

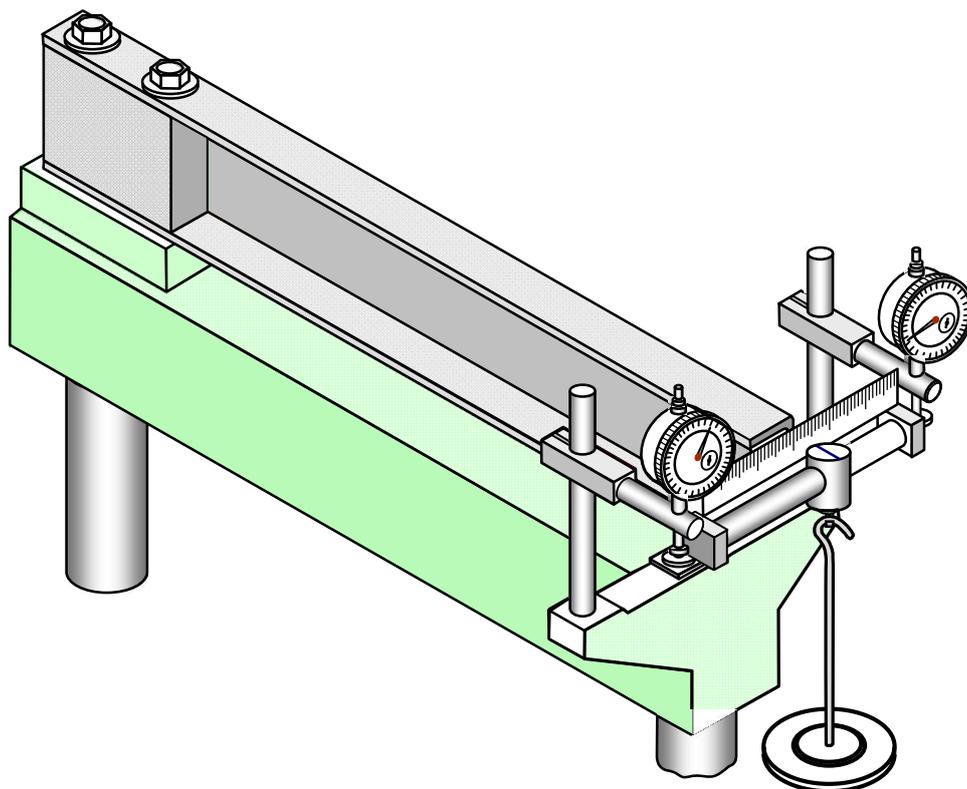
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра "СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ"

# ***ИЗГИБ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ***

*Методические указания к лабораторной работе*



Волгоград 2015

УДК 539.3

Рецензент  
профессор кафедры «Сопротивление материалов» ВолгГТУ  
д-р техн. наук *А. Н. Савкин*

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Волгоградского государственного технического университета

Изгиб тонкостенных стержней открытого профиля.  
Метод. указ. к лабораторной работе / Сост.: О. В. Кондратьев. –  
ВолгГТУ, Волгоград, 2015. – 16 с.

Содержит теоретический материал, касающийся одного из разделов темы «Сложное сопротивление». Выведены формулы для аналитического определения положения центра изгиба швеллера, гнутого из листа, расчета момента инерции этого профиля, определения расстояния до центра тяжести его. Описана методика проведения эксперимента на лабораторной установке. Указаны правила по технике безопасности. Дан список учебной литературы, а также вопросы для проверки усвоения темы лабораторной работы.

Предназначены для студентов всех форм обучения.

Ил. 9. Табл. 1. Библиогр.: 3 назв.

© Волгоградский государственный  
технический университет, 2015

© О. В. Кондратьев

**Цель работы:** экспериментальное исследование поперечного изгиба тонкостенных стержней открытого профиля; определение положения центра изгиба.

## 1. Теоретическая часть

### Понятие об изгибе тонкостенных стержней открытого профиля

При расчётах на прочность к схеме тонкостенных стержней сводятся многие элементы машиностроительных конструкций. Это прежде всего подкрепляющие элементы оболочек самолётов и ракет – стрингеры, шпангоуты<sup>1</sup> (рис. 1, а). К схеме тонкостенных стержней сводятся составляющие

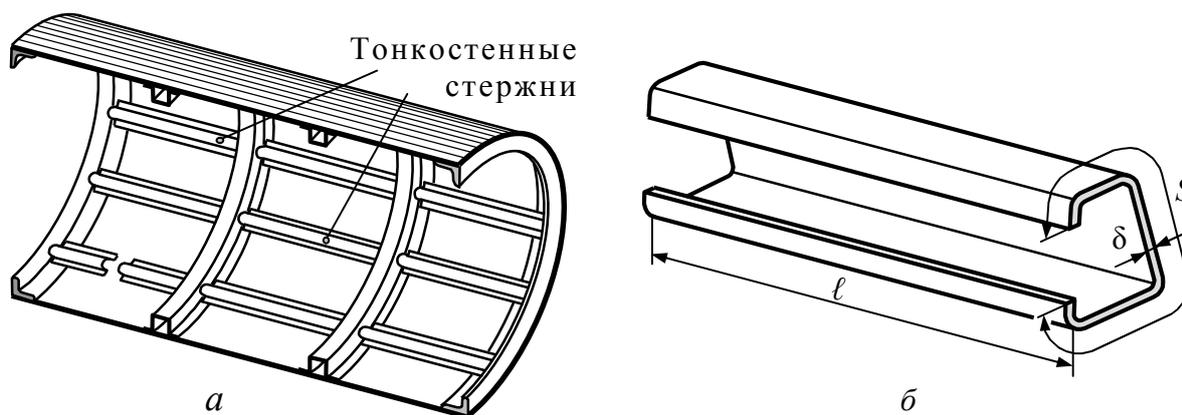


Рис. 1

элементы автомобильных рам, тележек железнодорожных вагонов, в строительной индустрии – стрелы подъемных кранов и многие другие силовые конструкции.

**Тонкостенным** называют стержень, толщина  $\delta$  стенки поперечного сечения профиля которого, существенно меньше длины  $S$  контура, а та в свою очередь много меньше длины  $l$  стержня (рис. 1, б). К ним относятся гнутые, тянутые, прокатные и прессованные профили, сварные балки. Тонкостенные профили подразделяются на открытые (рис. 2, а, б, в, г) и замкнутые (рис. 2, д, е, ж).

Главная особенность деформации тонкостенных стержней открытого профиля, работающих при **поперечном изгибе** – возможность появления **крутящего момента**. По этой причине возникает свободное или стеснённое кручение и, как следствие, **депланация** (выход точек сечения из первоначальной плоскости сечения).

---

<sup>1</sup> **Стрингер** (англ. stringer, от string — привязывать, скреплять), продольный элемент конструкции корпуса (каркаса) судна, летательного аппарата, вагона и т.п. Обычно выполняется в виде деревянного или металлического плоского бруса. К стрингерам, связанным с поперечными элементами конструкции (шпангоутами, бимсами), крепится обшивка.

**Шпангоут** (нидерл. spanthout, от spant — «ребро» и hout — «дерево») — деревянный или металлический поперечный элемент жёсткости обшивки корпуса корабля, летательного аппарата или котла вагона-цистерны.

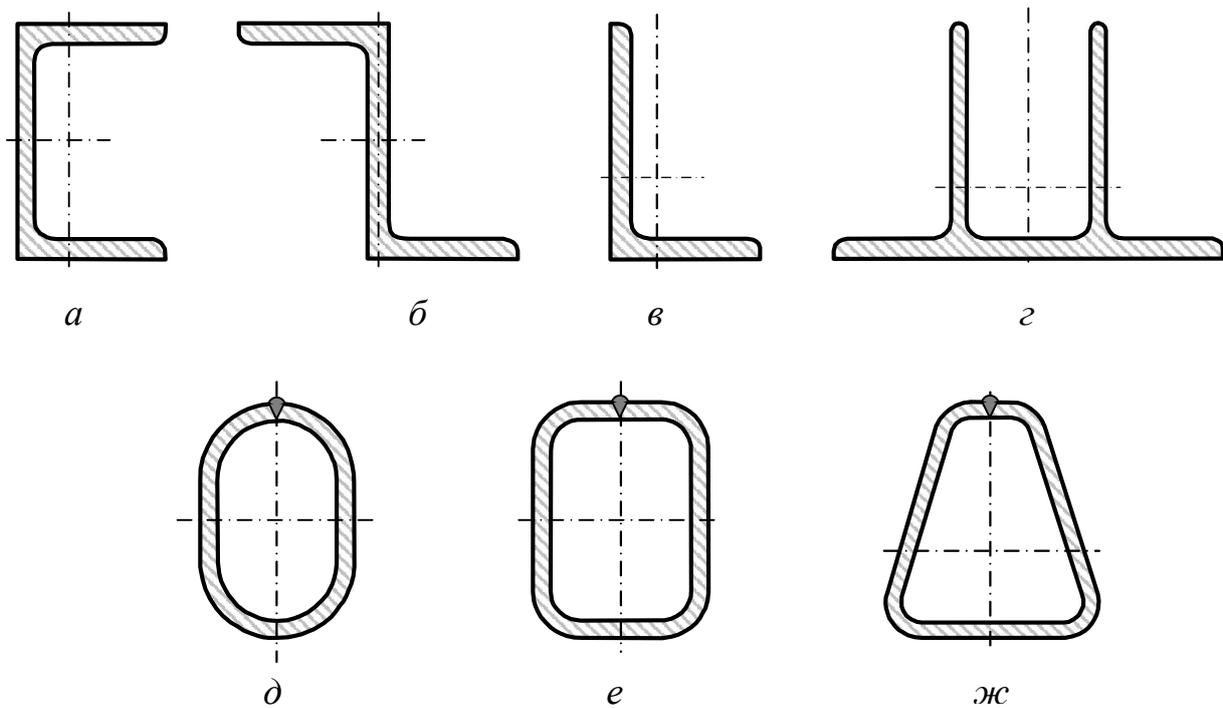


Рис. 2

В тонкостенных стержнях **замкнутого** профиля депланация существенно меньше, и для них можно использовать обычную теорию изгиба и кручения стержней. Явления, возникающие в стержнях **открытого** профиля, не могут быть учтены прежними моделями изгиба и кручения стержней.

При выводе Журавским Д. И. формулы касательных напряжений для поперечного изгиба

$$\tau = \frac{Q \cdot S'_z}{b \cdot I_z} \quad (1)$$

рассмотрен частный случай: сечение симметричное, сплошное. Была принята гипотеза о параллельности касательных напряжений, уравнивающей их поперечной силе. Поперечная сила  $Q$  полностью уравнивается равнодействующей касательных напряжений  $R_\tau$ , что исключает возможность появления крутящего момента. Гипотеза справедлива для балок **прямоугольного** поперечного сечения.

При поперечном изгибе балок несимметричного сечения касательные

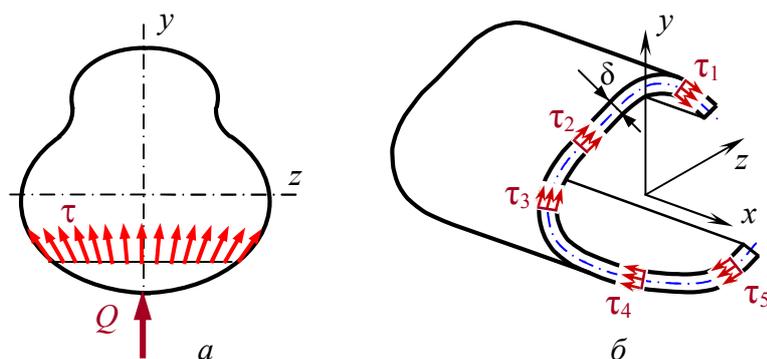


Рис. 3

напряжения распределяются по сечению балки несимметрично относительно главной центральной оси инерции сечения, вдоль которой приложена поперечная сила  $Q$ . Равнодействующая касательных на-

пряжений  $R_\tau$  не проходит через центр тяжести поперечного сечения балки. Возникает пара сил, приводящая к появлению дополнительных касательных напряжений кручения.

В приповерхностном слое детали **произвольной формы** (рис. 3, а) касательные напряжения направлены по касательной к контуру сечения. Касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении тонкостенного профиля, направлены по касательной к линии контура (рис. 3, б).

### Касательные напряжения при изгибе тонкостенных стержней открытого профиля. Центр изгиба

При выводе формулы касательных напряжений для тонкостенных профилей принят ряд допущений, упрощающих решение задачи.

1. Касательные напряжения в поперечных сечениях тонкостенного стержня направлены параллельно касательной к средней линии сечения (**не параллельны оси  $y$ !**).
2. Касательные напряжения в поперечных сечениях тонкостенного стержня равномерно распределены по толщине стенки сечения (**ширина сечения определяется минимальным размером  $\delta$ , а не размером по направлению оси  $z$ !**).

Величину касательных напряжений определяют по формуле, аналогичной (1), отличающейся от нее только тем, что вместо ширины  $b$  сечения на уровне определения касательных напряжений, используют толщину  $\delta$

$$\tau = \frac{Q \cdot S'_z}{\delta \cdot I_z} \quad (2)$$

### Кольцевое поперечное сечение

Осевой момент инерции кольцевого профиля (рис. 4)

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi (R-t)^4}{4} = \dots = \pi R^3 t \left[ 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{t}{R} \right) + \left( \frac{t}{R} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{t}{R} \right)^3 \right].$$

Поскольку для тонкостенных стержней  $R \gg t$ , членами, содержащими отношение  $(t/R)$  можно пренебречь. Тогда

$$I_z = \pi R^3 t \quad (3)$$

Статический момент части сечения, расположенной за уровнем, определяемым текущим центральным углом  $\varphi$  (эта часть сечения заштрихована), равен:

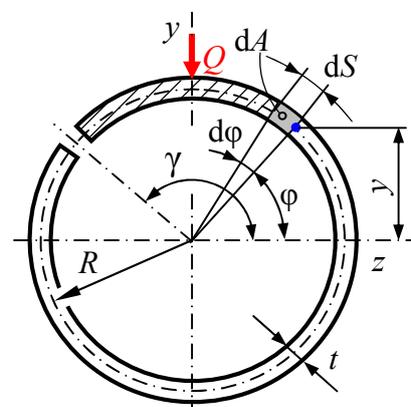


Рис. 4

$$S'_z = \int_{\varphi}^{\gamma} R^2 \cdot t \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = -R^2 t (\cos \gamma - \cos \varphi);$$

$$S'_z = R^2 (\cos \varphi - \cos \gamma).$$

Подставив найденные значения  $I_z$  и  $S'_z$  в уравнение (2), получим:

$$\tau = \frac{Q \cdot S'_z}{t \cdot I_z} \quad (2) \quad \tau = \frac{Q}{\pi R t} (\cos \varphi - \cos \gamma). \quad (4)$$

Уравнение (4) позволяет определить касательные напряжения в любой точке сечения при произвольном расположении прорези относительно плоскости действия внешних нагрузок.

В одном из предельных случаев, если прорезь расположена на горизонтальной оси сечения (рис. 6, а), угол  $\gamma = \pi$ . Уравнение (4) принимает вид:

$$\tau = \frac{Q}{\pi R t} (1 + \cos \varphi).$$

Максимальных значений касательные напряжения достигают в точках сечения, лежащих на нейтральной оси при  $\varphi = 0$ . Направление касательных напряжений постоянно по всему сечению. Внутренние касательные усилия создают в поперечных сечениях стержня крутящие моменты, которые могут быть уравновешены приложением внешних нагрузок в центр изгиба  $C$  на расстоянии  $2R$  от центра сечения.

**Центр изгиба** – точка, относительно которой момент от касательных напряжений, действующих в сечении, равен нулю.

Во втором случае, когда прорезь поперечного сечения лежит в плоскости действия внешних сил (рис. 5, б), угол  $\gamma = \pi/2$ ; уравнение (4) принимает вид:

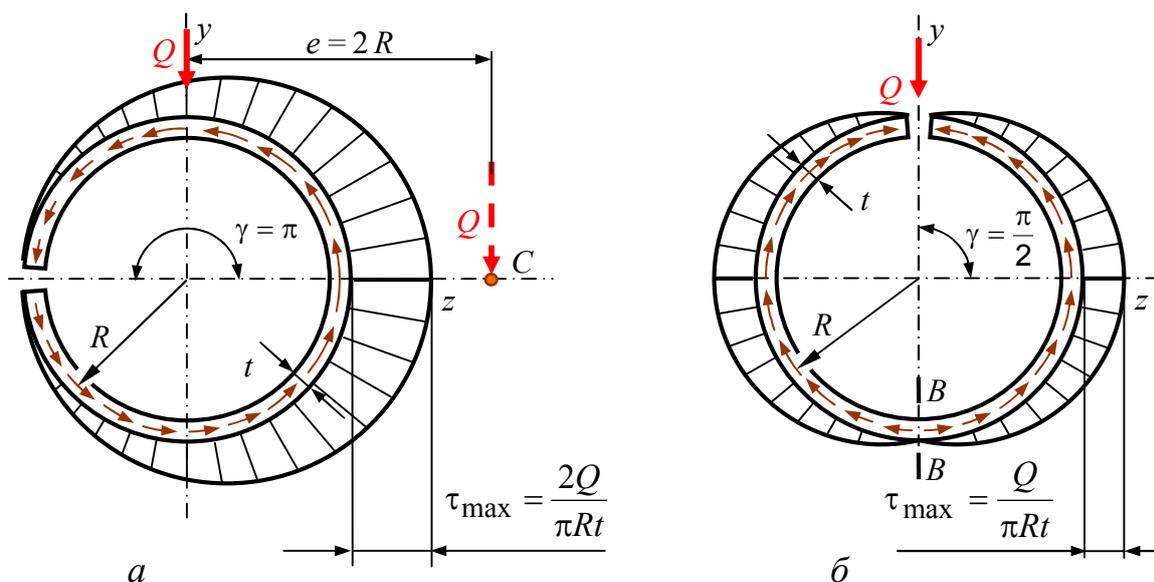


Рис. 5

$$\tau = \frac{Q}{\pi R t} \cos \varphi.$$

Касательные напряжения при переходе через нуль (в точке  $B$ ) изменяют знак, а, следовательно, и направление. Максимального значения касательные напряжения достигают в точках сечения, лежащих на нейтральной оси. Их значение вдвое меньше, чем в случае горизонтального расположения прорези.

Момент внутренних касательных усилий равен нулю. Центр изгиба совпадает с центром кругового кольцевого сечения. При таком положении прорези стержень испытывает только плоский поперечный изгиб без кручения. Знак касательных напряжений меняется в сечении  $B-B$ .

### Поперечное сечение, составленное из прямоугольников

Широко распространенный в металлоконструкциях профиль – швеллер обычно располагают таким образом, чтобы изгиб происходил в плоскости наибольшей жесткости, то есть относительно оси  $z$  (рис. 6). Если деформирующие силы располагаются в главной центральной плоскости инерции (вдоль оси  $y$ ), швеллер будет испытывать изгиб с кручением. Скручивающие моменты определяются произведением равнодействующих касательных сил (показаны стрелками на рис. 6, б) в полках (треугольные эпюры) и стойке (параболическая эпюра) на расстояния от них до центра тяжести сечения  $O$ . Эти три момента направлены против хода часовой стрелки на рисунке 6. Чтобы закручивания не происходило, плоскость действия внешних нагрузок должна проходить через центр изгиба  $C$  (рис. 6, а). В этом случае направление момента  $Q \cdot e$  противоположно моменту от касательных напряжений.

При определении момента внутренних касательных усилий удобнее точку приведения сил взять не в центре тяжести всего сечения  $O$ , а на оси  $y_1$ , проходящей через центр тяжести стойки швеллера в точке  $O_1$ . В этом случае момент от касательных усилий, расположенных в сечении стойки, равен нулю, и в расчетах будут участвовать не три слагаемых, а только два.

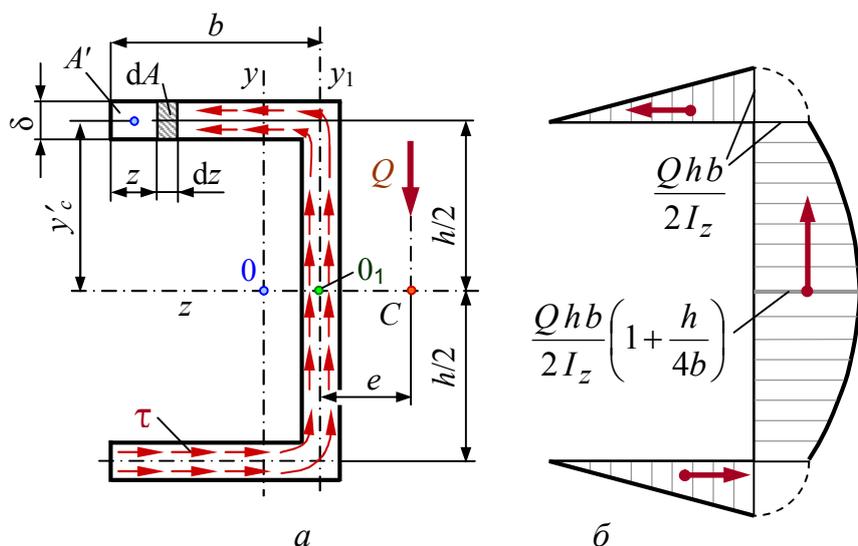


Рис. 6

В этом случае момент от касательных усилий, расположенных в сечении стойки, равен нулю, и в расчетах будут участвовать не три слагаемых, а только два.

Статический момент относительно нейтральной оси  $z$  части полки, ограниченной координатой  $z$  (рис. 6, а), равен

$$S'_z = A' \cdot y'_c = (z\delta) \left( \frac{h}{2} \right) = \frac{\delta h}{2} z.$$

Касательные напряжения в полке изменяются по линейной зависимости вдоль оси  $z$  (рис. 5, б)

$$\tau = \frac{Q \cdot S'_z}{\delta \cdot I_z} = \frac{Q \cdot \delta \cdot h}{2 \cdot \delta \cdot I_z} z = \frac{Q \cdot h}{2 \cdot I_z} z$$

и достигают максимальных значений на границе со стойкой при  $z = b$ . По высоте стойки швеллера касательные напряжения изменяются по параболическому закону и достигают наибольших значений на нейтральной оси. Здесь статический момент отсеченной части площади состоит из двух слагаемых

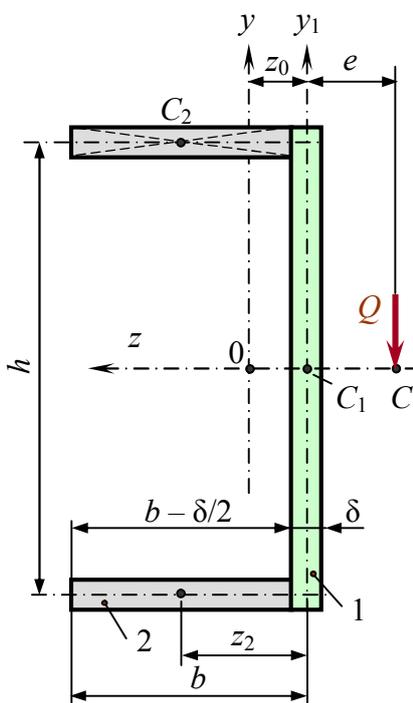


Рис. 7

$$S'_z = b \cdot \delta \frac{h}{2} + \delta \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{\delta h b}{2} \left( 1 + \frac{h}{4b} \right);$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S'_z}{\delta \cdot I_z} = \frac{Q \delta h b}{2 \delta I_z} \left( 1 + \frac{h}{4b} \right) = \frac{Q h b}{2 I_z} \left( 1 + \frac{h}{4b} \right).$$

Определим геометрические характеристики тонкостенного швеллера. Испытуемая балка для данной лабораторной работы является не стандартным прокатным швеллером, а профилем, гнутым из листа. По этой причине положение центра тяжести сечения и момент инерции вычисляем, используя формулы и приемы, известные из раздела «Геометрические характеристики плоских сечений». Размеры поперечного сечения, как принято для тонкостенных профилей, указаны по срединным линиям и приведены ниже.

Размеры поперечного сечения			Длина балки
$\delta = 1,7 \text{ мм};$	$b = 30 \text{ мм};$	$h = 60 \text{ мм};$	$\ell = 1 \text{ м}.$

Одна из главных центральных осей инерции  $z$  является осью симметрии и расстояние до нее от любых из полок равно  $h/2$ . Условно разбиваем профиль на три простых фигуры (рис. 6): стойку – прямоугольник 1 с размерами сторон  $\delta \times (h+\delta)$  и две полки 2 размером  $(b - \delta/2) \times \delta$ .

$$I_z = (I_z)_1 + 2(I_z)_2 = \frac{\delta(h+\delta)^3}{12} + 2 \left( \frac{(b-\delta/2)\delta^3}{12} + \left( \frac{h}{2} \right)^2 (b-\delta)\delta \right).$$

Момент инерции составной фигуры относительно оси  $z$ :

Напомним, для рассматриваемого тонкостенного профиля отношения размеров  $\delta/b = 1,7/30 = 0,056$  и  $\delta/h = 1,7/60 = 0,028$ , то есть много меньше  $1/10$ , поэтому, если раскрыть скобки и пренебречь членами, содержащими толщину листа  $\delta$  во второй, третьей и четвертой степенях, вследствие их относительной малости, получим более простую формулу

$$I_z = \frac{\delta h^2}{12} (h + 6b) \quad (3)$$

Расстояние  $z_0$  до центральной оси  $y$  от средней линии стойки профиля  $y_1$  найдем, предварительно вычислив абсциссы центров тяжести составных фигур и их площади

$$\begin{aligned} z_1 &= 0; \\ z_2 &= \frac{b - \delta/2}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{2b + \delta}{4} = \frac{61,7}{4} = 15,4 \text{ мм}; \\ A_1 &= (h + \delta) \cdot \delta = 61,7 \cdot 1,7 = 104,9 \text{ мм}^2; \\ A_2 &= (b - \delta/2) \delta = (30 - 0,85) 1,7 = 49,6 \text{ мм}^2. \end{aligned}$$

$$z_0 = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot 2A_2}{A_1 + 2A_2} = \frac{15,4 \cdot 2 \cdot 49,6}{104,9 + 2 \cdot 49,6} = 7,49 \text{ мм}. \quad (4)$$

Касательные усилия  $\tau \cdot dA = \tau \cdot \delta \cdot dz$ , действующие в двух полках на плече  $h/2$ , дают крутящий момент (против хода часовой стрелки на рисунке б)

$$M_\tau = 2 \int_0^b \left( \frac{Qh}{2I_z} \right) \left( \frac{h}{2} \right) \delta z dz = \frac{Qh^2 b^2 \delta}{4I_z}.$$

Для предотвращения деформации кручения следует поперечную силу  $Q$  приложить в точку  $C$  на расстоянии  $e$ , создавая тем самым момент  $M_Q = Q \cdot e$  в обратном направлении. Приравнявая моменты  $M_\tau = M_Q$ , най-

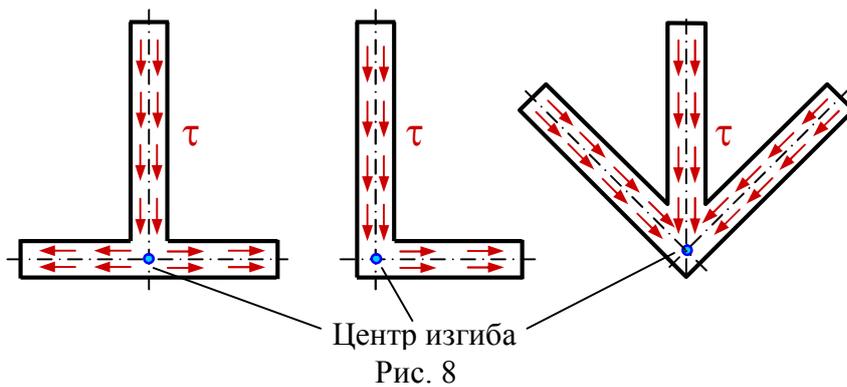
дем расстояние  $e$  до центра изгиба  $\frac{Qh^2 b^2 \delta}{4I_z} = Q \cdot e$ , откуда

$$e = \frac{h^2 b^2 \delta}{4I_z}. \quad (5)$$

Подставив в формулу (4) выражение (3) момента инерции, получим иную формулу для определения расстояния до центра изгиба

$$e = \frac{h^2 b^2 \delta}{4} \frac{12}{\delta h^2 (h + 6b)} = \frac{3b^2}{h + 6b}.$$

Для сечений, имеющих две оси симметрии (например, двутавровое), центр изгиба совпадает, очевидно, с центром тяжести.



Центр изгиба  
Рис. 8

Легко установить положение центра изгиба для тонкостенного сечения, состоящего из нескольких прямоугольников, оси которых пересекаются в одной точке (рис. 8). Ка-

сательные напряжения в каждом таком прямоугольнике при прямом поперечном изгибе направлены параллельны его длинным сторонам, а равнодействующая элементарных касательных сил по каждому прямоугольнику совпадает с его осью. Все такие равнодействующие пересекаются в одной точке (в точке пересечения осей прямоугольников), а потому поперечная сила в сечении, являющаяся их общей равнодействующей, при прямом поперечном изгибе проходит через эту точку, которая, следовательно, и является центром изгиба.

## 2. Экспериментальная часть

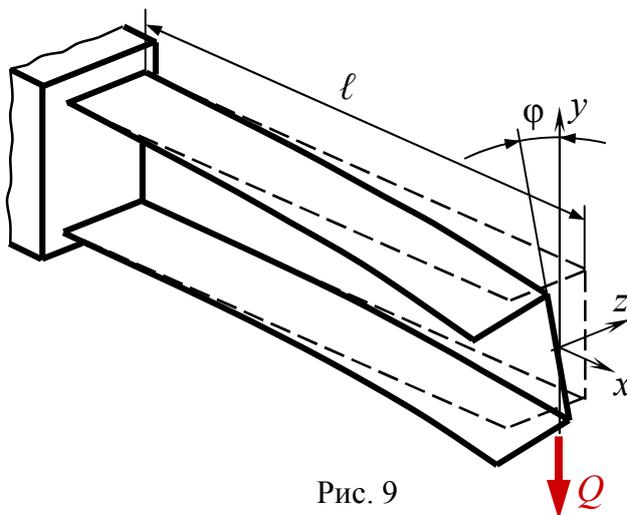


Рис. 9

При несовпадении центра тяжести с центром изгиба сечения поперечная нагрузка  $Q$ , приложенная в центре тяжести (рис. 9), вызывает не только изгиб, но и кручение стержня. Эксперимент заключается в определении положения каретки с грузом  $Q$  вдоль оси  $z$ , при котором угол  $\phi$  закручивания консольного сечения *изменится* на противоположный.

К торцу образца 1 (рис. 10) прикреплена линейка 3, с помощью которой контролируют положение каретки 4 с гиревым подвесом 5. При перемещении каретки 4 с грузом слева направо (по рис. 9 и 10) значения угла  $\phi$  уменьшаются и, проходя через нулевое значение, изменяют свой знак. При этом показания одного из индикаторов 2, укрепленных на станине, увеличиваются, а другого – уменьшаются. Особенностью лабораторной установки является использование в качестве измерительного инструмента *обычной* линейки 3, закрепленной вблизи направляющей, по которой перемещается каретка 4 с грузом. Нулевая отметка линейки по обыкновению слева, а с центральной осью швеллера совпадает цифра 10. Таким образом, если каретка установлена на цифру 10, нагружение будет происходить в главной центральной плоско-

сти инерции. При установке каретки против цифры 11 линия действия силы смещена на 10 мм в сторону центра изгиба, если установить каретку против цифры 12, то смещение будет на 20 мм.

Следует обратить внимание на то, что расстояния до центра изгиба аналитически и экспериментально определяются от *разных* точек начала отсчета. Аналитически по формуле (5) – от срединной линии стойки швеллера, экспериментально – от главной центральной оси  $y$  швеллера. Расстояние между этими линиями равно  $z_0$ , которое вычисляется по формуле (4).

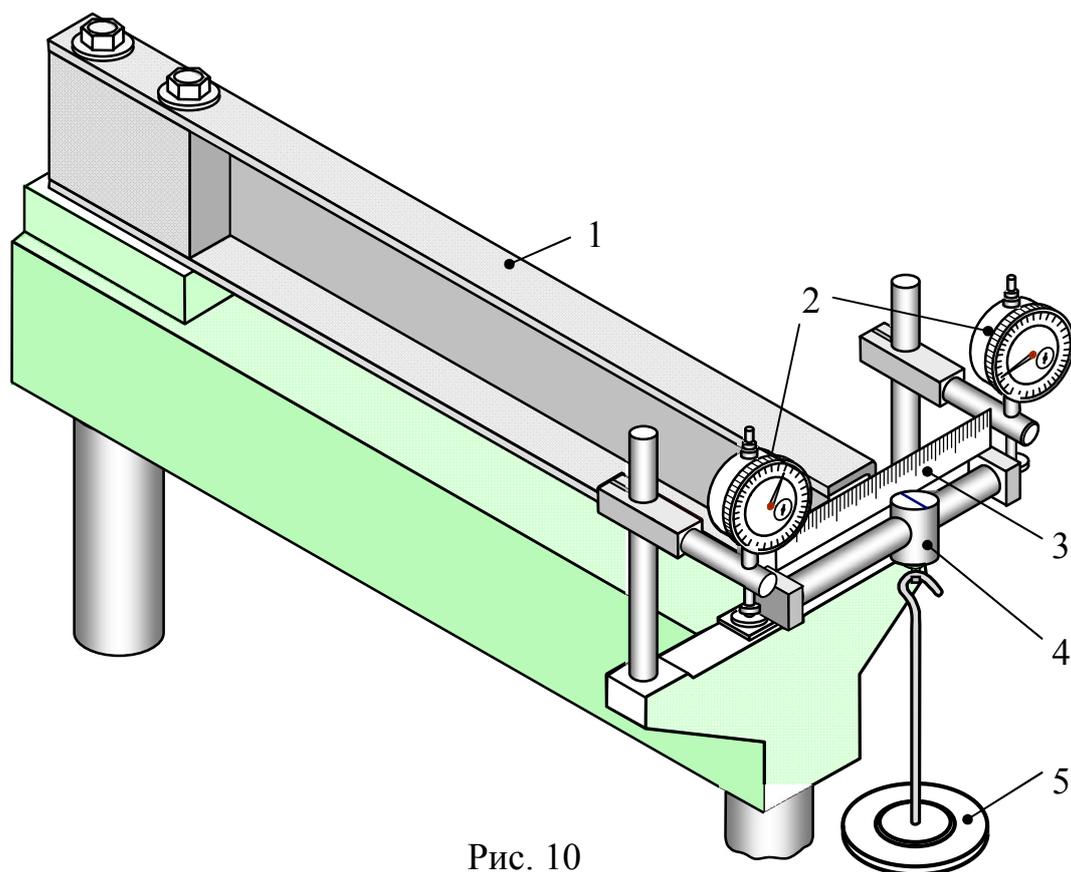


Рис. 10

Рекомендуется следующий порядок проведения эксперимента.

1. Установить каретку 4 с гиревым подносом 5 таким образом, чтобы линия действия силы совпадала с главной центральной плоскостью инерции (визирная линия на цифре 10); снять показания индикаторов при отсутствии внешних сил и занести их в таблицу.
2. Аккуратно уложить груз массой 1 или 1,5 кг на гиревой поднос 5; снять показания обоих индикаторов 2 и занести их в таблицу.
3. Снять груз и переместить каретку 4 на 10 мм в сторону предполагаемого нахождения центра изгиба (вправо); снять показания индикаторов при ненагруженном состоянии лабораторной установки и занести их в таблицу.
4. Повторить пункты 2 и 3 несколько раз. Построить график зависимости угла  $\varphi$  закручивания сечения (либо тангенса угла  $\varphi$  закручивания сечения, или просто разности приращений  $\Delta_{\text{лев}} - \Delta_{\text{прав}}$ ) от положения каретки

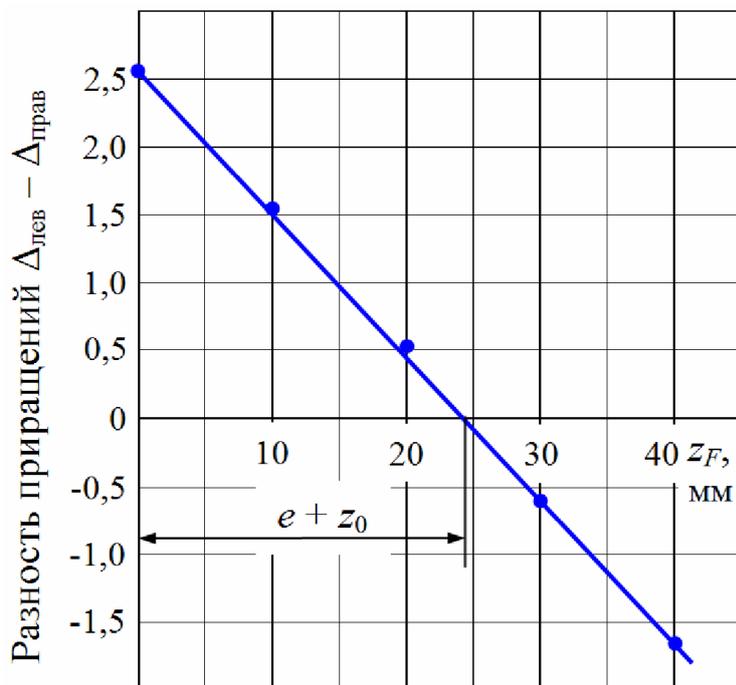
с грузом. Пересечение графика с осью абсцисс соответствует сумме двух отрезков:  $z_0 + e$ .

Таблица

Деформация свободного конца балки

Положение каретки		Показания индикаторов, мм						Разность приращений $\Delta_{лев} - \Delta_{прав}$	Тангенс угла $\varphi$
		Левый			Правый				
Метки на линейке	Координата $z_F$ , мм	Без нагрузки	С нагрузкой	Приращение, $\Delta_{лев}$	Без нагрузки	Под нагрузкой	Приращение, $\Delta_{прав}$		
10	0								
11	10								
12	20								
13	30								
14	40								

5. Сопоставить значения расстояний до центра изгиба, найденных аналитическим и экспериментальным путем, найти погрешность в процентах.



Тангенс угла  $\varphi$  закручивания сечения при любом положении каретки определять по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta_{лев} - \Delta_{прав}}{b},$$

где  $b = 230$  мм – база, расстояние между индикаторами.

### **3. Вопросы для самопроверки**

1. Дайте определение термину «тонкостенный стержень». Приведите примеры тонкостенных профилей открытых и замкнутых.
2. Каковы особенности деформации тонкостенных стержней открытого профиля при поперечном изгибе?
3. Как направлены касательные напряжения в приповерхностном слое детали произвольной формы?
4. Каково направление касательных напряжений в тонкостенном профиле?
5. Перечислите допущения, принятые при выводе формулы касательных напряжений для тонкостенных профилей.
6. По каким формулам определяют касательные напряжения при поперечном изгибе балок сплошного сечения и тонкостенного профиля? В чем заключается их отличие?
7. Каков характер распределения касательных напряжений при поперечном изгибе кольцевого незамкнутого сечения при различной ориентации прорези?
8. Дайте определение понятию «центр изгиба».
9. По какой формуле определяют положение центра изгиба кольцевого незамкнутого профиля?
10. Как расположен центр изгиба в сечениях, имеющих две оси симметрии сечения?
11. Каков характер распределения (направление и тип функции) касательных напряжений в полках и стойке швеллера?
12. Укажите положение центра изгиба таврового сечения и уголка.
13. По какой формуле определяют положение центра изгиба швеллера?
14. В каком направлении будет закручиваться сечение швеллера в случае приложения сосредоточенной силы в главной плоскости инерции?
15. В каком направлении будет закручиваться сечение швеллера в случае приложения изгибающего момента в главной плоскости инерции?
16. По какой причине удобно вычислять расстояние до центра изгиба не от центра тяжести сечения, а от средней линии стойки швеллера?

### **4. Правила по технике безопасности**

1. Из-за возможности падения груза и получения травмы запрещено проводить эксперимент более одному студенту.

2. Запрещено класть грузы на установку, столы, стулья и другие места, не предусмотренные для хранения грузов.

#### **Список рекомендуемой литературы**

1. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов: Учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высш. шк., 1995. – 560 с.