdot L;$ $R_B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L.$
3			$M_A = \frac{3 \cdot EI}{L};$ $R_A = R_B = \frac{3 \cdot EI}{L^2}$
4			$M_A = \frac{3 \cdot EI}{L^2};$ $R_A = R_B = \frac{3 \cdot EI}{L^3}.$
5			$M_A = P \cdot L \cdot u \cdot v^2;$ $M_B = P \cdot L \cdot u^2 \cdot v;$ $M_C = 2 \cdot P \cdot L \cdot u^2 \cdot v^2;$ $R_A = P \cdot v^2 \cdot (1 + 2 \cdot u);$ $R_B = P \cdot u^2 \cdot (1 + 2 \cdot v).$
6			$M_A = M_B = \frac{q \cdot L^2}{12};$ $R_A = R_B = \frac{q \cdot L}{2}.$
7			$M_A = \frac{4 \cdot EI}{L};$ $M_B = \frac{2 \cdot EI}{L};$ $R_A = R_B = \frac{6 \cdot EI}{L^2}$
8			$M_A = M_B = \frac{6 \cdot EI}{L^2};$ $R_A = R_B = \frac{12 \cdot EI}{L^3}.$

Тема 9. Смешанный метод и комбинированное применение методов сил и перемещений

Смешанный метод расчета.

При смешанном методе расчета одна часть неизвестных представляет собой усилия (метод сил), другая часть – перемещения (метод перемещений).

Рассмотрим систему (рис. 1 а), для которой для каждого ее этажа рассчитаем степень статической неопределимости для обоих методов (рис. 1 в) и сведем их в таблицу 1.

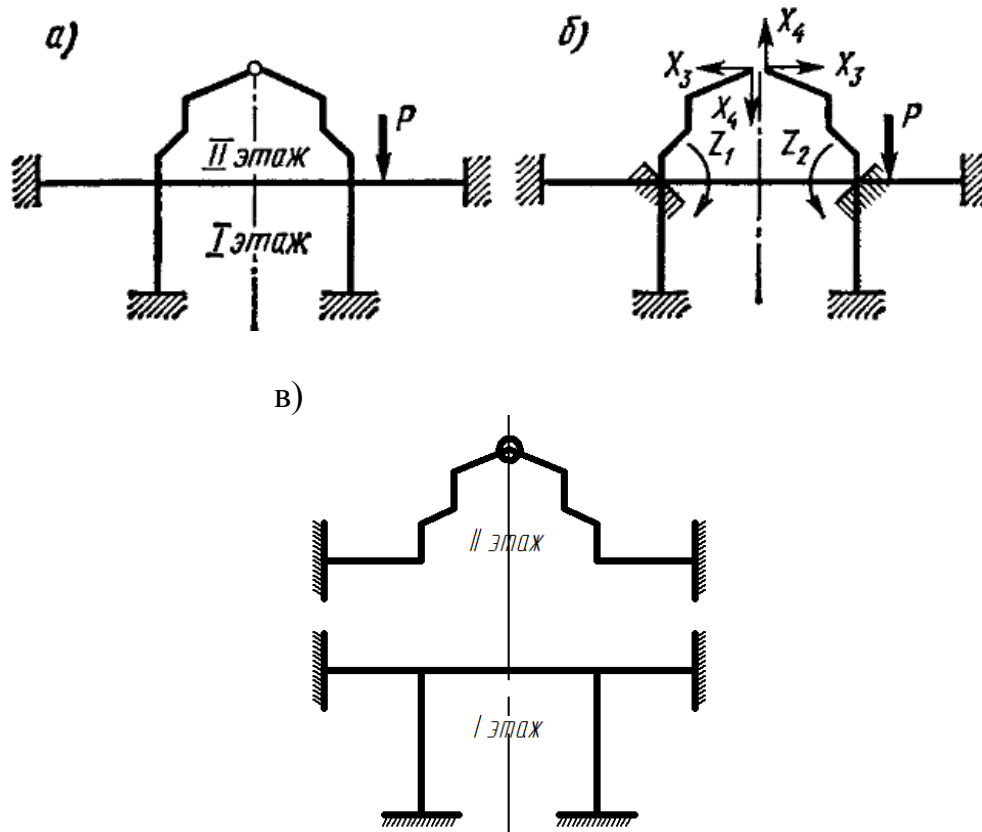


Рис. 1

Таблица 1

Этажи	Степень статической неопределимости	
	метод сил	метод перемещений
1	9	2
2	2	16
Итого	11	18

Из таблицы 1 следует, что первый этаж целесообразнее рассчитать методом перемещений, второй – методом сил.

Применение смешанного метода позволяет свести задачу к решению четырех уравнений с четырьмя неизвестными вместо 11 по методу сил и 18 по методу перемещений.

Для основной системы смешанного метода (рис. 1 б) составим систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} Z_1 \cdot r_{11} + Z_2 \cdot r_{12} + X_3 \cdot r_{13} + X_4 \cdot r_{14} + R_{1P} = 0 \\ Z_1 \cdot r_{21} + Z_2 \cdot r_{22} + X_3 \cdot r_{23} + X_4 \cdot r_{24} + R_{2P} = 0 \\ Z_1 \cdot \delta_{31} + Z_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + X_4 \cdot \delta_{34} + \Delta_{3P} = 0 \\ Z_1 \cdot \delta_{41} + Z_2 \cdot \delta_{42} + X_3 \cdot \delta_{43} + X_4 \cdot \delta_{44} + \Delta_{4P} = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение, которое выражает мысль о равенстве нулю реактивного момента, возникающего в первой заделке от действия неизвестных и внешней нагрузки:

$Z_1 \cdot r_{11}$ – реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от ее поворота на угол Z_1 ;

$Z_2 \cdot r_{12}$ – реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от поворота второй заделки на угол Z_2 ;

$X_3 \cdot r_{13}$ – реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от сил X_3 ;

$X_4 \cdot r_{14}$ – реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от сил X_4 ;

R_{1P} – реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от внешней нагрузки.

Второе уравнение аналогичное.

Рассмотрим третье уравнение, которое выражает мысль о равенстве нулю перемещения:

$Z_1 \cdot \delta_{31}$ – перемещение в основной системе по направлению X_3 , возникающее от поворота первой заделки на величину Z_1 ;

$Z_2 \cdot \delta_{32}$ – перемещение в основной системе по направлению X_3 , возникающее от поворота второй заделки на величину Z_2 ;

$X_3 \cdot \delta_{33}$ – перемещение в основной системе по направлению X_3 от сил X_3 ;

$X_4 \cdot \delta_{34}$ – перемещение в основной системе по направлению X_3 от сил X_4 ;

Δ_{3P} – перемещение в основной системе по направлению X_3 от внешней нагрузки.

Четвертое уравнение аналогичное.

Коэффициенты при неизвестных полученной системы уравнений делят на четыре категории:

1) коэффициенты, представляющие собой реакции, возникающие от единичных перемещений (r_{12});

2) коэффициенты, представляющие собой реакции, возникающие от единичных усилий (r_{13});

3) коэффициенты, представляющие собой перемещения, возникающие от единичных перемещений (δ_{31});

4) коэффициенты, представляющие собой перемещения, возникающие от единичных усилий (δ_{34}).

Коэффициенты всех категорий определяются методом сил и перемещений.

Комбинированный метод расчета.

Комбинированный метод расчета рассмотрим на примере рамы (рис. 2 а). Раскладываем действующую на нее несимметричную нагрузку на симметричную и

обратносимметричную, получая два состояния рамы (рис. 2 б, в). Степень статической неопределимости каждого состояния рамы равно трем как для метода сил так и метода перемещений.

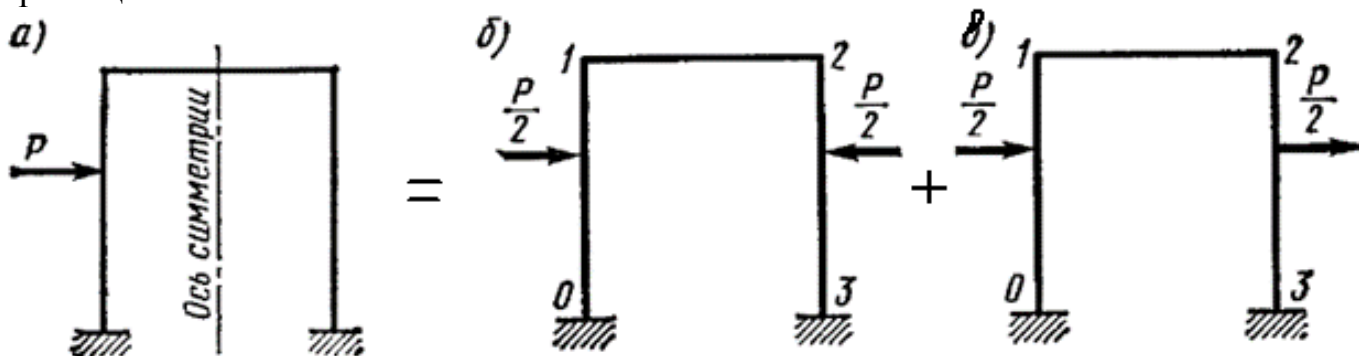


Рис. 2

Из симметрии деформации рамы под действием внешней нагрузки при симметричном ее нагружении (рис. 2 б) следует, что смещение балки 1-2 по горизонтали равно нулю, а поворот узла 1 равен повороту узла 2 и противоположен ему по направлению ($Z_3=0, Z_1=Z_2$) (рис. 3 а). Соответственно, рассчитывая раму (рис. 2 б) методом перемещений необходимо решить одно уравнение с одним неизвестным.

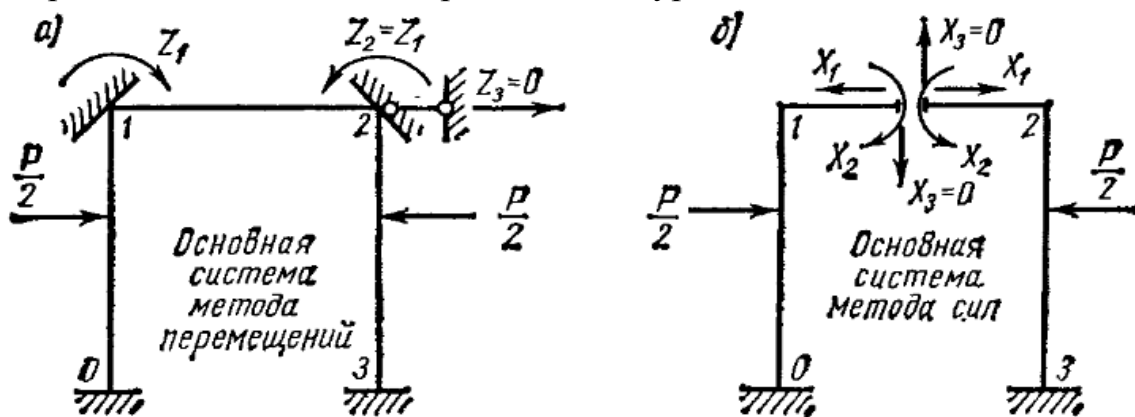


Рис. 3

Применяя метод сил к раме (рис. 2 б), с учетом того, что сила X_3 (создающая обратносимметричную эпюру изгибающего момента) равна нулю, необходимо решить два уравнения с двумя неизвестными.

Т.о., для решения рамы (рис. 2 б) целесообразно использовать метод перемещений.

При расчете рамы (рис. 2 в) методом перемещений необходимо решить два уравнения с двумя неизвестными, т.к. углы поворота узлов 1 и 2 при обратносимметричной внешней нагрузке будут равны, а балка 1-2 получит горизонтальное смещение ($Z_3 \neq 0, Z_1=Z_2$) (рис. 4 а).

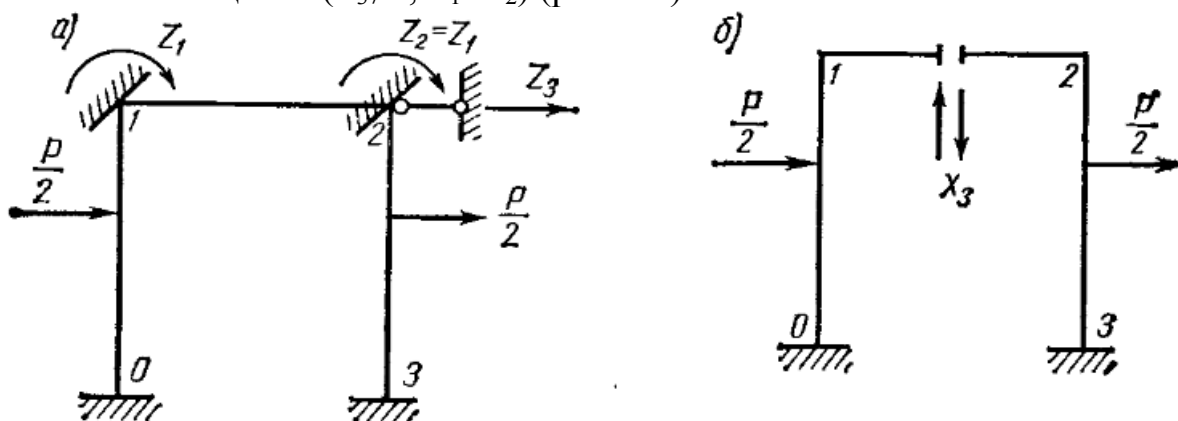


Рис. 4

Рассчитывая раму (рис. 2 б) методом сил (рис. 4 б) необходимо решить одно уравнение с одним неизвестным, т.к. X_2 и X_1 (создающие симметричные эпюры изгибающего момента) при обратносимметричном загрузении внешними силами равны нулю.

Т.о., при расчете этой рамы на обратносимметричную составляющую заданной нагрузки (рис. 2 б) целесообразно воспользоваться методом сил.

Рассмотренный прием расчета называется комбинированным и используется при расчете симметричных систем на несимметричные нагрузки.

Тема 10. Расчет статически неопределимых систем на подвижную нагрузку.

Построение линии влияния методом сил.

Линии влияния усилий в статически неопределимых системах можно построить двумя методами: статическим и кинематическим.

Рассмотрим статический метод:

Построим линию влияния опорной реакции X_1 балки (рис. 1). Каноническое уравнение метода сил имеет вид:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{1P} = 0$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \quad (1)$$

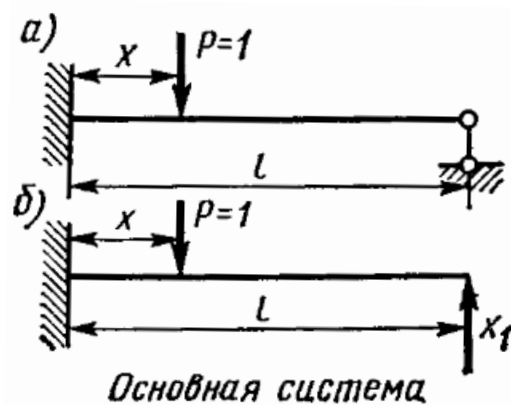


Рис. 1

2): Строим эпюры изгибающих моментов \bar{M}_P (сила $P=1$) и \bar{M}_1 (сила $X=1$) (рис.

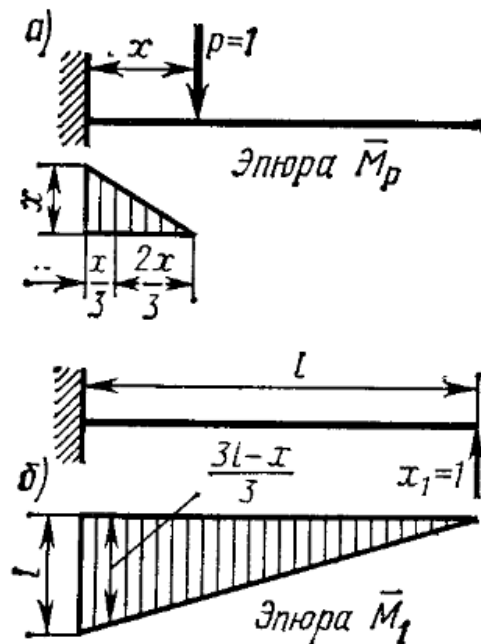


Рис. 2

Определяем перемещения:

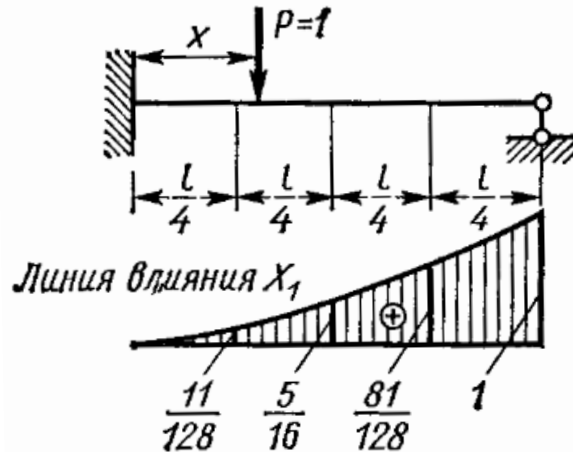
$$\delta_{1P} = -\frac{x \cdot x}{2} \cdot \frac{3 \cdot l - x}{3} \cdot \frac{1}{EI} = -\frac{x^2 \cdot (3 \cdot l - x)}{6 \cdot EI},$$

$$\delta_{11} = -\frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2 \cdot l}{3} \cdot \frac{1}{EI} = \frac{l^3}{3 \cdot EI}$$

Подставляем полученные значения δ_{1P} , δ_{11} в формулу (1):

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{x^2 \cdot (3 \cdot l - x)}{2 \cdot l^3}$$

Полученное выражение определяет опорную реакцию X_1 при любом положении груза $P=1$, ее график представляет собой линию влияния X_1 :



Построим линию влияния поперечной силы в сечении С (рис. 3) для балки (рис. 1 а):

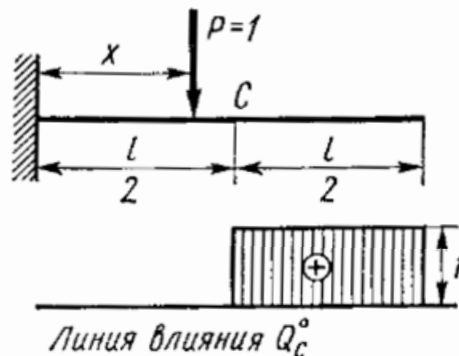


Рис. 3

Поперечная сила Q_c на основании принципа независимости действия сил определяется по формуле:

$$Q_c = Q_c^0 + \bar{Q}_c \cdot X_1,$$

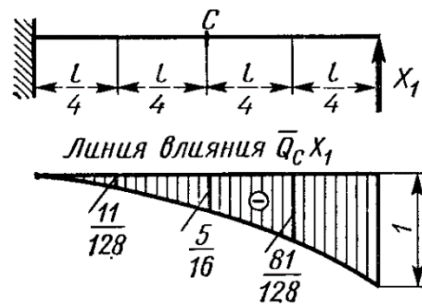
где Q_c^0 – поперечная сила в сечении С от действия груза $P=1$;

\bar{Q}_c – поперечная сила в сечении С от действия опорной реакции $X_1=1$ ($\bar{Q}_c = -1$).

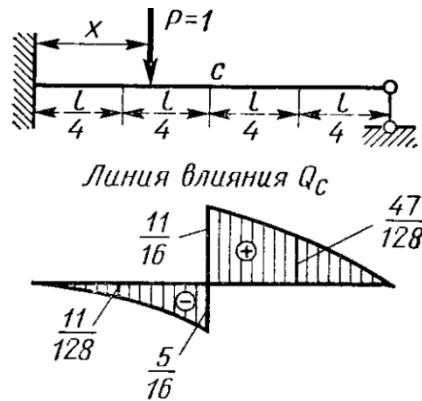
При положении груза $P=1$ справа от сечения С: $Q_c^0 = 1$ (рис. 3).

При положении груза $P=1$ слева от сечения С: $Q_c^0 = 0$ (рис. 3).

$\bar{Q}_c \cdot X_1$ при любом положении груза $P=1$ равна соответствующему значению опорной реакции X_1 , умноженному на «-1»: $\bar{Q}_c \cdot X_1 = -X_1$.



Сложив ординаты линий влияния Q_C^0 и $\bar{Q}_C \cdot X_1$ получим линию влияния Q_C для заданной балки в сечении С:



Изгибающий момент M_C на основании принципа независимости действия сил определяется по формуле:

$$M_C = M_C^0 + \bar{M}_C \cdot X_1,$$

где M_C^0 – изгибающий момент в сечении С от действия груза $P=1$;

\bar{M}_C – изгибающий момент в сечении С от действия опорной реакции $X_1=1$ ($\bar{M}_C = \frac{l}{2}$).

Сложив ординаты линий влияния M_C^0 и $\bar{M}_C \cdot X_1$ (рис. 4 а) получим линию влияния M_C для заданной балки в сечении С (рис. 4 б):

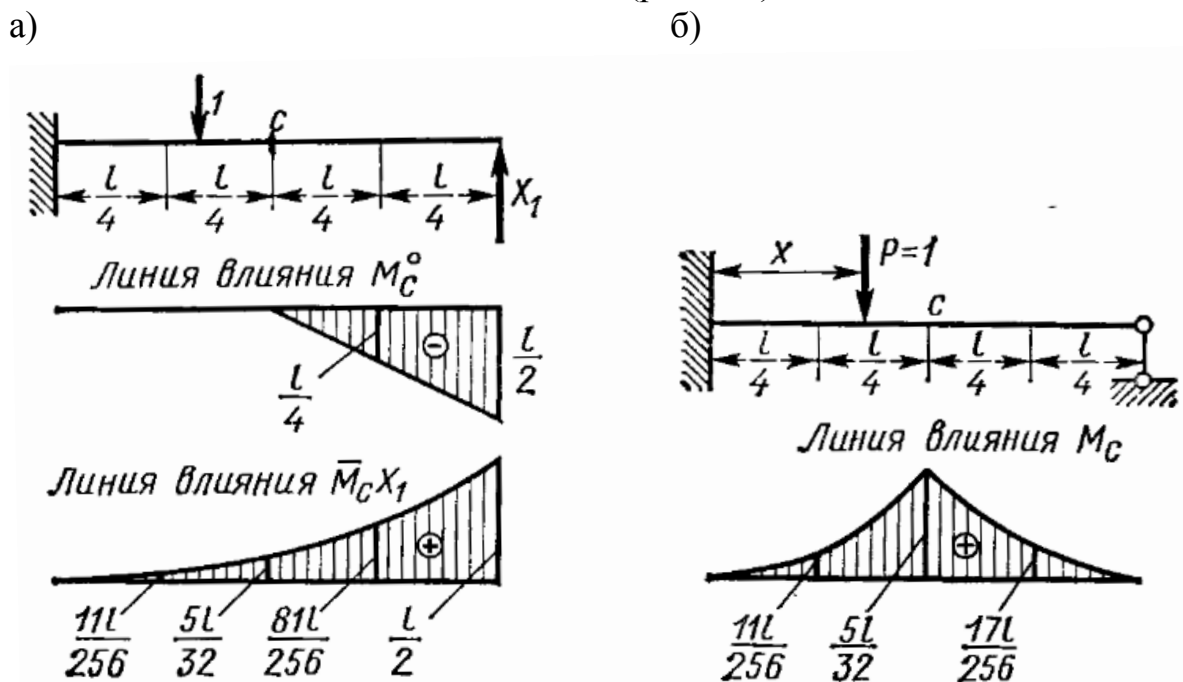


Рис. 4

Рассмотрим кинематический метод:

Если величину δ_{1P} в формуле (1) на основании теоремы о взаимности перемещений заменить величиной δ_{P1} , то формула (1) примет вид:

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}}$$

где δ_{1P} – перемещение одной точки, т.е. точки приложения силы X_1 , вызванное действием груза $P=1$, который может быть приложен в любой точке балки;

δ_{P1} – перемещение любой точки балки (по направлению силы $P=1$), вызванное действием груза $X_1=1$.

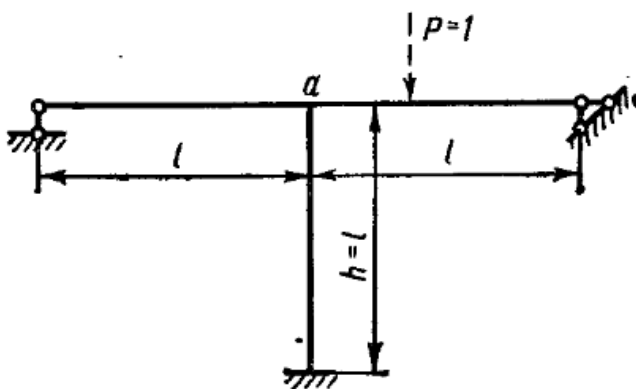
Т.о., график δ_{P1} представляет собой эпюру прогибов балки от загрузки ее силой $X_1=1$. Если все ординаты этого графика разделить на величину « $-\delta_{11}$ », то получим график, ординаты которого будут характеризовать изменение усилия X_1 при движении груза $P=1$ по балке. Этот график является линией влияния усилия X_1 .

Построение линии влияния методом перемещений.

Для построения методом перемещений линий влияния внутренних усилий (M , Q) необходимо предварительно построить линии влияния неизвестных метода перемещений (Z).

Рассмотрим построение линий влияния на примере рамы (рис. 5 а).

а)



б)

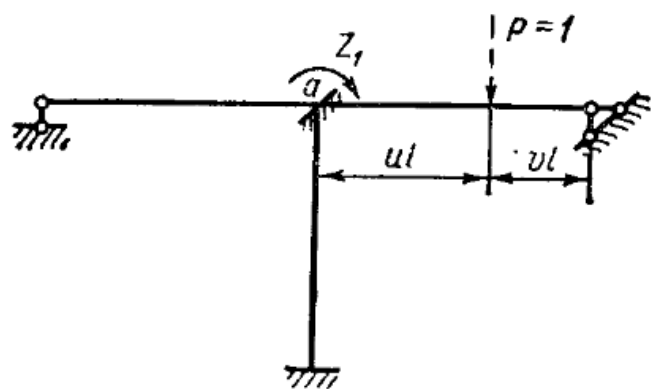


Рис. 5

Каноническое уравнение для основной системы (рис. 5 б):

$$Z_1 \cdot r_{11} + r_{1P} = 0$$

$$Z_1 = -\frac{r_{1P}}{r_{11}} \quad (2)$$

$$r_{1P} = -\delta_{P1}$$

$$Z_1 = \frac{\delta_{P1}}{r_{11}}$$

Следовательно, моделью линии влияния углового перемещения является эпюра вертикальных перемещений δ_{P1} от поворота заделки на угол $Z_1=1$.

При положении груза $P=1$ в пределах правого пролета (рис. 6 а):

$$r_{1P} = -\frac{l}{2} \cdot v \cdot (1 - v^2) \quad (3)$$

При положении груза $P=1$ в пределах левого пролета (рис. 6 а):

$$r_{1P} = \frac{l}{2} \cdot v \cdot (1 - v^2) \quad (4)$$

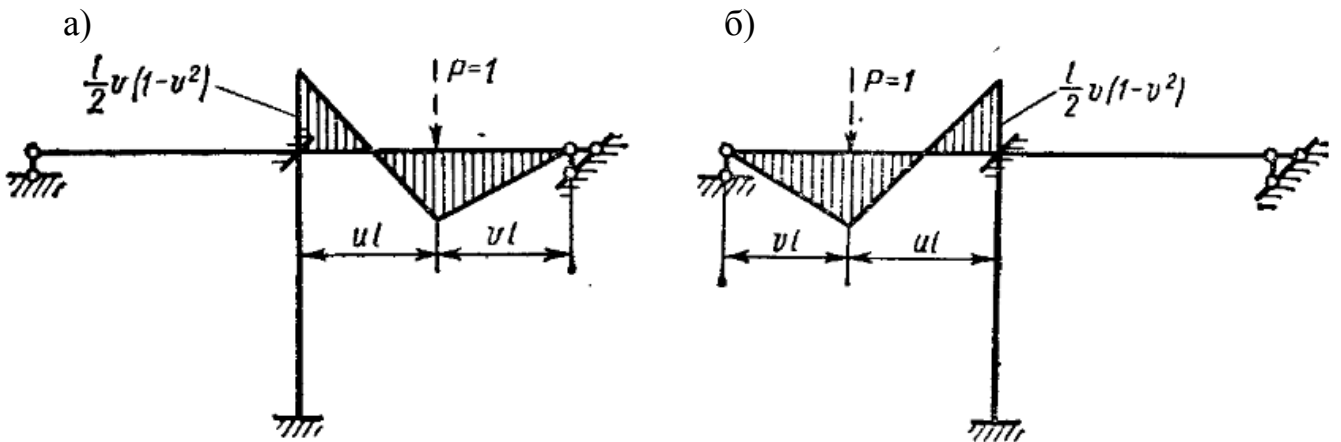
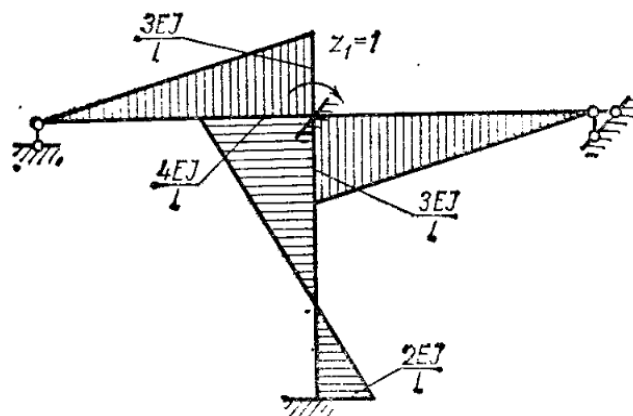


Рис. 6

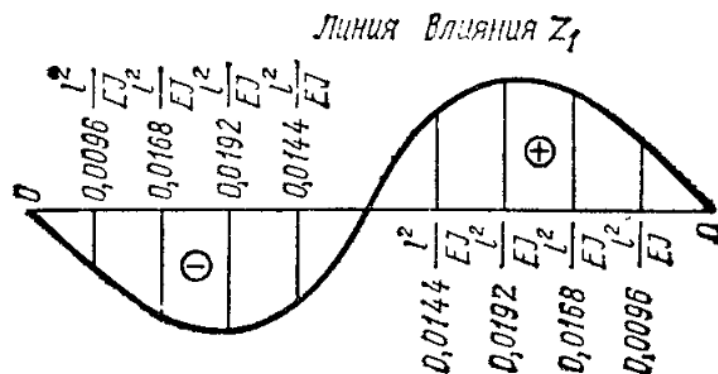
Для определения r_{11} строим единичную эпюру \overline{M}_1 :



$$r_{11} = \frac{3 \cdot EI}{l} + \frac{3 \cdot EI}{l} + \frac{4 \cdot EI}{l} = \frac{10 \cdot EI}{l}$$

В формулах (3) и (4) величины v и u представляют собой числа в пределах от 0 до 1.

Линия влияния Z_1 , рассчитанная по формуле(2):



Для построения линии влияния изгибающего момента в каком-либо сечении к левого пролета рамы при грузе $P=1$, расположенном в этом пролете, необходимо использовать формулу:

$$M_k = M_k^0 - \frac{3 \cdot EI}{l^2} \cdot Z_1 \cdot a_k,$$

где M_k^0 – изгибающий момент в сечении k однопролетной статически неопределимой балки с защемленным правым и шарнирно опертым левым концами, возникающий от силы $P=1$;

a_k – расстояние до сечения k от левой (шарнирной) опоры;

« $-\frac{3 \cdot EI}{l^2}$ » – реакция левой (шарнирной) опоры, возникающая при повороте

узла a рамы на угол $Z_1=1$.

Для построения линии влияния поперечной силы в каком-либо сечении k левого пролета рамы при грузе $P=1$, расположенном в этом пролете, необходимо использовать формулу:

$$Q_k = Q_k^0 - \frac{3 \cdot EI}{l^2} \cdot Z_1$$

При грузе $P=1$, расположенном в пределах правого пролета:

$$M_k = -\frac{3 \cdot EI}{l^2} \cdot Z_1 \cdot a_k,$$

$$Q_k = -\frac{3 \cdot EI}{l^2} \cdot Z_1$$

Тема 11. Расчет статически неопределимых ферм.

Степень статической неопределимости фермы методом сил определяется по формуле

$$n = n_c + n_{c0} - 2 \cdot n_y.$$

где n_c – число стержней;

n_y – число узлов.

На рис. 1 приведены примеры статически неопределимых ферм:

- (а) - $23 + 4 - 2 \cdot 13 = 1$;

- (б) - $21 + 3 - 2 \cdot 10 = 4$.

Причем если ферма на рис. 1, а внешне статически неопределима, то ферма на рис. 1, б – внешне статически определима, т.к. реакции в опорах можно определить из уравнений статики, 1 раз она статически неопределима внутренне.

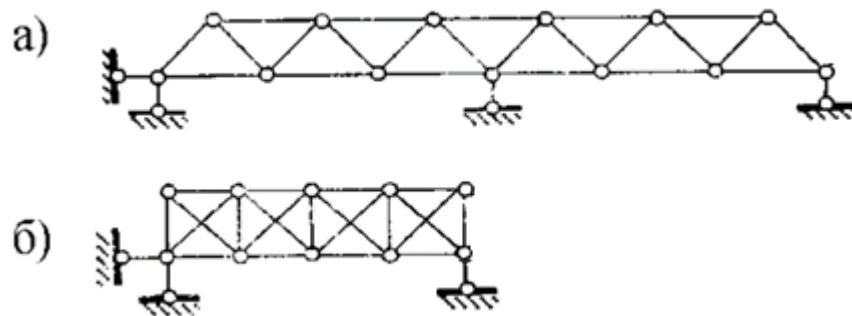


Рис. 1

Расчет ферм методом перемещений приводит к значительно большему числу неизвестных. Определение числа неизвестных методом перемещений производится по формуле:

$$n = 2 \cdot n_y - n_{c0}.$$

Так для ферм на рис.1:

- (а) - $2 \cdot 13 - 4 = 22$;

- (б) - $2 \cdot 10 - 3 = 17$.

Соответственно расчет статически неопределимых ферм выполняют как правило методом сил.

Основная система образуется из заданной путем исключения лишних опор или разрезания стержней фермы.

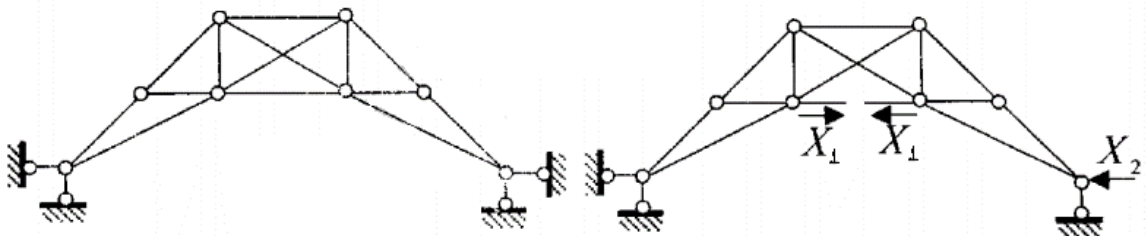


Рис. 2

Система канонических уравнений метода сил не меняется:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \dots + X_n \cdot \delta_{1n} + \Delta_{1P} &= 0, \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \dots + X_n \cdot \delta_{2n} + \Delta_{2P} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ X_1 \cdot \delta_{n1} + X_2 \cdot \delta_{n2} + \dots + X_n \cdot \delta_{nn} + \Delta_{nP} &= 0 \end{aligned}$$

При узловой нагрузке в стержнях статически неопределимых ферм возникают только продольные силы, следовательно, для расчета перемещений применяется формула Мора в следующем виде:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx$$

Тема 12. Расчет статически неопределимых арок.

Виды статически неопределимых арок, выбор метода расчета.

Виды статически неопределимых арок:

1) по количеству шарниров (рис. 1): двухшарнирные (а), одношарнирные (б); бесшарнирные (в);

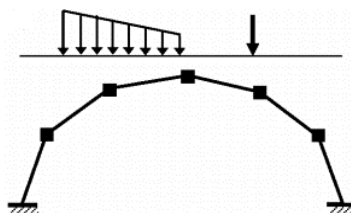


Рис. 1

2) по очертанию оси: круговые, параболические, эллиптические и т.д.

При расчете методом сил двухшарнирная арка – один раз статически неопределима, одношарнирные – дважды статически неопределима, бесшарнирная – трижды статически неопределима.

Основная система при расчете арки методом перемещений должна представлять набор прямых стержней, т.е. криволинейную арку заменяют ломаным стержнем. При этом количество неизвестных в несколько раз больше чем при расчете методом сил, поэтому применяется для расчета метод сил.



Особенности расчета двухшарнирных арок.

В двухшарнирных арках толщина сечения балки обычно убывает от середины пролета к опорам, что увязывается с видом эпюры моментов. Для двухшарнирной арки обычно пользуются уравнением в форме

$$I = I_0 \cos \varphi,$$

где I_0 – момент инерции в вершине арки,

φ – угол, образуемый касательной к оси арки с горизонталью.

Заданная и основная система показаны на рис. 2, а, б.

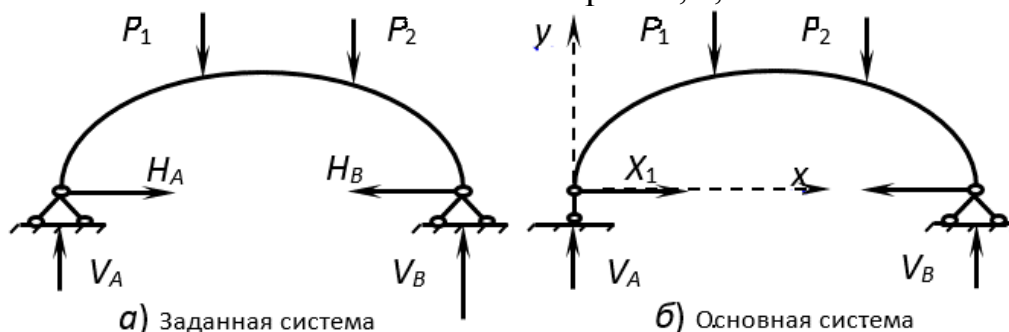


Рис. 2

$$D_{11} \cdot X_1 + D_{1P} = 0,$$

$$X_1 = -\frac{D_{1P}}{D_{11}}$$

Особенность расчета арки состоит в том, что интеграл Мора для вычисления перемещения должен браться по длине оси арки, т.е. является криволинейным интегралом.

$$D_{11} = \int_0^s \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds + \int_0^s \frac{\bar{N}_1^2}{EA} ds + k \int_0^s \frac{\bar{Q}_1^2}{GA} ds, \quad (1)$$

$$\Delta_{1P} = \int_0^s \frac{\bar{M}_1 \cdot M_P}{EI} ds + \int_0^s \frac{\bar{N}_1 \cdot N_P}{EA} ds + k \int_0^s \frac{\bar{Q}_1 \cdot Q_P}{GA} ds \quad (2)$$

Чтобы перейти к интегрированию по длине пролета, т.е. оси x , необходимо:

$$ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$$

Если арка представляет собой кривой брус малой кривизны, то есть при $R/h > 8$, где R – радиус кривизны арки; h – наибольшая высота сечения, то в формулах (1), (2) можно пренебречь последними слагаемыми, учитывающими влияние поперечных сил.

При $f/L = 1/6 \dots 1/4$ в формулах (1), (2) можно пренебречь последними двумя слагаемыми, учитывающими влияние поперечных и продольных сил.

Внутренние усилия определяются по формулам

$$M = M_P + \bar{M}_1 \cdot X_1, \quad N = N_P + \bar{N}_1 \cdot X_1$$

Особенности расчета двухшарнирных арок с затяжкой.

За основную систему может быть принята криволинейная балка с перерезанной затяжкой (рис. 3, б).

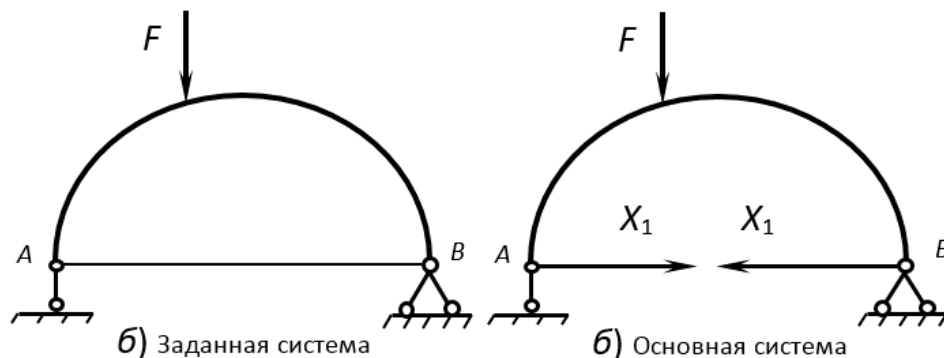


Рис. 3

$$D_{11} \cdot X_1 + D_{1P} = 0,$$

$$X_1 = -\frac{D_{1P}}{D_{11}}$$

Выражение для Δ_{1F} будет то же, что и для аналогичной двухшарнирной арки. Для перемещения δ_{11} добавляется влияние удлинения затяжки длиной l в состоянии $X_1 = 1$:

$$D_{11} = \int_0^s \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds + \int_0^s \frac{\bar{N}_1^2}{EA} ds + \frac{\bar{N}_{зат}^2 \cdot l}{EA_{зат}}$$

Особенности расчета бесшарнирных арок.

Рассмотрим расчет симметричной арки. За основную систему можно принять любую из показанных на рис. 4, а, б, в. Как будет установлено в дальнейшем, основная система, изображенная на рис. 3, в, является лучшей. В этой системе используется невесомые и абсолютно жесткие консоли длиной c .

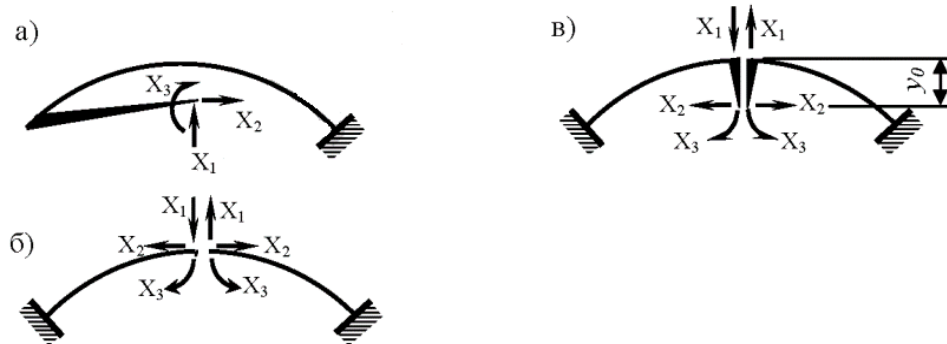


Рис. 4

Система канонических уравнений метода сил с учетом симметрии балки примет вид:

$$\begin{aligned} D_{11} \cdot X_1 + D_{1P} &= 0, \\ D_{22} \cdot X_2 + D_{23} \cdot X_3 + D_{2P} &= 0, \\ D_{32} \cdot X_2 + D_{33} \cdot X_3 + D_{3P} &= 0 \end{aligned}$$

Тема 13. Понятие о расчете висячих и комбинированных систем.

Комбинированными системами называют расчетные схемы сооружений, у которых часть стержней работает на изгиб, а остальные только на сжатие-растяжение.

Стержни, работающие на изгиб, обычно имеют более мощное поперечное сечение и их называют жесткими элементами.

Стержни, воспринимающие только сжимающие или растягивающие усилия, являются более легкими и их называют гибкими элементами.

Висячими называют такие системы, основные несущие элементы которых работают на растяжение.

К висячим системам относятся висячие арки (рис. 1 а), вантовые (тросовые) системы (рис. 1 б, в, г), некоторые виды комбинированных систем (рис. 1 б, в).

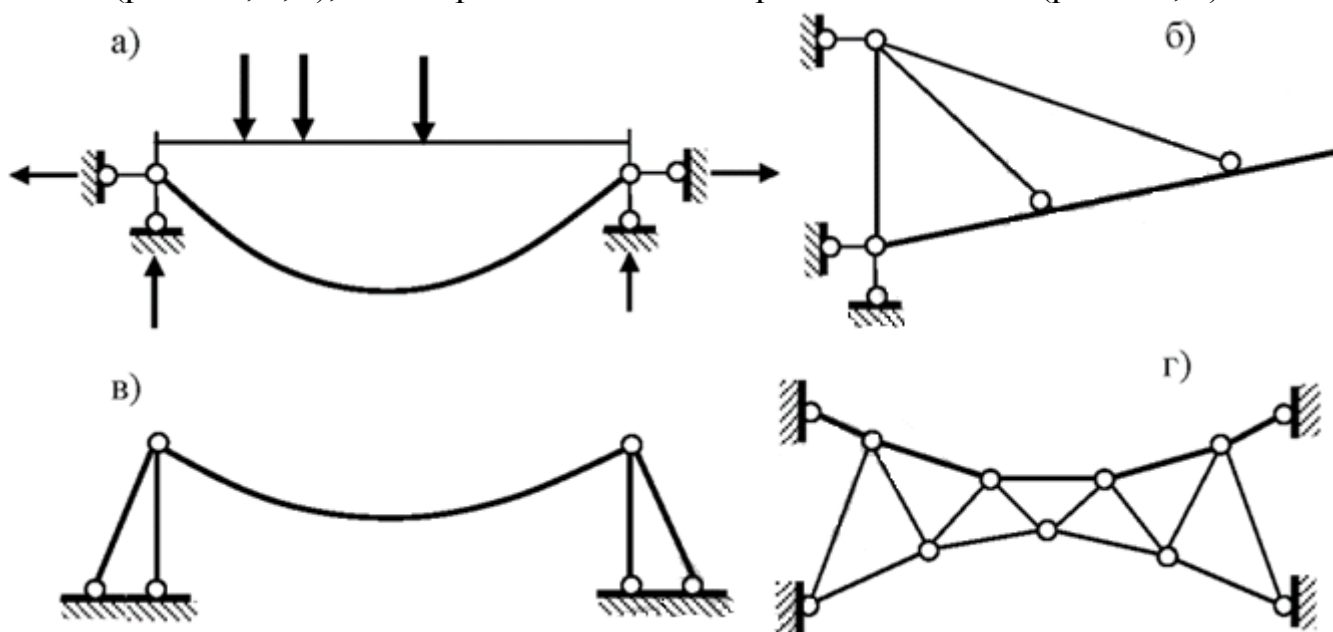


Рис. 1

Расчет висячей (растянутой) двухшарнирной арки (рис. 1 а) отличается от расчета обыкновенной (сжатой) двухшарнирной арки только тем, что распор висячей направлен наружу от пролета. Если висячая арка выполнена из гибких элементов (тросов), то она превращается в гибкую нить (рис. 1 в). Расчет вантовая ферма (рис. 1 г) не отличается от расчета обычных статически неопределимых ферм.

Все виды статически неопределимых арок с затяжками можно отнести к комбинированным системам (сама арка – жесткий элемент, затяжка – гибкий). Шпренгельные балки (рис. 2 а, в) являются примерами комбинированных систем с одной лишней связью. Висячая система в виде цепи с неразрезной балкой жесткости является трижды статически неопределимой (рис. 2 б).

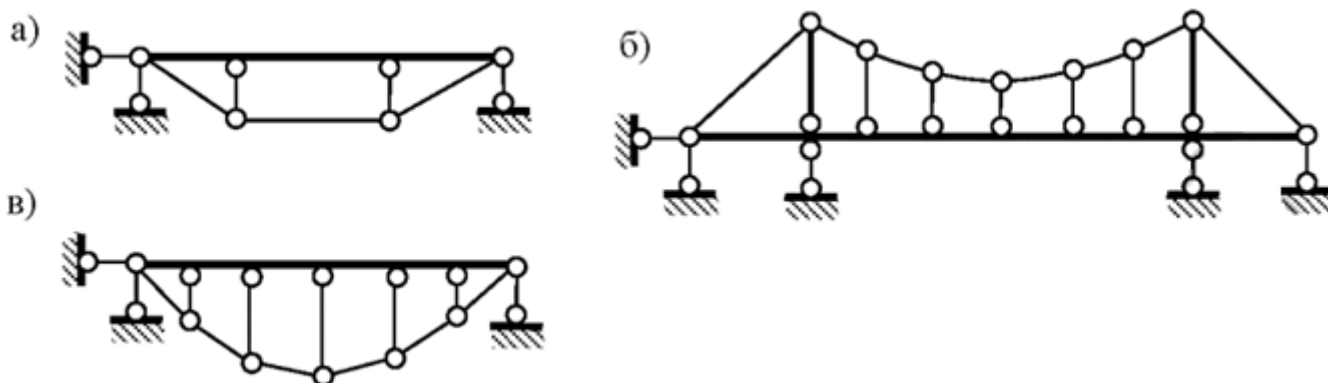


Рис. 2

Расчет комбинированных систем малых и средних пролетов при небольшом количестве лишних связей выполняют методом сил. Основную систему при этом необходимо выбирать так, чтобы от внешней нагрузки в ней возникали усилия только в жестких элементах (это возможно, если внешняя нагрузка приложена к жестким элементам).

На рис. 3 представлена основная система для комбинированной системы, построены грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов в жестких элементах. Единичная сила вызывает также усилия в гибких элементах.

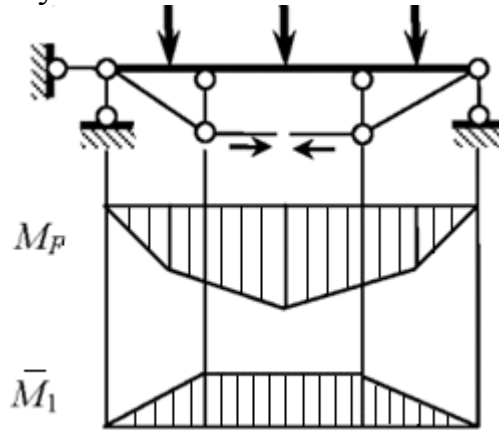


Рис. 3

Коэффициенты канонических уравнений метода сил для комбинированных систем определяются по формулам:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_0^L \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_j}{EI} dx + \sum \frac{N_i \cdot N_j \cdot L}{EF};$$

$$\Delta_{iP} = \sum_{k=1}^n \int_0^L \frac{\bar{M}_i \cdot M_P}{EI} dx + \sum \frac{N_i \cdot N_P \cdot L}{EF}$$

Из-за большой разницы в площадях поперечных сечений гибких и жестких элементов второе слагаемое приведенных формул применяется только для гибких элементов.

Количество неизвестных метода перемещений комбинированных систем в основном оказывается значительным, поэтому данный метод применяют при расчетах на ЭВМ.

Тема 14. Расчет пространственных систем.

Виды пространственных стержневых систем.

Стержневые системы называют пространственными, если оси их элементов и линии действия внешних нагрузок расположены не в одной плоскости.

Пространственные стержневые системы по характеру образования делят на два основных вида:

- пространственные рамы (стержни соединены жесткими узлами) (рис. 1 а);
- пространственные фермы (стержни соединены шаровыми шарнирами) (рис. 1 б).

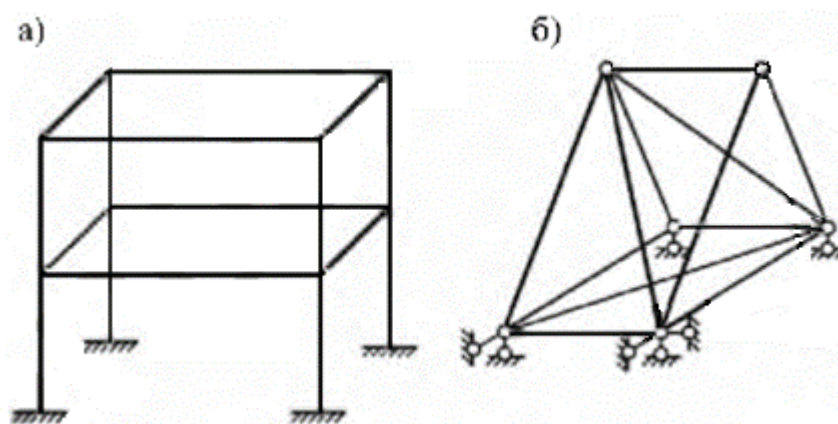


Рис. 1

Опоры пространственных систем.

Пространственные системы как и плоские должны быть геометрически неизменяемыми. Любую геометрически неизменяемую пространственную систему можно отождествить с пространственным диском, т.е. блоком, который имеет 6 степеней свободы. Соответственно, каждая геометрически неизменяемая пространственная система (блок) должна иметь как минимум 6 опорных связей. Соединение блоков между собой может осуществляться жестко и шарнирно.

Различают следующие основные типы опор пространственных систем:

- 1) Защемляющая опора (заделка) (рис. 2).

Заделка эквивалентна 6 опорным связям и в ней соответственно возникают три реактивных силы (R_x , R_y , R_z) и три реактивных момента (M_x , M_y , M_z).

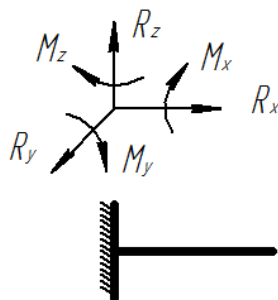


Рис. 2

- 2) Неподвижная шаровая опора.

Эта опора может быть представлена (рис. 3 а) как шар 1 вложенный в сферические углубления балансиров 2 и 3, один из которых жестко прикреплен к

сооружению 5, а второй к опорной поверхности 4. На расчетных схемах неподвижная шаровая опора может быть представлена в трех вариантах (рис. 3 б). Неподвижная шаровая опора эквивалентна 3 опорным связям и в ней соответственно возникают три реактивных силы (R_x , R_y , R_z) (рис. 3 в), т.е. она позволяет присоединенному «блоку» поворачиваться относительно осей x , y , z .

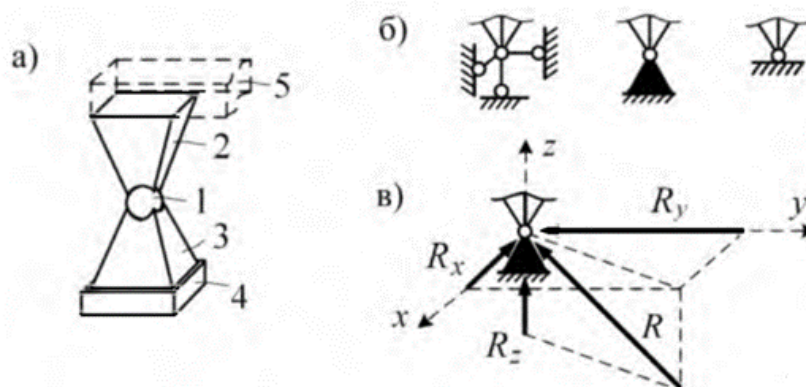


Рис. 3

3) Шаровая опора, подвижная в одном направлении.

Эта опора отличается от неподвижной шаровой опоры тем, что нижний балансир опирается на опорную поверхность через цилиндрические ролики (рис. 4 а). Шаровая опора, подвижная в одном направлении, эквивалентна 2 опорным связям и в ней соответственно возникают две реактивных силы (R_y – параллельна осям цилиндрических роликов, R_z) (рис. 4 б), т.е. она позволяет присоединенному «блоку» поворачиваться относительно осей x , y , z и линейное перемещение в одном направлении.

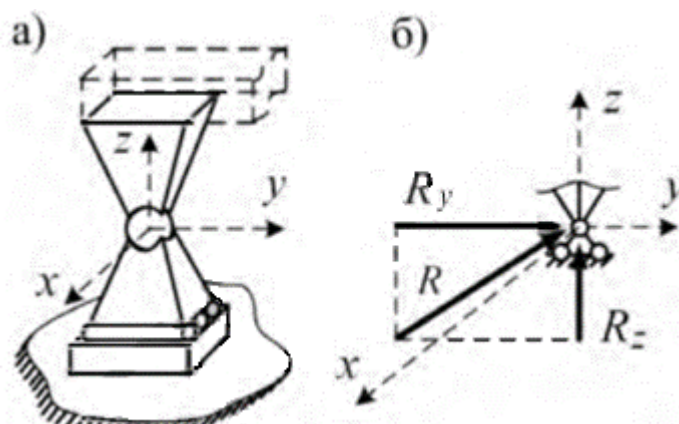


Рис. 4

4) Шаровая опора, подвижная в двух направлениях.

Эта опора отличается от шаровой опоры, подвижной в одном направлении, тем, что нижний балансир опирается на опорную поверхность через шарики (рис. 5 а). Шаровая опора, подвижная в двух направлениях, эквивалентна 1 опорной связи и в ней соответственно возникает одна реактивная сила (R_z) (рис. 5 б).

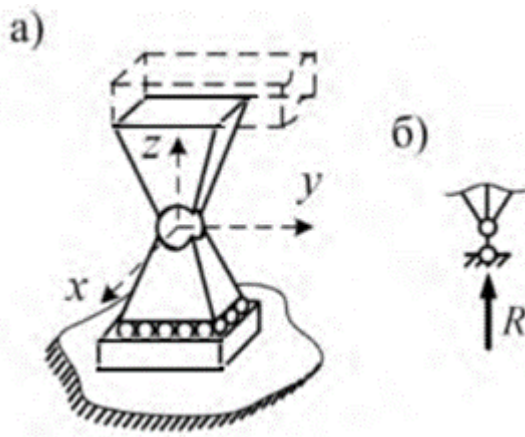


Рис. 5

5) Неподвижная цилиндрическая опора.

Эта опора отличается от неподвижной шаровой опоры тем, что между двумя балансирами располагается цилиндр (рис. 6 а). Неподвижная цилиндрическая опора эквивалентна 5 опорным связям и в ней соответственно возникает три реактивные силы (R_x , R_y , R_z) и два реактивных момента (M_x , M_z). На расчетных схемах неподвижная цилиндрическая опора может быть представлена в двух вариантах (рис. 6 б, в).

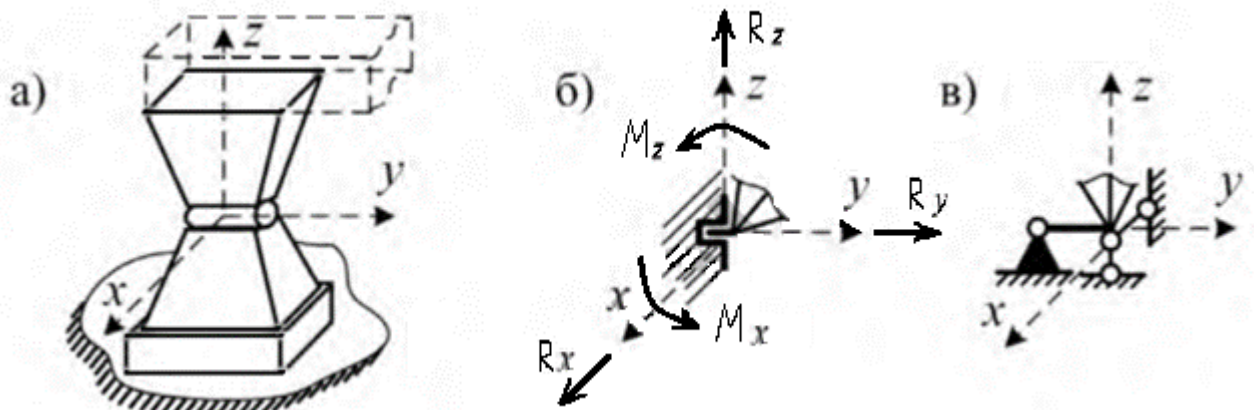


Рис. 6

Кинематический анализ пространственных стержневых систем.

Число степеней свободы пространственной стержневой системы определяется по формуле:

$$W = 6 \cdot D - 6 \cdot Ж - 3 \cdot Ш - 3 \cdot Ш_{ц} - C_0$$

где D – число блоков (за блок может быть принят как прямолинейный, так и ломано-разветвленный пространственный стержень);

$Ж$ – число простых жестких соединений дисков между собой;

$Ш$ – число простых шаровых шарниров;

$Ш_{ц}$ – число простых цилиндрических шарниров;

C_0 – число простых опорных связей.

Число степеней свободы для пространственных ферм определяется по формуле:

$$W = 3 \cdot Y - C - C_0$$

где Y – число шаровых узлов в ферме;

C – число стержней;

C_0 – число простых опорных связей.

Как и в плоских стержневых системах условие $W > 0$ означает, что система геометрически изменяемая. Условия $W = 0$ и $W < 0$ необходимы, но недостаточны для утверждения, что система геометрически неизменяема и соответственно статически определима или статически неопределима.

Способы определения усилий и перемещений в стержнях статически определимых пространственных систем.

В стержнях пространственных рам, ось которых совпадает с осью x возникает шесть составляющих внутренних усилий: продольная сила N_x , действующая вдоль оси стержня, две поперечные силы (Q_y, Q_z), изгибающие моменты (M_y, M_z) и крутящий момент ($M_{кр} = M_x$). Положительные направления внутренних усилий показаны на рис. 7:

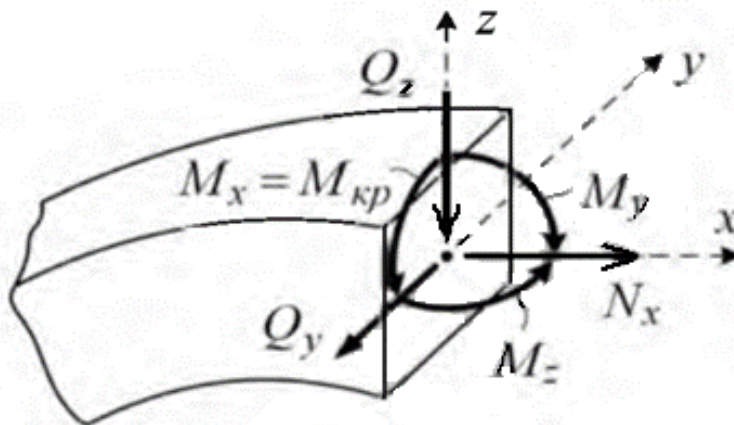


Рис. 7

Для определения внутренних усилий в основном применяется метод сечений. Условия равновесия отсеченной части стержня или пространственной рамы записываются в виде шести уравнений равновесия: трех уравнений проекций на оси x, y, z и трех уравнений моментов относительно этих же осей.

Рассмотрим пространственную раму (рис. 8 а). Определим усилия в сечении 1 рамы.

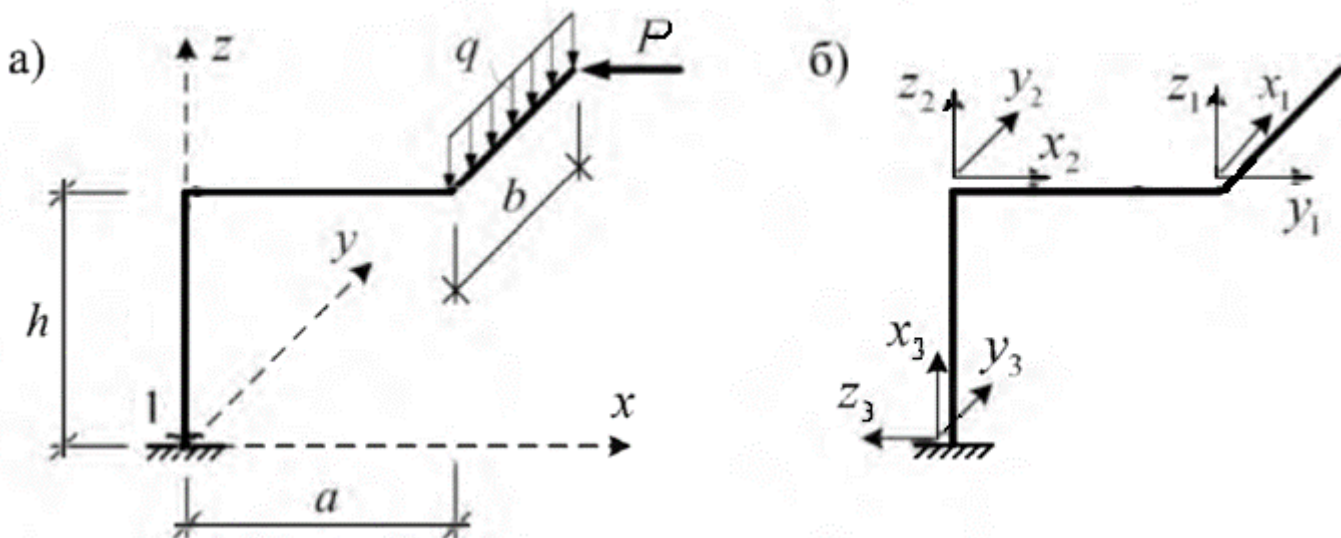


Рис. 8

Эпюры внутренних сил в пространственных рамах удобнее представлять не в общей системе координат x, y, z , а в локальных для каждого (i -го) из стержней системах координат x_i, y_i, z_i , которые выбирают следующим образом (рис. 8 б):

- ось x_i направляется вдоль оси стержня от его начала к концу;
- оси y_i, z_i направляются так, чтобы они были или параллельны осям y и z общей системы координат или образовывали с ними наименьший угол.

Внутренние усилия в сечении 1 определяются по формулам:

$$N = \sum P_{x3}^{верхн} = -q \cdot b;$$

$$Q_{z3} = \sum P_{z3}^{верхн} = -P;$$

$$Q_{y3} = \sum P_{y3}^{верхн} = 0;$$

$$M_{кр} = \sum M_{x3}^{верхн} = -P \cdot b;$$

$$M_{y3} = \sum M_{y3}^{верхн} = q \cdot b \cdot a - P \cdot h;$$

$$M_{z3} = \sum M_{z3}^{верхн} = \frac{q \cdot b^2}{2}.$$

Эпюры внутренних усилий:

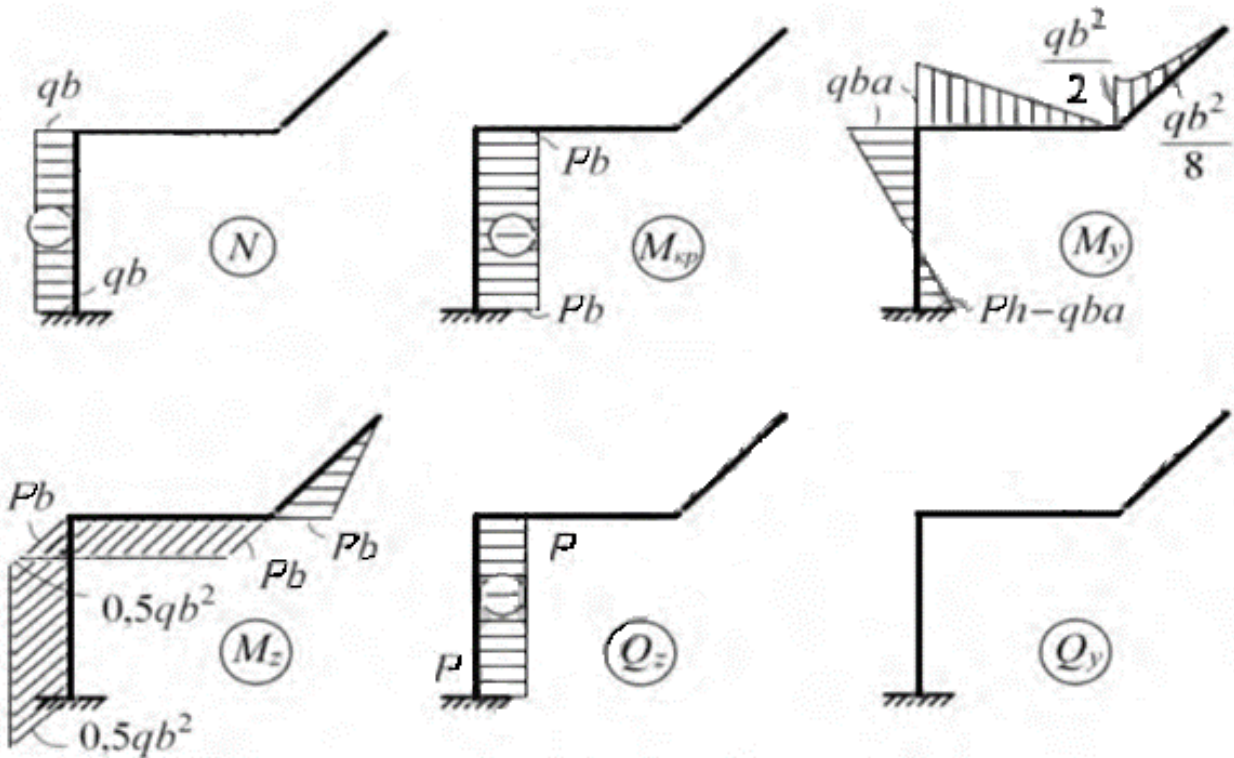


Рис. 9

Определение усилий в стержнях статически определимых пространственных ферм можно выполнять методом вырезания узлов. Если вырезается один узел пространственной фермы, то для определения усилий в стержнях, сходящихся в этом узле можно составить три независимых уравнения равновесия. Соответственно, узлы необходимо вырезать так, чтобы в каждом вырезанном узле было не более трех стержней с неизвестными усилиями.

Вычисление усилий в стержнях пространственных ферм можно выполнять способом разложения их на плоские фермы. Это возможно, если боковые грани пространственной фермы являются плоскими, и нет стержней, пересекающих объем фермы, заключенные между боковыми гранями.

Перемещения в пространственных стержневых системах определяются по формулам:

$$\Delta_{iP} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{M_{Py} \cdot \bar{M}_{iy}}{EI_y} + \frac{M_{Pz} \cdot \bar{M}_{iz}}{EI_z} + \frac{M_{Pkp} \cdot \bar{M}_{ikp}}{GI_{kp}} + \frac{N_P \cdot \bar{N}_i}{EF} + \eta_y \cdot \frac{Q_{Py} \cdot \bar{Q}_{iy}}{GF} + \eta_z \cdot \frac{Q_{Pz} \cdot \bar{Q}_{iz}}{GF} \right) dx,$$

где M_{Py} , M_{Pz} , M_{Pkp} , N_P , Q_{Py} , Q_{Pz} – усилия в системе от нагрузки;

\bar{M}_{iy} , \bar{M}_{iz} , \bar{M}_{ikp} , \bar{N}_i , \bar{Q}_{iy} , \bar{Q}_{iz} – усилия в системе от действия единичной силы, приложенной в сечении, для которого определяется перемещение, в направлении искомого перемещения;

η_y , η_z – коэффициенты, учитывающие неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечений;

EI_y , EI_z , GI_{kp} , EF , GF – жесткости стержней при изгибе, кручении, сжатии-растяжении и сдвиге.

Для пространственных ферм формула перемещений имеет вид:

$$\Delta_{iP} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{N_P \cdot \bar{N}_i}{EF} \right) dx$$

Особенности применения метода сил и метода перемещений в расчетах пространственных систем.

Расчет пространственных статически неопределимых стержневых систем ничем не отличается от расчета плоских стержневых систем, т.е. используют метод сил и метод перемещений. Канонические уравнения принятого к расчету метода записываются в традиционной форме.

На практике пространственные статически неопределимые стержневые системы рассчитывают с помощью проектно-вычислительных комплексов. Вычисление усилий и перемещений в этих программах основано на общих уравнениях строительной механики и методе конечных элементов.

Тема 15. Метод конечных элементов.

Современная вычислительная техника позволяет проводить расчеты сооружений с более детальным (неупрощенным) описанием их внутренней структуры и с более точным учетом действующих нагрузок. Для этого разработаны специальные методы расчета, среди которых наибольшее распространение получил метод конечных элементов (МКЭ), который хорошо адаптирован для его реализации на ЭВМ.

Метод конечных элементов – это метод расчета сооружений, основанный на рассмотрении сооружения как совокупности типовых элементов, называемых конечными элементами (КЭ).

Виды МКЭ:

По способу получения основных, т.е. разрешающих, уравнений различают четыре основных вида метода конечных элементов: прямой, вариационный, взвешенных невязок и энергетического баланса.

Прямой метод аналогичен матричному методу перемещений для стержневых систем. Соотношения для КЭ здесь строятся непосредственно на основе трех групп уравнений (трех сторон задачи): статической, геометрической и физической. Этот метод удобен своей простотой, однако область применения прямого метода весьма ограничена: его можно использовать лишь для конечных элементов простой геометрии с малым числом степеней свободы в узле.

Вариационный метод основан на принципах стационарности некоторой переменной (функционале), зависящей от одной или нескольких функций. Применительно к механике деформируемого твердого тела эта переменная представляет собой потенциальную или дополнительную энергию системы или формируется на основе этих двух энергий. Если в эту переменную подставить аппроксимирующие выражения искомых функций и применить к нему экстремальные принципы, то получим систему алгебраических уравнений, решением которой будут значения узловых неизвестных. В отличие от прямого вариационный метод может одинаково успешно применяться как к простым, так и сложным задачам.

Метод невязок представляет собой наиболее общий подход к построению основных соотношений МКЭ. Этот метод целесообразно применять при решении задач, у которых трудно или невозможно сформулировать вариационное уравнение. Суть метода взвешенных невязок заключается во введении некоторой невязки – отклонении приближенного аппроксимативного решения от точного решения дифференциальных уравнений для данной задачи.

Метод энергетического баланса основан на балансе различных видов энергии, записанном в интегральной форме. Этот метод успешно применяется при решении нелинейных и динамических задач.

Из приведенных видов МКЭ в строительной механике особенно актуальны вариационный метод и метод взвешенных невязок, которые для рассматриваемой задачи представляют собой два взаимно дополняющих метода одинаковой точности.

Формы МКЭ:

В МКЭ, аналогично классическим методам строительной механики, за основные неизвестные могут приниматься величины разного типа: кинематические (перемещения, деформации), статические (внутренние силы, напряжения и др.) или смешанные кинематические и статические параметры. В зависимости от выбора

узловых неизвестных различают три формы МКЭ: метод перемещений, метод сил и смешанный метод.

Метод перемещений – в настоящее время наиболее распространенная форма МКЭ. Это объясняется тем, что для заданной конструкции легче получить кинематически определимую основную систему метода перемещений, чем статически определимую основную систему метода сил. Кроме того, матрица жесткости метода перемещений составляется без особых затруднений.

В основе математической формулировки МКЭ в форме метода перемещений лежит вариационный принцип Лагранжа, т. е. принцип минимума потенциальной энергии системы. Основными неизвестными здесь являются перемещения узловых точек дискретной схемы, напряжения же вторичны и определяются путем численного дифференцирования перемещений.

К достоинствам метода относятся: простота реализации; удовлетворительные точность и устойчивость решения с гарантированной сходимостью к нижней границе. Минусы: точность определения напряжений намного ниже, чем перемещений, хотя именно значения напряжений важны при прочностных расчетах, к тому же поскольку приближенное решение отвечает нижней границе, то значения и перемещений, и напряжений оказываются заниженными.

Метод сил и смешанный метод не получили такого широкого распространения. Однако во многих случаях они могут быть эффективны, особенно в отношении вычисления напряжений.

Главным плюсом МКЭ в форме метода сил является то, что основные неизвестные здесь – напряжения. И если бы в реализации метода сил не было определенных сложностей, значения напряжений можно было получать той же степени точности, что и перемещения в методе перемещений. Кроме того, метод сил дает верхнюю границу приближенного решения (т. е. напряжения завышены), что в принципе лучше при расчетах на прочность, нежели заниженная оценка. Тем не менее, пока нет алгоритмов, в той же степени простых и устойчивых, имеющих гарантированную сходимость в обширном классе задач, подобно МКЭ в форме метода перемещений.

Смешанный метод приводит к значительному усложнению алгоритма, поэтому эффективен лишь для ограниченного класса задач

МКЭ – дискретный метод. Реальная конструкция как сплошная среда с бесконечно многим числом степеней свободы заменяется дискретной моделью связанных между собой элементов с конечным числом степеней свободы. Т.е., сооружение делится на определенное число КЭ, соединенных между собой в узлах конечно-элементной модели. Нагрузка, действующая на сооружение, при этом переносится в узлы. Это позволяет определять напряженно-деформированное состояние сооружения через узловые усилия и перемещения конечно-элементной модели.

Форма КЭ определяется типом исследуемой конструкции. Например, в стержневых системах в качестве КЭ выбирают стержень (рис. 1 а, б). При расчете пространственных рам используется КЭ бруса (рис. 1 в). В расчетах плоских или тонкостенных тел (плит или пластин) используются треугольный (рис. 1 г) или четырехугольный (рис. 1 д) конечные элементы. При расчете пространственных сооружений могут использоваться призматический КЭ (рис. 1 е) или тетраэдральный КЭ (рис. 1 ж) и др.

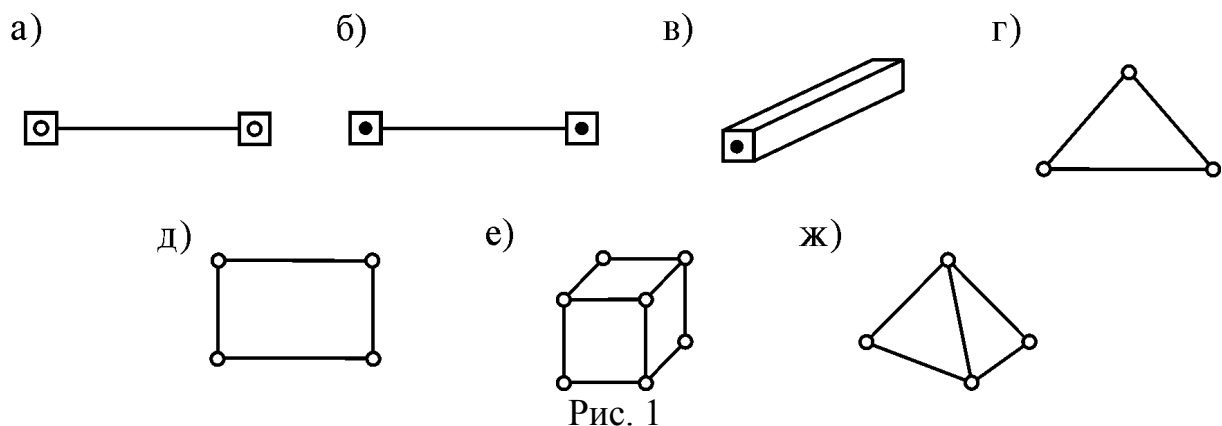


Рис. 1

Имея КЭ разного типа, при выборе конечно-элементной модели сооружения можно вводить узлы с разным числом степеней свободы. Например, в плоской системе могут рассматриваться узлы как с тремя степенями свободы (рис. 2 а), так и с двумя (рис. 2 б) или даже с одной степенью свободы. В пространственной системе узлы могут иметь шесть (рис. 2 в) или три степени свободы (рис. 2 г).

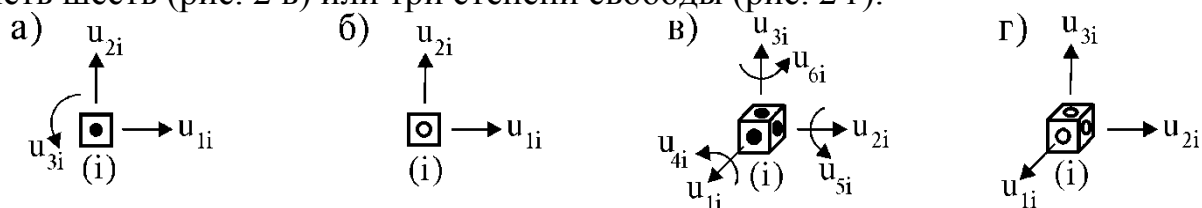


Рис. 2

Так как число возможных дискретных моделей неограниченно велико, то основная задача заключается в том, чтобы выбрать такую модель, которая лучше всего аппроксимирует данную область.

Сущность аппроксимации сплошной среды по МКЭ состоит в следующем:

1) рассматриваемая область разбивается на определенное число КЭ, семейство элементов по всей области называется системой или сеткой конечных элементов;

2) предполагается, что КЭ соединяются между собой в конечном числе точек – узлов, расположенных по контуру каждого из элементов;

3) искомые функции в пределах каждого КЭ (например, распределение перемещений, деформаций, напряжений и т. д.) с помощью аппроксимирующих функций выражаются через узловые значения, представляющие собой основные неизвестные МКЭ;

4) для анализа и расчета полученной системы конечных элементов действительны все принципы и методы, применяемые для любых дискретных систем.

Аппроксимация, как правило, дает приближенное, а не точное, описание действительного распределения искомых величин в элементе. Поэтому результаты расчета конструкции в общем случае также являются приближенными. При этом применяются следующие понятия: точность, устойчивость и сходимость результата.

Под точностью понимается отклонение приближенного решения от истинного решения.

Устойчивость, прежде всего, определяется ростом ошибок при выполнении отдельных вычислительных операций. Неустойчивое решение является результатом неудачного выбора аппроксимирующих функций, «плохой» разбивки области на КЭ, некорректного представления граничных условий и т.п.

Под сходимостью подразумевается постепенное приближение последовательных решений к предельному, по мере того как уточняются параметры дискретной модели, такие как размеры элементов, степень аппроксимирующих функций и т.п. Таким

образом, в сходящейся процедуре различие между последующими решениями уменьшается, стремясь в пределе к нулю.

Критерии устойчивости, сходимости и точности в основном определяются погрешностями различного рода операций, проводимых в МКЭ. Наряду с обычными ошибками округления и погрешностью приближенных методов линейной алгебры, применяемых в МКЭ, есть и ошибки, имеющие непосредственное отношение к методу конечных элементов:

- ошибки дискретизации, являющиеся результатом различий между действительной геометрией рассчитываемой области и ее аппроксимацией системой конечных элементов;

- ошибки аппроксимации, обусловленные разностью между действительным распределением искомым функций в пределах КЭ и их представлением с помощью аппроксимирующих функций.

Ошибки дискретизации уменьшаются с увеличением числа конечных элементов и соответственно с уменьшением их размеров, причем они стремятся к нулю, когда размер элемента стремится к нулю. Эти ошибки уменьшаются и с применением криволинейных элементов на соответствующих границах области. Ошибки аппроксимации не обязательно уменьшаются по мере уменьшения размеров элементов или повышения степени аппроксимации, однако их можно свести к минимуму, если при построении аппроксимирующих функций обеспечить:

- 1) непрерывность искомой функции и ее производных в области КЭ до степени $m-1$ включительно (m – наибольший порядок производных искомой функции);

- 2) выполнение условий полноты, т.е. при уменьшении размеров КЭ аппроксимирующие функции должны обеспечить стремление значений искомой функции, а также ее производных к постоянным значениям;

- 3) выполнение условий совместности искомой функции и частично ее производных на границе между смежными элементами (смысл совместности заключается в непрерывности основных неизвестных на смежных границах соседних КЭ);

- 4) приближенное удовлетворение условий совместности не основных переменных (например, напряжений, если основные неизвестные – перемещения) на границах КЭ, а также граничных условий в рассматриваемой области;

- 5) исключение концентрации напряжений в КЭ, если в рассматриваемой области такие концентрации заведомо отсутствуют;

- 6) при перемещениях КЭ как жесткого целого в нем не должны возникать деформации.

Суть метода конечных элементов состоит в том, чтобы описать напряженно-деформированное состояние КЭ через обобщенное перемещение Z узлов и установить их связь с действующей на систему нагрузкой. Для этого необходимо получить матрицу жесткости КЭ. Размерность матрицы жесткости равна числу степеней свободы КЭ. Каждый столбец матрицы жесткости элемента представляет собой усилия, действующие на элемент в узлах при единичном смещении по направлению какой-либо степени свободы. Поэтому, для построения любого столбца матрицы жесткости элемента необходимо задать единичное смещение по направлению соответствующей степени свободы элемента и найти усилия, действующие при этом на его узлы.

Т.к., каждый стержень в составе исследуемой системы имеет свою ориентацию, то вначале строят матрицы жесткостей в местной системе координат, а затем, при

переходе от местной системы к общей, преобразуют их. Матрицу жесткости всей системы получают соответствующим объединением матриц жесткостей отдельных элементов.

Уравнение МКЭ:

$$\begin{aligned} R \cdot \vec{Z} + \vec{R}_P &= 0; \\ \vec{Z} &= -\frac{\vec{R}_P}{R}, \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{R}_P – вектор грузовых реакций, равный вектору узловых нагрузок, взятому с обратным знаком.

Полная нагрузка на узел определяется как сумма нагрузок от примыкающих к узлу элементов.

После решения системы уравнений (1) становятся известными перемещения Z узлов в общей системе координат. Такая форма расчета называется МКЭ «в перемещениях» (наиболее распространенная).

Другая форма расчета называется МКЭ «в усилиях» – он заключается в том, что напряженно-деформированное состояние КЭ необходимо описать конечным набором обобщенных узловых сил, а затем установить их связь с нагрузкой.

Алгоритм расчета МКЭ:

1. Исследуемая конструкция посредством сетки дискретизации разделяется на определенное количество элементов. Неизвестными параметрами решаемой задачи и будут выступать обобщенные перемещения этих узловых точек, а их число будет связано с известным числом их степеней свободы.

2. Вводятся функции для характеристики обобщенных перемещений.

3. Осуществляется построение матрицы жесткости на основе принципа допустимых перемещений.

4. Формируется матрица жесткости всей конструкции на основе матриц жесткости отдельных элементов.

5. Учитываются граничных условий.

Статические граничные условия учитываются при формировании вектора нагрузки P . Если внешние нагрузки заданы непосредственно в узловых точках, то они учитываются без изменений. Распределенные же нагрузки заменяются эквивалентными обобщенными узловыми силами $P_{узн}$.

Кинематические граничные условия, как правило, представляются в виде заданных узловых перемещений (равных и не равных нулю). Нулевые перемещения соответствуют абсолютно жестким опорным связям, наложенным на некоторые узлы дискретной модели конструкции. Отличные от нуля заданные перемещения могут быть обусловлены неточностью изготовления (монтажа), регулированием усилий, смещением (осадкой) опор и т.п.

6. Решается система разрешающих уравнений. Система разрешающих уравнений МКЭ для статической задачи представляет собой систему линейных алгебраических уравнений.

Прежде всего следует выбрать метод решения СЛАУ. Для небольших и средних задач – от несколько десятков до несколько десятков тысяч неизвестных – обычно используются известные прямые методы (Гаусса и т.п.). Для более сложных систем, требующих огромного объема вычислений и значительной памяти, применяют итерационные методы (Якоби, Ньютона и т.д.).

Могут применять и комбинированные подходы. Так, точность решения, полученного прямым методом, может быть значительно улучшена с помощью дополнительных вычислений, называемых итерационным уточнением.

7. Определяются внутренние усилия (напряжения). Результатом решения системы разрешающих уравнений МКЭ в форме метода перемещений будут компоненты узловых перемещений дискретной модели конструкции.

Вычисление же необходимых компонент напряженного состояния конструкции производится поэлементно в следующем порядке:

а) формируется вектор узловых перемещений для каждого конечного элемента q^e (посредством выборки из глобального вектора узловых перемещений q соответствующих компонент);

б) если локальная система координат для отдельного КЭ не совпадает с глобальной, производится преобразование вектора узловых перемещений q^e данного элемента;

в) на основе геометрических и физических соотношений формируется матрица усилий (напряжений) для КЭ G ;

г) вычисляется вектор узловых значений внутренних усилий (напряжений) S^e для КЭ, который связан с узловыми перемещениями в общем случае следующим соотношением: $S^e = G \cdot q^e$

Тема 16. Динамика сооружений

Динамические нагрузки и их особенности.

Колебания представляют одну из наиболее распространенных форм движения. Сооружения колеблются от ветра, землетрясения, от работы различных машин и механизмов. При колебании сооружения величины и знаки внутренних усилий (напряжений) непрерывно меняются, что может привести к быстрому разрушению отдельных элементов, частей или всего сооружения.

Динамика сооружений изучает механические колебания сооружений

При расчете на колебания сооружение рассматривается как колебательная система.

Колебательные системы делятся на два типа:

1) Диссипативная система – это система, у которой происходит диссипация (рассеивание) энергии.

2) Консервативная система – это система, у которой рассеиванием энергии пренебрегают.

Простейшей моделью консервативной колебательной системы является система из пружины и одной массы (рис. 1 а). Жесткость пружины r характеризует упругость системы, а масса m – ее инерционные свойства.

Простейшей моделью диссипативной системы является система из пружины, вязкого элемента и массы (рис. 1 б). Сила сопротивления c , возникающая в вязком элементе, стремится остановить колебания системы. Такой элемент называют демпфером (или амортизатором). Поэтому диссипативную систему часто называют демпфированной системой.

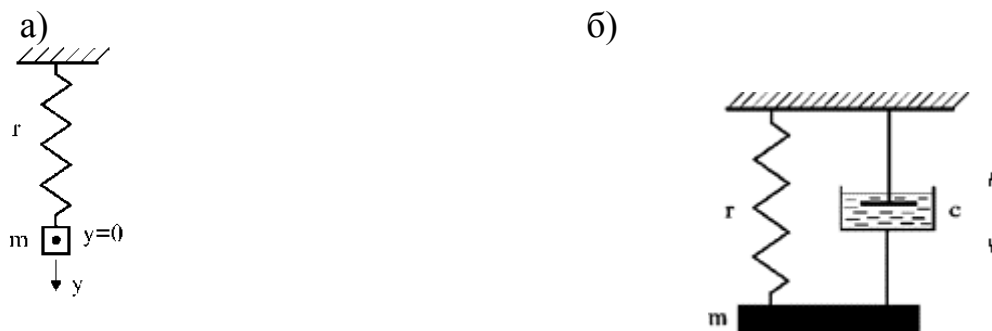


Рис. 1

Колебания сооружения возникают от динамических нагрузок. В отличие от статических, динамические нагрузки изменяются с течением времени по величине, направлению или положению. Они сообщают массам системы ускорения, вызывают инерционные силы, что может привести к резкому возрастанию колебаний, и в итоге – к разрушению всего сооружения или его частей.

Основные виды динамических нагрузок:

1) Периодическая нагрузка – это нагрузка, прикладываемая к сооружению через определенный период. Источниками периодических нагрузок являются различные машины и механизмы (электродвигатели, металлообрабатывающие станки, вентиляторы и др.).

Если их вращающиеся части не уравновешены, то они при работе вызывают гармоническую нагрузку (вибрационную нагрузку) (нагрузку, изменяющуюся по

закону синуса или косинуса). Поршневые компрессоры и насосы, штамповочные машины, дробилки и др. создают негармоническую нагрузку.

2) Импульсные нагрузки создаются взрывом, падающими грузами или частями силовых установок (молотов, копров и др.).

3) Подвижные нагрузки создаются железнодорожными составами, автомобильным транспортом и др.

4) Недетерминированные (случайные) нагрузки. Это – ветровые, сейсмические, взрывные нагрузки – весьма опасны.

Силы инерции и силы сопротивления движению.

При динамическом нагружении деформации сооружения зависят не только от уровня внешних воздействий, но и от уровня возникающих сил инерции, которые противоположны по направлению ускорению a массы m и определяются по формуле:

$$J = -m \cdot a$$

Закон распределения сил инерции зависит от расположения масс в расчетной схеме. В динамике принято два вида расчетных схем:

1) расчетные схемы с дискретным расположением сосредоточенных (точечных) масс, движение которых характеризуется конечным числом степеней свободы и описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями;

2) расчетные схемы с распределенными массами, движение которых характеризуется функциями времени и пространственных координат (бесконечное число степеней свободы) и описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Для анализа колебаний деформируемых систем в основном применяются расчетные схемы с дискретным расположением масс. В таких расчетных схемах все элементы сооружения считаются невесомыми, а их массу заменяют сосредоточенными массами, расположенными в узловых точках. В этом случае выражение для сил инерции получается наиболее простым.

Для одной сосредоточенной массы сила инерции определяется по формуле:

$$J = -m \cdot a = -m \cdot \frac{d^2 Z}{dt^2},$$

где Z – перемещение массы.

Для нескольких масс:

$$J = -M \cdot \frac{d^2 Z}{dt^2} = -M \cdot \ddot{Z},$$

где J – вектор обобщенных сил инерции;

M – матрица сосредоточенных масс;

\ddot{Z} – вектор ускорений масс.

Кроме динамических нагрузок и сил инерции на характер колебаний деформируемой системы существенное влияние оказывают силы сопротивления движению.

В динамике дискретных систем полагается, что силы сопротивления движению $\Phi(t)$ пропорциональны и противоположны скоростям перемещений узлов:

$$\Phi(t) = -H \cdot \frac{dZ}{dt} = -H \cdot \dot{Z},$$

где H – матрица коэффициентов сопротивления.

$$H = k_1 \cdot M + k_2 \cdot R \quad (1)$$

где R – матрица внешней жесткости деформируемой системы;

k_1, k_2 – коэффициенты пропорциональности.

В формуле (1) первое слагаемое учитывает внешнее сопротивление колебаниям, второе слагаемое – внутреннее.

Т.о., в процессе динамической деформации на узлы колеблющейся дискретной системы действуют суммарные внешние динамические силы P_D , равные сумме заданных динамических нагрузок $P(t)$, вызванных ими сил инерции $J(t)$, и сил сопротивления движению $\Phi(t)$:

$$P_D = P(t) + J(t) + \Phi(t) = P(t) - M \ddot{Z} - H \cdot \dot{Z}$$

Понятие о степенях свободы динамической системы.

Под степенью свободы в динамике сооружений понимается направление возможного независимого перемещения отдельной массы. В отличие от понятия степени свободы в кинематическом анализе, при определении динамических степеней свободы учитываются и деформации элементов.

Число динамических степеней свободы ($W_{\text{дин}}$) – это наименьшее число параметров, необходимых для определения положения всех масс системы.

Если рассматривать сооружение как систему из бесконечного числа элементарных масс, получим систему с бесконечным числом динамических степеней свободы. Поэтому в динамике сооружений расчетная модель выбирается в виде системы с сосредоточенными массами.

Массу сооружения обычно сосредотачивают в характерных точках, где действуют наибольшие нагрузки. Если положение таких точек установить трудно, места и величины сосредоточенных масс могут быть найдены из условия равенства энергий всей системы и ее дискретной модели. Сосредоточенные массы, определяемые таким способом, называются приведенными массами. Большие массы, сосредоточенные на сооружении (грузы, различные машины, станки, оборудование и др.) рассматриваются как кусковые массы.

Приведенные и кусковые массы плоской системы имеют три степени свободы: они могут совершать колебания в двух независимых взаимно-перпендикулярных направлениях и вращаться относительно центра массы. Если вращение (крутильное колебание) массы не учитывать, получим точечную массу, число степеней свободы которой соответственно равно двум.

Примеры:

1. Шарнирно-опертая балка (рис. 2 а) состоит из бесконечного числа элементарных масс dm , положение которых определяют бесконечное число перемещений $y(x)$. Поэтому $W_{\text{дин}} = \infty$. Если же массу балки сосредоточить в одной точке, положение точечной массы m будет определять один параметр – перемещение y_m (рис. 2 б), тогда $W_{\text{дин}} = 1$. Если массу балки сосредоточить в трех точках, то положение масс m_1, m_2, m_3 будут определять три параметра y_1, y_2, y_3 (рис. 2 в), поэтому у этой системы $W_{\text{дин}} = 3$.

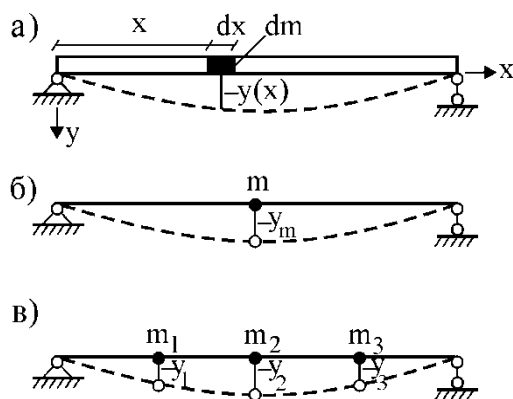


Рис. 2

2. Водонапорная башня (рис. 3 а) и одноэтажная рама (рис. 3 в). У них основные массы расположены наверху. Поэтому их можно рассматривать как колебательные системы с одной массой и одной степенью свободы, т.е. принять $W_{дин} = 1$ (рис. 3 б, г).

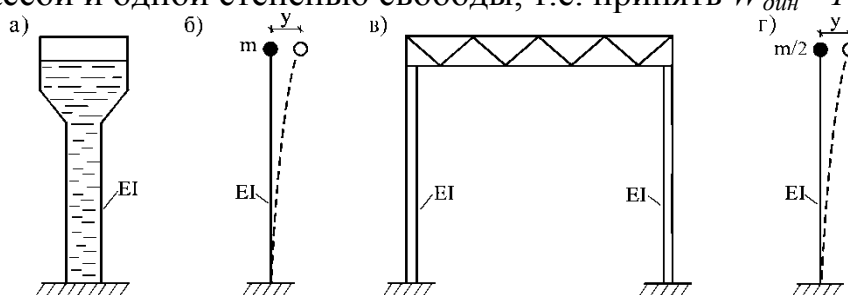


Рис. 3

3. Дымовую трубу с распределенной массой (рис. 4 а) нельзя рассматривать как динамическую систему только с одной степенью свободы, так как это приводит к неточным результатам. Ее следует рассматривать как систему с достаточно большим числом степеней свободы (рис. 4 б) и принять $W_{дин} = n$.

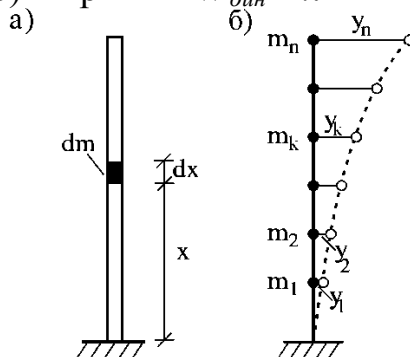


Рис. 4

Основные виды и характеристики колебаний.

В колебательной системе происходит периодический переход одного вида энергии в другой, когда потенциальная энергия (энергия, зависящая от положения системы) переходит в кинетическую энергию (энергию движения) и наоборот.

Наглядное представление колебательного процесса можно получить, если построить график колебаний отдельной массы в координатах t (время) и y (перемещение).

Если в колебательную систему будет поступать внешняя энергия, колебания будут нарастающими (рис. 5 а). Если к консервативной системе внешняя энергия не поступает, колебания будут незатухающими (рис. 5 б). Если в диссипативной системе внешняя энергия не только не поступает, но и уменьшается (например, за счет трения), колебания будут затухающими (рис. 5 в).

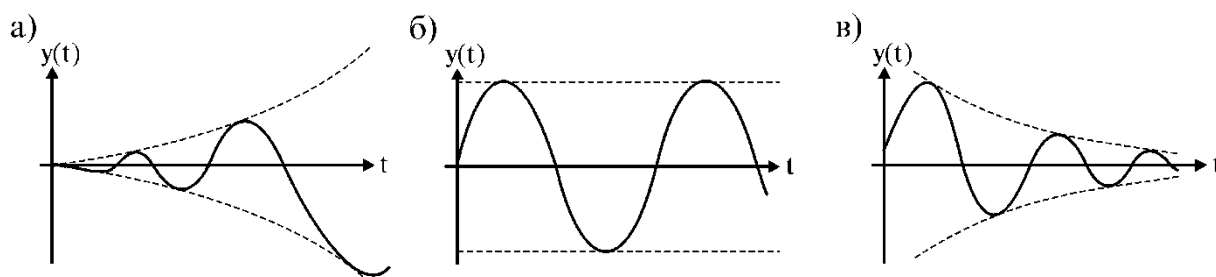


Рис. 5

Важной характеристикой колебательного процесса является форма колебаний. Форма колебаний – это кривая, показывающая положение точек колебательной системы относительно положения равновесия в фиксированный момент времени.

Колебания, происходящие при отсутствии внешней нагрузки, называются свободными колебаниями. Свободные колебания диссипативной системы являются затухающими, потому что ее полная энергия убывает. Энергия консервативной системы остается постоянной, и ее свободные колебания будут незатухающими. Свободные колебания консервативных систем называются собственными колебаниями.

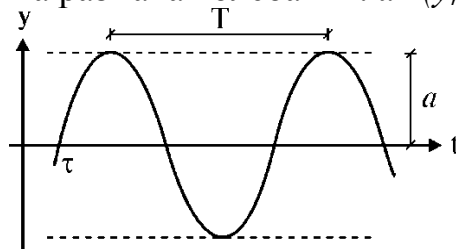
Периодические колебания – это колебания, удовлетворяющие условию:

$$y(t) = y(t+T).$$

Характеристики периодических колебаний:

Период колебаний (T) – т.е. время одного колебания.

Амплитуда (a) – это половина размаха колебания: $a = (y_{max} + y_{min})/2$,



Круговая частота (ω) – число колебаний за 2π секунды,

Техническая частота (f) – число колебаний за одну секунду.

Круговая и технические частоты и период колебаний взаимосвязаны:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{Гц}), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\text{рад/с}).$$

Гармонические колебания – это колебания, изменяющиеся по закону:

$$y(t) = a \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{или} \quad y(t) = a \cos(\omega t + \varphi).$$

где $\omega t + \varphi$ – фаза колебаний,

φ – начальная фаза.

Вынужденные колебания – возникают под воздействием внешних сил.

Вибрация – это вынужденные колебания, происходящие с относительно малой амплитудой и большой частотой.

Дифференциальное уравнение движения.

Рассмотрим движение системы с одной степенью свободы: поперечные колебания невесомой балки с сосредоточенной массой m в середине пролета, нагруженной в этой точке динамической нагрузкой $P(t)$, изменяющейся во времени (рис. 6).

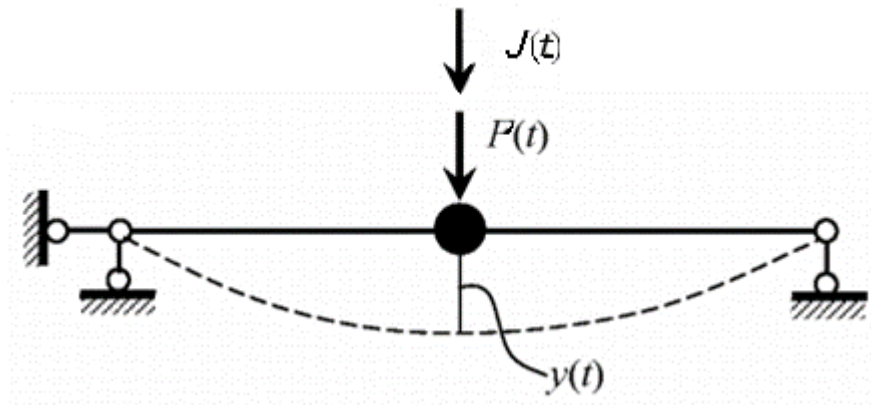


Рис. 6

В процессе движения по действием динамической нагрузки балка в некоторый момент времени t сместится по вертикали на величину $y(t)$. Это перемещение вызвано действием динамической нагрузки $P(t)$ и силы инерции $J(t)$, соответствующих рассматриваемому моменту времени t .

Определяем перемещение $y(t)$ по формуле Мора:

$$y(t) = \Delta_{IP} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_P}{EI} dx \quad (2)$$

где M_1 – изгибающие моменты в балке от вертикальной единичной силы, в направлении которой определяется перемещение;

M_P – изгибающие моменты в балке от совместного действия динамической силы $P(t)$ и силы инерции $J(t)$.

$$M_P = M_1 \cdot (P(t) + J(t))$$

Подставим эти выражения в формулу (2):

$$y(t) = \delta_{11} \cdot (P(t) + J(t))$$

где $\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx$ – податливость системы.

$$y = \delta \cdot (P(t) - m \cdot \ddot{y})$$

$$\delta \cdot m \cdot \ddot{y} + y = \delta \cdot P(t) \quad (3)$$

$$m \cdot \ddot{y} + r \cdot y = P(t) \quad (4)$$

где $r = \frac{1}{\delta}$ – жесткость системы.

Уравнение (3) – уравнение движения в обратной форме.

Уравнение (4) – уравнение движения в прямой форме.

Колебания систем с одной степенью свободы.

Изучим колебания балки (рис. 7 а) с точечной массой m под действием динамической нагрузки $P = P(t)$. При учете только изгибных деформаций такую балку можно рассматривать как колебательную систему с одной динамической степенью свободы.

Уравнение колебаний массы определяется из условия динамического равновесия сил, действующих на нее (уравнение движения) (рис. 7 б):

$$J + R + R^* - P = 0, \quad (5)$$

где $J = m\ddot{y}$ – инерционная сила; R – сила упругости балки; R^* – сила сопротивления среды движению массы.

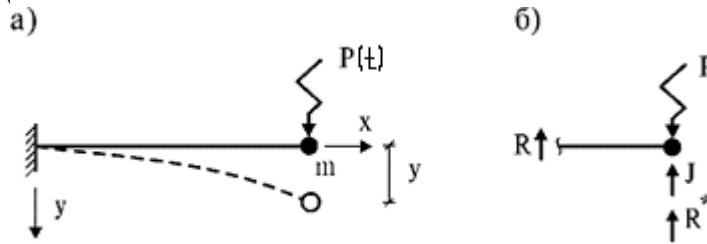


Рис. 7

Преобразуем уравнение (5) по аналогии с (4):

$$m \ddot{y} + ry + R^* = P.$$

Если уравнение поделить на m и с учетом того, что $r = \frac{1}{\delta}$ ввести обозначение $\frac{1}{m\delta} = \omega^2$, получим уравнение колебаний системы с одной степенью свободы в форме метода сил:

$$\ddot{y} + \omega^2 y + \frac{R^*}{m} = \frac{P}{m}. \quad (6)$$

Собственные колебания систем с одной степенью свободы.

Собственные колебания возникнут при $P=0$, $R^*=0$. В таком случае уравнение колебаний (6) примет вид

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$

Его общее решение будет:

$$y = A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$

Если сделать замены $A = a \cos \varphi$, $B = a \sin \varphi$, получим

$$y = a \sin(\omega t + \varphi).$$

Таким образом, собственные колебания являются гармоническими.

Определим их начальную фазу φ и амплитуду a . Пусть при $t=0$ известны начальное отклонение y_0 и начальная скорость v_0 . Тогда

$$y_0 = a \sin \varphi,$$

$$v_0 = \dot{y}(0) = a \cdot \omega \cdot \cos \varphi$$

Из них имеем $\frac{y_0}{v_0} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\omega}$ и $\frac{v_0}{\omega} = a \cos \varphi$.

Поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega y_0}{v_0}, \quad y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2 = a^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = a^2.$$

Следовательно,

$$\varphi = \arctg \frac{u_0 y_0}{v_0}, \quad a = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Если вес массы равен G , а ускорение свободного падения g , то $G=mg$. К тому же, вес G вызывает статический прогиб, определяемый по формуле $y_{cm}=G \cdot \delta$. Поэтому имеем с учетом того, что круговая частота $\omega = \sqrt{\frac{l}{m\delta}}$:

$$\omega^2 = \frac{l}{m\delta} = \frac{g \cdot l}{g \cdot m\delta} = \frac{g}{G\delta} = \frac{g}{y_{cm}}.$$

Из полученных формул вытекают следующие выводы:

- 1) начальная фаза и амплитуда зависят от начальных условий;
- 2) частота и период собственных колебаний системы не зависят от начальных условий;
- 3) при увеличении жесткости системы частота собственных колебаний возрастает, а при увеличении массы – уменьшается.

Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы.

Если при действии динамической нагрузки $P=P(t)$ не учитывать силы сопротивления, то получим дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P}{m}.$$

Общее решение этого уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнений:

$$y = y_{од} + y_ч, \quad (7)$$

где $y_{од}$ совпадает с решением уравнения собственных колебаний, а частное решение зависит от вида динамической нагрузки. Последнее будем искать разложением нагрузки на сумму мгновенных импульсов.

1) Действие мгновенного импульса.

Пусть на находящуюся в покое систему с массой m в момент времени τ (тау) воздействует мгновенный импульс $S=mv$.

После этого система начнет свободно колебаться. Если не учитывать силы сопротивления среды, колебания будут гармоническими:

$$y_ч = a \sin(\omega t + \varphi).$$

В момент воздействия мгновенного импульса масса еще не успевает изменить свое положение, однако импульс сообщает ему некоторую скорость. Поэтому $y_{\tau=t} = 0$, $v_{\tau=t} = S/m$. По этим условиям определяются начальная фаза и амплитуда колебаний:

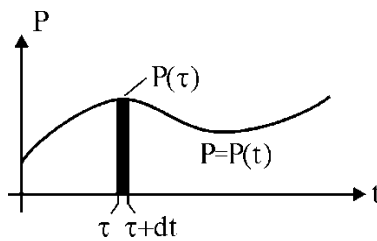
$$\varphi = -\omega\tau, \quad a = S/m\omega.$$

Таким образом, воздействие мгновенного импульса приводит к колебанию массы по гармоническому закону

$$y_ч = \frac{S}{m\omega} \sin \omega(t - \tau)$$

2) Действие произвольной силы.

Если на систему действует нагрузка изменяющаяся по закону $P(t)$, ее можно рассматривать как сумму бесконечно большого числа мгновенных импульсов $S = P(\tau)d\tau$.



$$y_u = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(t) \sin \omega(t - \tau) dt.$$

Это выражение называется интегралом Дюамеля

3) Действие вибрационной нагрузки.

При действии вибрационной силы $P(t) = P_0 \sin \theta t$ имеем

$$y_u = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P_0 \sin \theta \phi \sin \omega(t - \phi) d\phi.$$

После его интегрирования общее решение уравнения (3) будет

$$y = y_{од} + y_u = y_{cob} + \frac{P_0}{m\omega(\theta^2 - \omega^2)} (\theta \sin \omega t - \omega \sin \theta t).$$

Первое слагаемое правой части этого выражения y_{cob} и слагаемое в скобках $\omega \sin \omega t$ относятся к собственным колебаниям с частотой ω . Из-за наличия демпфирования эти колебания достаточно быстро затухают. Поэтому в общем решении можно оставить только второе слагаемое из выражения в скобках.

$$y = \frac{P_0 \sin \theta t}{m(\omega^2 - \theta^2)}.$$

Так как $\omega^2 = \frac{1}{m\delta}$, то $\frac{1}{m} = \omega^2 \delta$ и $\frac{P_0}{m} = \omega^2 \delta P_0 = \omega^2 y_{cm}$.

$$\text{Поэтому } y = \frac{P_0 \sin \theta t}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{\omega^2 y_{cm} \sin \theta t}{\omega^2 - \theta^2} = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2} y_{cm} \sin \theta t.$$

Из этой формулы следует, что когда $\theta \rightarrow \omega$, то $y \rightarrow \infty$. Такое резкое увеличение перемещений при колебаниях называется резонансом. В действительности перемещения сооружения бесконечно большими быть не могут, т.к. существует демпфирование колебаний за счет внутреннего трения и сопротивления среды. Тем не менее, амплитуды колебаний могут быть значительными, что может привести к разрушению сооружения. Чтобы этого не случилось, стремятся избежать резонанса или близкого к нему состояния.

Определим отношение максимального динамического перемещения к статическому перемещению:

$$M = \frac{y_{дин}^{max}}{y_{cm}} = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2}.$$

Оно называется коэффициентом динамичности (или динамическим коэффициентом). Как следует из формулы, резонанса не будет, если отношение частоты вибрационной силы θ к частоте ω не равняется единице. Учитывая принятые нормы, потребуем, чтобы эти частоты отличались не менее чем на 30%. Для этого должно выполняться условие

$$\left| 1 - \frac{\theta}{\omega} \right| \geq 0,3.$$

Данный критерий позволяет установить так называемую резонансно-опасную зону (на рис. 8 – заштрихованная область).

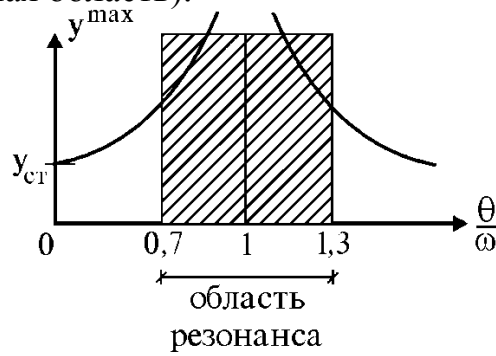


Рис. 8

Колебания систем с n степенями свободы.

Рассмотрим невесомую балку с n точечными массами (рис. 9 а).

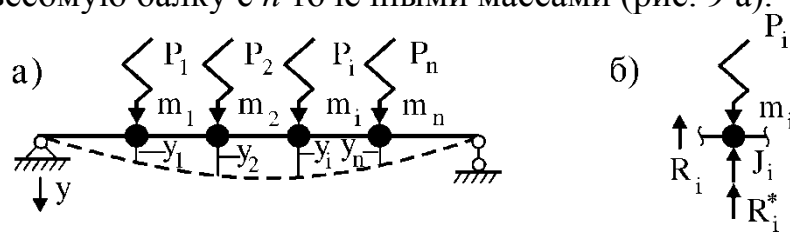


Рис. 9

При изучении только вертикальных колебаний балки ее можно рассматривать как колебательную систему с n динамическими степенями свободы. Если на массы будут действовать динамические силы $P_1=P_1(t), \dots, P_n=P_n(t)$, в них возникнут инерционные силы $J_1=m_1\ddot{y}_1, \dots, J_n=m_n\ddot{y}_n$, а со стороны балки будут действовать силы упругости R_1, \dots, R_n и силы сопротивления R_1^*, \dots, R_n^* .

Из условия равновесия сил (рис. 9 б) получим

$$J_i + R_i + R_i^* - P_i = 0, \text{ где } i = \overline{1, n}.$$

Если силы упругости R_i определить по методу сил и все n уравнений объединить в систему, получим матричное уравнение

$$d\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} + d\mathbf{R}^* = d\mathbf{P},$$

Это уравнение называется уравнением вынужденных колебаний системы со многими степенями свободы в форме метода сил.

По виду оно соответствует уравнению колебаний системы с одной степенью свободы. Однако здесь все обозначения матричные: \mathbf{m} – матрица масс, δ – матрица податливости, $\delta\mathbf{m}=\mathbf{d}$ – динамическая матрица, \mathbf{y} – вектор перемещений, \mathbf{P} – вектор нагрузки, \mathbf{R}^* – вектор сил сопротивления:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ \vdots \\ R_n^* \end{bmatrix}.$$

Тема 17. Устойчивость прямых сжатых стержней.

Виды равновесия. Понятие критической нагрузки.

Кроме прочности и жесткости, сооружение обязательно должно быть устойчивым. Поскольку при потере устойчивости сооружение или разрушается, или становится непригодным для дальнейшей эксплуатации.

Устойчивость – это способность сооружения сохранять свое первоначальное положение или форму.

Переход устойчивого сооружения в неустойчивое состояние называется потерей устойчивости.

Граница перехода в неустойчивое состояние называется критическим состоянием.

Сила, приводящая сооружение в критическое состояние, называется критической силой ($P_{кр}$).

Различают два вида потери устойчивости: устойчивость положения и устойчивость формы.

Устойчивость положения – это способность сооружения сохранять свое положение.

Например, при действии на подпорную стенку нагрузки q (рис. 1), относительно точки A создается опрокидывающий момент $M_{опр} = qh^2 / 2$, от чего подпорная стенка может потерять устойчивость. Этому противостоит собственный вес подпорной стенки G , создающий удерживающий момент $M_{уд} = Gl$. Устойчивость системы зависит от соотношения этих моментов, так как при:

- 1) $M_{опр} < M_{уд}$ – система устойчива;
- 2) $M_{опр} > M_{уд}$ – система неустойчива;
- 3) $M_{опр} = M_{уд}$ – система безразлична.

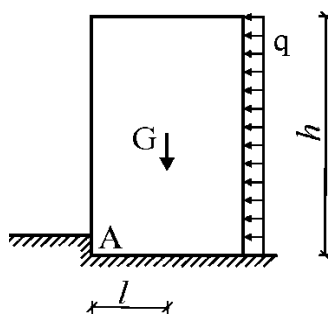


Рис. 1

Устойчивость формы – способность сооружения сохранять свою первоначальную форму.

Например, если верхний конец стержня с действующей продольной силой P немного отклонить в сторону (рис. 2 а), он при $P < P_{кр}$ вернется в исходное положение. Такая система является устойчивой.

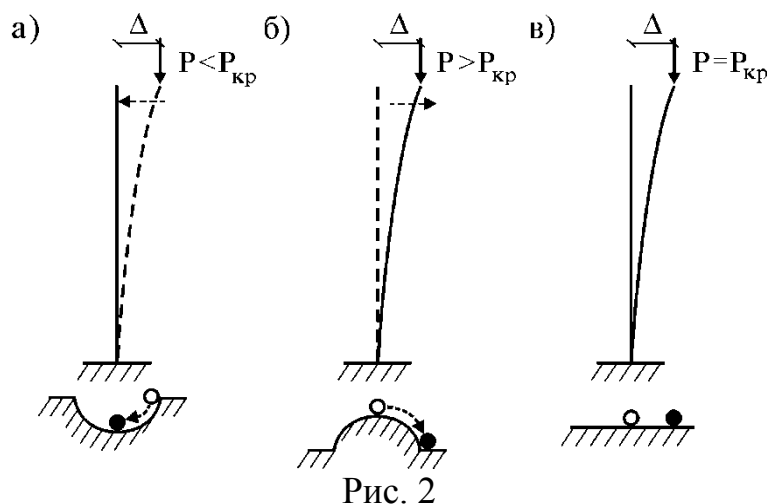


Рис. 2

Если же $P > P_{кр}$, перемещения стержня начинают возрастать (рис.2 б). Такая система в исходное состояние вернуться не может. Поэтому ее называют неустойчивой.

Если $P = P_{кр}$, система остается в безразличном состоянии (рис. 2 в).

Таким образом, в зависимости от величины приложенной нагрузки система может быть устойчивой, неустойчивой или безразличной.

Потеря устойчивости системы.

Потеря устойчивости делится на 2 рода.

Потеря устойчивости первого рода связана с появлением нового вида деформации и характеризуется нарушением равновесия между нагрузкой и внутренними усилиями.

Она бывает трех типов:

- потеря устойчивости центрального сжатия (рис. 3 б);
- потеря устойчивости симметричной формы деформации (рис. 13 а, б);
- потеря устойчивости плоской деформации (рис. 3 в).

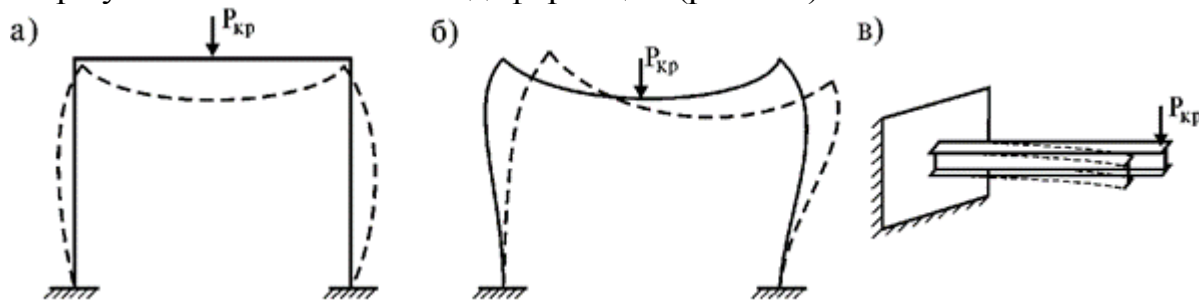
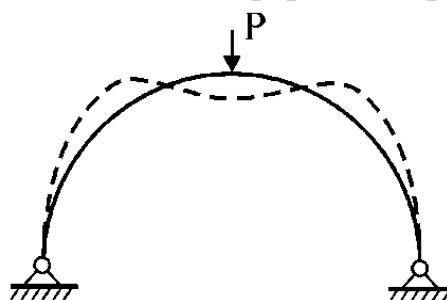


Рис. 3

Потеря устойчивости второго рода наблюдается при потере несущей способности всего сооружения и характеризуется резким возрастанием предыдущих деформаций. В этом случае равновесие между нагрузкой и внутренними усилиями нарушается даже без появления новых видов деформаций (рис. 4):



Основные методы исследования устойчивости упругих систем.

Основной задачей теории устойчивости является определение критической силы $P_{кр}$. Т.к. потерявшее устойчивость сооружение обычно непригодно для дальнейшей эксплуатации, определять форму потери устойчивости сооружения во многих случаях не требуется.

Если на систему действует несколько сил (рис. 5 а), определять их критические значения одновременно довольно трудно. Поэтому одну из сил (обычно наибольшую) принимают за основную и обозначают P , а остальные выражают через него (рис. 5 б). Тогда вместо определения нескольких критических сил можно определять только одну (наибольшую).

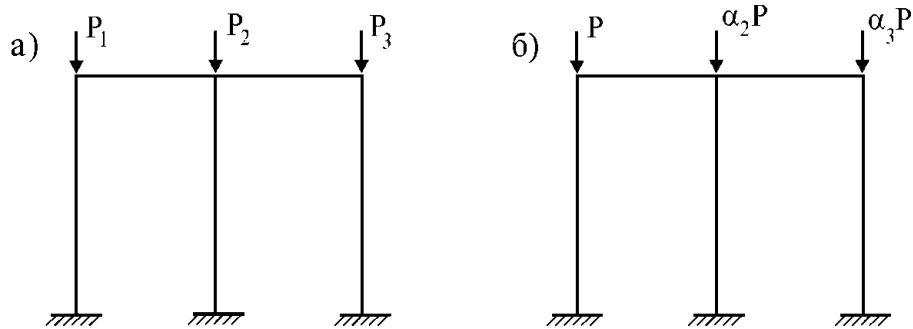


Рис. 5

Расчет на устойчивость можно вести тремя методами: статическим, энергетическим и динамическим.

Статический метод основан на составлении уравнений статики и базируется на критерии Эйлера: критической силой является наименьшая сила, способная вызвать потерю устойчивости сооружения.

Исследуемой системе задается отклоненная форма равновесия, совпадающая по характеру перемещений с ожидаемой новой формой равновесного состояния системы после потери устойчивости системы, и определяются значения рассматриваемых внешних нагрузок, способных удержать систему в новой форме равновесного состояния, которые и являются критическими.

Алгоритм статического метода:

- задать системе малые перемещения;
- составить уравнения равновесия внешних и внутренних сил;
- из этих уравнений определить критическую силу.

Энергетический метод основан на принципе Лагранжа-Дирихле, согласно которому, если система находится в состоянии устойчивого равновесия, ее полная потенциальная энергия обладает минимумом по сравнению со всеми соседними состояниями системы; если в состоянии неустойчивого равновесия — то максимумом; а если в безразличном, т.е. критическом — то потенциальная энергия является постоянной величиной.

Изменение полной потенциальной энергии системы dU при переходе ее от рассматриваемого состояния равно:

$$dU = dV - dT.$$

где dV — вариация потенциальной энергии внутренних сил;

dT — вариация потенциальной энергии внешних сил.

Следовательно, критическое состояние системы, согласно энергетическому критерию, определяется из условия: $dU=0$ или $dV=dT$, т.е. критической является сила,

при которой приращение работы внешних сил равно приращению работы внутренних сил.

Алгоритм энергического метода:

- задать системе малые перемещения;
- определить приращения работ внешних и внутренних сил;
- из условия их равенства определить критическую силу.

Динамический метод основан на изучении колебаний системы и базируется на динамическом критерии: критической является сила, при которой частота собственных колебаний системы равняется нулю. Т.е., при решении задач устойчивости по динамическому критерию исходят из предположения, что колеблющаяся система около своего положения равновесия не способна возвращаться к первоначальному положению. Это равносильно тому, что в критическом состоянии спектр собственных частот рассматриваемой системы стремится к нулю. Следовательно, при решении задач по динамическому критерию составляется уравнение собственных колебаний заданной системы, далее определяется выражение частот собственных колебаний, и из условия их равенства нулю определяется критическое значение внешних сил.

Алгоритм динамического метода:

- задать системе малые перемещения;
- записать уравнение движения системы;
- из условия равенства нулю частоты собственных колебаний системы определить критическую силу.

Устойчивость прямых сжатых стержней.

Под устойчивостью стержня при действии сжимающей силы понимают его способность сохранять первоначальную прямолинейную форму.

Потеря устойчивости прямолинейной формы под действием осевой сжимающей силы называется продольным изгибом.

Рассмотрим центрально сжатый стержень постоянного поперечного сечения, находящийся в прямолинейном исходном деформированном состоянии равновесия (рис. 6).

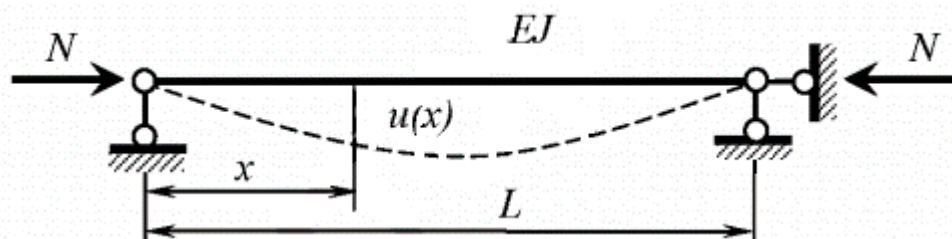


Рис. 6

Потеря устойчивости сжатого прямолинейного стержня будет сопровождаться его изгибом. Составим уравнение статического деформирования сжатого прямолинейного стержня при его переходе в отклоненное деформированное состояние. Переход обусловлен малыми вертикальными перемещениями $u(x)$ за счет изгибных деформаций.

Для определения упругой линии искривленного стержня используем дифференциальное уравнение изгиба балки:

$$EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + M(x) = 0,$$

где $M(x)$ – изгибающие моменты в сечениях x изогнутого стержня.

Значение изгибающего момента в сечении с абсциссой x определяется по формуле:

$$M(x) = N \cdot u(x)$$

Соответственно:

$$EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + N \cdot u(x) = 0 \quad (1)$$

Уравнение (1) называют дифференциальным уравнением продольного изгиба сжатого стержня.

В зависимости от определенных, критических значений продольной сжимающей силы N уравнение продольного изгиба может иметь ненулевые решения, соответствующие критическим состояниям сжатого стержня.

Критические значения сжимающей силы зависят от длины стержня L , его изгибной жесткости EI и от опорных устройств стержня, определяющих граничные условия. Для определения критических значений сжимающей силы для стержней при разных условиях опирания уравнение (1) дифференцируют дважды и получают дифференциальное уравнение продольного изгиба четвертого порядка:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + N \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

Ненулевое решение уравнения (2):

$$u(x) = C_1 \cdot \sin kx + C_2 \cdot \cos kx + C_3 \cdot x + C_4, \quad (3)$$

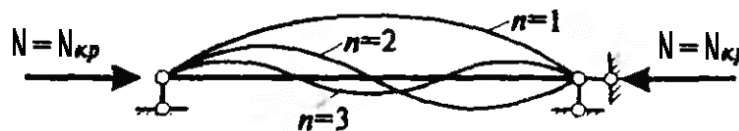
$$\text{где } k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

Постоянные интегрирования, входящие в уравнение (3) определяются в зависимости от условий опирания сжатых стержней.

Критическая сила для балки на рисунке 6 (исходя из условий опирания) определяется по формуле

$$N_{\text{крит}} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot EI}{L^2}$$

Графики функции при различных значениях n (обозначает форму потери устойчивости стержня) приведены на рисунке:



При выполнении практических расчетов, как правило, определяется критическое значение внешней силы, соответствующее низшей форме потери устойчивости системы.

Наименьшая критическая сила получается при $n=1$ и называется первой критической или эйлеровой силой (для балки на рисунке 6):

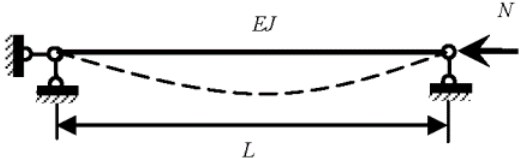
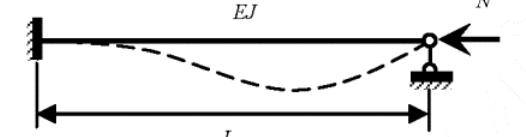
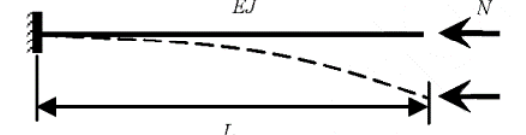
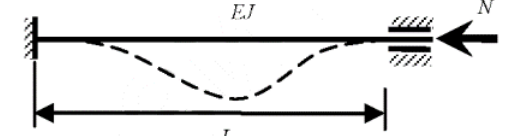
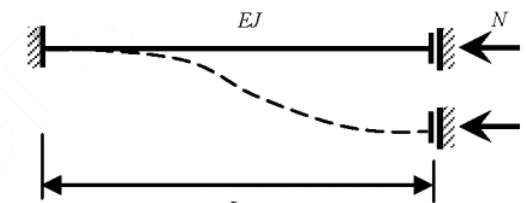
$$N_{\text{крит}} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2}$$

С учетом различных условий опирания стержней:

$$N_{\text{крит}} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{\mu^2 \cdot L^2}$$

При значениях продольной сжимающей силы меньше критического значения ($N < N_{\text{крит}}$) прямолинейная форма равновесия центрально сжатого стержня является устойчивой.

При значениях продольной сжимающей силы больше критического значения ($N > N_{\text{крит}}$) прямолинейная форма равновесия центрально сжатого стержня является неустойчивой.

№ пп	Схема стержня и форма потери устойчивости	Критическая продольная сила
1		$N^{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$
2		$N^{cr} = \frac{20,19 EJ}{L^2}$
3		$N^{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4L^2}$
4		$N^{cr} = \frac{4\pi^2 EJ}{L^2}$
5		$N^{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$

Тема 18. Особые случаи устойчивости стержней.

Исследование устойчивости прямых сжатых стержней в случае переменного поперечного сечения при переменных по длине стержня продольных силах (рис. 1 а) может быть выполнено на основании исследования ненулевых решений дифференциального уравнения изгиба (2):

$$\left[EI(x) \cdot y''(x) \right]'' + \left[N(x) \cdot y'(x) \right]' = 0$$

Решение данного уравнения с переменными коэффициентами возможно только с применением численных методов, т.е. ЭВМ.

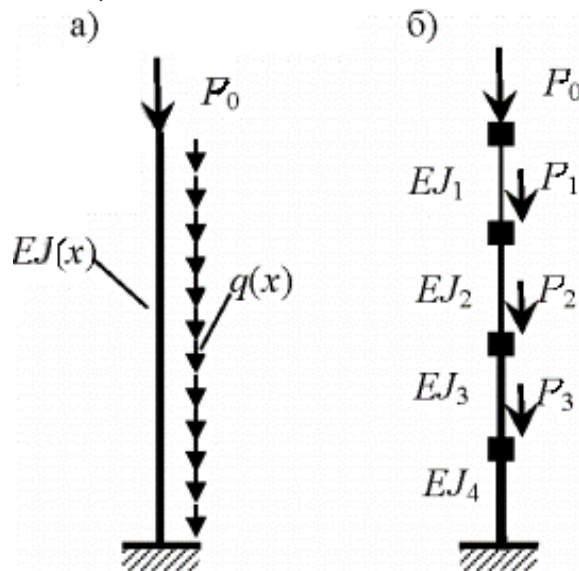


Рис. 1

Исследование устойчивости данных стержней сводят к исследованию устойчивости стержней кусочно-постоянного поперечного сечения с сосредоточенными сжимающими силами, приложенными в узлах на границе участков с разными жесткостными параметрами (рис. 1 б). После такой замены прямой сжатый стержень представляет собой прямолинейную многоэлементную консольную балку.

Стержень с заделкой на одном конце и упругой опорой на другом (пружиной) (рис. 2 а) рассматривается как двухстержневая система: пружина заменяется стержнем эквивалентной жесткости. Стержень с двумя упругими опорами (рис. 2 б) аналогично как шарнирно-стержневая система из трех элементов.

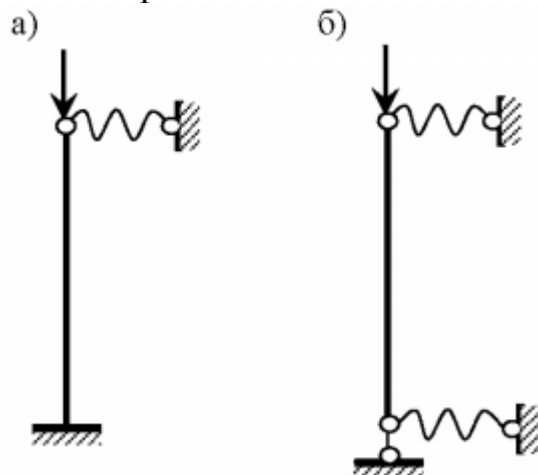


Рис. 2

Решетчатый составной сжатый стержень (рис 3) можно рассматривать или как ферму с шарнирными узлами или как раму с жесткими узлами.

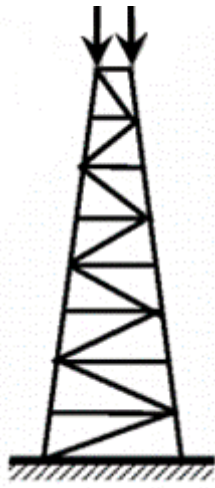


Рис. 3

Тема 19. Метод перемещений в исследовании устойчивости рамных систем.

В настоящее время расчет на устойчивость любых деформируемых систем проводится в основном методом перемещений с помощью ЭВМ. В основе метода перемещений при расчете стержневых систем на устойчивость лежит дифференциальное уравнение изгиба сжатого прямолинейного стержня постоянного сечения.

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + N \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

Предварительно необходимо выполнить статический расчет сооружения, целью которого является определение перемещений узлов сооружения и внутренних сил в его элементах. Первостепенное значение в расчетах на устойчивость принимают продольные сжимающие силы, понижающие в деформированном состоянии жесткость сооружения (изгибающими моментами, поперечными силами и растягивающими продольными силами пренебрегают).

Расчетная схема стержневой системы в деформированном состоянии для расчета на устойчивость представляется в виде дискретной модели, состоящей из жестких или шарнирных узлов, соединенных прямолинейными стержнями постоянного поперечного сечения с постоянными по их длине продольными силами.

Внешние нагрузки исходного состояния, вызвавшие продольные силы, в дальнейшем расчете не участвуют.

Основная система и основные неизвестные метода перемещений выбираются в обычном порядке. Т.к., дополнительные узловые нагрузки при исследовании устойчивости полагаются нулевыми, то канонические уравнения метода перемещений принимают вид:

$$R(N) \cdot Z = 0,$$

где R – матрица мгновенной жесткости, элементы которой, реакции r_{ik} во введенных дополнительных связях, зависят от продольных сил в стержнях системы.

Расчет элементов матрицы мгновенной жесткости осуществляется как и в методе перемещений. Основная особенность метода перемещений в расчетах на устойчивость состоит в том, что в сжатых стержнях эпюры изгибающих моментов от единичных перемещений получаются криволинейными за счет дополнительного изгибающего действия продольных сил. А выражения для вычисления реакций в опорах сжатых стержней содержат поправочные множители в виде специальных функций от безразмерных параметров ν . В несжатых стержнях построение единичных эпюр изгибающих моментов и вычисление реакций выполняется в обычном порядке.

$$\nu = L \cdot \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (1)$$

Следовательно, коэффициенты канонических уравнений метода перемещений зависят от безразмерных параметров ν :

$$R(\nu) \cdot Z = 0,$$

т.е.,

$$\begin{cases} Z_1 \cdot r_{11} + Z_2 \cdot r_{12} + \dots + Z_n \cdot r_{1n} = 0 \\ Z_1 \cdot r_{21} + Z_2 \cdot r_{22} + \dots + Z_n \cdot r_{2n} = 0 \\ \dots \\ Z_1 \cdot r_{n1} + Z_2 \cdot r_{n2} + \dots + Z_n \cdot r_{nn} = 0 \end{cases}$$

Критическим состояниям равновесия отвечают ненулевые перемещения узлов деформируемой системы:

$$Z \neq 0$$

Это возможно, если определитель матрицы мгновенной жесткости равен нулю, что и соответствует моменту потери устойчивости:

$$Det[R(v)] = 0,$$

$$Det = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{т.е.} \quad (2)$$

Раскрытие определителя приводит к уравнению, называемому уравнением устойчивости.

Дальнейшее решение задачи состоит в определении значений нагрузок на раму, удовлетворяющих уравнению (2). Наименьшая из них является критической нагрузкой.

Критическое значение сжимающей силы определяется по формуле:

$$P_{кр} = \frac{v^2}{L^2} \cdot EI$$

Критерием глобальной устойчивости сооружения является положительная определенность матрицы мгновенной жесткости деформированной системы:

$$R(v) > 0$$

Алгоритм проверки устойчивости сооружения в деформированном состоянии при заданной нагрузке:

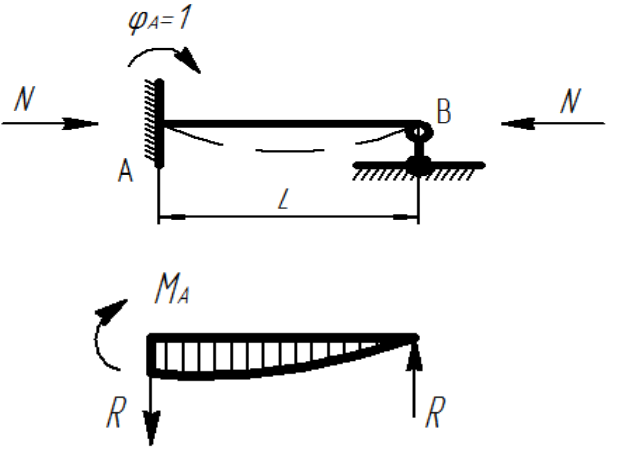
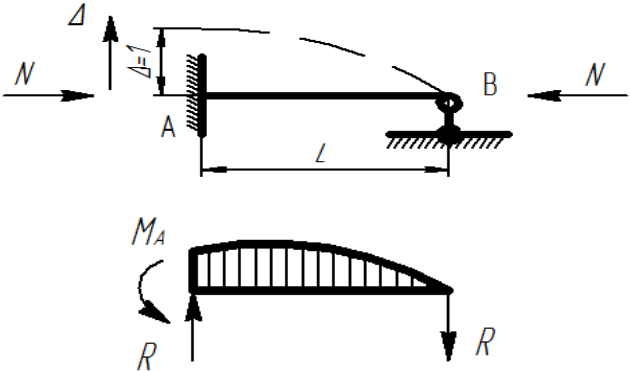
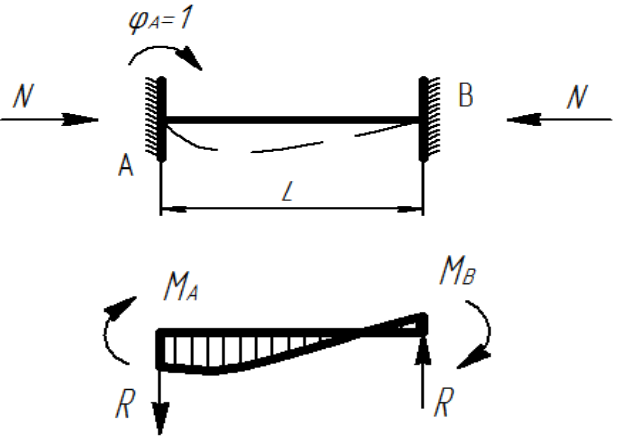
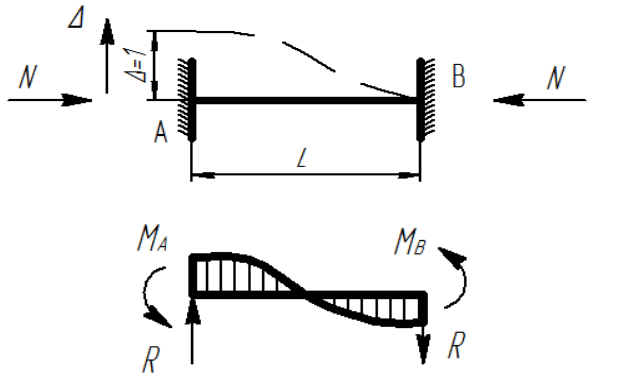
1) Вычисляем внутренние силы в элементах сооружения при заданной внешней нагрузке;

2) Проверяем местную устойчивость всех элементов основной системы метода перемещений (в недеформированном состоянии) по формулам Эйлера;

3) Если устойчивость основной системы метода перемещений обеспечена, то необходимо составить матрицу мгновенной жесткости всего сооружения в деформированном состоянии с учетом найденных внутренних сил. Все главные диагональные элементы матрицы должны быть положительными.

4) Если главные диагональные элементы матрицы положительны, то выполняется разложение матрицы мгновенной жесткости на множители. Все главные диагональные элементы множителей должны быть положительными. Если все главные диагональные элементы положительны и среди них нет близких к нулю, то при заданной нагрузке сооружение устойчиво.

Если среди диагональных элементов есть близкие к нулю значения, то данный уровень нагрузки близок к критическому. Если есть нулевой элемент, то равновесие является критическим. Если хоть один элемент отрицательный, то равновесие при данном уровне внешней нагрузки неустойчиво.

№ п/п	Расчетная схема, эпюра моментов, реакции	Формулы
		$i = \frac{EI}{L}; v = L \cdot \sqrt{\frac{N}{EI}}.$
1		$M = 3 \cdot i \cdot \varphi_1(v);$ $R = \frac{3 \cdot i}{L} \cdot \varphi_1(v).$
2		$M = \frac{3 \cdot i}{L} \cdot \varphi_1(v);$ $R = \frac{3 \cdot i}{L^2} \cdot \eta_1(v).$
3		$M_A = 4 \cdot i \cdot \varphi_2(v);$ $M_B = 2 \cdot i \cdot \varphi_3(v);$ $R = \frac{6 \cdot i}{L} \cdot \varphi_4(v).$
4		$M = \frac{6 \cdot i}{L} \cdot \varphi_4(v);$ $R = \frac{12 \cdot i}{L^2} \cdot \eta_2(v).$

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
1	2	3	4	5	6	7
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,9973	0,9980	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,4	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,6	0,9856	0,9881	1,0061	0,9941	0,8557	0,9641
0,8	0,9566	0,9787	1,0111	0,9895	0,7432	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8789
1,2	0,8998	0,9511	1,0251	0,9751	0,4198	0,8557
1,3	0,8814	0,9124	1,0298	0,9715	0,3181	0,8307
1,4	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,4	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,5	0,8393	0,9226	1,0403	0,9619	0,0893	0,7743
1,6	0,8153	0,9116	1,0463	0,9565	-0,0380	0,7432
1,7	0,7891	0,8998	1,0529	0,9509	-0,1742	0,7100
1,8	0,7609	0,8871	1,0600	0,9448	-0,3191	0,6747
1,9	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
2,0	0,6961	0,8590	1,0761	0,9313	-0,6372	0,5980
2,1	0,6597	0,8437	1,0859	0,9240	-0,8103	0,5565
2,2	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,3	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,4	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3895	0,4198
2,5	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,6	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,7	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,8	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,9	0,2195	0,6819	1,1878	0,8505	-2,5838	0,1498
3,0	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,1	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0207
3,2	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4768	-0,0380
3,3	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,4	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1742
3,5	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,6	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	-5,0062	-0,3191
3,7	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	-5,4903	-0,3951
3,8	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,9	-1,6269	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
4	-2,1726	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4,1	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5835	-0,7225
4,2	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4,3	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4,4	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-27,781	-0,9931
4,5	227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	-1,0884
4,6	14,669	-0,0808	1,8933	0,5772	7,6160	-1,1861
4,7	7,8185	-0,1646	1,9919	0,5543	0,4553	-1,2865
4,8	5,4020	-0,2572	2,1056	0,5304	-2,2777	-1,3895
4,9	4,1463	-0,3612	2,2377	0,5054	-3,8570	-1,4954
5	3,3615	-0,4772	2,3924	0,4793	-4,9718	-1,6040
5,1	2,8130	-0,6100	2,5757	0,4520	-5,8570	-1,7155
5,2	2,3986	-0,7630	2,7961	0,4234	-6,6147	-1,8299
5,3	2,0668	-0,9423	3,0648	0,3935	-7,2965	-1,9473
5,4	1,7884	-1,1563	3,3989	0,3621	-7,9316	-2,0679
5,5	1,5455	-1,4181	3,8234	0,3291	-8,5379	-2,1917
5,6	1,3265	-1,7481	4,3794	0,2944	-9,1268	-2,3189
5,7	1,1235	-2,1804	5,1346	0,2580	-9,7056	-2,4495
5,8	0,9302	-2,7777	6,2140	0,2193	-10,283	-2,5838
5,9	0,7421	-3,6678	7,8726	0,1790	-10,863	-2,7218
6	0,5551	-5,1589	10,727	0,1361	-11,445	-2,8639
6,1	0,3659	-8,2355	16,739	0,0906	-12,038	-3,0102
6,2	0,1700	-18,591	37,308	0,0424	-12,643	-3,1609
2 π	0,0000	$-\infty$	$+\infty$	0,0000	-13,0,33	-3,2898

