

Министерство образования Российской Федерации  
Архангельский государственный технический университет

# РАСЧЕТ РАМ НА ПРОЧНОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Методические указания к выполнению контрольных заданий  
по строительной механике и примеры расчета  
конструкций методом перемещений  
для студентов строительных специальностей



Архангельск 2003

Рассмотрены и рекомендованы к изданию  
методической комиссией строительного факультета  
Архангельского государственного технического университета  
24 октября 2002 г.

Составители:

А.Ю. Коновалов, канд. техн. наук, доц.;  
О.М. Заборская, ассист.

Рецензенты:

А.М. Кулижников, д-р техн. наук, проф.;  
З.А. Волкова, канд. техн. наук, доц.

УДК 624.04

*Коновалов А.Ю., Заборская О.М.* Расчет рам на прочность методом перемещений: Методические указания к выполнению контрольных заданий по строительной механике и примеры расчета конструкций методом перемещений для студентов строительных специальностей. – Архангельск: Изд-во АГТУ, 2003. – 36 с.

Подготовлены кафедрой строительной механики и сопротивления материалов.

Рассмотрены основные теоретические положения расчета конструкций методом перемещений при воздействии внешних сил, неравномерного воздействия температур, осадки опор. Приведены варианты контрольных заданий и примеры их выполнения.

Предназначены для студентов строительных специальностей дневной и заочной форм обучения.

Ил. 46. Табл. 3. Библиогр. 3 назв.

© Архангельский государственный  
технический университет, 2003

## **ПОРЯДОК РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Метод перемещений является одним из основных при расчете сложных строительных конструкций. В качестве неизвестных в этом методе принимаются упругие перемещения узлов системы:

- углы поворота жестких узлов;
- линейные смещения жестких узлов или групп узлов.

Общее количество неизвестных в методе перемещений выражает степень кинематической неопределимости заданной системы.

При расчете рам (балок) учитывают только деформации изгиба стержней конструкций, пренебрегая влиянием продольных и поперечных внутренних сил, сближением концов стержней при изгибе.

Расчет кинематически неопределимых плоских рам методом перемещений производится в следующем порядке:

1. Рассчитывают общее количество неизвестных.
2. Принимают основную систему.
3. Составляют канонические уравнения.
4. Строят эпюры реактивных изгибающих моментов в стержнях принятой основной системы от единичных смещений по направлению неизвестных метода перемещений.
5. Строят эпюру изгибающих моментов в стержнях основной системы от всех внешних воздействий.
6. Вычисляют коэффициенты при неизвестных и свободные слагаемые канонических уравнений.
7. Выполняют проверку правильности расчета коэффициентов при неизвестных и свободных слагаемых канонических уравнений.
8. Решают систему линейных алгебраических уравнений и устанавливают истинные смещения узлов конструкции от заданных внешних воздействий.
9. Строят эпюру изгибающих моментов в заданной раме.
10. Выполняют проверку правильности построения эпюры изгибающих моментов способами:
  - а) статическим;
  - б) деформационным.

11. Строят эпюру поперечных сил.
12. Строят эпюру продольных сил.
13. Проверяют правильность решения задачи.

Общее число неизвестных  $n$  в методе перемещений для заданной конструкции определяется как сумма неизвестных углов поворота жестких узлов  $n_y$  и линейных смещений  $n_z$ :

$$n = n_y + n_z. \quad (1)$$

Для определения  $n_y$  следует подсчитать все жесткие узлы конструкции (все жесткие соединения стержней рамы между собой), исключая жесткие соединения с «землей».

Для определения  $n_z$  из заданной конструкции следует получить шарнирно-стержневую систему путем врезания идеальных шарниров во все жесткие узлы, включая опорные жесткие заделки, и произвести анализ на геометрическую изменяемость. Количество степеней свободы полученной шарнирно-стержневой системы может быть подсчитано по формуле

$$S = 3K - Ш \quad (2)$$

или

$$S = 3Д - 2Ш - С, \quad (3)$$

где  $K$  – количество замкнутых контуров;  
 $Д$  – количество дисков;  
 $Ш$  – количество простых шарниров;  
 $С$  – количество опорных связей.

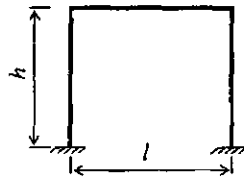
По указанным формулам выявляется необходимое количество дополнительных линейных связей  $n_z$  для закрепления шарнирно-стержневой системы. Направление дополнительных линейных связей устанавливается кинематическим анализом геометрической изменяемости шарнирно-стержневой системы.

Основная система метода перемещений получается из заданной введением специальных дополнительных заделок во все жесткие узлы, исключая опорные, и линейных связей по направлениям, выявленным в результате анализа на геометрическую изменяемость шарнирно-стержневой системы. Дополнительные заделки препятствуют только повороту жестких узлов конструкции и не препятствуют их линейным смещениям.

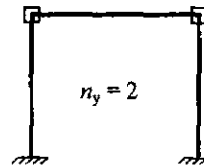
Приведены примеры выбора основных систем метода перемещений для ряда конструкций.

**Пример 1:**

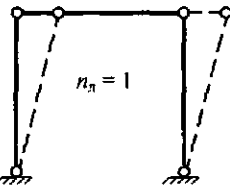
а) заданная система



б) вычисление количества неизвестных углов поворота жестких узлов

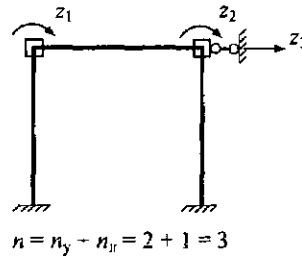


в) вычисление количества неизвестных линейных смещений узлов



$S = 3K - \text{III} = 3 \cdot 1 - 4 = -1$   
Необходимо закрепить ригель от линейного смещения в горизонтальном направлении

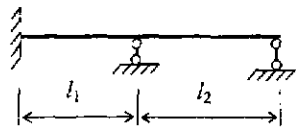
г) основная система



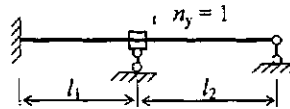
$n = n_y + n_n = 2 + 1 = 3$

**Пример 2:**

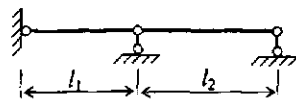
а) заданная система



б) вычисление количества неизвестных углов поворота жестких узлов

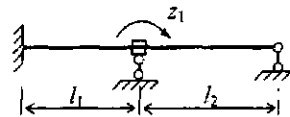


в) вычисление количества неизвестных линейных смещений узлов



$S = 3Д - 2\text{Ш} - С = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 2 = 0$

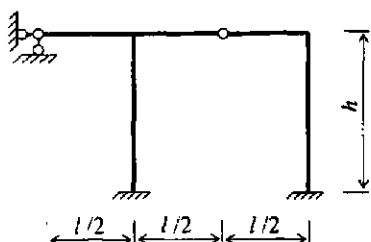
г) основная система



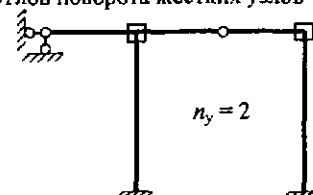
$n = n_y + n_n = 1 + 0 = 1$

Пример 3:

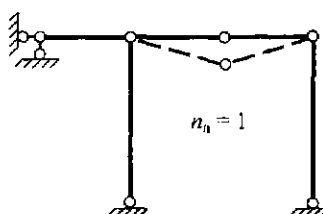
а) заданная система



б) вычисление количества неизвестных углов поворота жестких узлов

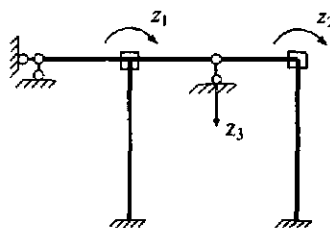


в) вычисление количества неизвестных линейных смещений узлов



$S = 3Д - 2Ш - С = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 2 = 1$   
Необходимо закрепить средний шарнир от смещения по вертикали

г) основная система



$$n = n_y + n_n = 2 + 1 = 3$$

К принятой основной системе метода перемещений прикладываются все заданные внешние воздействия (нагрузки, воздействия температур, осадка опор) и получается эквивалентная система. Для эквивалентной системы записываются канонические уравнения метода перемещений, которые для  $n$  раз кинематически неопределимой конструкции будут иметь вид

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + r_{13}z_3 + \dots + r_{1n}z_n + R_{1F} = 0; \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + r_{23}z_3 + \dots + r_{2n}z_n + R_{2F} = 0; \\ \dots \\ r_{n1}z_1 + r_{n2}z_2 + r_{n3}z_3 + \dots + r_{nn}z_n + R_{nF} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где  $z_i$  – неизвестные перемещения введенных дополнительных связей;  
 $r_{ij}$  – реактивное усилие в дополнительной связи по направлению  $i$  от воздействия единичного смещения  $\bar{z}_j$ ; при расчетах следует учитывать равенство  $r_{ij} = r_{ji}$ ;  
 $R_{iF}$  – реактивное усилие в дополнительной связи  $i$  от воздействия всей внешней нагрузки.

Каждое из уравнений выражает условие отсутствия реактивных усилий в дополнительно введенных связях.

Подсчет коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений возможен двумя способами:

а) энергетическим (перемножением эпюр):

$$r_{ij} = \sum_j \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EJ} d\ell; \quad (5)$$

$$R_{if} = \sum_j \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_f^0}{EJ} d\ell. \quad (6)$$

б) статическим – из условия равновесия отсеченных частей конструкции.

Дальнейший порядок расчета конструкций методом перемещений удобнее рассмотреть на конкретных примерах.

### РАСЧЕТ РАМЫ НА ПРОЧНОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ (ЗАДАЧА 1)

Из условия прочности на изгиб подобрать двутавровое сечение элементов рамы (рис.1), если  $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$ ,  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ ,  $EJ_x = \text{const}$ .

Определяем количество неизвестных углов поворота жестких узлов (рис. 2, а) и линейных смещений узлов (рис. 2. б).

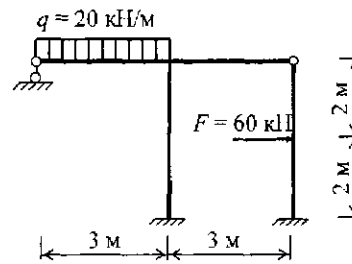
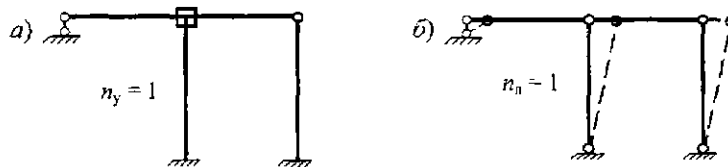


Рис. 1. Заданная система



$$S = 3K - \text{III} = 3 \cdot 2 - 7 = -1$$

Рис. 2. Определение количества неизвестных метода перемещений

Общее количество неизвестных

$$n = n_y + n_z = 1 + 1 = 2.$$

Принимаем основную систему (рис. 3).

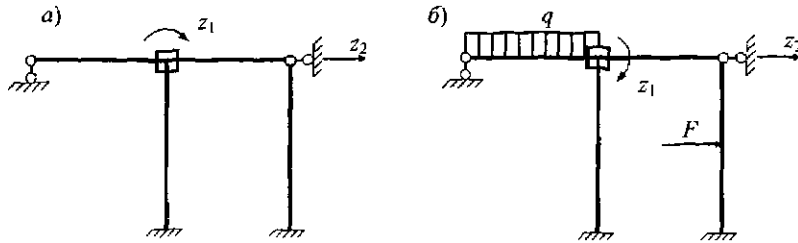


Рис. 3. Системы метода перемещений: а – основная; б – эквивалентная

Канонические уравнения метода перемещений:

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + R_{1F} = 0; \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + R_{2F} = 0. \end{cases}$$

Для определения коэффициентов при неизвестных и свободных слагаемых в канонических уравнениях строятся эпюры реактивных изгибающих моментов от единичных смещений по направлению выбранных неизвестных  $z_1$ ,  $z_2$  и эпюра изгибающих моментов от воздействия внешней нагрузки. Все перечисленные эпюры (рис. 4, 5, 6) строятся в основной системе с использованием таблиц реактивных усилий метода перемещений (см. прил. 1).

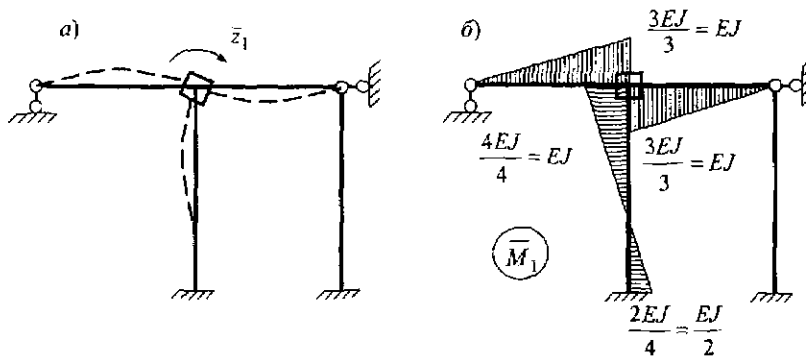


Рис. 4. Построение эпюры  $\bar{M}_1$ : а – схема деформаций элементов рамы при повороте дополнительной заделки на угол  $\bar{z}_1 = 1$ ; б – эпюра  $\bar{M}_1$



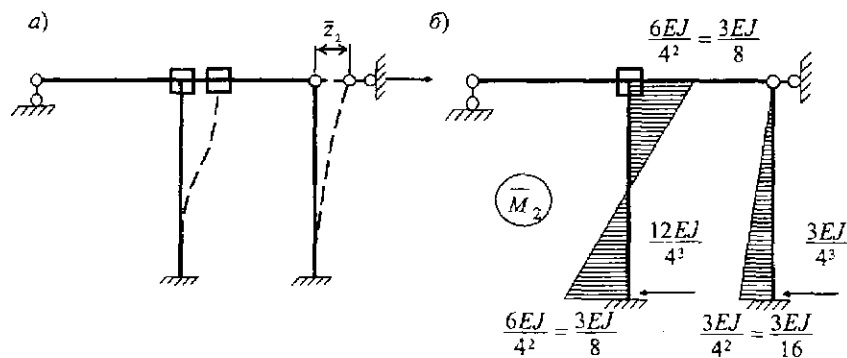


Рис. 5. Построение эпюры  $\bar{M}_2$ : а – схема деформаций элементов рамы при линейном смещении  $\bar{z}_2 = 1$ ; б – эпюра  $\bar{M}_2$

Получаем:

$$M_A = \frac{Fl}{2} v(1-v^2) = \frac{60 \cdot 4}{2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = \frac{Fl}{2} u^2 v(3-u) = \frac{60 \cdot 4}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{2}\right) = 37,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$R_A = \frac{F}{2} v(3-v^2) = \frac{60}{2} \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{4}\right) = 41,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

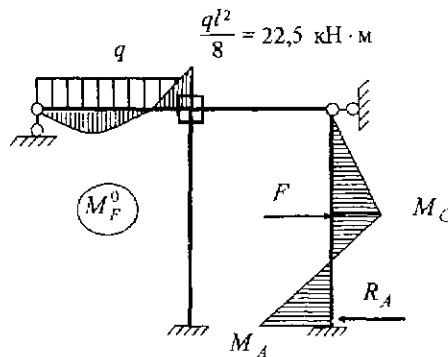


Рис. 6. Построение эпюры  $M_F^0$

Следует помнить, что при подсчете ординат эпюры  $M_F^0$  на участках стержней конструкции, нагруженных сосредоточенными силами  $F$ , величины  $u$  и  $v$  – это доли пролета балки соответственно от левой и правой опор до точки приложения силы  $F$ .

Рассмотрим статический способ определения коэффициентов при неизвестных и свободных слагаемых в канонических уравнениях.

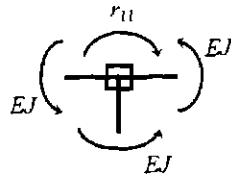


Рис. 7. Вычисление реактивного момента  $r_{11}$

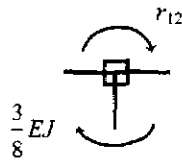


Рис. 8. Вычисление реактивного момента  $r_{12}$

При вычислении линейной реакции  $r_{21}$  в направлении  $z_2$  от единичного смещения  $\bar{z}_1$ , можно воспользоваться условием взаимности:

$$r_{21} = r_{12} = -\frac{3}{8} EJ.$$

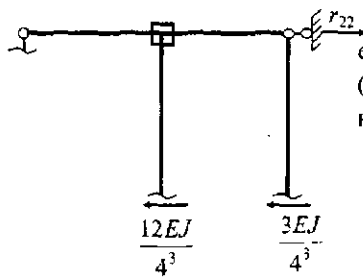


Рис. 9. Вычисление линейной реакции  $r_{22}$

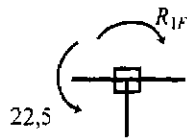


Рис. 10. Вычисление реактивного момента  $R_{1F}$  от действия нагрузок

Вырезается жесткий узел с эпюры  $\bar{M}_1$  и рассматривается его равновесие:

$$\sum M = -r_{11} + 3EJ = 0;$$

$$r_{11} = 3EJ,$$

где  $r_{11}$  – реактивный момент в направлении  $z_1$  от единичного смещения  $\bar{z}_1$  (рис. 7).

Вырезается жесткий узел со второй единичной эпюры  $\bar{M}_2$  и рассматривается его равновесие:

$$\sum M = -r_{12} - \frac{3}{8} EJ = 0;$$

$$r_{12} = -\frac{3}{8} EJ,$$

где  $r_{12}$  – реактивный момент в направлении  $z_1$  от единичного смещения  $\bar{z}_2$  (рис. 8).

Рама отсекается от опор и рассматривается равновесие всех сил в направлении  $z_2$  (рис. 9), в данном случае в горизонтальном направлении:

$$\sum X = r_{22} - \frac{12}{4^3} EJ - \frac{3}{4^3} EJ = 0;$$

$$r_{22} = \frac{15}{4^3} EJ = \frac{15}{64} EJ,$$

где  $r_{22}$  – линейная реакция в направлении  $z_2$  от единичного смещения  $\bar{z}_2$ .

Вырезается жесткий узел с грузовой эпюры  $M_F^0$  и рассматривается его равновесие:

$$\sum M = -R_{1F} + 22,5 = 0;$$

$$R_{1F} = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

где  $R_{1F}$  – реактивный момент в направлении  $z_1$  от воздействия всей внешней нагрузки (рис. 10).

Рама отсекается от опор и рассматривается равновесие всех сил в горизонтальном направлении:

$$\begin{aligned} \sum X &= R_{2F} + F - R_A, \\ R_{2F} &= R_A - F = 41,25 - 60 = \\ &= -18,75 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Здесь  $R_{2F}$  — линейная реакция в направлении  $z_2$  от воздействия всей внешней нагрузки (рис. 11).

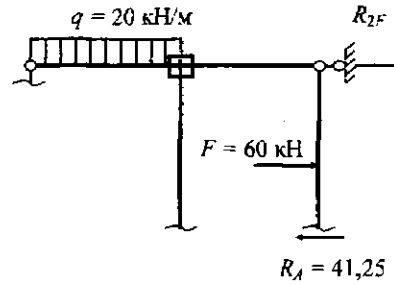


Рис. 11. Вычисление реакции  $R_{2F}$  от действия нагрузок

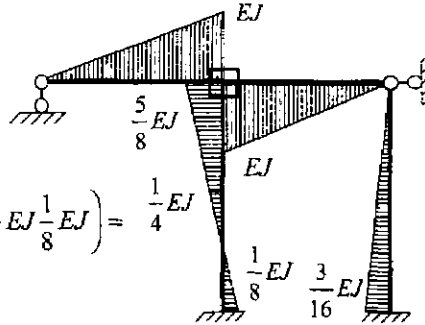
Проверка правильности подчета коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях:

$$\sum r_{ij} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EJ} dt, \quad (7)$$

где  $\sum r_{ij} = r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22} = 3EJ - \frac{3}{8}EJ - \frac{3}{8}EJ + \frac{16}{54}EJ = \frac{159}{64}EJ$ ;

$\bar{M}_s = \bar{M}_1 - \bar{M}_2$  — суммарная эпюра изгибающих моментов от единичных смещений в направлении неизвестных метода перемещений (рис. 12);

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EJ} dt &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} EJ \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} EJ \right) \cdot 2 + \\ &+ \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{216} EJ \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} EJ \right) \cdot 4 + \\ &+ \frac{4}{6EJ} \left( 2 \cdot \frac{5}{8} EJ \cdot \frac{5}{8} EJ + 2 \cdot \frac{1}{8} EJ \cdot \frac{1}{8} EJ - 2 \cdot \frac{5}{8} EJ \cdot \frac{1}{8} EJ \right) = \frac{1}{4} EJ \\ &= 2EJ + \frac{3}{64} EJ - \frac{28}{64} EJ = \frac{159}{64} EJ. \end{aligned}$$



Коэффициенты подсчитаны верно.

Рис. 12. Эпюра  $\bar{M}_s$

Проверка правильности подсчета свободных слагаемых в канонических уравнениях:

$$\sum R_y = -\sum_i \int \frac{M'_F \bar{M}_S}{EJ} d\ell, \quad (8)$$

где  $\sum R_y = R_{1F} + R_{2F} = 22,5 - 18,75 = 3,75$ ;

$\bar{M}_S$  – суммарная эпюра изгибающих моментов от единичных воздействий;

$M'_F$  – эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки, построенная в любой основной системе метода сил, полученной из заданной рамы путем удаления «лишних» связей (рис. 13);

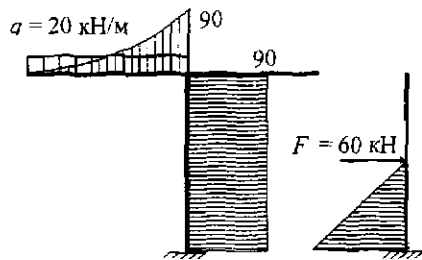


Рис. 13. Эпюра  $M'_F$ .

$$\begin{aligned} \sum_i \int \frac{M'_F \bar{M}_S}{EJ} d\ell &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{3} \cdot 90 \cdot 3 \frac{3}{4} EJ \right) - \\ &\quad - \frac{1}{EJ} \left( 90 \cdot 4 \frac{1}{4} EJ \right) + \\ &\quad + \frac{1}{EJ} \left( 2 \cdot 120 \frac{3}{16} EJ + 120 \frac{3}{32} EJ \right) = \\ &= \frac{270}{4} - 90 + \frac{75}{4} = -3,75. \end{aligned}$$

Проверка выполняется.

После подсчета коэффициентов и свободных слагаемых для рассматриваемой рамы получается система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 3EJz_1 - 0,375EJz_2 + 22,5 = 0; \\ -0,375EJz_1 + \frac{15}{64}EJz_2 - 18,75 = 0. \end{cases}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$z_1 = \frac{3,125}{EJ}; \quad z_2 = \frac{85,0}{EJ}.$$

Используя принцип независимости действия сил, получаем окончательную эпюру изгибающих моментов путем суммирования соответствующих эпюр моментов (рис. 14, а, б, в, г):

$$M = \bar{M}_1 z_1 + \bar{M}_2 z_2 + M_F^0. \quad (9)$$

При построении окончательной эпюры  $M$  следует учитывать, что если из решения уравнений получается величина  $z_i$  со знаком «минус», то орди-

наты эпюры  $\overline{M}_i z_i$  откладываются на противоположной стороне стержня по отношению к ординатам эпюры  $\overline{M}_i$ .

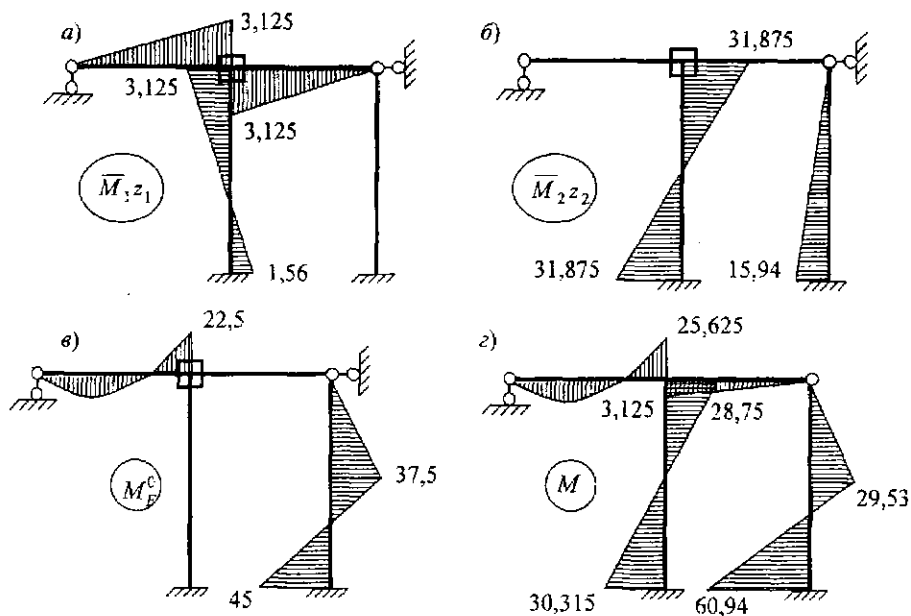


Рис. 14. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов (кН·М) в заданной раме от действия всей внешней нагрузки: а – эпюра  $\overline{M}_1 z_1$ ; б – эпюра  $\overline{M}_2 z_2$ ; в – эпюра  $M_F^0$ ; г – окончательная эпюра  $M$

Проверки правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов:

а) статическая проверка – все узлы рамы должны находиться в равновесии (рис. 15):

$$\sum M = 25,625 + 3,125 - 28,75 = 0.$$

Невыполнение условий равновесия узлов в окончательной эпюре изгибающих моментов свидетельствует о неверном вычислении основных неизвестных метода перемещений  $z_i$ ;

б) деформационная проверка – полученное распределение внутренних изгибающих моментов должно удовлетворять граничным условиям.

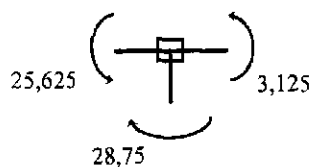


Рис. 15. Равновесие моментов в жестком узле рамы

При проверке выбирается любая основная система метода сил для заданной рамы и строится эпюра изгибающих моментов от воздействия единичного значения любой из «тишных» связей метода сил (рис. 16, а, б, в, г).

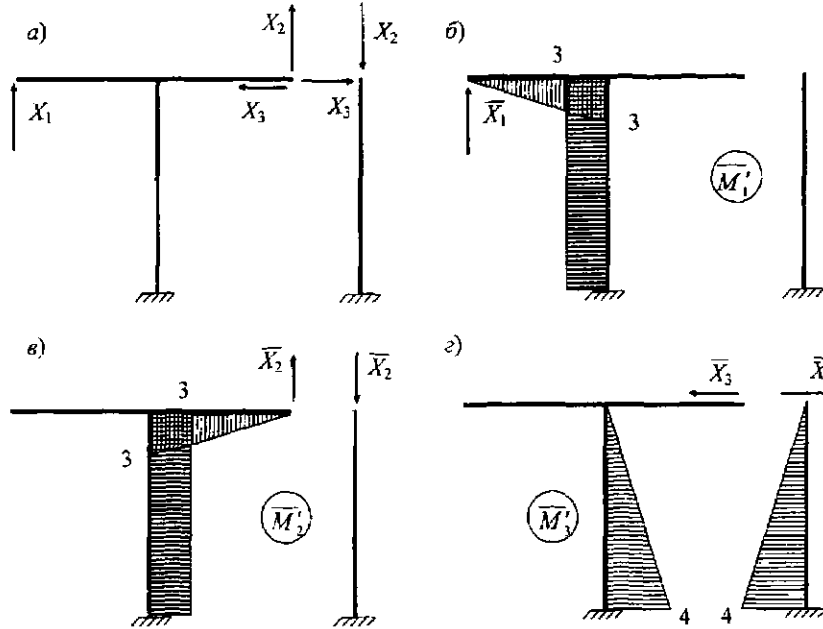


Рис. 16. Выбор основной системы метода сил: а – основная система метода сил; б – эпюра  $\bar{M}'_1$ ; в – эпюра  $\bar{M}'_2$ ; г – эпюра  $\bar{M}'_3$ .

Деформационная проверка:

$$\sum \int \frac{MM'}{EJ} dl = 0, \quad (10)$$

где  $\bar{M}'_i$  – любая из эпюр 16, б, в, г.

Например:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{MM'}{EJ} dl &= \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 25,625 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{20 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{30,315 - 28,75}{2} \cdot 4 \cdot 3 \right] = \\ &= \frac{76,89 - 76,875}{EJ} = \frac{0,015}{EJ}. \end{aligned}$$

Допускается погрешность расчета 2%:

$$\Pi = \frac{76,89 - 76,875}{76,89} \cdot 100\% = 0,019\% < 2\%.$$

При построении эпюры поперечных сил используется условие равновесия любой отсеченной части рамы:

$$Q_n = Q_n^o + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \quad (11)$$

Для выполнения расчетов можно условно пронумеровать узлы по краям рассматриваемых участков стержней рамы (рис. 17).

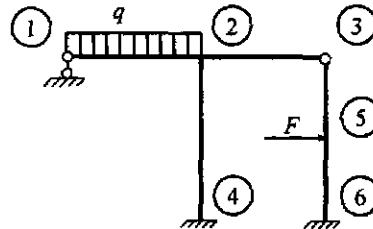


Рис. 17. Принятое условное обозначение начала и конца каждого рассматриваемого участка рамы

Вырезается участок 1-2 и представляется в виде двухопорной балки (рис. 18).

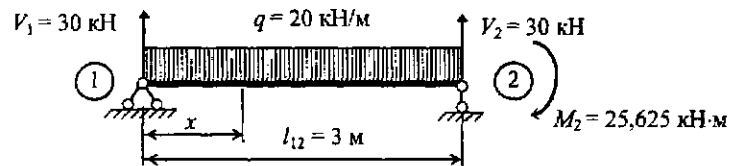


Рис. 18. Вычисление поперечных сил на участке 1-2

Тогда

$$Q_{12} = (V_1 - qx) + \frac{M_2 - M_1}{l_{12}} = (30 - 20x) + \frac{-25,625 - 0}{3} = 21,46 - 20x;$$

$$x = 0, \quad Q_{12} = 21,46 \text{ кН};$$

$$x = 3, \quad Q_{12} = 21,46 - 20 \cdot 3 = -38,54 \text{ кН}.$$

Вырезается участок 2-3 (рис. 19).

Получаем

$$Q_{23} = V_2 + \frac{M_3 - M_2}{l_{23}} = 0 + \frac{0 - 3,125}{3} = -1,042 \text{ кН}.$$

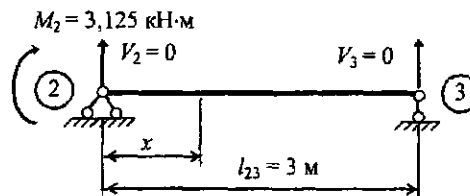


Рис. 19. Построение эпюры поперечной силы на участке 2-3

Вырезается участок 2-4 (рис. 20).

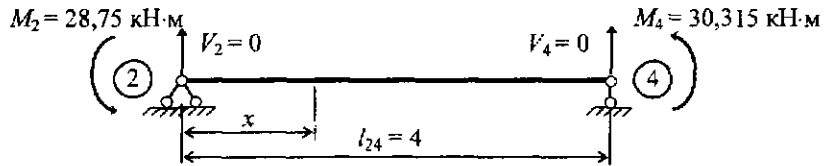
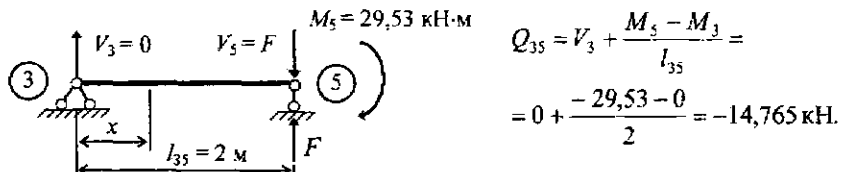


Рис. 20. Вычисление поперечной силы на участке 2 - 4

Получаем

$$Q_{24} = V_2 + \frac{M_4 - M_2}{l_{24}} = 0 + \frac{30,315 - (-28,75)}{4} = 14,766 \text{ кН.}$$

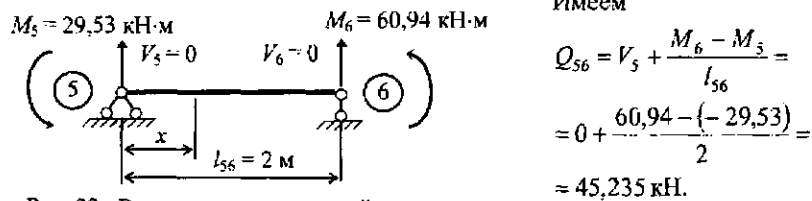
Вырезается участок 3 - 5 (рис. 21):



$$Q_{35} = V_3 + \frac{M_5 - M_3}{l_{35}} = 0 + \frac{-29,53 - 0}{2} = -14,765 \text{ кН.}$$

Рис. 21. Вычисление поперечной силы на участке 3 - 5

Вырезается участок 5 - 6 (рис. 22).



Имеем

$$Q_{56} = V_5 + \frac{M_6 - M_5}{l_{56}} = 0 + \frac{60,94 - (-29,53)}{2} = 45,235 \text{ кН.}$$

Рис. 22. Вычисление поперечной силы на участке 5 - 6

В результате получаем эпюру поперечных сил (рис. 23).

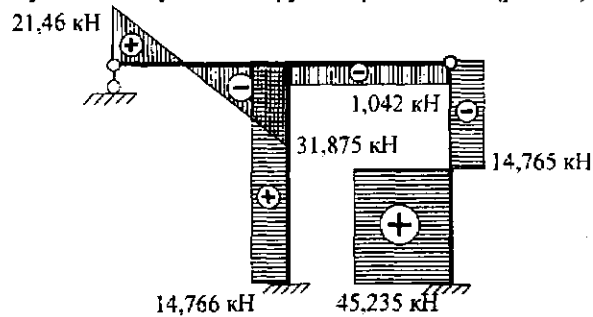


Рис. 26. Эпюра поперечных сил



Для построения эпюры продольных сил (рис. 26) последовательно вырезаются узлы рамы (рис. 24, 25) и составляются уравнения проекций всех сил на соответствующие оси координат.

Для узла 3

$$\sum X = Q_{35} - N_{23} = 0;$$

$$N_{23} = Q_{35} = 14,765 \text{ (растяжение);}$$

$$\sum Y = -Q_{23} - N_{35} = 0;$$

$$N_{35} = -Q_{23} = -1,042 \text{ (сжатие).}$$

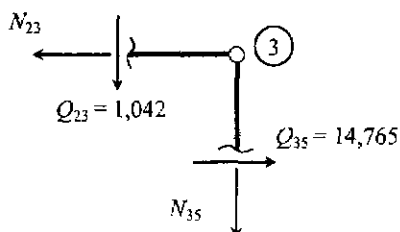


Рис. 24. Равновесие узла 3

Для узла 2

$$\sum X = N_{23} - Q_{24} - N_{12} = 0;$$

$$N_{12} = N_{23} - Q_{24} = 14,765 -$$

$$- 14,766 = 0,001 \approx 0;$$

$$\sum Y = Q_{23} - Q_{12} - N_{24} = 0;$$

$$N_{24} = Q_{23} - Q_{12} = 1,042 -$$

$$- 38,54 = -37,498 \text{ (сжатие).}$$

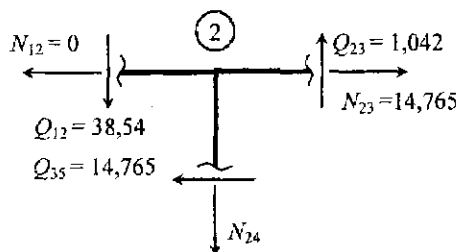


Рис. 25. Равновесие узла 2

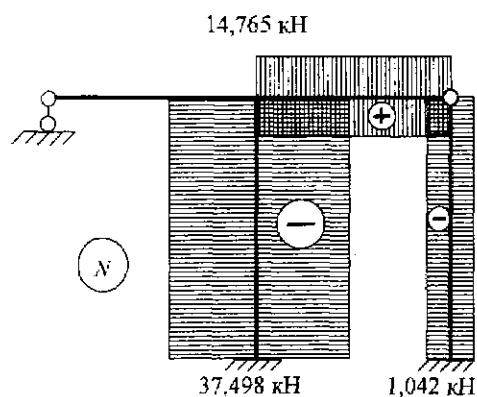


Рис. 26. Эпюра продольных сил

Для выполнения окончательной проверки правильности решения рама отсекается от всех опор и рассматриваются условия ее равновесия в целом (рис. 27):

$$\sum X = 60 - 14,766 - 45,235 = 0,001 \approx 0;$$

$$\sum Y = 21,46 - 20 \cdot 3 + 37,498 + 1,042 = 0;$$

$$\sum M_A = -21,46 \cdot 3 + 20 \cdot 3 \cdot 1,5 - 60 \cdot 2 + 1,042 \cdot 3 + 60,94 + 30,315 = 0,001 \approx 0.$$

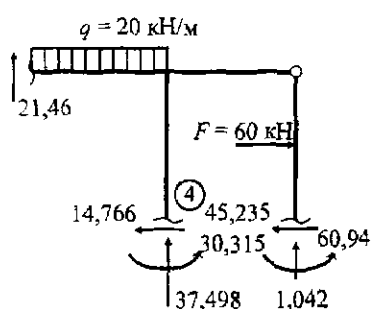


Рис. 27. Окончательная проверка расчета заданной рамы

Из условия прочности при изгибе подбирается двутавровое поперечное сечение стержней рамы:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq \sigma_{adm}; \quad (12)$$

$$W_x^{np} \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}}; \quad (13)$$

$$W_x^{np} \geq \frac{60,94 \cdot 10^5}{160 \cdot 10^2};$$

$$W_x^{np} \geq 380,875 \text{ см}^3.$$

По сортаменту прокатной стали подбирается двутавр № 27а с моментом сопротивления  $W_x = 407 \text{ см}^3$ , высотой сечения 27 см, площадью  $A = 43,2 \text{ см}^2$ , моментом инерции  $J_x = 5500 \text{ см}^4$ .

Принятое поперечное сечение стержней рамы проверяется на прочность с учетом совместного воздействия изгибающих моментов и продольных сил по двум сочетаниям:

а) в сечении рамы, где возникает максимальный по абсолютной величине изгибающий момент:

$$\sigma = \pm \frac{M_{\max}}{W_x} \pm \frac{N_{\text{сортв}}}{A} < \sigma_{adm}; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_6 &= -\frac{60,94 \cdot 10^5}{407} - \frac{1,042 \cdot 10^3}{43,2} = -149,73 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} - 0,24 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = \\ &= -149,97 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\sigma_6 = |149,97| \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа};$$

б) в сечении рамы, где действует максимальная по абсолютной величине продольная сила:

$$\sigma = \pm \frac{M_{\text{соотв}}}{W_x} \pm \frac{N_{\text{max}}}{A} < \sigma_{\text{adm}}; \quad (15)$$

$$\sigma_4 = -\frac{30,315 \cdot 10^5}{407} - \frac{37,5 \cdot 10^3}{43,2} = -74,48 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} - 8,68 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = -83,16 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = 83,16 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа}.$$

Прочность стержней рамы в наиболее нагруженных сечениях обеспечена.

### РАСЧЕТ РАМЫ НА ПРОЧНОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НЕРАВНОМЕРНОГО НАГРЕВА (ЗАДАЧА 2)

Для рамы, рассчитанной в задаче 1, определить внутренние усилия при повышении (изменении) температуры от исходного состояния 0 °С: внутри рамы на 20 °С, снаружи на 40 °С (рис. 28). Рама изготовлена из стального прокатного двутавра №27а, коэффициент линейного температурного расширения  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ .

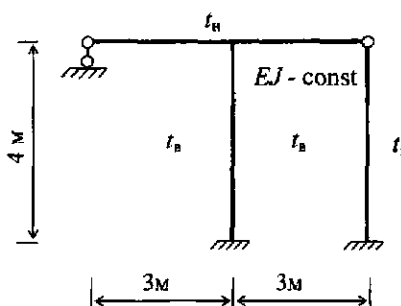


Рис. 28. Заданное температурное воздействие

Определяем температуру, °С:

внутри контура

$$t_n = 0 + 20 = 20;$$

снаружи контура

$$t_k = 0 + 40 = 40.$$

При расчете рам методом перемещений заданное температурное воздействие приводится к двум составляющим:

а) симметричному

$$t' = \frac{t_n + t_k}{2} = \frac{20 + 40}{2} = 30 \text{ °С}; \quad (16)$$

б) обратносимметричному

$$t^n = \frac{t_n - t_n}{2} = \frac{40 - 20}{2} = 10^\circ\text{C}, \quad \Delta t = 2t^n = 2 \cdot 10 = 20^\circ\text{C}. \quad (17)$$

Подсчет количества неизвестных и выбор основной системы метода перемещений (рис. 29) подробно рассмотрены при решении задачи 1.

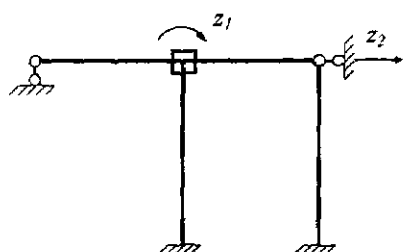


Рис. 29. Основная система метода перемещений

Канонические уравнения:

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + (R'_{1t} + R''_{1t}) = 0; \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + (R'_{2t} + R''_{2t}) = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты при неизвестных в канонических уравнениях зависят только от геометрии, жесткостных характеристик стержней рассматриваемой рамы, принятой основной системы метода перемещений и не зависят от внешних воздействий на конструкцию. Их величины были определены предыдущим расчетом:

$$r_{11} = 3EJ_x; \quad r_{12} = r_{21} = -0,375EJ_x; \quad r_{22} = \frac{15}{64}EJ_x.$$

Для подсчета слагаемых  $R'_{1t}$  и  $R'_{2t}$  строится эпюра изгибающих моментов  $M'_t$  в основной системе метода перемещений от симметричного (равномерного) нагрева по высоте поперечного сечения каждого из стержней.

Необходимо для начала подсчитать возможные удлинения стержней рамы основной системы метода перемещений (рис. 30).

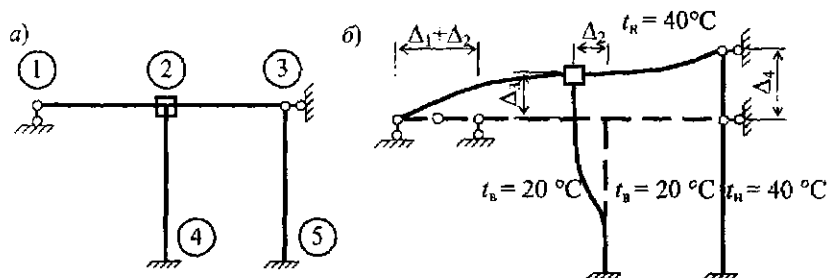


Рис. 30. Вычисление смещений узлов рамы при равномерном воздействии температур: а – принятое условное обозначение стержней рамы; б – схема деформирования элементов в основной системе при равномерном нагреве

Получаем:

ригель 1-2

$$\Delta_1 = \alpha l_{12} t'_{12} = 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 300 \cdot 30 = 0,1125 \text{ см};$$

ригель 2-3

$$\Delta_2 = \alpha l_{23} t'_{23} = 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 300 \cdot 30 = 0,1125 \text{ см};$$

стойка 2-4

$$\Delta_3 = \alpha l_{24} t'_{24} = 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 400 \cdot 20 = 0,10 \text{ см};$$

стойка 3-5

$$\Delta_4 = \alpha l_{35} t'_{35} = 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 400 \cdot 30 = 0,15 \text{ см}.$$

На изогнутых элементах рамы основной системы (1-2, 2-3, 2-4) строится эпюра  $M'_i$  при помощи таблицы реактивных усилий метода перемещений от линейного смещения одного конца балки относительно второго (рис. 31).

Свободные слагаемые канонических уравнений определяются статическим способом (рис. 32, 33):

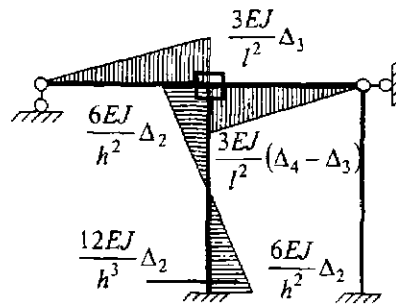


Рис. 31. Эпюра  $M'_i$

$$\sum M_2 = 0;$$

$$\begin{aligned} R'_{1t} &= \frac{3EJ}{l^2} \Delta_3 + \frac{6EJ}{h^2} \Delta_2 + \frac{3EJ}{l^2} (\Delta_4 - \Delta_3) = \\ &= \frac{3EJ}{3^2} 0,001 + \frac{6EJ}{4^2} 0,001125 + \\ &+ \frac{3EJ}{3^2} (0,0015 - 0,001) = 0,9219 \cdot 10^{-3} EJ; \end{aligned}$$

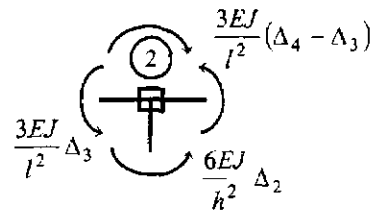


Рис. 32. Вычисление реактивного момента  $R'_{1t}$

$$\sum X = 0;$$

$$R'_{2t} + \frac{12EJ}{h^3} \Delta_2 = 0;$$

$$R'_{2t} = -\frac{12EJ}{h^3} \Delta_2 =$$

$$= -\frac{12EJ}{4^3} 0,1125 = -0,02109 \cdot 10^{-3} EJ.$$

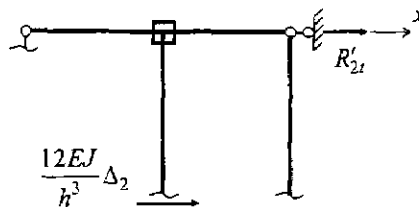


Рис. 33. Вычисление линейной реакции  $R'_{2t}$



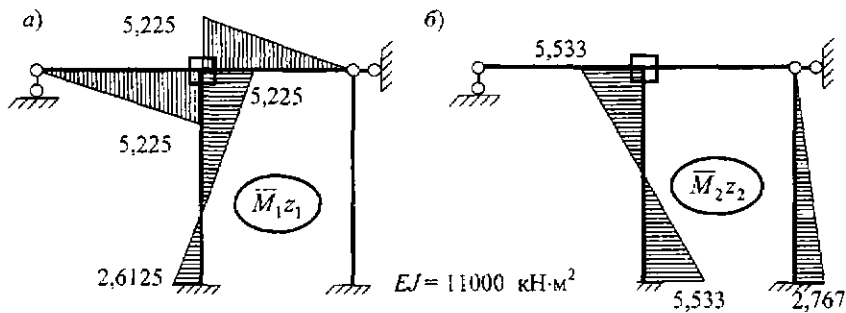


Рис. 37. Слагаемые окончательной эпюры моментов:  
 а – эпюра  $\bar{M}_1 z_1$ ; б – эпюра  $\bar{M}_2 z_2$

Для рамы, выполненной из стального прокатного двутавра с принятой жесткостью (по расчету на воздействие внешней нагрузки в задаче 1),

$$EJ = 2,0 \cdot 10^7 \cdot 5500 = 11,0 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{см}^2 = 11000 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов приведена на рис. 38, а.

Эпюры продольных и поперечных внутренних сил строятся по аналогии с расчетом в задаче 1 и приведены на рис. 38, б, в.

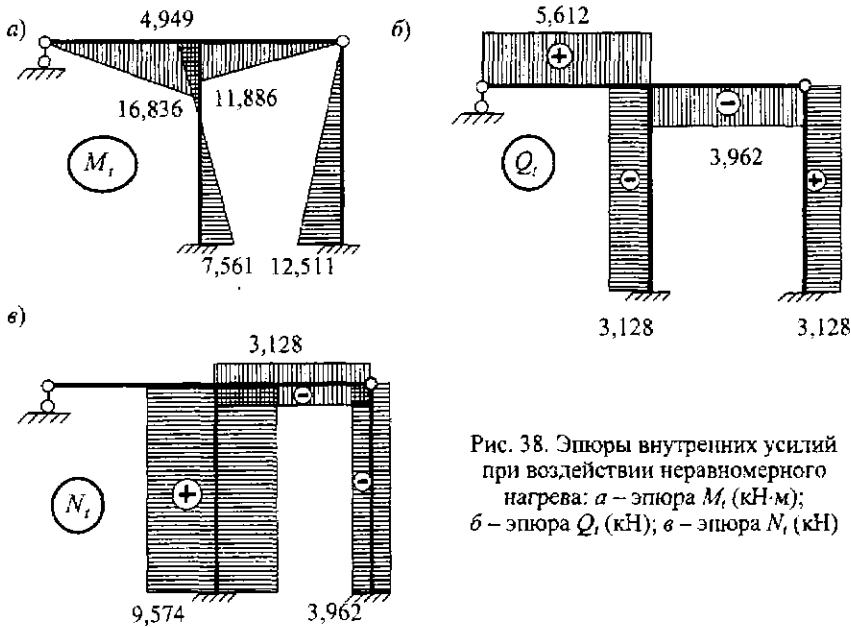


Рис. 38. Эпюры внутренних усилий при воздействии неравномерного нагрева: а – эпюра  $M_t$  (кН·м); б – эпюра  $Q_t$  (кН); в – эпюра  $N_t$  (кН)

## РАСЧЕТ РАМЫ НА ПРОЧНОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ОСАДКЕ ОПОР (ЗАДАЧА 3)

Для рамы, рассчитанной в задаче 1, выявить внутренние усилия при заданных смещениях средней опоры:  $a = 4$  мм;  $b = 6$  мм;  $\theta = 0,002$  рад (поворот по часовой стрелке);  $EJ = 11000$  кН·м<sup>2</sup> (рис. 39), жесткость всех стержней одинаковая.

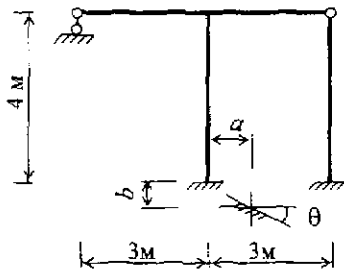


Рис. 39. Заданное смещение опоры

Подсчет количества неизвестных, выбор основной системы метода перемещений (рис. 40), подсчет коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях подробно рассмотрены в решении задачи 1.

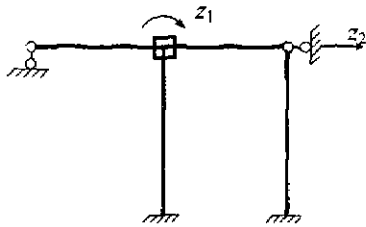


Рис. 40. Основная система метода перемещений

Канонические уравнения:

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + R_{1\Delta} = 0; \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + R_{2\Delta} = 0. \end{cases}$$

Для вычисления слагаемых  $R_{1\Delta}$  и  $R_{2\Delta}$  строятся эпюры изгибающих моментов отдельно от воздействия каждого заданного смещения средней опоры по таблицам реактивных усилий метода перемещений с учетом реальных смещений (рис. 41, а, б, в, г, д, е).

Свободные слагаемые канонических уравнений определяются статическим способом (рис. 42, 43) с учетом принципа суперпозиции:

$$R_{1\Delta} = R_{1a} + R_{1b} + R_{1\theta} = 0,0015EJ + 0 + 0,001EJ = 0,0025EJ;$$

$$R_{2\Delta} = R_{2a} + R_{2b} + R_{2\theta} = -0,00075EJ + 0 - 0,00075EJ = -0,0015EJ.$$

Решается система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 3EJz_1 - \frac{3}{8}EJz_2 + 0,0025EJ = 0; \\ -\frac{3}{8}EJz_1 + \frac{15}{64}EJz_2 - 0,0015EJ = 0, \\ z_1 = -0,42 \cdot 10^{-4}; z_2 = 63,33 \cdot 10^{-4}. \end{cases}$$



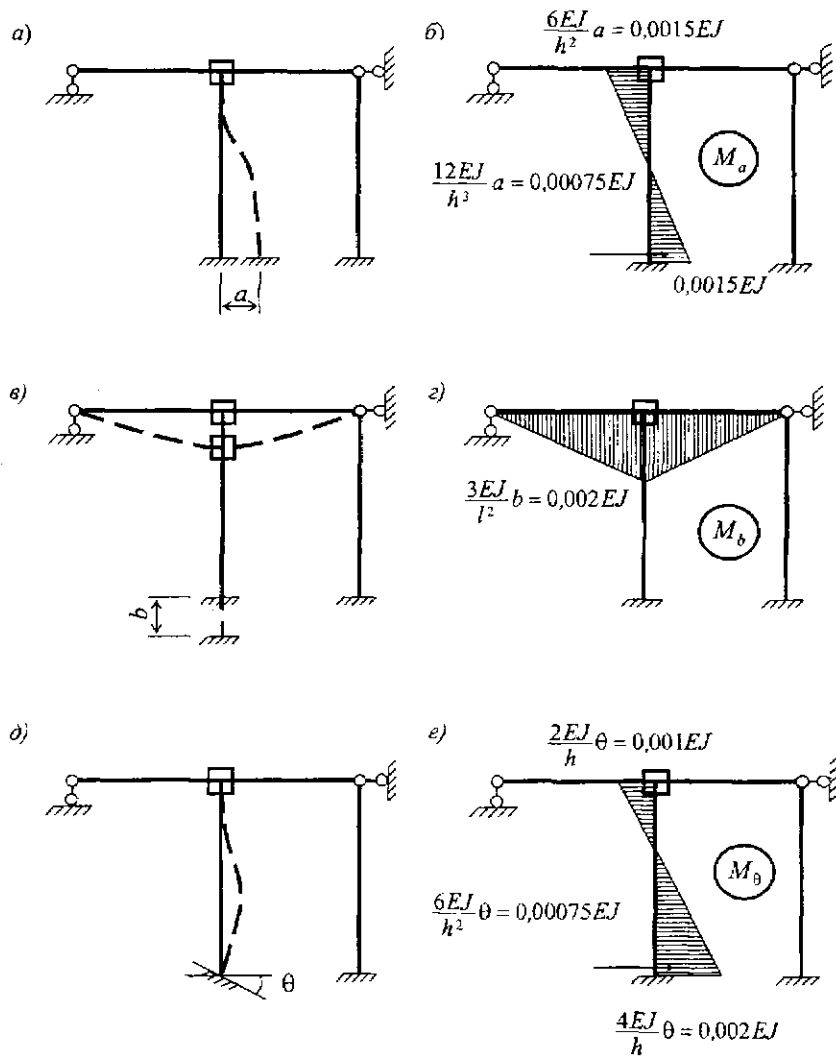


Рис. 41. Построение эпюр изгибающих моментов: а - схема деформирования элементов рамы основной системы от смещения опоры по горизонтали; б - эпюра  $M_a$ ; в - схема деформирования элементов рамы основной системы от смещения опоры по вертикали; г - эпюра  $M_b$ ; д - схема деформирования элементов рамы основной системы от поворота опоры; е - эпюра  $M_\theta$

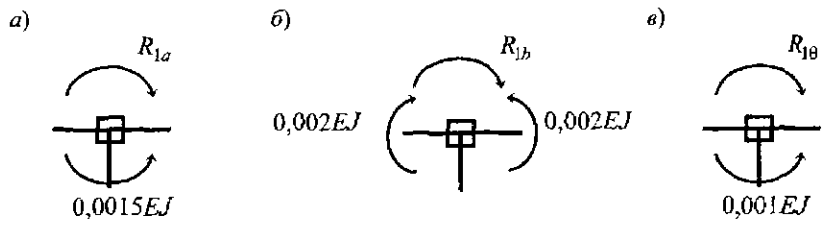


Рис. 42. Подсчет величины  $R_{1\Delta}$

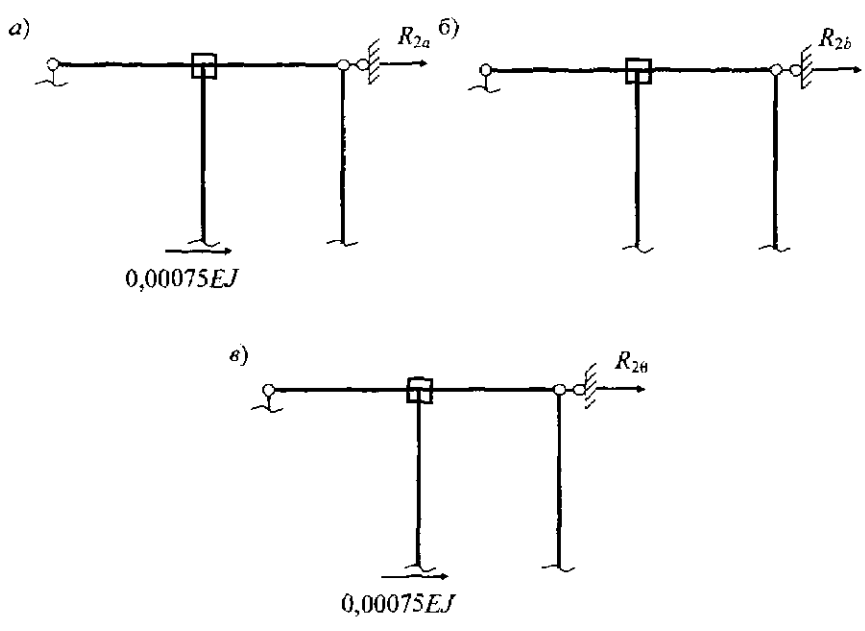


Рис. 43. Подсчет величины  $R_{2\Delta}$

Окончательная эпюра изгибающих моментов от заданного смещения средней опоры строится путем суммирования эпюр (рис. 44, а, б, в):

$$M = \bar{M}_1 z_1 + \bar{M}_2 z_2 + (M_a + M_b + M_v). \quad (19)$$

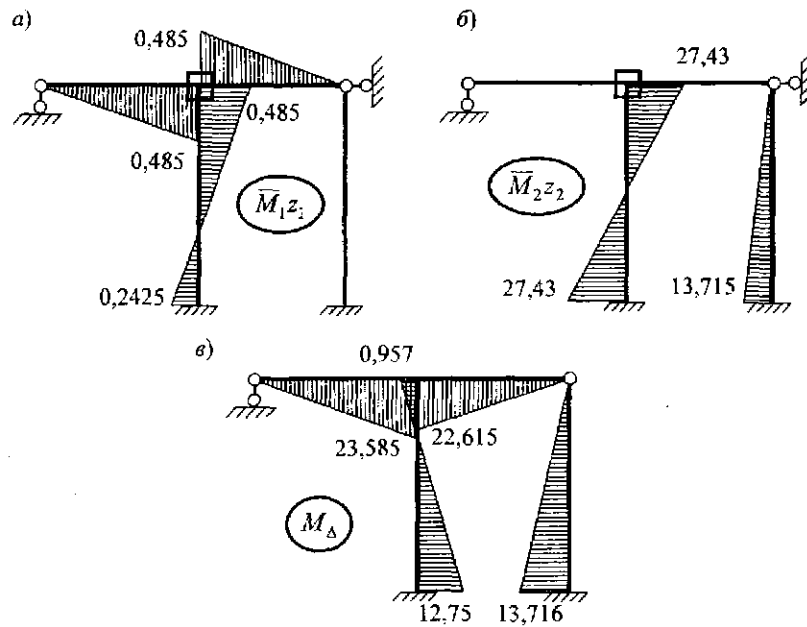


Рис. 44. Построение эпюры изгибающих моментов:  
 а – эпюра  $M_{1z_1}$ ; б – эпюра  $M_{2z_2}$ ; в – окончательная эпюра  $M_{\Delta}$  (кН·м)

Эпюры поперечных и продольных внутренних сил строятся по аналогии с предыдущими расчетами (рис. 45, а, б).

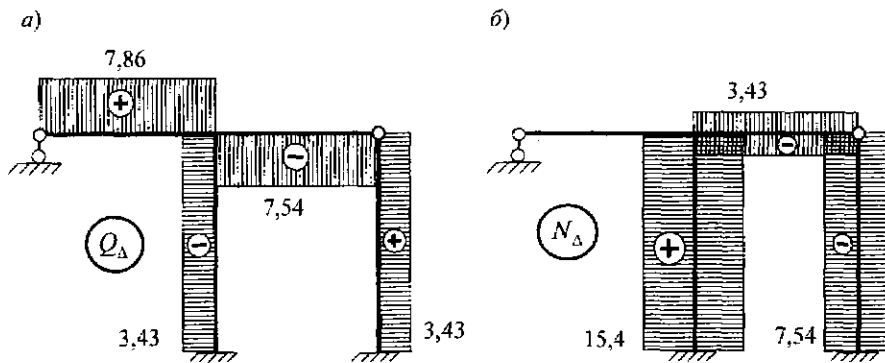


Рис. 45. Построение эпюр поперечных и продольных внутренних сил в элементах рамы от смещения средней опоры: а – эпюра  $Q$  (кН); б – эпюра  $N$  (кН)

**РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ  
МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ  
ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ (ЗАДАЧА 4)**

Для неразрезной балки переменной жесткости, изображенной на рис. 46, а, построить эпюры внутренних усилий от воздействия заданной нагрузки.

В соответствии с порядком расчета конструкций методом перемещений определяется число неизвестных по формуле (1):

$$n = n_y + n_z = 1 + 0 = 1.$$

За основное неизвестное принимается угол поворота сечения над промежуточной опорой (рис. 46, б).

Заданная система один раз кинематически неопределима, каноническое уравнение метода перемещений имеет вид

$$r_{11}z_1 + R_{1F} = 0.$$

С использованием прил. 1 строятся эпюры изгибающих реактивных моментов от единичного смещения в направлении основного неизвестного метода перемещений (рис. 46, з) и от воздействия заданной нагрузки (рис. 46, д).

Статическим способом определяются: коэффициент при неизвестном и свободное слагаемое канонического уравнения (рис. 46, е, ж).

Из решения линейного уравнения вычисляется основное неизвестное метода перемещений:

$$2,5EJz_1 - 3 = 0;$$

$$z_1 = \frac{3}{2,5EJ} = \frac{1,2}{EJ}.$$

Единичная эпюра реактивных изгибающих моментов  $\bar{M}_1$  умножается на найденную величину  $z_1$  (рис. 46, з) и строится окончательная эпюра (рис. 46, и) изгибающих моментов от заданной нагрузки по формуле (9):

$$M = \bar{M}_1 z_1 + M_F^0;$$

$$M_1 = 1,2 - 6 = -4,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_2 = -0,6 + 3 = +2,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = -2,4 - 6 = -8,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 0,6 - 9 = -8,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_5 = 0,375 + 4,5 = +4,875 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_6 = -0,3 - 3 = -3,3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

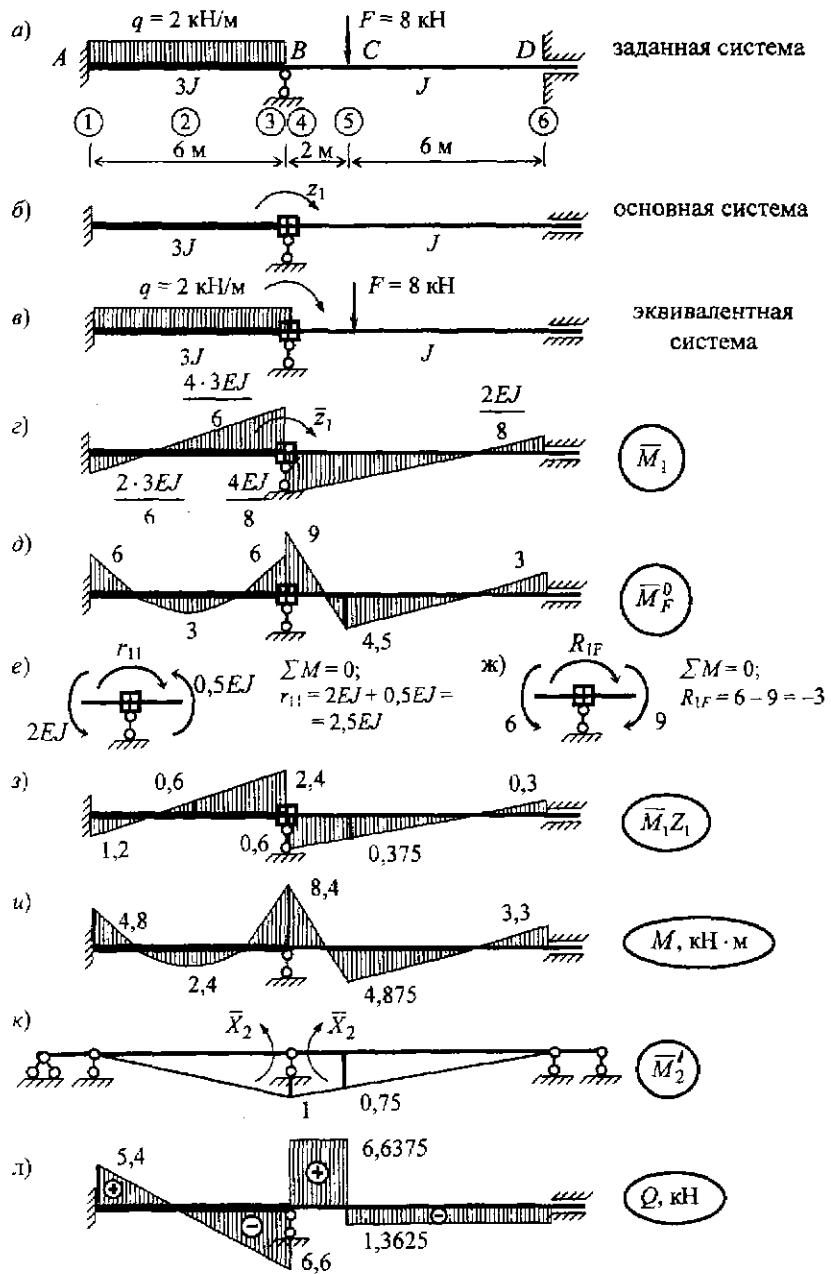


Рис. 46. Расчет неразрезной балки методом перемещений

Для выполнения деформационной проверки правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов необходимо построить единичную эпюру  $\overline{M}_n'$  (рис. 46, к) в любой основной системе метода сил, полученной из заданной системы путем удаления “лишних” связей:

$$\Delta = \sum \int \frac{M \overline{M}_n'}{EJ} d\ell = 0;$$

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{6}{6 \cdot 3EJ} (-2 \cdot 1 \cdot 8,4 - 4,8 \cdot 1) + \frac{1}{3EJ} \frac{2 \cdot 6^3}{12} \frac{1}{2} + \\ & + \frac{2}{6EJ} (-2 \cdot 1 \cdot 8,4 + 2 \cdot 4,875 \cdot 0,75 - 8,4 \cdot 0,75 + 4,875 \cdot 1) + \\ & + \frac{6}{6EJ} (2 \cdot 4,875 \cdot 0,75 - 3,3 \cdot 0,75) = -\frac{7,2}{EJ} + \frac{6}{EJ} - \frac{3,6375}{EJ} + \frac{4,8375}{EJ} = 0. \end{aligned}$$

Эпюра поперечных сил  $Q$  (рис. 46, л) строится из условия равновесия отдельных участков конструкции по формуле (11):

участок 1–3

$$Q_{1-3} = (6 - 2x) + \frac{-8,4 - (-4,8)}{6} = 5,4 - 2x,$$

$$x = 0 \quad Q_A = +5,4 \text{ кН},$$

$$x = 6 \text{ м} \quad Q_B^{\text{сб}} = -6,6 \text{ кН};$$

участок 4–5

$$Q_B^{\text{пр}} = Q_{4-5} = 0 + \frac{4,875 - (-8,4)}{2} = +6,6375 \text{ кН};$$

участок 5–6

$$Q_{5-6} = 0 + \frac{-3,3 - 4,875}{6} = -1,3625 \text{ кН}.$$

**ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Приложение 1**

Таблица реактивных усилий метода перемещений

№	Схема	Реакции
1		$M_A = -\frac{ql^2}{8}; M_B = 0;$ $M_C = +\frac{ql^2}{16};$ $V_A = \frac{5}{8}ql; V_B = \frac{3}{8}ql$
2		$M_A = -\frac{Fl}{2}u(1-u^2);$ $M_C = +\frac{Fl}{2}u^2(3-u);$ $V_A = \frac{F}{2}u(3-u^2); V_B = \frac{F}{2}u^2(3-u)$
3		$M_A = \frac{3EJ}{l};$ $-V_A = V_B = \frac{3EJ}{l^2}$
4		$M_A = -\frac{3EJ}{l^2}; M_B = 0;$ $V_A = -V_B = \frac{3EJ}{l^3}$
5		$M_A = \frac{3EJ \alpha \Delta t}{2h};$ $-V_A = V_B = \frac{3EJ \alpha \Delta t}{2hl}$

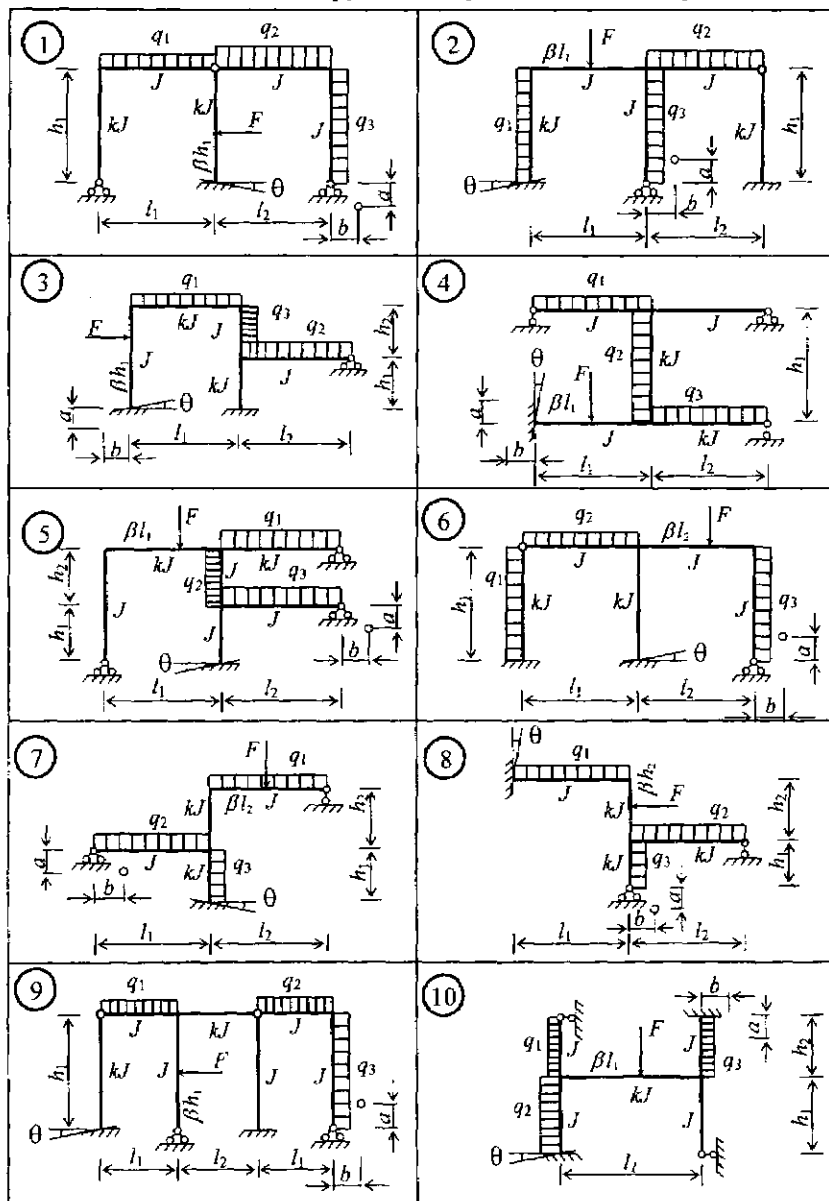
№	Схема	Реакции
6		$M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12};$ $M_C = +\frac{ql^2}{24};$ $V_A = V_B = \frac{ql}{2}$
7		$M_A = -uv^2Fl; \quad M_B = -u^2vFl;$ $M_C = 2u^2v^2Fl;$ $V_A = v^2(1+2u)F; \quad V_B = u^2(1+2v)F$
8		$M_A = \frac{4EJ}{l}; \quad M_B = -\frac{2EJ}{l};$ $-V_A = V_B = \frac{6EJ}{l^2}$
9		$-M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2};$ $V_A = -V_B = \frac{12EJ}{l^3}$
10		$M_A = M_B = \frac{EJ \alpha \Delta t}{h};$ $V_A = V_B = 0$



Приложение 2

Таблица 1

Предлагаемые схемы конструкций для расчета методом перемещений



Исходные данные к расчету

Первая цифра шифра	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$h_1$ , м	$h_2$ , м	Вторая цифра шифра	$F$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$k$	Третья цифра шифра (№ схемы)	$q_3$ , кН/м	$\beta$	$\theta$ , рад	$a$ , см	$b$ , см	$t_{вн}$ , °С	$t_{нар}$ , °С
0	3,2	4,0	4,0	6,0	0	40	10	0	2,0	0	20	0,4	0,01	2	4	20	40
1	3,6	3,8	4,2	4,0	1	60	0	20	3,0	1	30	0,5	0,02	4	3	10	30
2	4,0	3,6	4,4	4,0	2	80	16	0	1,5	2	40	0,6	0,03	3	6	10	-50
3	4,4	4,2	2,6	5,2	3	100	0	12	1,8	3	12	0,7	0,04	2	4	15	25
4	4,8	4,0	3,0	3,6	4	120	20	0	1,6	4	24	0,3	0,02	6	2	20	-10
5	5,0	6,0	3,8	3,2	5	60	0	24	3,5	5	36	0,4	0,03	5	2	30	10
6	5,2	6,4	3,6	4,0	6	80	10	0	1,2	6	10	0,5	0,01	2	5	20	-20
7	5,6	4,0	4,0	3,2	7	40	0	20	2,5	7	20	0,6	0,02	4	3	25	5
8	6,0	4,2	3,6	2,0	8	100	16	0	2,6	8	30	0,7	0,03	5	3	25	-15
9	6,2	4,0	3,8	4,0	9	80	0	10	2,2	9	40	0,6	0,04	6	4	20	-30

*Примечание.* Шифр состоит из трех цифр ХХХ, где первая цифра соответствует номеру группы на потоке; вторая и третья – порядковому номеру в списке по журналу (01, 02, ..., 10, 11, 12, ..., 20, ...).

### Библиографический список

*Дарков А.В., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1986. – 544 с.

*Ржаницын А.Р.* Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1982. – 400 с.

*Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем): Учеб. пособие для студентов вузов / Г.К. Клейн, Н.Н.Леонтьев, М.Г. Ванюшенков и др. – М.: Высш. шк., 1980. – 384 с.*

### Оглавление

Порядок расчета конструкций методом перемещений .....	3
Расчет рамы на прочность методом перемещений при воздействии внешней нагрузки (задача 1) .....	7
Расчет рамы на прочность методом перемещений при воздействии неравномерного нагрева (задача 2).....	19
Расчет рамы на прочность методом перемещений при осадке опор (задача 3) .....	24
Расчет неразрезной балки на прочность методом перемещений при воздействии внешней нагрузки (задача 4) .....	28
Приложения .....	31
Библиографический список .....	35

**Анатолий Юрьевич Коновалов  
Ольга Михайловна Заборская**

**РАСЧЕТ РАМ НА ПРОЧНОСТЬ  
МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

*Методические указания к выполнению контрольных заданий  
по строительной механике и примеры расчета  
конструкций методом перемещений  
для студентов строительных специальностей*

Редактор Е.А.Зажигина  
Техн. ред. Н.З.Попова  
Корректор Л.Н.Героева  
Компьютерная верстка И.В.Усовой

Сдано в произв. 21.02.2003. Подписано в печать 08.05.2003.  
Формат 60×84/16. Бумага писчая. Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 2,38.  
Уч.-изд. л. 2,43. Заказ № 159. Тираж 200 экз. Цена свободная  
Издательство Архангельского  
государственного технического университета

---

Отпечатано в типографии АГТУ.  
163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, 17