

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. К. Манжосов

**РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНОЙ
СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ
БАЛКИ**

Методические указания

Ульяновск
2010

УДК 624.04(076)

ББК 38.121я7

М 23

Рецензент канд. техн. наук, доцент А. Н. Черный

Одобрено секцией методических пособий научно-методического совета университета.

Манжосов, В. К.

М 23

Расчет многопролетной статически определимой балки : методические указания. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 36 с.

Составлены в соответствии с учебными программами по дисциплине «Строительная механика» для направления «Строительство». Методические указания предназначены для выполнения расчетно-проектировочных и контрольных заданий, предусмотренных рабочими программами по дисциплине.

Работа подготовлена на кафедре теоретической и прикладной механики.

УДК 624.04(076)

ББК 38.121я7

Учебное издание

МАНЖОСОВ Владимир Кузьмич

РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

Методические указания

Редактор М. В. Теленкова

Подписано в печать 01.10.2010. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 2,09.

Тираж 100 экз. Заказ 1039. ЭИ № 534.

Ульяновский государственный технический университет,
432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.

Типография УлГТУ, 432027, Сев. Венец, 32

© Манжосов В. К., 2010.

© Оформление. УлГТУ, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

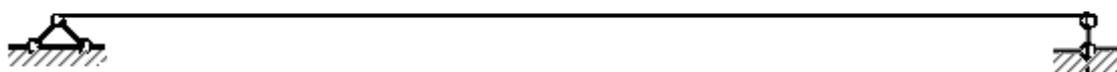
РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ.....	4
1. Основные понятия.....	4
2. Расчет многопролетной статически определимой балки	6
2.1. Задание для расчета.....	6
2.2. Кинематический анализ.....	7
2.3. Определение реакций в опорах балки	7
2.3.1. Определение реакций в опорах балки путем разделения многопролетной балки на составные балки.....	7
2.3.2. Определение реакций в опорах балки на основе использования принципа возможных перемещений.....	10
2.4. Расчет поперечных сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях балки. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	15
2.5. Линии влияния опорных реакций многопролетной балки....	18
2.6. Линии влияния поперечных сил и изгибающих моментов для заданных сечений многопролетной балки.....	23
2.7. Определение усилий по линиям влияния и сопоставление с аналитическими данными.....	26
2.7.1. Определение реакций опор по линиям влияния.....	26
2.7.2. Определение по линиям влияния поперечных сил и изгибающих моментов в заданных сечениях 1 и 2.....	29
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	31
ПРИЛОЖЕНИЕ	32

РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

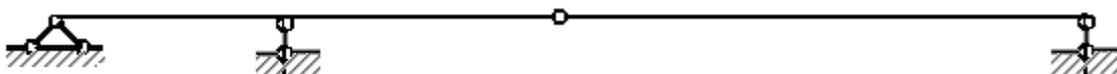
1. Основные понятия

Многопролетной статически определимой балкой называется статически определимая геометрически неизменяемая стержневая система, состоящая из однопролетных балок (с консолями или без консолей), последовательно соединенных между собой шарнирами.

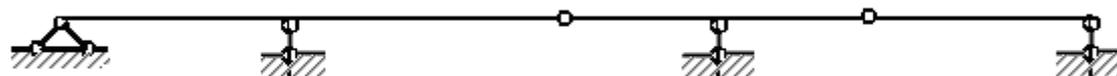
Многопролетную статически определимую балку можно построить из неразрезной балки заданной длины, имеющей три опорных стержня (рис. 1, а), если включить в нее шарнирные соединения и дополнительные опорные стержни, ограничивающие взаимные повороты образовавшихся балок (рис. 1, б, в, г, д).



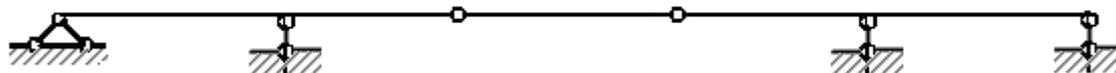
а) Однопролетная статически определимая балка ($n = 1, C_0 = 3$)



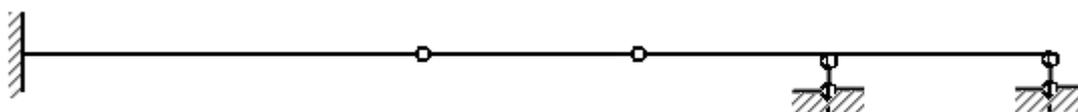
б) Двухпролетная статически определимая балка ($n = 2, p = 1, C_0 = 4$)



в) Трехпролетная статически определимая балка ($n = 3, p = 2, C_0 = 5$)



г) Трехпролетная статически определимая балка ($n = 3, p = 2, C_0 = 5$)



д) Двухпролетная статически определимая балка ($n = 3, p = 2, C_0 = 5$)

Рис. 1. Схемы много пролетных статически определимых балок

Так, например, на рис. 1, б представлена схема двухпролетной балки, которая образована из однопролетной балки (рис. 1, а) заданной длины путем введения шарнирного соединения (число шарниров $p = 1$) и дополнительного

опорного стержня, ограничивающего взаимный поворот образовавшихся двух балок (число балок $n = 2$, число опорных стержней $C_0 = 3 + 1 = 4$).

Заметим, что опора типа заделки эквивалентна трем опорным стержням, шарнирно-неподвижная опора эквивалентна двум опорным стержням и шарнирно-подвижная опора – одному опорному стержню.

На рис. 1, в, г представлены схемы трехпролетных балок, которые образованы из однопролетной балки (рис. 1, а) заданной длины путем введения двух шарнирных соединений (число шарниров $p = 2$) и двух дополнительных опорных стержней, ограничивающих взаимный поворот образовавшихся трех балок (число балок $n = 3$, число опорных стержней $C_0 = 3 + 2 = 5$).

На рис. 1, д представлена схема двухпролетной балки, которая образована из одной защемленной балки заданной длины путем введения двух шарнирных соединений (число шарниров $p = 2$) и двух дополнительных опорных стержней, ограничивающих взаимный поворот образовавшихся трех балок (число балок $n = 3$, число опорных стержней $C_0 = 3 + 2 = 5$).

Для того, чтобы образованная стержневая система была геометрически неизменяемая, необходимо, чтобы общее число опорных стержней соответствовало равенству

$$C_0 = n + 2, \quad (1.1)$$

т. е. число опорных стержней на две единицы превышает число балок, соединяемых с помощью шарниров.

Для того, чтобы образованная стержневая система была статически определима, необходимо, чтобы число степеней свободы w системы было равно нулю. Число степеней свободы w стержневой системы, состоящей из n балок, соединенных с помощью p шарниров, и имеющей C_0 опорных стержней, можно определить как

$$w = 3n - 2p - C_0. \quad (1.2)$$

Тогда при $w = 0$ общее число опорных стержней C_0 должно соответствовать равенству

$$C_0 = 3n - 2p. \quad (1.3)$$

Приравнивая (1.1) и (1.2), находим зависимость числа шарниров от числа соединяемых балок:

$$p = n - 1, \quad (1.4)$$

т. е. число шарнирных соединений в многопролетной балке на единицу меньше числа соединяемых балок.

При оценке статической определимости и геометрической неизменяемости многопролетной балки кроме анализа условий (1.1), (1.2), (1.3) и (1.4) необходимо рассматривать способы образования многопролетной балки:

- 1) многопролетная балка должна иметь основную балку, установленную на трех опорных стержнях (рис. 1, б, в, г, д);
- 2) соединяемая с помощью шарнира последующая балка должна опираться на дополнительный опорный стержень (рис. 1, б, в);

3) если соединяемая с помощью шарнира последующая балка не опирается на дополнительный опорный стержень, она должна быть соединена посредством другого шарнира с балкой, установленной на двух опорных стержнях (рис. 1, г, д).

Так, например, многопролетная балка, схема которой представлена на рис. 2, не является статически определимой и геометрически неизменяемой, хотя условия (1.1), (1.2), (1.3) и (1.4) удовлетворяются.

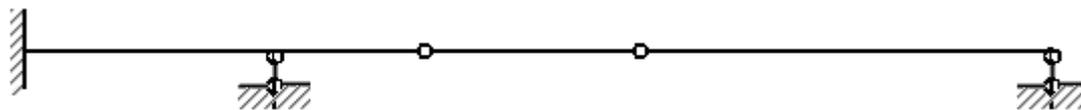


Рис. 2. Схема многопролетной статически неопределимой и геометрически неизменяемой балки

Для схемы многопролетной балки (рис. 2) нарушены способы ее образования: основная балка имеет не три, а четыре опорных стержня (такая балка является статически неопределимой); соединяемая с помощью шарнира последующая балка не опирается на дополнительный опорный стержень и соединена посредством другого шарнира с другой балкой, установленной только на одном опорном стержне (такое соединение балок не обеспечивает геометрическую неизменяемость).

2. Расчет многопролетной статически определимой балки

2.1. Задание для расчета

Для заданной многопролетной статически определимой балки, схема нагружения которой приведены на рис. 3, требуется:

1. Произвести кинематический анализ.
2. Определить реакции в опорах балки.
3. Определить значения и построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях балки.
4. Построить линии влияния двух опорных реакций (по выбору).
5. Для заданных сечений 1 и 2 построить линии влияния поперечных сил и изгибающих моментов.
6. По линиям влияния определить внутренние силовые факторы в заданных сечениях и сопоставить их со значениями на соответствующих эпюрах.

Исходные данные: $M = 60$ кНм, $P = 20$ кН, $q = 40$ кН/м, $l = 2$ м, $k = 1,5$.

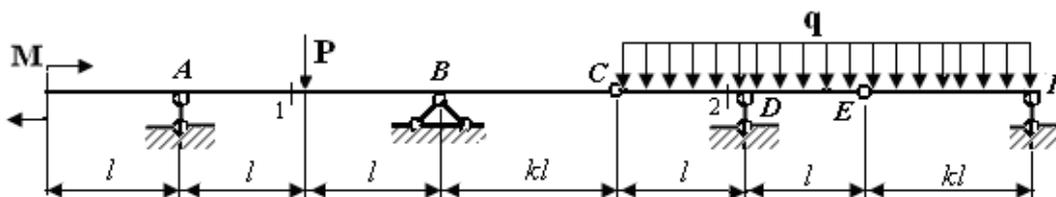


Рис. 3. Схема многопролетной балки

2.2. Кинематический анализ

Цель кинематического анализа – выяснить геометрическую неизменяемость сооружения. Геометрическая неизменяемость сооружения обеспечивается в том случае, если степень свободы сооружения равна нулю.

Определим степень свободы многопролетной балки w по формуле (1.2)

$$w = 3n - 2p - C_0,$$

где n – число соединяемых балок, p – число шарниров, C_0 – число опорных стержней.

Так как для схемы многопролетной балки (рис. 3) $n = 3$, $p = 2$, $C_0 = 5$, то

$$w = 3n - 2p - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0.$$

Многопролетная балка имеет основную балку с тремя опорными стержнями (условие 1 способа образования многопролетных балок); соединяемая с помощью шарнира последующая балка опирается на дополнительный опорный стержень (условие 2 способа образования многопролетных балок).

Таким образом, заданная многопролетная балка является статически определимой и геометрически неизменяемой.

2.3. Определение реакций в опорах балки

2.3.1. Определение реакций в опорах балки путем разделения многопролетной балки на составные балки

Число неизвестных реакций связей равно числу опорных стержней C_0 многопролетной балки, т. е. равно 5. А для плоской системы сил, действующих на многопролетную балку, можно составить только три уравнения равновесия. Естественно поэтому при определении реакций связей стремление расчлнить систему в шарнирных соединениях и образовать отдельные балки, построив поэтажную схему взаимодействия балок (рис. 4).

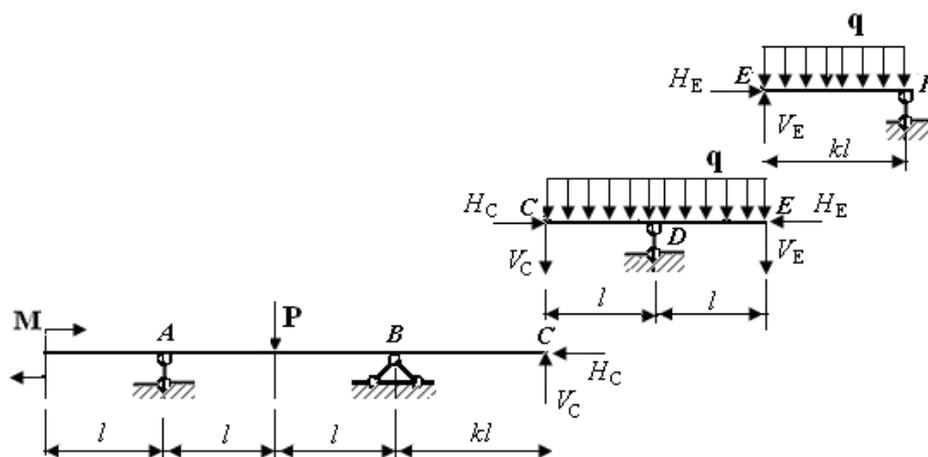


Рис. 4. Поэтажная схема взаимодействия балок

На нижнем уровне поэтажной схемы располагается балка, установленная на трех опорных стержнях (балка ABC), на следующих более высоких уровнях располагаются балки CE и EF .

При построении поэтажной схемы взаимодействия балок заменено введением соответствующих неизвестных пока реакций связей: H_C , V_C – реакции, определяющие взаимодействие балок ABC и CE ; H_E , V_E – реакции, определяющие взаимодействие балок CE и EF .

При изображении направления одноименных реакций следует обращать внимание, что эти реакции должны иметь противоположные направления при приложении их к взаимодействующим балкам. Например, реакции H_C и V_C , приложенные в точке C к балке CE , противоположно направлены реакциям H_C и V_C , приложенным в точке C к балке ABC . Реакции H_E и V_E , приложенные в точке E к балке EF , противоположно направлены реакциям H_E и V_E , приложенным в точке E к балке CE .

При разбиении многопролетной балки на n составных балок мы можем составить $3n$ уравнений равновесия (по три для каждой балки). Число неизвестных реакций связей при этом будет равно числу опорных стержней C_0 плюс $2p$ реакций связей (по две на каждое шарнирное соединение) при разделении многопролетной балки в шарнирных соединениях.

Для определения неизвестных реакций необходимо, чтобы число уравнений равновесия было равно числу неизвестных:

$$3n = C_0 + 2p.$$

Так как для статически определимой геометрически неизменяемой многопролетной балки из (1.2) это условие обеспечивается, то поставленная задача по определению опорных реакций разрешима.

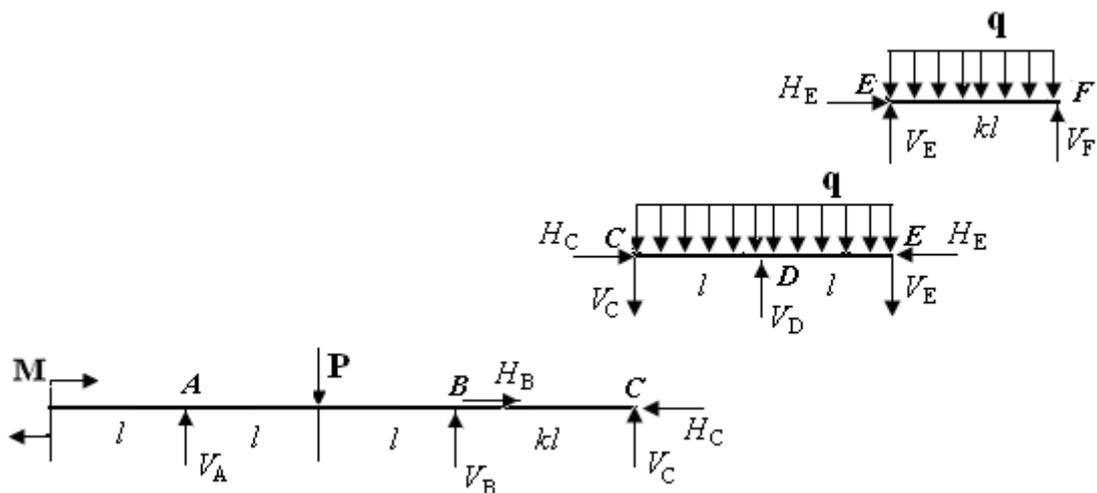


Рис. 5. Поэтажная схема взаимодействия балок с заменой опорных стержней реакциями связей

Начинать расчет следует с балки верхнего уровня (балки EF). В этом случае для определения реакций H_E , V_E и V_F (рис. 5) можно использовать следующие уравнения равновесия:

- сумма проекций на ось x всех сил, действующих на балку EF , равна нулю

$$\sum X_i = 0, \quad H_E = 0,$$

- сумма моментов всех сил, действующих на балку EF , относительно точки E равна нулю

$$\sum M_E(P_i) = 0, \quad V_F \cdot kl - q \cdot kl^2 / 2 = 0, \quad \text{откуда } V_F = q \cdot kl / 2 = 40 \cdot 3 / 2 = 60 \text{ кН},$$

- сумма моментов всех сил, действующих на балку EF , относительно точки F равна нулю

$$\sum M_F(P_i) = 0, \quad -V_E \cdot kl + q \cdot kl^2 / 2 = 0, \quad \text{откуда } V_E = q \cdot kl / 2 = 40 \cdot 3 / 2 = 60 \text{ кН}.$$

Проведем проверку правильного определения реакций, используя уравнение равновесия в виде суммы проекций на ось y сил, действующих на балку EF :

$$\sum Y_i = 0, \quad V_E + V_F - q \cdot kl = 0, \quad 60 + 60 - 40 \cdot 3 = 0$$

Далее переходим к расчету балки следующего уровня (балки CE , рис. 5). Реакции H_E и V_E уже определены. А для расчета реакций H_C , V_C и V_D вновь используем три уравнения равновесия:

- сумма проекций на ось x всех сил, действующих на балку CE , равна нулю

$$\sum X_i = 0, \quad H_C - H_E = 0, \quad H_C = H_E = 0,$$

- сумма моментов всех сил, действующих на балку CE , относительно точки C равна нулю

$$\sum M_C(P_i) = 0, \quad -q \cdot 2l \cdot l - V_E \cdot 2l + V_D \cdot l = 0, \quad \text{откуда}$$

$$V_D = 2V_E + 2ql = 2 \cdot 60 + 2 \cdot 40 \cdot 2 = 280 \text{ кН},$$

- сумма моментов всех сил, действующих на балку CE , относительно точки D равна нулю

$$\sum M_D(P_i) = 0, \quad -V_E \cdot l + V_C \cdot l = 0, \quad \text{откуда } V_C = V_E = 60 \text{ кН}.$$

Проведем проверку правильного определения реакций, используя уравнение равновесия в виде суммы проекций на ось y сил, действующих на балку CE :

$$\sum Y_i = 0, \quad -V_C - V_E + V_D - q \cdot 2l = 0, \quad -60 - 60 + 280 - 40 \cdot 4 = 0.$$

Далее переходим к расчету балки нижнего уровня (балки ABC , рис. 5). Реакции H_C и V_C уже определены. А для расчета реакций H_B , V_B и V_A вновь используем три уравнения равновесия:

сумма проекций на ось x всех сил, действующих на балку ABC , равна нулю

$$\sum X_i = 0, \quad -H_C + H_B = 0, \quad H_B = H_C = 0,$$

- сумма моментов всех сил, действующих на балку ABC , относительно точки A равна нулю

$$\sum M_A(P_i) = 0, \quad -M - Pl + V_B \cdot 2l + V_C(2l + kl) = 0,$$

$$\text{откуда } V_B = (M + Pl - V_C(2l + kl)) / 2l = (60 + 40 - 60 \cdot 7) / 4 = -80 \text{ кН},$$

- сумма моментов всех сил, действующих на балку ABC , относительно точки B равна нулю

$$\sum M_B(P_i) = 0, \quad -M + Pl - V_A \cdot 2l + V_C \cdot kl = 0,$$

откуда $V_A = (-M + Pl + V_C \cdot kl) / 2l = (-60 + 40 + 60 \cdot 3) / 4 = 40$ кН.

Проведем проверку правильного определения реакций, используя уравнение равновесия в виде суммы проекций на ось y сил, действующих на балку ABC :

$$\sum Y_i = 0, \quad V_A + V_B + V_C - P = 0, \quad 40 - 80 + 60 - 20 = 0.$$

Изобразим теперь расчетную схему многопролетной балки, заменив действие опорных стержней реакциями связей V_A , H_B , V_B , V_D и V_F (рис. 6).

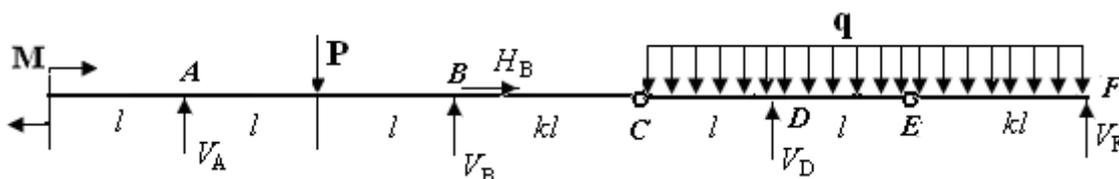


Рис. 6. Схема многопролетной балки с заменой опорных стержней реакциями связей

Проведем проверку правильного определения реакций, используя уравнение равновесия в виде суммы проекций на ось y сил, действующих на всю многопролетную балку:

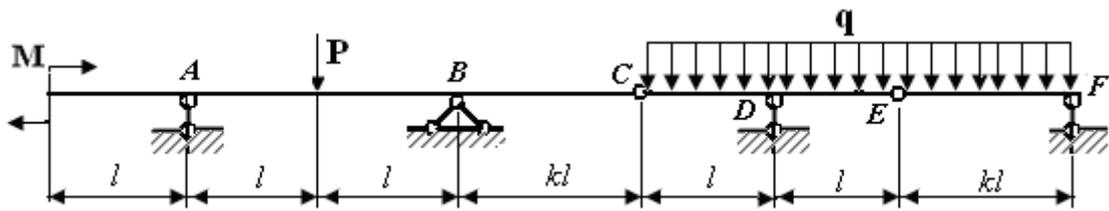
$$\sum Y_i = 0, \quad V_A + V_B + V_C + V_F - P - q(2l + kl) = 0, \\ 40 - 80 + 280 + 60 - 20 - 40 \cdot 7 = 0.$$

2.3.2. Определение реакций в опорах балки на основе использования принципа возможных перемещений

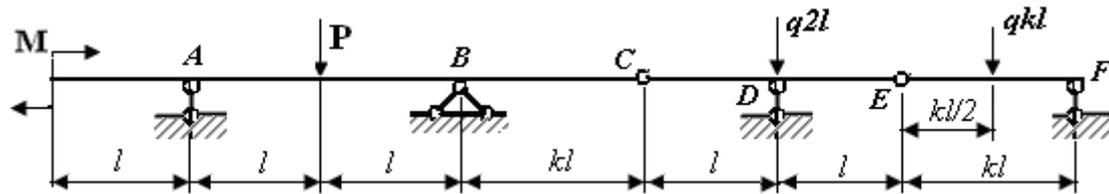
Изложенный выше способ определения опорных реакций путем разделения многопролетной балки на составные балки несколько громоздок, так как связан с построением поэтажной схемы взаимодействия балок, соблюдением правил приложения одноименных реакций шарнирных соединений к взаимодействующим балкам, необходимостью определения реакций шарнирных соединений, хотя это и не требуется по условию задания.

Рассмотрим способ определения реакций в опорах многопролетной балки на основе использования принципа возможных перемещений. Этот принцип формулируется следующим образом: для равновесия механической системы, подчиненной идеальным, стационарным и неосвобождающим связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы, если скорости точек системы в рассматриваемый момент времени равны нулю.

Рассмотрим вновь расчетную схему многопролетной балки (рис. 7, а). Заменим распределенную нагрузку на балке CE равнодействующей $q \cdot 2l$, приложенной в точке D , а распределенную нагрузку на балке EF равнодействующей $q \cdot kl$, приложенной в середине участка EF (рис. 7, б).



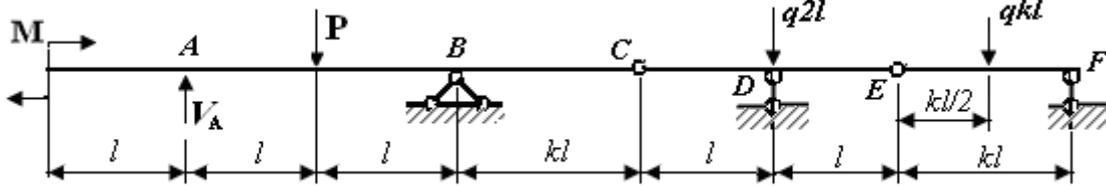
а) Схема многопролетной балки



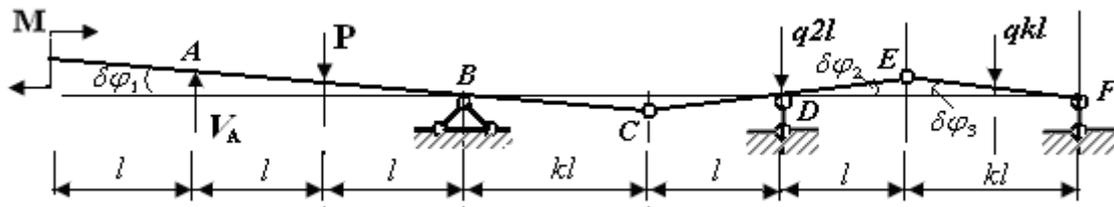
б) Схема многопролетной балки с заменой распределенной нагрузки равнодействующими

Рис. 7

Для определения опорной реакции V_A освободим многопролетную балку от шарнирно подвижной опоры A , заменив ее действие реакцией V_A (рис. 8, а). Оставшиеся связи предоставляют возможные перемещения для балок: для балки ABC – угловое перемещение $\delta\varphi_1$, для балки CE – угловое перемещение $\delta\varphi_2$, для балки EF – угловое перемещение $\delta\varphi_3$ (рис. 8, б).



а) Схема многопролетной балки



б) Схема многопролетной балки при возможных перемещениях составных балок

Рис. 8

Так как линейные перемещения точки C балок ABC и CE равны, то имеем

$$\delta s_C = kl \cdot \delta\varphi_1, \quad \delta s_C = l \cdot \delta\varphi_2, \quad \text{откуда } \delta\varphi_2 = k \cdot \delta\varphi_1. \quad (2.1)$$

Так как линейные перемещения точки E балок CE и EF равны, то имеем

$$\delta s_E = l \cdot \delta\varphi_2, \quad \delta s_E = kl \cdot \delta\varphi_3, \quad \text{откуда } \delta\varphi_3 = \delta\varphi_2 / k. \quad (2.2)$$

Учитывая (2.1) в (2.2), находим, что

$$\delta\varphi_3 = \delta\varphi_1. \quad (2.3)$$

Из принципа возможных перемещений сумма элементарных работ заданных сил на возможных перемещениях равна нулю (работа силы записывается со знаком плюс, если направление силы или момента совпадает с направлением возможного перемещения):

$$M \cdot \delta\varphi_1 + V_A \cdot \delta s_A - P \cdot \delta s_P - q \cdot kl \cdot \delta s_q = 0, \quad (2.4)$$

$$\text{где } \delta s_A = 2l \cdot \delta\varphi_1, \quad \delta s_P = l \cdot \delta\varphi_1, \quad \delta s_q = 0,5kl \cdot \delta\varphi_3 = 0,5kl \cdot \delta\varphi_1; \quad (2.5)$$

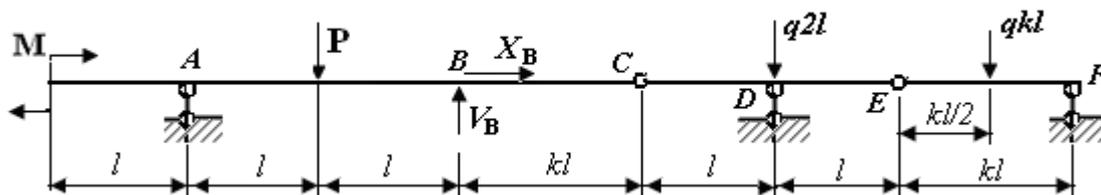
δs_A , δs_P , δs_q – линейные перемещения точек приложения сил V_A , P и равнодействующей $q \cdot kl$.

Из (2.4) с учетом (2.5) следует

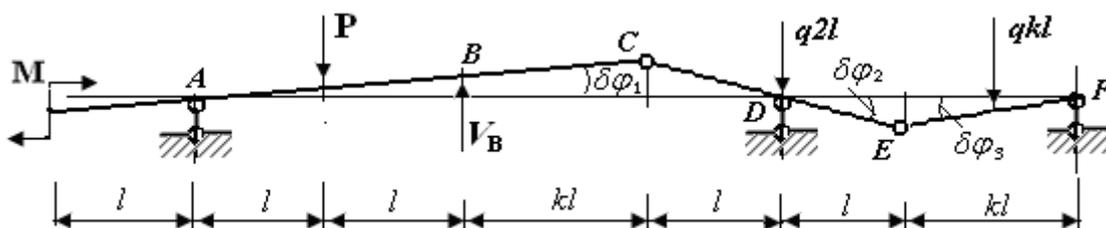
$$M \cdot \delta\varphi_1 + V_A \cdot 2l \cdot \delta\varphi_1 - P \cdot l \cdot \delta\varphi_1 - q \cdot kl \cdot 0,5kl \cdot \delta\varphi_1 = 0,$$

откуда $V_A = (-M + P \cdot l + 0,5q \cdot kl \cdot kl) / 2l = (-60 + 40 + 180) / 4 = 40$ кН.

Для определения опорной реакции V_B освободим многопролетную балку от шарнирно неподвижной опоры B , заменив ее действие реакциями V_B и X_B (рис. 9, а). Оставшиеся связи предоставляют возможные перемещения для балок: для балки ABC – угловое перемещение $\delta\varphi_1$, для балки CE – угловое перемещение $\delta\varphi_2$, для балки EF – угловое перемещение $\delta\varphi_3$ (рис. 9, б).



а) Схема многопролетной балки



б) Схема многопролетной балки при возможных перемещениях составных балок

Рис. 9

Реакция $X_B = 0$, так как на многопролетную балку не действуют силы в горизонтальном направлении.

Так как линейные перемещения точки C балок ABC и CE равны, то имеем

$$\delta s_C = (2l + kl) \cdot \delta\varphi_1, \quad \delta s_C = l \cdot \delta\varphi_2, \quad \text{откуда } \delta\varphi_2 = (2 + k) \cdot \delta\varphi_1. \quad (2.6)$$

Так как линейные перемещения точки E балок CE и EF равны, то имеем

$$\delta s_E = l \cdot \delta\varphi_2, \quad \delta s_E = kl \cdot \delta\varphi_3, \quad \text{откуда } \delta\varphi_3 = \delta\varphi_2 / k. \quad (2.7)$$

Учитывая (2.6) в (2.7), находим, что

$$\delta\varphi_3 = \frac{2+k}{k} \delta\varphi_1. \quad (2.8)$$

Из принципа возможных перемещений сумма элементарных работ заданных сил на возможных перемещениях равна нулю (работа силы записывается со знаком плюс, если направление силы или момента совпадает с направлением возможного перемещения):

$$-M \cdot \delta\varphi_1 + V_B \cdot \delta s_B - P \cdot \delta s_P + q \cdot kl \cdot \delta s_q = 0, \quad (2.9)$$

где $\delta s_B = 2l \cdot \delta\varphi_1$, $\delta s_P = l \cdot \delta\varphi_1$, $\delta s_q = 0,5kl \cdot \delta\varphi_3 = 0,5l(2+k) \cdot \delta\varphi_1$; (2.10)

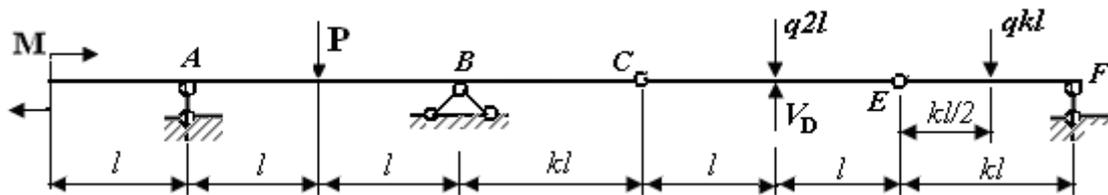
δs_B , δs_P , δs_q – линейные перемещения точек приложения сил V_B , P и равнодействующей $q \cdot kl$.

Из (2.9) с учетом (2.10) следует

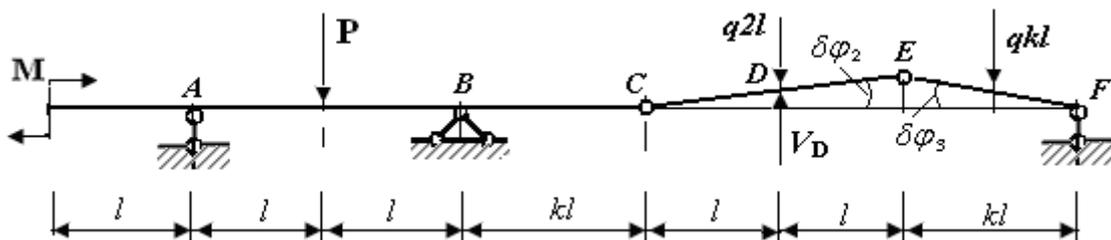
$$-M \cdot \delta\varphi_1 + V_B \cdot 2l \cdot \delta\varphi_1 - P \cdot l \cdot \delta\varphi_1 + q \cdot kl \cdot 0,5l(2+k) \cdot \delta\varphi_1 = 0,$$

откуда $V_B = (M + P \cdot l - 0,5q \cdot kl^2 \cdot (2+k)) / 2l = (60 + 40 - 420) / 4 = -80$ кН.

Для определения опорной реакции V_D освободим многопролетную балку от шарнирно подвижной опоры D , заменив ее действие реакцией V_D (рис. 10, а). Оставшиеся связи предоставляют возможные перемещения для балок: для балки CE – угловое перемещение $\delta\varphi_2$, для балки EF – угловое перемещение $\delta\varphi_3$ (рис. 10, б).



а) Схема многопролетной балки



б) Схема многопролетной балки при возможных перемещениях составных балок

Рис. 10

Так как линейные перемещения точки E балок CE и EF равны, то имеем

$$\delta s_E = 2l \cdot \delta\varphi_2, \quad \delta s_E = kl \cdot \delta\varphi_3, \quad \text{откуда } \delta\varphi_3 = 2\delta\varphi_2 / k. \quad (2.11)$$

Из принципа возможных перемещений сумма элементарных работ заданных сил на возможных перемещениях равна нулю (работа силы записыва-

ется со знаком плюс, если направление силы или момента совпадает с направлением возможного перемещения):

$$V_D \cdot \delta s_D - q2l \cdot \delta s_D - q \cdot kl \cdot \delta s_q = 0, \quad (2.12)$$

где $\delta s_D = l \cdot \delta \varphi_2$, $\delta s_q = 0,5kl \cdot \delta \varphi_3 = l \cdot \delta \varphi_2$; (2.13)

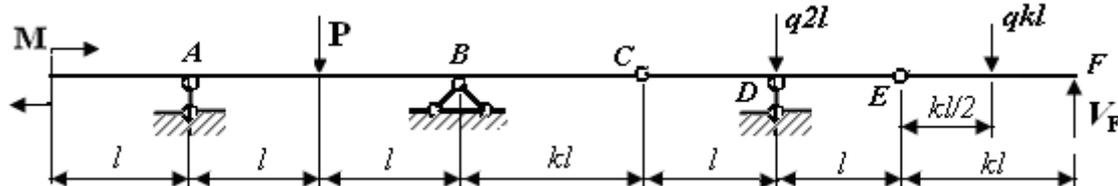
δs_D , δs_q – линейные перемещения точек приложения сил V_D и равнодействующей $q \cdot kl$.

Из (2.12) с учетом (2.13) следует

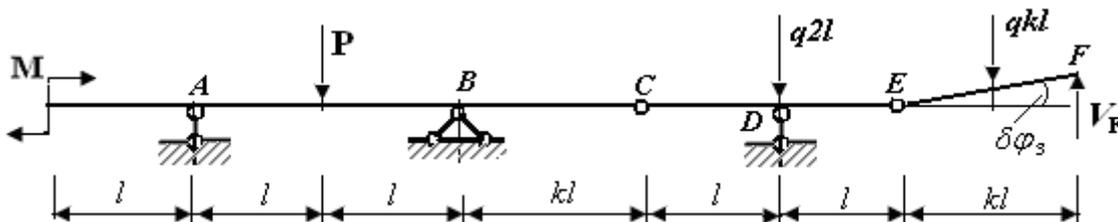
$$V_D \cdot l \cdot \delta \varphi_2 - q2l \cdot l \cdot \delta \varphi_2 - q \cdot kl \cdot l \cdot \delta \varphi_2 = 0,$$

откуда $V_D = q2l + q \cdot kl = 160 + 120 = 280$ кН.

Для определения опорной реакции V_F освободим многопролетную балку от шарнирно подвижной опоры F , заменив ее действие реакцией V_F (рис. 11, а). Оставшиеся связи предоставляют возможные перемещения только для балки EF – угловое перемещение $\delta \varphi_3$ (рис. 11, б).



а) Схема многопролетной балки



б) Схема многопролетной балки при возможных перемещениях составных балок

Рис. 11

Из принципа возможных перемещений сумма элементарных работ заданных сил на возможных перемещениях равна нулю (работа силы записывается со знаком плюс, если направление силы или момента совпадает с направлением возможного перемещения):

$$V_F \cdot \delta s_F - q \cdot kl \cdot \delta s_q = 0, \quad (2.14)$$

где $\delta s_F = kl \cdot \delta \varphi_3$, $\delta s_q = 0,5kl \cdot \delta \varphi_3$; (2.15)

δs_F , δs_q – линейные перемещения точек приложения сил V_F и равнодействующей $q \cdot kl$.

Из (2.14) с учетом (2.15) следует

$$V_F \cdot kl \cdot \delta \varphi_3 - q \cdot kl \cdot 0,5kl \cdot \delta \varphi_3 = 0,$$

откуда $V_F = 0,5q \cdot kl = 0,5 \cdot 40 \cdot 3 = 60$ кН.

2.4. Расчет поперечных сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях балки. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Изобразим теперь расчетную схему многопролетной балки, заменив действие опорных стержней реакциями связей V_A , V_B , V_D и V_F (рис. 12).

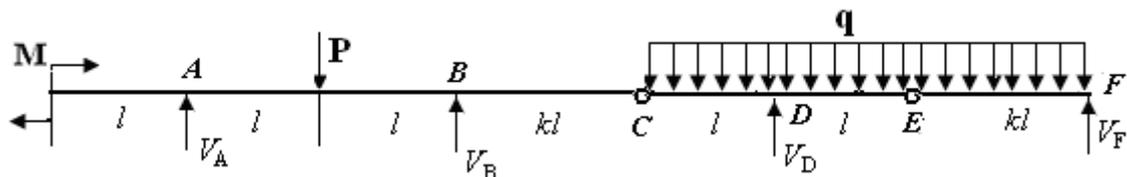


Рис. 12. Схема многопролетной балки с заменой опорных стержней реакциями связей

Многопролетная балка имеет семь участков. Для определения внутренних силовых факторов в поперечных сечениях рассмотрим последовательно каждый участок произвольными сечениями (рис. 13). Начало координат совмещено с точкой A .

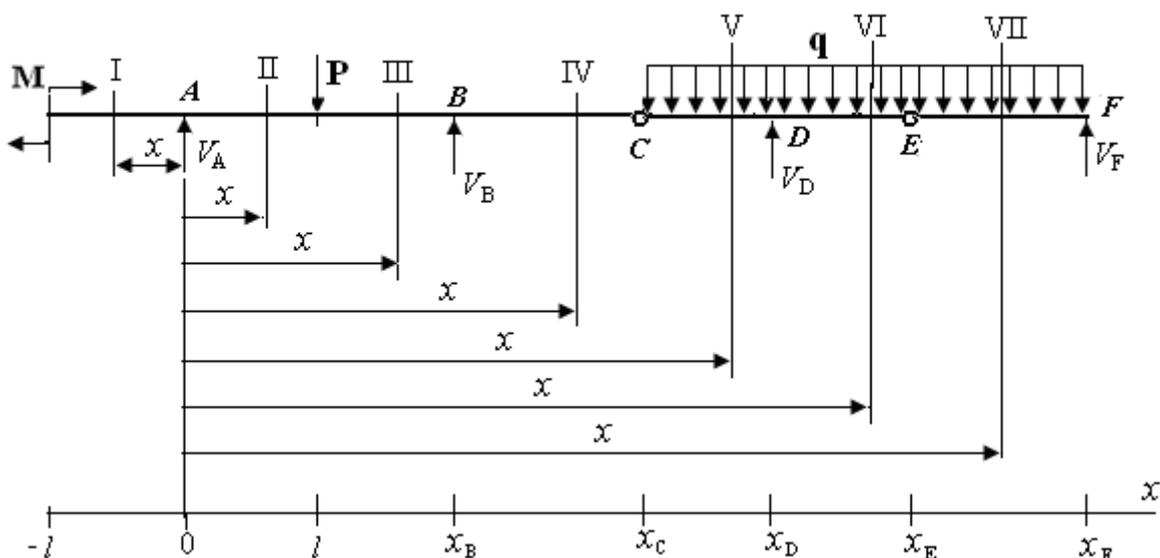


Рис. 13. Схема многопролетной балки с изображением секущих сечений на участках

При составлении выражения для поперечной силы Q в поперечном сечении используем схему положительных слагаемых (рис. 14).

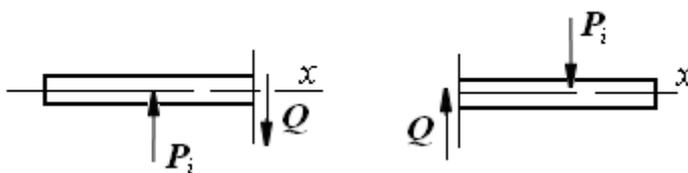


Рис. 14. Схема положительных слагаемых для поперечной силы Q

Если сила P_i стремится повернуть отсеченную часть балки относительно центра тяжести рассматриваемого поперечного сечения (точки пересечения поперечного сечения с продольной осью) по часовой стрелке, то эта сила

является положительным слагаемым в формулах при расчете Q в данном поперечном сечении.

При составлении выражения для изгибающего момента $M_{из}$ в поперечном сечении используем следующую схему положительных слагаемых (рис. 15).

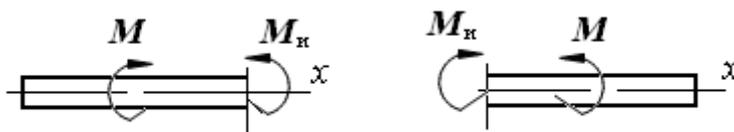


Рис. 15. Схема положительных слагаемых для изгибающего момента $M_{из}$

Если рассматривать равновесие отсеченной части балки слева от поперечного сечения и если момент внешних сил M относительно центра тяжести рассматриваемого поперечного сечения направлен по часовой стрелке (рис. 15), то он входит положительным слагаемым в выражение для изгибающего момента в поперечном сечении балки.

Если рассматривать равновесие отсеченной части балки справа от поперечного сечения и если момент внешних сил M относительно центра тяжести рассматриваемого поперечного сечения направлен против часовой стрелки (рис. 15), то он входит положительным слагаемым в выражение для изгибающего момента в поперечном сечении балки.

Используя схему многопролетной балки на рис. 13 и схему положительных слагаемых для Q (рис. 14), составим выражения для расчета поперечной силы в поперечных сечениях различных участков:

$$Q = \begin{cases} 0, & -l \leq x \leq 0, \\ V_A, & 0 \leq x \leq l, \\ V_A - P, & l \leq x \leq x_B, \\ V_A - P + V_B, & x_B \leq x \leq x_C, \\ V_A - P + V_B - q(x - x_C), & x_C \leq x \leq x_D, \\ V_A - P + V_B + V_D - q(x - x_C), & x_D \leq x \leq x_E, \\ V_A - P + V_B + V_D - q(x - x_C), & x_E \leq x \leq x_F. \end{cases}$$

Учитывая значения сил $V_A = 40$ кН, $V_B = -80$ кН, $V_D = 280$ кН, $P = 20$ кН, погонной нагрузки $q = 40$ кН/м, определим значения Q в поперечных сечениях начала и конца каждого участка (таблица 1).

Табл. 1

Значения Q в поперечных сечениях начала и конца каждого участка

$x, \text{ м}$	1-й участок		2-й участок		3-й участок		4-й участок		5-й участок		6-й участок		7-й участок	
	-2	0	0	2	2	4	4	7	7	9	9	11	11	14
$Q, \text{ кН}$	0	0	40	40	20	20	-60	-60	-60	-140	140	60	60	-60

Используя схему многопролетной балки на рис. 13 и схему положительных слагаемых для $M_{и}$ (рис. 15), составим выражения для расчета изгибающего момента в поперечных сечениях различных участков:

$$M_{и} = \begin{cases} M, & -l \leq x \leq 0, \\ M + V_A \cdot x, & 0 \leq x \leq l, \\ M + V_A \cdot x - P(x-l), & l \leq x \leq x_B, \\ M + V_A \cdot x - P(x-l) + V_B(x-x_B), & x_B \leq x \leq x_C, \\ M + V_A \cdot x - P(x-l) + V_B(x-x_B) - q(x-x_C)^2 / 2, & x_C \leq x \leq x_D, \\ M + V_A \cdot x - P(x-l) + V_B(x-x_B) + V_D(x-x_D) - q(x-x_C)^2 / 2, & x_D \leq x \leq x_E, \\ M + V_A \cdot x - P(x-l) + V_B(x-x_B) + V_D(x-x_D) - q(x-x_C)^2 / 2, & x_E \leq x \leq x_F. \end{cases}$$

Учитывая значения сил $V_A = 40$ кН, $V_B = -80$ кН, $V_D = 280$ кН, $P = 20$ кН, погонной нагрузки $q = 40$ кН/м, определим значения изгибающего момента $M_{и}$ в поперечных сечениях начала, середины и конца каждого участка (табл. 2).

Строим эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента $M_{и}$ (рис. 16).

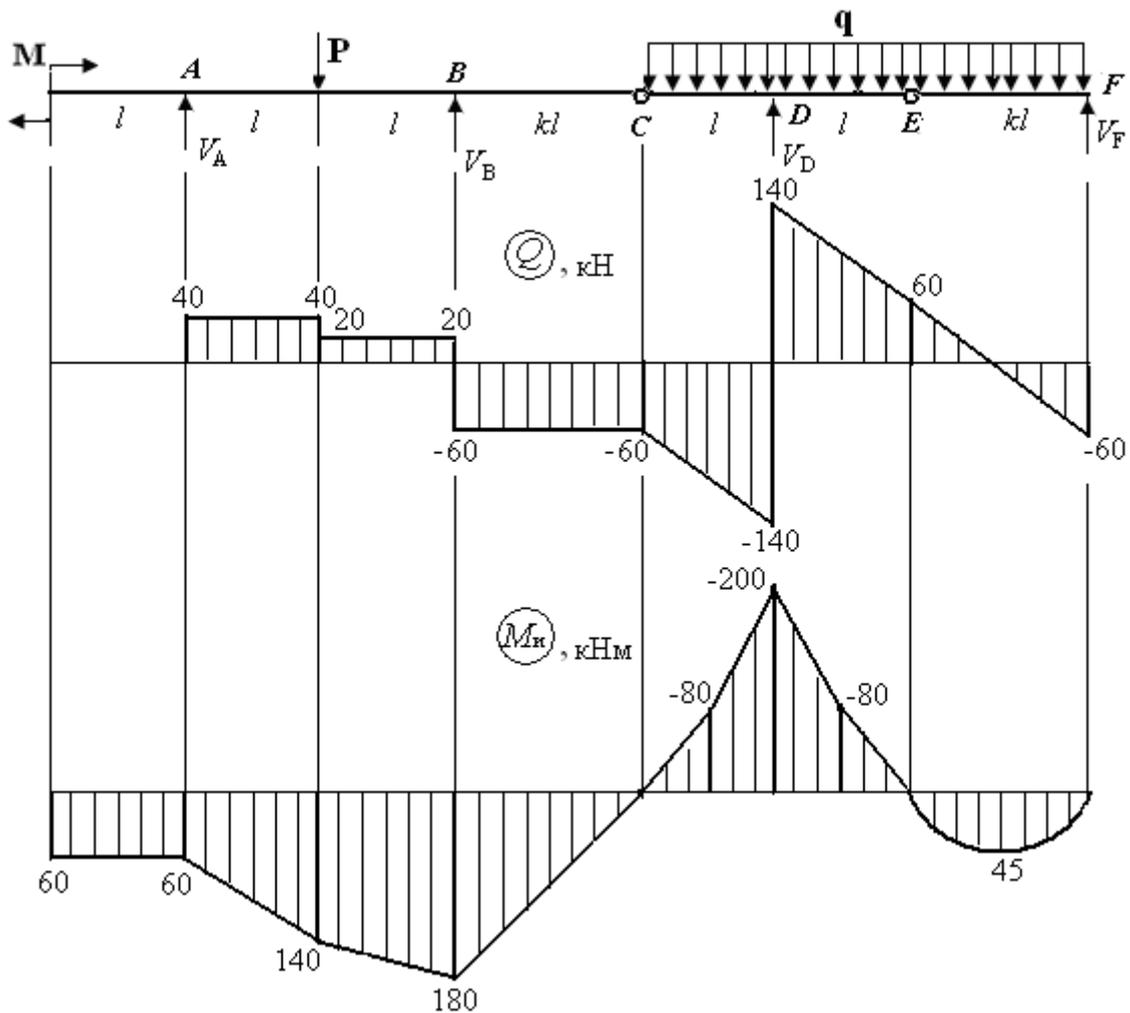


Рис. 16. Эпюры поперечной силы и изгибающего момента

Изгибающий момент в поперечном сечении

Уча- сток	1-й уча- сток		2-й уча- сток		3-й уча- сток		4-й уча- сток	5-й участок			6-й участок			7-й участок			
	Коор- дината x , м																
$M_{из}$, кНм	60	60	60	140	140	180	180	0	0	-80	-200	-200	-80	0	0	45	0

2.5. Линии влияния опорных реакций многопролетной балки

Линией влияния какого-либо фактора называется график, изображающий изменение этого фактора в зависимости от положения единичной силы при перемещении ее по сооружению.

Изобразим многопролетную балку и единичную силу, положение которой определяется координатой x (рис. 17). Начало координат совмещено с точкой A .

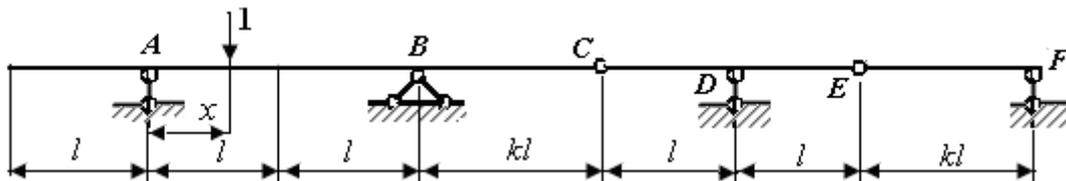


Рис. 17. Схема многопролетной балки и единичной силы

Чтобы построить линию влияния той или иной опорной реакции, необходимо составить выражения для определения опорной реакции в зависимости от положения единичной силы. Наиболее эффективно здесь использовать метод на основе принципа возможных перемещений.

Для определения опорной реакции R'_A в зависимости от действия единичной силы освободим многопролетную балку от шарнирно подвижной опоры A , заменив ее действие реакцией R'_A (рис. 18). Оставшиеся связи предоставляют возможные перемещения для балок: для балки ABC – угловое перемещение $\delta\varphi_1$, для балки CE – угловое перемещение $\delta\varphi_2$, для балки EF – угловое перемещение $\delta\varphi_3$ (рис. 18).

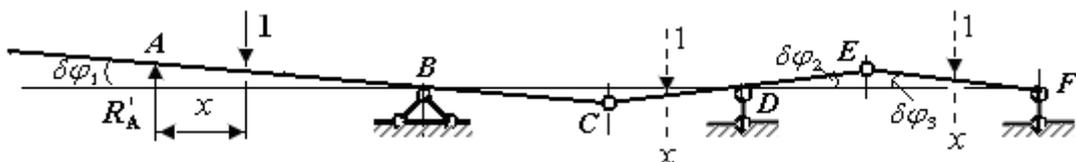


Рис. 18. Схема многопролетной балки при возможных перемещениях составных балок

Так как линейные перемещения точки C балок ABC и CE равны, то имеем

$$\delta s_C = kl \cdot \delta\varphi_1, \quad \delta s_C = l \cdot \delta\varphi_2, \quad \text{откуда } \delta\varphi_2 = k \cdot \delta\varphi_1. \quad (2.16)$$

Так как линейные перемещения точки E балок CE и EF равны, то имеем

$$\delta s_E = l \cdot \delta \varphi_2, \quad \delta s_E = kl \cdot \delta \varphi_3, \quad \text{откуда } \delta \varphi_3 = \delta \varphi_2 / k. \quad (2.17)$$

Учитывая (2.16) в (2.17), находим, что

$$\delta \varphi_3 = \delta \varphi_1. \quad (2.18)$$

Из принципа возможных перемещений сумма элементарных работ заданных сил на возможных перемещениях равна нулю (работа силы записывается со знаком плюс, если направление силы или момента совпадает с направлением возможного перемещения):

$$R'_A \cdot \delta s_A - 1 \cdot \delta s_1 = 0, \quad (2.19)$$

где $\delta s_A = 2l \cdot \delta \varphi_1$, $\delta s_1 = \begin{cases} (x_B - x) \cdot \delta \varphi_1, & -l \leq x \leq x_C, \\ -(x_D - x) \cdot \delta \varphi_2, & x_C \leq x \leq x_E, \\ (x_F - x) \cdot \delta \varphi_3, & x_E \leq x \leq x_F, \end{cases} \quad (2.20)$

δs_A , δs_1 – линейные перемещения точек приложения сил R'_A и единичной силы (величина и знак перемещения δs_1 единичной силы зависит от того, по какой балке перемещается единичная сила); $x_B = 4$ м, $x_D = 9$ м, $x_F = 14$ м.

Из (2.19) с учетом (2.20), (2.16) и (2.18) следует

$$R'_A = 1 \cdot \delta s_1 / \delta s_A = \begin{cases} (x_B - x) / 2l, & -l \leq x \leq x_C, \\ -(x_D - x) \cdot k / 2l, & x_C \leq x \leq x_E, \\ (x_F - x) / 2l, & x_E \leq x \leq x_F. \end{cases} \quad (2.21)$$

Для определения опорной реакции R'_B в зависимости от действия единичной силы освободим многопролетную балку от шарнирно неподвижной опоры B , заменив ее действие реакцией R'_B (рис. 19). Оставшиеся связи предоставляют возможные перемещения для балок: для балки ABC – угловое перемещение $\delta \varphi_1$, для балки CE – угловое перемещение $\delta \varphi_2$, для балки EF – угловое перемещение $\delta \varphi_3$ (рис. 19).

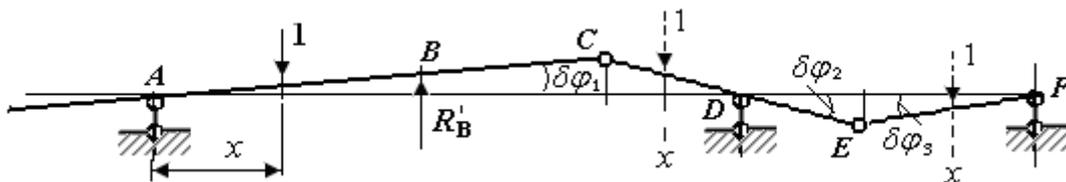


Рис. 19. Схема многопролетной балки при возможных перемещениях составных балок

Так как линейные перемещения точки C балок ABC и CE равны, то имеем

$$\delta s_C = (2l + kl) \cdot \delta \varphi_1, \quad \delta s_C = l \cdot \delta \varphi_2, \quad \text{откуда } \delta \varphi_2 = (2 + k) \cdot \delta \varphi_1. \quad (2.22)$$

Так как линейные перемещения точки E балок CE и EF равны, то имеем

$$\delta s_E = l \cdot \delta \varphi_2, \quad \delta s_E = kl \cdot \delta \varphi_3, \quad \text{откуда } \delta \varphi_3 = \delta \varphi_2 / k. \quad (2.23)$$

Учитывая (2.22) в (2.23), находим, что

$$\delta\varphi_3 = \frac{2+k}{k} \delta\varphi_1. \quad (2.24)$$

Из принципа возможных перемещений сумма элементарных работ заданных сил на возможных перемещениях равна нулю:

$$R'_B \cdot \delta s_B - 1 \cdot \delta s_1 = 0, \quad (2.25)$$

где $\delta s_B = 2l \cdot \delta\varphi_1$, $\delta s_1 = \begin{cases} x \cdot \delta\varphi_1, & -l \leq x \leq x_C, \\ (x_D - x) \cdot \delta\varphi_2, & x_C \leq x \leq x_E, \\ -(x_F - x) \cdot \delta\varphi_3, & x_E \leq x \leq x_F, \end{cases} \quad (2.26)$

δs_B , δs_1 – линейные перемещения точек приложения сил R'_B и единичной силы (величина и знак перемещения δs_1 единичной силы зависит от того, по какой балке перемещается единичная сила); $x_D = 9$ м, $x_F = 14$ м.

Из (2.25) с учетом (2.26) следует

$$R'_B = 1 \cdot \delta s_1 / \delta s_B = \begin{cases} x / 2l, & -l \leq x \leq x_C, \\ (x_D - x) \cdot (2+k) / 2l, & x_C \leq x \leq x_E, \\ -(x_F - x) \frac{2+k}{k} / 2l, & x_E \leq x \leq x_F. \end{cases} \quad (2.27)$$

Для определения опорной реакции R'_D в зависимости от действия единичной силы освободим многопролетную балку от шарнирно неподвижной опоры D , заменив ее действие реакцией R'_D (рис. 20). Оставшиеся связи предоставляют возможные перемещения для балок: для балки CE – угловое перемещение $\delta\varphi_2$, для балки EF – угловое перемещение $\delta\varphi_3$ (рис. 20).

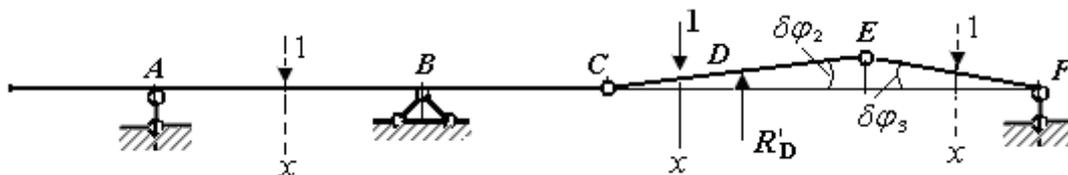


Рис. 20. Схема многопролетной балки при возможных перемещениях составных балок

Так как линейные перемещения точки E балок CE и EF равны, то

$$\delta s_E = 2l \cdot \delta\varphi_2, \quad \delta s_E = kl \cdot \delta\varphi_3, \quad \text{откуда } \delta\varphi_3 = 2\delta\varphi_2 / k. \quad (2.28)$$

Из принципа возможных перемещений сумма элементарных работ заданных сил на возможных перемещениях равна нулю:

$$R'_D \cdot \delta s_D - 1 \cdot \delta s_1 = 0, \quad (2.29)$$

где $\delta s_D = l \cdot \delta\varphi_2$, $\delta s_1 = \begin{cases} 0, & -l \leq x \leq x_C, \\ (x - x_C) \cdot \delta\varphi_2, & x_C \leq x \leq x_E, \\ (x_F - x) \cdot \delta\varphi_3, & x_E \leq x \leq x_F, \end{cases} \quad (2.30)$

δs_D , δs_1 – линейные перемещения точек приложения сил R'_B и единичной силы (величина и знак перемещения δs_1 единичной силы зависит от того, по какой балке перемещается единичная сила); $x_C = 7$ м, $x_E = 11$ м, $x_F = 14$ м.

Из (2.29) с учетом (2.30) следует

$$R'_D = 1 \cdot \delta s_1 / \delta s_D = \begin{cases} 0, & -l \leq x \leq x_C, \\ (x - x_C) / l, & x_C \leq x \leq x_E, \\ (x_F - x) 2 / kl, & x_E \leq x \leq x_F. \end{cases} \quad (2.31)$$

Для определения опорной реакции R'_F в зависимости от действия единичной силы освободим многопролетную балку от шарнирно неподвижной опоры F , заменив ее действие реакцией R'_F (рис. 21). Оставшиеся связи предоставляют возможные перемещения только для балки EF – угловое перемещение $\delta \varphi_3$ (рис. 21).

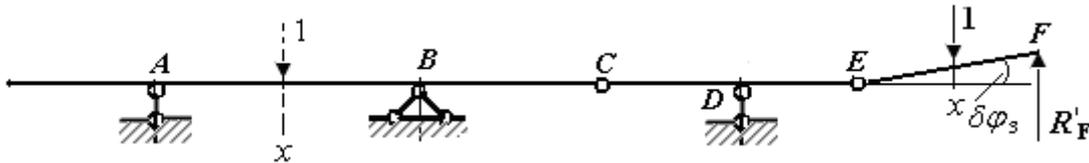


Рис. 21. Схема многопролетной балки при возможных перемещениях составных балок

Из принципа возможных перемещений сумма элементарных работ заданных сил на возможных перемещениях равна нулю:

$$R'_F \cdot \delta s_F - 1 \cdot \delta s_1 = 0, \quad (2.32)$$

где $\delta s_F = kl \cdot \delta \varphi_3$, $\delta s_1 = \begin{cases} 0, & -l \leq x \leq x_E, \\ (x - x_E) \cdot \delta \varphi_3, & x_E \leq x \leq x_F, \end{cases} \quad (2.33)$

δs_F , δs_1 – линейные перемещения точек приложения сил R'_F и единичной силы; $x_E = 11$ м, $x_F = 14$ м.

Из (2.32) с учетом (2.33) следует

$$R'_F = 1 \cdot \delta s_1 / \delta s_F = \begin{cases} 0, & -l \leq x \leq x_E, \\ (x - x_E) / kl, & x_E \leq x \leq x_F. \end{cases} \quad (2.34)$$

Итак, имеем следующие выражения для определения опорных реакций в зависимости от положения единичной силы на многопролетной балке:

$$R'_A = \begin{cases} (x_B - x) / 2l, & -l \leq x \leq x_C, \\ -(x_D - x) \cdot k / 2l, & x_C \leq x \leq x_E, \\ (x_F - x) / 2l, & x_E \leq x \leq x_F, \end{cases} \quad R'_B = \begin{cases} x / 2l, & -l \leq x \leq x_C, \\ (x_D - x) \cdot (2 + k) / 2l, & x_C \leq x \leq x_E, \\ -(x_F - x)(2 + k) / 2kl, & x_E \leq x \leq x_F, \end{cases}$$

$$R'_D = \begin{cases} 0, & -l \leq x \leq x_C, \\ (x - x_C) / l, & x_C \leq x \leq x_E, \\ (x_F - x) 2 / kl, & x_E \leq x \leq x_F, \end{cases} \quad R'_F = \begin{cases} 0, & -l \leq x \leq x_E, \\ (x - x_E) / kl, & x_E \leq x \leq x_F, \end{cases}$$

где $x_B = 4$ м, $x_C = 7$ м, $x_D = 9$ м, $x_E = 11$ м, $x_F = 14$ м, $l = 2$ м, $k = 1,5$.

На основе полученных выражений определим значения опорных реакций в зависимости от положения единичной силы на многопролетной балке и эти значения приведем в таблице 3. Так как полученные выражения описываются линейными функциями, то ограничимся вычислением значений R'_A , R'_B , R'_D и R'_F в начале и конце каждой балки, а также на опорах.

Таблица 3

Значения опорных реакций R'_A , R'_B , R'_D и R'_F

Координата x , м	Значения опорных реакций			
	R'_A	R'_B	R'_D	R'_F
$x = -l = -2$	1,5	-0,5	0	0
$x = x_A = 0$	1	0	0	0
$x = x_B = 4$	0	1	0	0
$x = x_C = 7$	-0,75	1,75	0	0
$x = x_D = 9$	0	0	1	0
$x = x_E = 11$	0,75	-1,75	2	0
$x = x_F = 14$	0	0	0	1

Построим линии влияния опорных реакций R'_A , R'_B , R'_D и R'_F (рис. 22).

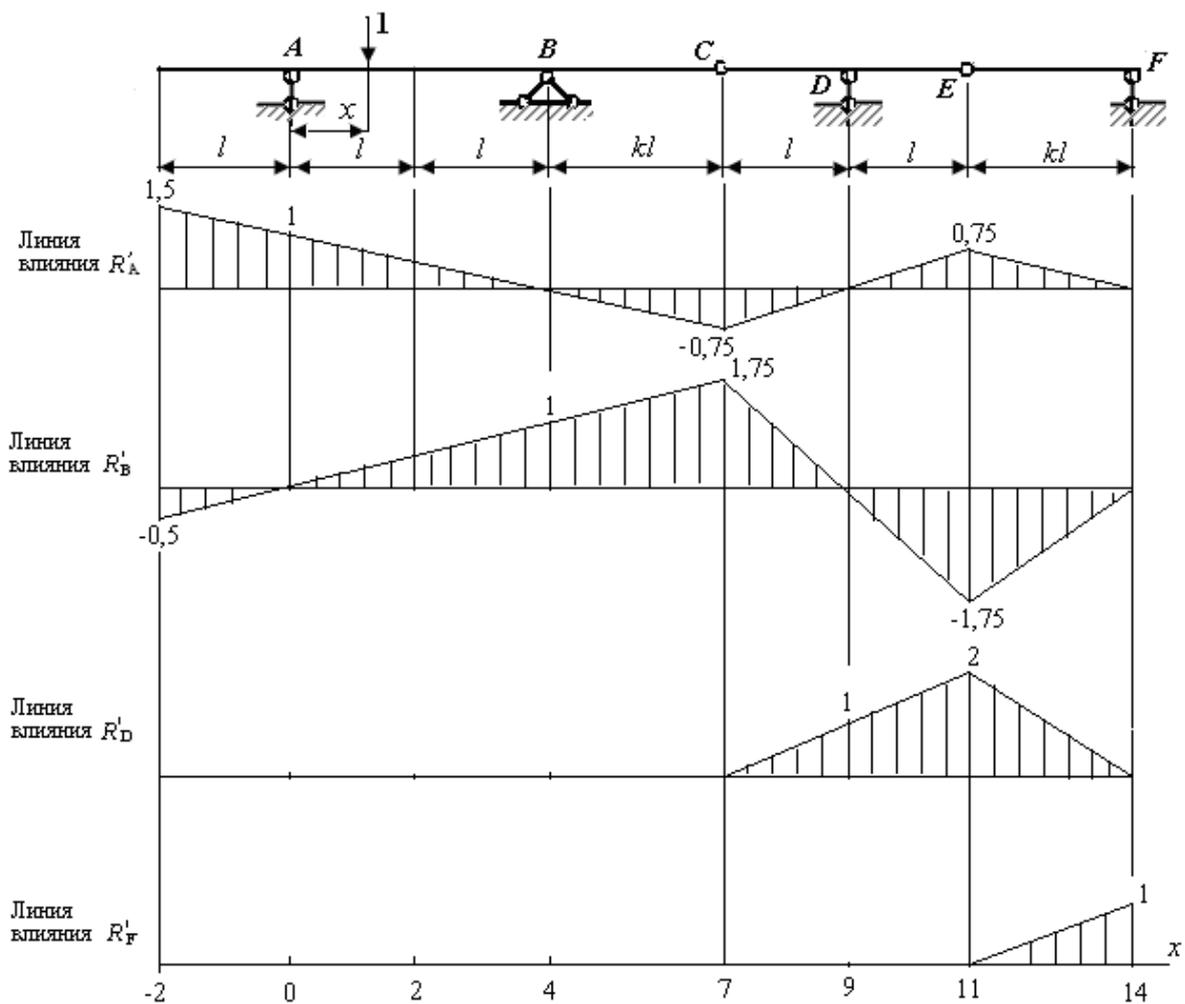


Рис. 22. Линии влияния опорных реакций

2.6. Линии влияния поперечных сил и изгибающих моментов для заданных сечений многопролетной балки

Для построения линий влияния поперечных сил и изгибающих моментов для заданных сечений 1 и 2 многопролетной балки изобразим схему балки и заданные сечения (рис. 23).



Если рассечь балку в сечении 1 и мысленно отбросить часть многопролетной балки справа от сечения, то поперечная сила Q'_1 , возникающая в этом сечении от действия единичной силы, должна удерживать опорную реакцию R'_A и единичную силу при ее перемещении до сечения 1. Изгибающий момент M'_1 , возникающий в этом сечении от действия единичной силы, должен удерживать момент опорной реакции $R'_A \cdot x_1$ (x_1 – координата сечения 1) и момент единичной силы $1 \cdot (l - x)$ при ее перемещении до сечения 1. Следовательно, можно записать, что

$$Q'_1 = \begin{cases} R'_A - 1, & -l \leq x \leq x_1, \\ R'_A, & x_1 \leq x \leq x_F, \end{cases} \quad M'_1 = \begin{cases} R'_A \cdot x_1 - 1 \cdot (l - x), & -l \leq x \leq x_1, \\ R'_A \cdot x_1, & x_1 \leq x \leq x_F. \end{cases}$$

Так как

$$R'_A = \begin{cases} (x_B - x) / 2l, & -l \leq x \leq x_C, \\ -(x_D - x) \cdot k / 2l, & x_C \leq x \leq x_E, \\ (x_F - x) / 2l, & x_E \leq x \leq x_F, \end{cases}$$

то получим

$$Q'_1 = \begin{cases} -1 + (x_B - x) / 2l, & -l \leq x \leq x_1, \\ (x_B - x) / 2l, & x_1 \leq x \leq x_C, \\ -(x_D - x) \cdot k / 2l, & x_C \leq x \leq x_E, \\ (x_F - x) / 2l, & x_E \leq x \leq x_F, \end{cases} \quad (2.35)$$

$$M'_1 = \begin{cases} -1 \cdot (l - x) + (x_B - x)x_1 / 2l, & -l \leq x \leq x_1, \\ (x_B - x)x_1 / 2l, & x_1 \leq x \leq x_C, \\ -(x_D - x) \cdot kx_1 / 2l, & x_C \leq x \leq x_E, \\ (x_F - x)x_1 / 2l, & x_E \leq x \leq x_F. \end{cases} \quad (2.36)$$

Если расцезть многопролетную балку в сечении 2 и мысленно отбросить часть многопролетной балки слева от сечения, то поперечная сила Q'_2 , возникающая в этом сечении от действия единичной силы, должна удержать опорные реакции R'_D и R'_F , а также единичную силу при ее перемещении по балке после сечения 2. Изгибающий момент M'_2 , возникающий в этом сечении от действия единичной силы, должен удержать момент опорных реакций $R'_D \cdot (x_D - x_2)$ и $R'_F \cdot (x_F - x_2)$ и момент единичной силы $1 \cdot (x - x_2)$ при ее перемещении после сечения 2 (x_2 – координата сечения 2). Следовательно, можно записать, что

$$Q'_2 = \begin{cases} -R'_D - R'_F, & -l \leq x \leq x_2, \\ -R'_D - R'_F + 1, & x_2 \leq x \leq x_F, \end{cases}$$

$$M'_2 = \begin{cases} R'_D(x_D - x_2) + R'_F(x_F - x_2), & -l \leq x \leq x_2, \\ R'_D(x_D - x_2) + R'_F(x_F - x_2) - 1 \cdot (x - x_2), & x_2 \leq x \leq x_F, \end{cases}$$

Так как

$$R'_D = \begin{cases} 0, & -l \leq x \leq x_C \\ (x - x_C) / l, & x_C \leq x \leq x_E, \\ (x_F - x) 2 / kl, & x_E \leq x \leq x_F, \end{cases} \quad R'_F = \begin{cases} 0, & -l \leq x \leq x_E, \\ (x - x_E) / kl, & x_E \leq x \leq x_F, \end{cases}$$

то

$$Q'_2 = \begin{cases} 0, & -l \leq x \leq x_C, \\ -(x - x_C) / l, & x_C \leq x \leq x_2, \\ -(x - x_C) / l + 1, & x_2 \leq x \leq x_E, \\ -(x - x_E) / kl - (x_F - x) 2 / kl + 1, & x_E \leq x \leq x_F, \end{cases} \quad (2.37)$$

$$M'_2 = \begin{cases} 0, & -l \leq x \leq x_C, \\ (x - x_C)(x_D - x_2) / l, & x_C \leq x \leq x_2, \\ (x - x_C)(x_D - x_2) / l - 1 \cdot (x - x_2), & x_2 \leq x \leq x_E, \\ -1 \cdot (x - x_2) + (x - x_E)(x_F - x_2) / kl, & x_E \leq x \leq x_F. \end{cases} \quad (2.38)$$

Используя выражения (2.35), (2.36), (2.37) и (2.38), определим значения Q'_1 , M'_1 , Q'_2 и M'_2 при различных значениях x , определяющих положение единичной силы на многопролетной балке. При вычислениях учитываем, что $l = 2$ м, $x_1 = 2$ м, $x_2 = x_D = 9$ м, $x_B = 4$ м, $x_C = 7$ м, $x_E = 11$ м, $x_F = 14$ м, $k = 1,5$. Тогда выражения (2.35), (2.36), (2.37) и (2.38) примут более простой вид:

$$Q'_1 = \begin{cases} -x / 4, & -2 \leq x \leq x_1 = 2, \\ (1 - x / 4), & x_1 \leq x \leq 7, \\ -(9 - x) \cdot 0,375, & 7 \leq x \leq 11, \\ (14 - x) / 4, & 11 \leq x \leq 14, \end{cases}$$

$$M_1' = \begin{cases} -1 \cdot (2 - x) + (4 - x) / 2, & -2 \leq x \leq x_1 = 2, \\ (4 - x) / 2, & x_1 = 2 \leq x \leq 7, \\ -(9 - x) \cdot 0,75, & 7 \leq x \leq 11, \\ (14 - x) / 2, & 11 \leq x \leq 14. \end{cases}$$

$$Q_2' = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq 7, \\ -(x - 7) / 2, & 7 \leq x \leq x_2 = 9, \\ -(x - 7) / 2 + 1, & x_2 = 9 \leq x \leq 11, \\ -(x - 11) / 3 - (14 - x)2 / 3 + 1, & 11 \leq x \leq 14, \end{cases}$$

$$M_2' = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq x_C, \\ 0, & x_C \leq x \leq x_2, \\ -1 \cdot (x - 9), & 9 \leq x \leq 11, \\ -1 \cdot (x - 9) + (x - 11)5 / 3, & 11 \leq x \leq 14. \end{cases}$$

Результаты вычислений внесем в таблицу 4.

Таблица 4

Значения поперечных сил и изгибающих моментов в заданных сечениях 1 и 2 в зависимости от положения единичной силы

Координата x , м	Значения поперечных сил и изгибающих моментов			
	Q_1'	M_1'	Q_2'	M_2'
$x = -l = -2$	0,5	-1	0	0
$x = x_A = 0$	0	0	0	0
$x = x_1^- = 2$	-0,5	1	0	0
$x = x_1^+ = 2$	0,5	1	0	0
$x = x_B = 4$	0	0	0	0
$x = x_C = 7$	0,75	-1,5	0	0
$x = x_2^- = 9$	0	0	-1	0
$x = x_2^+ = x_D = 9$	0	0	0	0
$x = x_E = 11$	0,75	1,5	-1	-2
$x = x_F = 14$	0	0	0	0

В сечении $x = x_1$ функция Q_1' имеет разрыв. Поэтому в колонке, где представлены координаты x , имеются координата x_1^- (координата, прилегающая к x_1 слева) и координата x_1^+ (координата, прилегающая к x_1 справа).

В сечении $x = x_2$ функция Q_2' имеет разрыв. Поэтому в колонке, где представлены координаты x , имеются координата x_2^- (координата, прилегающая к x_2 слева) и координата x_2^+ (координата, прилегающая к x_2 справа).

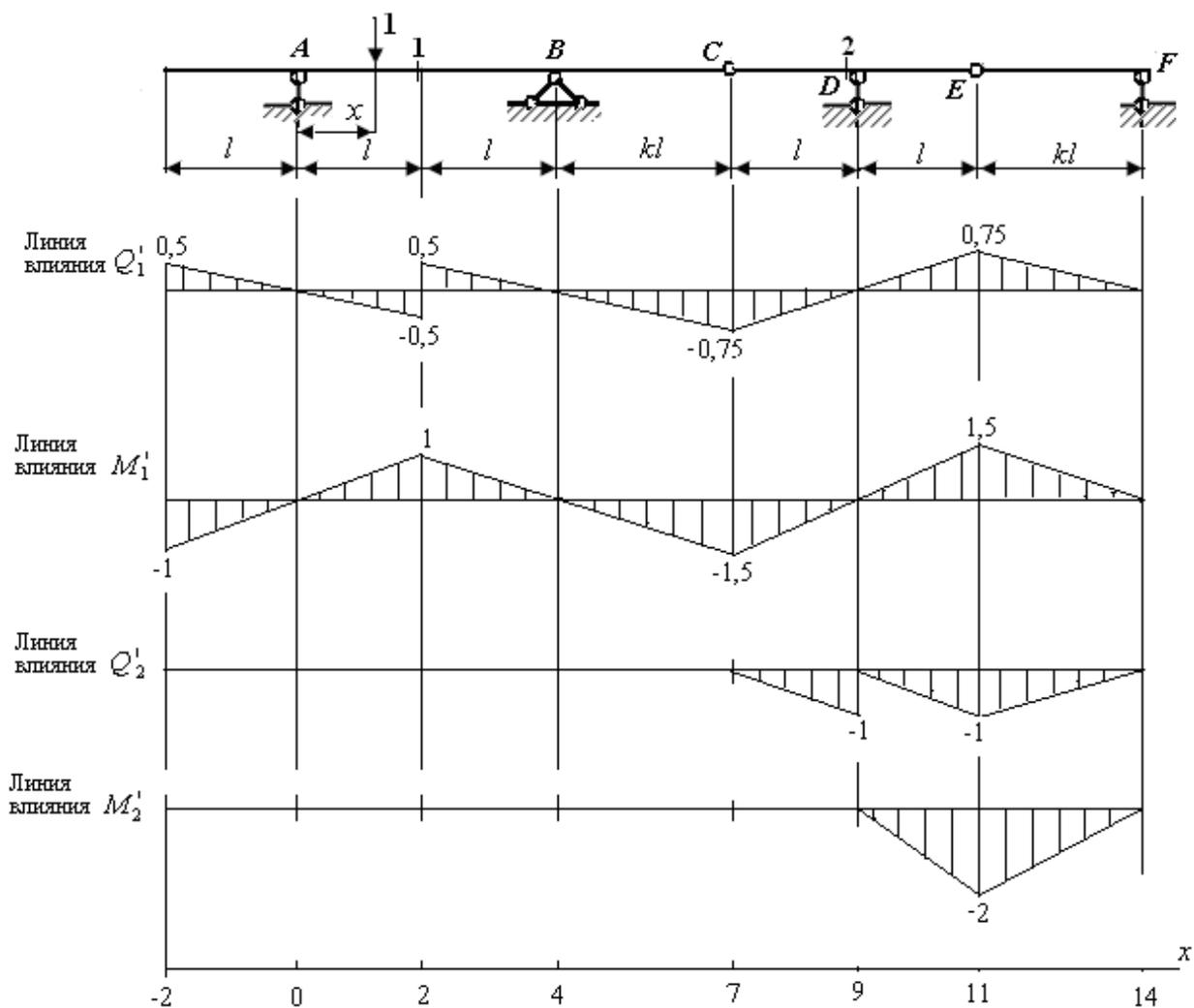


Рис. 24. Линии влияния поперечных сил Q_1' , Q_2' и изгибающих моментов M_1' , M_2' в заданных сечениях 1 и 2

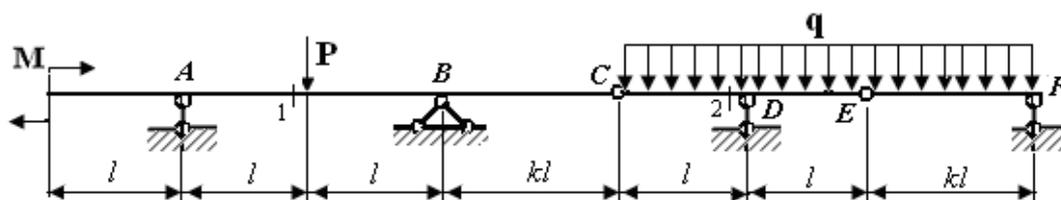
По результатам вычислений построим линии влияния поперечных сил Q_1' , Q_2' и изгибающих моментов M_1' , M_2' в заданных сечениях 1 и 2 (рис. 24).

2.7. Определение усилий по линиям влияния и сопоставление с аналитическими данными

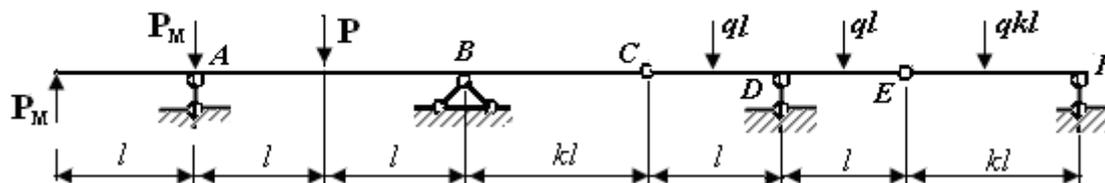
2.7.1. Определение реакций опор по линиям влияния

Для определения опорных реакций по линиям влияния необходимо представить расчетную схему многопролетной балки (рис. 25, а). Данную схему необходимо преобразовать к схеме, когда момент M заменен парой сил P_M ; распределенная нагрузка на каждом участке заменена равнодействующей. На участке CD распределенная нагрузка заменена равнодействующей ql , на участке DE распределенная нагрузка заменена равнодействующей ql , на участке EF распределенная нагрузка заменена равнодействующей qkl (рис. 25, б). При распределенной нагрузке постоянной интенсивности равнодействующие распределенной нагрузки приложены посередине соответствующих участков.

Величина сил P_M определяется из условия равенства моментов $P_M \cdot l = M$, откуда $P_M = M / l = 60 / 2 = 30$ кН.



а) Схема многопролетной балки



б) Схема многопролетной балки с заменой момента и распределенной нагрузки

Рис. 25

Представим линии влияния опорных реакций (рис. 26). На линиях влияния показаны значения ординат в точках, где приложены заданные сосредоточенные силы.

Реакция в опоре A определится как

$$V_A = \sum P_i \cdot R'_A(x_{p_i}) = -P_M \cdot 1,5 + P_M \cdot 1 + P \cdot 0,5 - ql \cdot 0,375 + ql \cdot 0,375 + qkl \cdot 0,375,$$

где P_i – значение i -й силы, $R'_A(x_{p_i})$ – ордината линии влияния R'_A в точке приложения силы P_i .

При перемножении значение силы P_i будет положительным сомножителем, если направление силы совпадает с направлением единичной силы. Если направление силы не совпадает с направлением единичной силы, то при перемножении значение силы P_i принимается со знаком минус.

Так как $P_M = M / l = 30$ кН, $P = 20$ кН, $ql = 80$ кН, $qkl = 120$ кН, то

$$V_A = -30 \cdot 1,5 + 30 \cdot 1 + 20 \cdot 0,5 + (-80 + 80 + 120) \cdot 0,375 = 40 \text{ кН.}$$

Реакция в опоре B определится как

$$V_B = \sum P_i \cdot R'_B(x_{p_i}) = P_M \cdot 0,5 + P \cdot 0,5 + ql \cdot 0,875 - ql \cdot 0,875 - qkl \cdot 0,875,$$

где P_i – значение i -й силы, $R'_B(x_{p_i})$ – ордината линии влияния R'_B в точке приложения силы P_i .

Так как $P_M = M / l = 30$ кН, $P = 20$ кН, $ql = 80$ кН, $qkl = 120$ кН, то

$$V_B = 30 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,5 + (80 - 80 - 120) \cdot 0,875 = 15 + 10 - 105 = -80 \text{ кН.}$$

Реакция в опоре D определится как

$$V_D = \sum P_i \cdot R'_D(x_{p_i}) = ql \cdot 0,5 + ql \cdot 1,5 - qkl \cdot 1,$$

где P_i – значение i -й силы, $R'_D(x_{P_i})$ – ордината линии влияния R'_D в точке приложения силы P_i .

Учитывая, что $ql = 80$ кН, $qkl = 120$ кН, получим

$$V_D = 80 \cdot 0,5 + 80 \cdot 1,5 + 120 = 280 \text{ кН.}$$

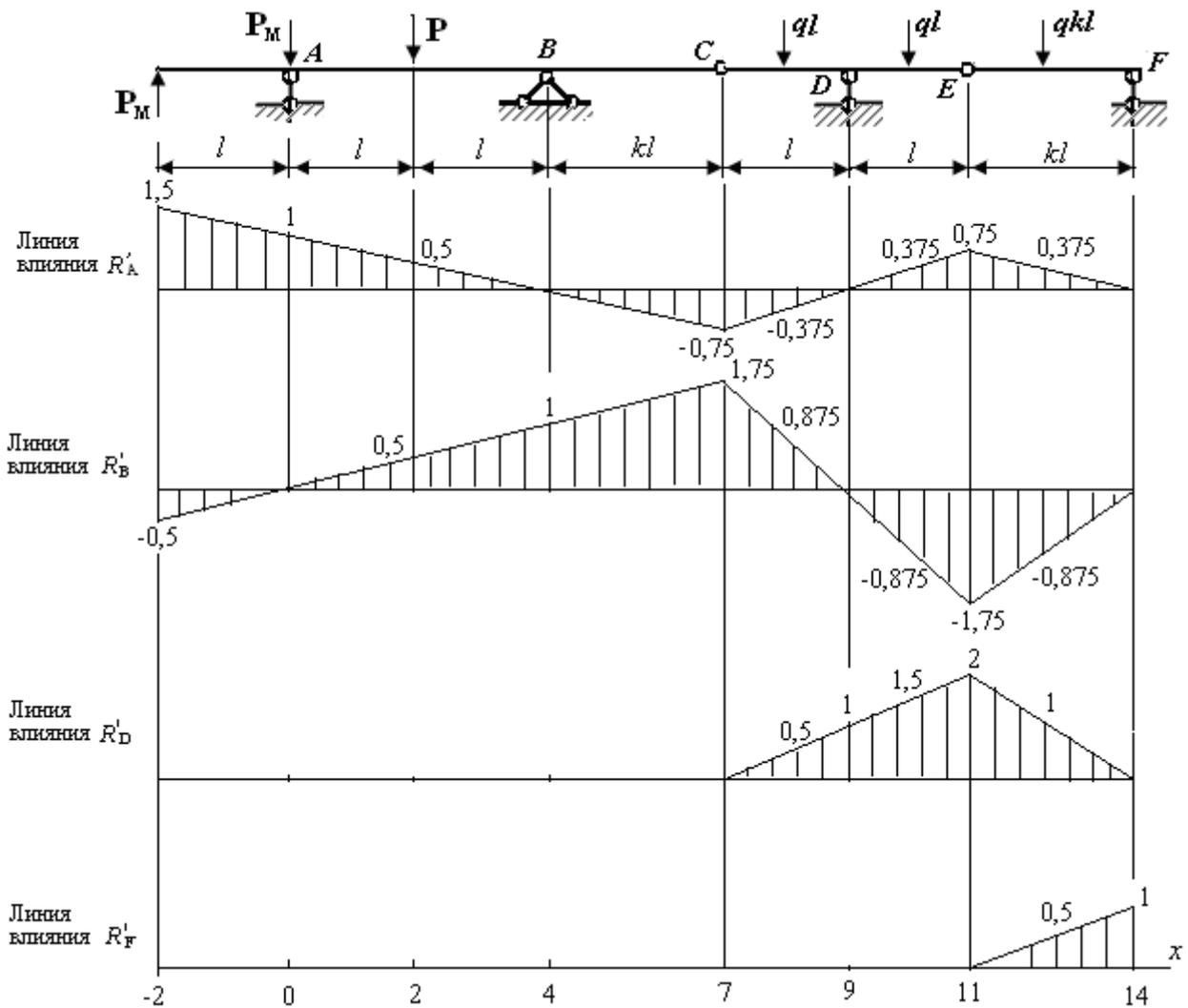


Рис. 26. Линии влияния опорных реакций

Реакция в опоре F определится как

$$V_F = \sum P_i \cdot R'_F(x_{P_i}) = qkl \cdot 0,5,$$

где P_i – значение i -й силы, $R'_F(x_{P_i})$ – ордината линии влияния R'_F в точке приложения силы P_i .

Учитывая, что $qkl = 120$ кН, получим $V_F = 120 \cdot 0,5 = 60$ кН.

В таблице 5 приведены значения реакций в опорах, вычисленные ранее в разделах 2.3.1 и 2.3.2 с использованием уравнений равновесия и на основе принципа возможных перемещений, а также рассчитанные по линиям влияния.

Значения реакций в опорах многопролетной балки

Способы вычисления реакций	Реакции в опорах, кН			
	V_A	V_B	V_D	V_F
На основе уравнений равновесия	40	-80	280	60
На основе принципа возможных перемещений	40	-80	280	60
Расчет по линиям влияния	40	-80	280	60

Значения опорных реакций аналогичны при различных способах их вычисления.

2.7.2. Определение по линиям влияния поперечных сил и изгибающих моментов в заданных сечениях 1 и 2

Представим схему сил в многопролетной балке и линии влияния поперечных сил и изгибающих моментов в заданных сечениях 1 и 2 (рис. 27).

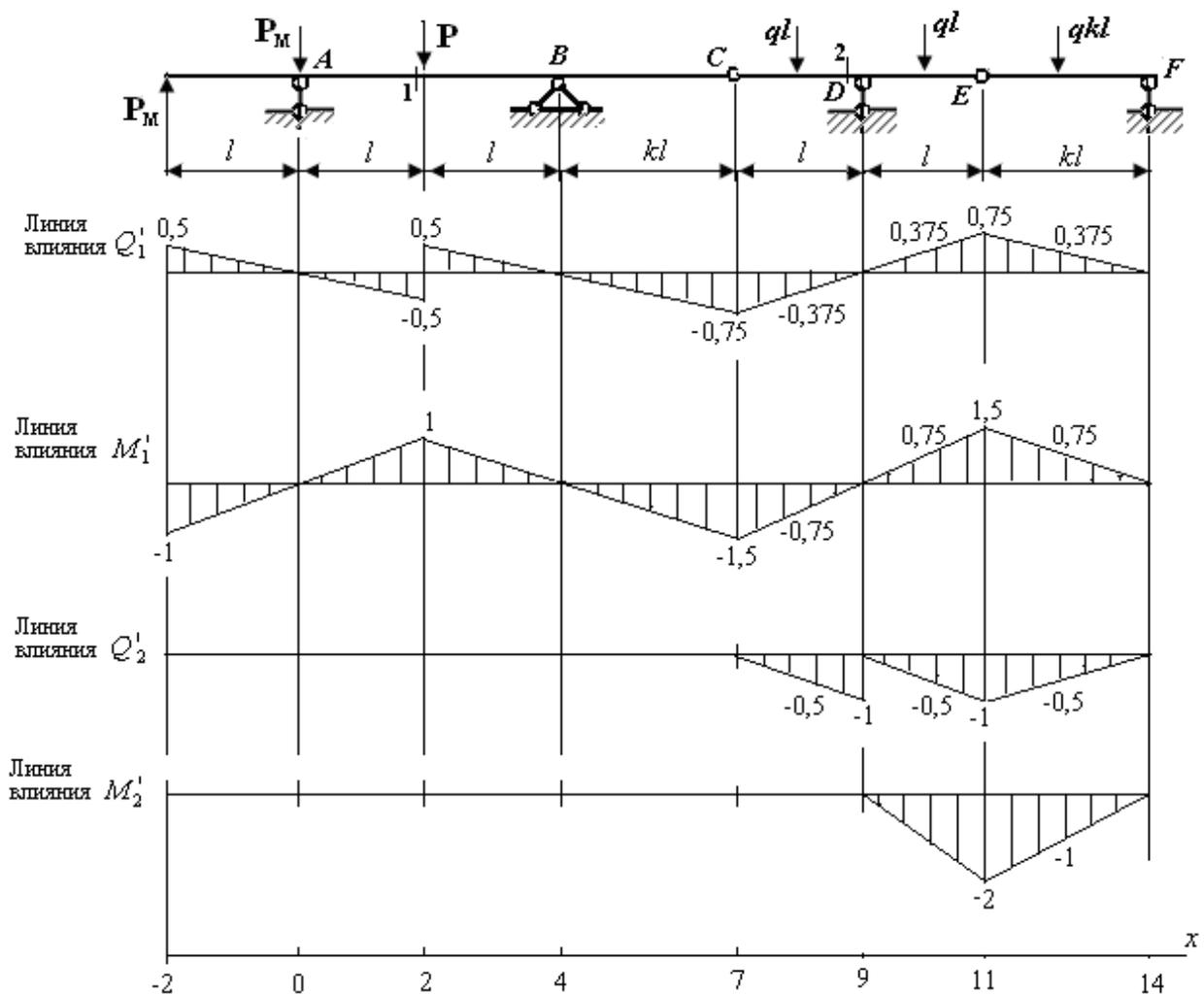


Рис. 27. Схема многопролетной балки и линии влияния поперечных сил и изгибающих моментов в заданных сечениях 1 и 2

Поперечная сила Q_1 в сечении 1 определится как

$$Q_1 = \sum P_i \cdot Q'_1(x_{P_i}) = -P_M \cdot 0,5 + P \cdot 0,5 - ql \cdot 0,375 + ql \cdot 0,375 + qkl \cdot 0,375,$$

где P_i – значение i -й силы, $Q'_1(x_{P_i})$ – ордината линии влияния Q'_1 в точке приложения силы P_i .

Учитывая, что $P_M = M / l = 30$ кН, $P = 20$ кН, $ql = 80$ кН, $qkl = 120$ кН, получим

$$Q_1 = -30 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,5 + (-80 + 80 + 120) \cdot 0,375 = 40 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент M_1 в сечении 1 определится как

$$M_1 = \sum P_i \cdot M'_1(x_{P_i}) = P_M \cdot 1 + P \cdot 1 - ql \cdot 0,75 + ql \cdot 0,75 + qkl \cdot 0,75,$$

где P_i – значение i -й силы, $M'_1(x_{P_i})$ – ордината линии влияния M'_1 в точке приложения силы P_i .

Учитывая, что $P_M = M / l = 30$ кН, $P = 20$ кН, $ql = 80$ кН, $qkl = 120$ кН, получим

$$M_1 = 30 \cdot 1 + 20 \cdot 1 - 80 \cdot 0,75 + 80 \cdot 0,75 + 120 \cdot 0,75 = 30 + 20 + 90 = 140 \text{ кНм.}$$

Поперечная сила Q_2 в сечении 2 определится как

$$Q_2 = \sum P_i \cdot Q'_2(x_{P_i}) = -ql \cdot 0,5 - ql \cdot 0,5 - qkl \cdot 0,5,$$

где P_i – значение i -й силы, $Q'_2(x_{P_i})$ – ордината линии влияния Q'_2 в точке приложения силы P_i .

Учитывая, что $ql = 80$ кН, $qkl = 120$ кН, получим

$$Q_2 = -80 \cdot 0,5 - 80 \cdot 0,5 - 120 \cdot 0,5 = -40 - 40 - 60 = -140 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент M_2 в сечении 2 определится как

$$M_2 = \sum P_i \cdot M'_2(x_{P_i}) = -ql \cdot 1 - qkl \cdot 1,$$

где P_i – значение i -й силы, $M'_2(x_{P_i})$ – ордината линии влияния M'_2 в точке приложения силы P_i .

Учитывая, что $ql = 80$ кН, $qkl = 120$ кН, получим

$$M_2 = -80 \cdot 1 - 120 \cdot 1 = -200 \text{ кНм.}$$

Сечение 1 расположено в конце 2-го участка многопролетной балки ($x = 2$ м), а сечение 2 расположено в конце 5-го участка ($x = 9$ м, рис. 27). Ранее были определены значения поперечных сил и изгибающих моментов в различных поперечных сечениях многопролетной балки и эти значения приведены в таблицах 1 и 2.

Сопоставляя табличные значения для сечений в конце 2-го участка и в конце 5-го участка с результатами вычислений поперечных сил и изгибающих моментов по линиям влияния поперечных сил и изгибающих моментов для заданных сечений 1 и 2, устанавливаем их полное соответствие.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – М. : Высш. шк., 1986. – 607 с.
2. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – С-Пб. : Лань, 2004. – 656 с.
2. Снитко, Н. К. Строительная механика / Н. К. Снитко. – М. : Высш. шк., 1989. – 187 с.
3. Клейн, Г. К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Г. К. Клейн, В. Г. Рекач, Г. И. Розенблат. – М. : Высш. шк., 1978. – 318 с.
4. Манжосов, В. К. Расчетно-проектировочные и контрольные задания по строительной механике (для студентов ЗВФ) : методические указания / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 28 с.
5. Черный, А. Н. Статически определимая многопролетная балка. Линии влияния : методические указания / А. Н. Черный. – Ульяновск : УлГТУ, 2003. – 20 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задание 1. Расчет многопролетной статически определимой балки Техническое задание

Для заданной многопролетной статически определимой балки, схемы нагружения которой приведены на рис. 28–31, а исходные данные представлены в таблице 6, требуется:

1. Произвести кинематический анализ.
2. Определить реакции в опорах балки.
3. Определить значения и построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях балки.
4. Для заданных сечений 1 и 2 построить линии влияния поперечных сил и изгибающих моментов, а также линии влияния двух опорных реакций (по выбору).
5. По линиям влияния определить внутренние силовые факторы в заданных сечениях и сопоставить их со значениями на соответствующих эпюрах.

Таблица 6

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ
к расчетно-проектировочному заданию
«Расчет многопролетной статически определимой балки»

Параметры	Номер столбца			
	1	2	3	4
Сила P , кН	10	15	10	25
Момент пары сил M , кНм	16	20	15	25
Интенсивность распределенных сил q , кН/м	10	5	15	20
Длина участка l , м	4	2	3	5
Коэффициент k	1,25	1,5	1,5	1,2

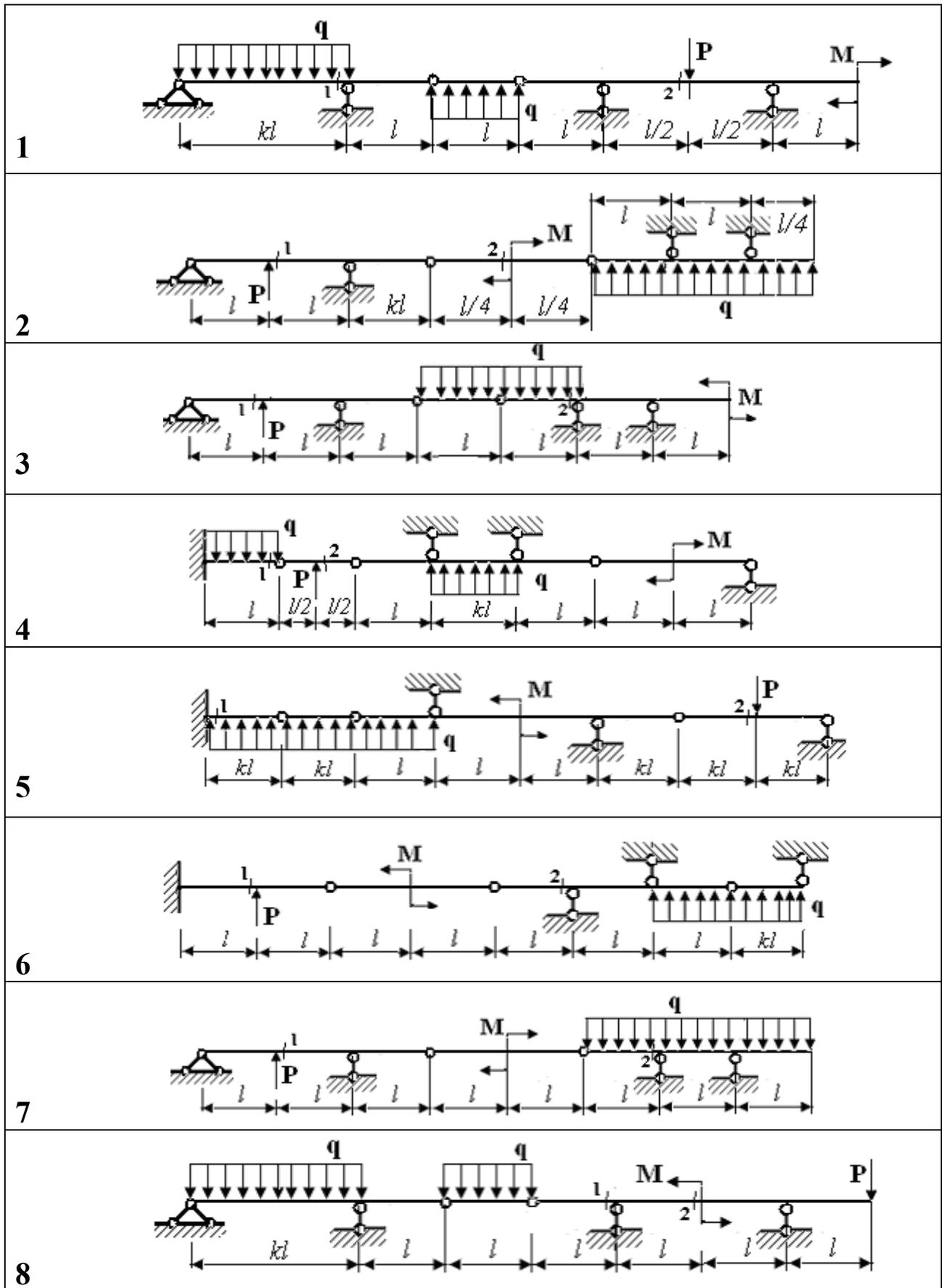


Рис. 28

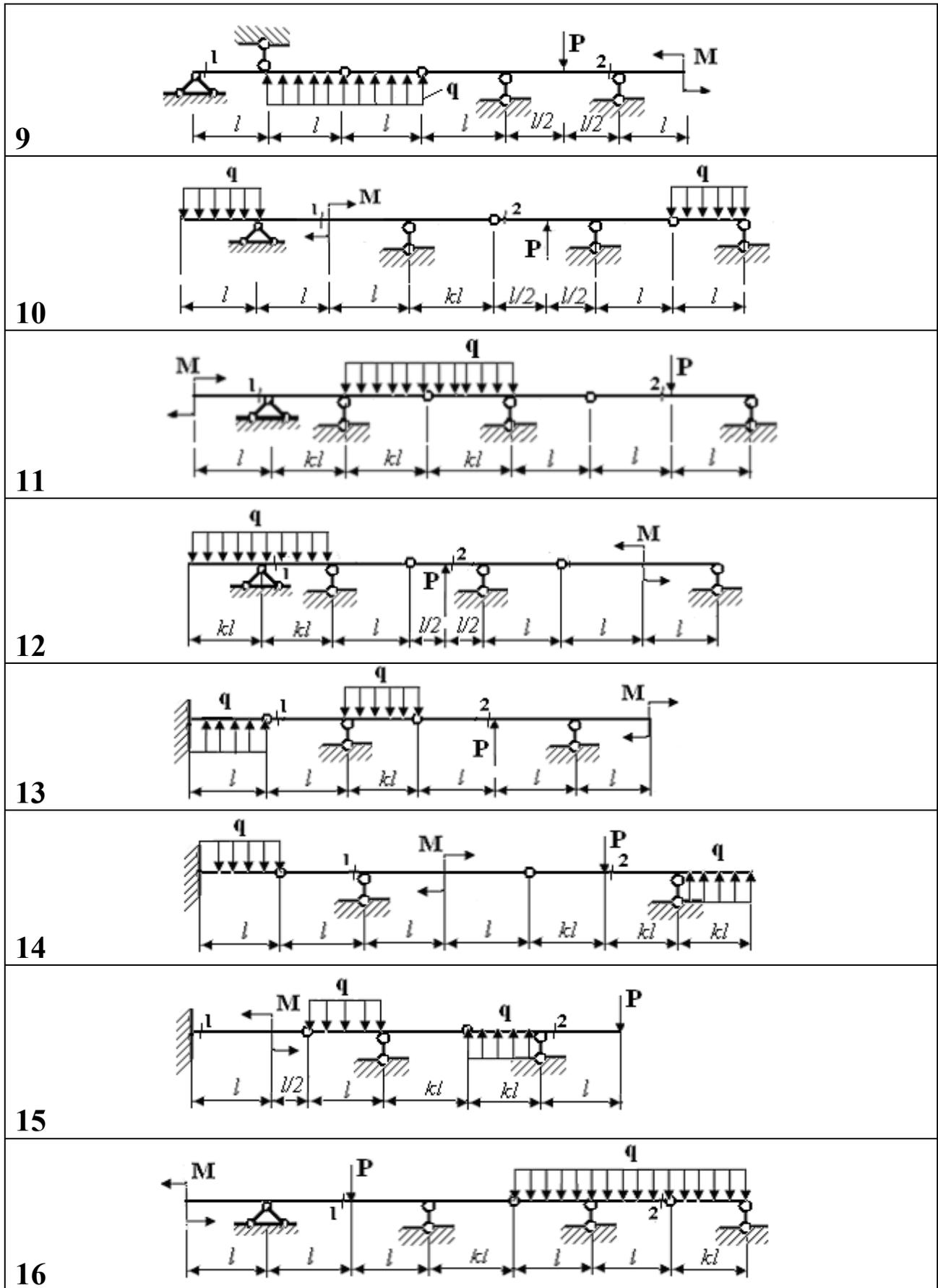


Рис. 29

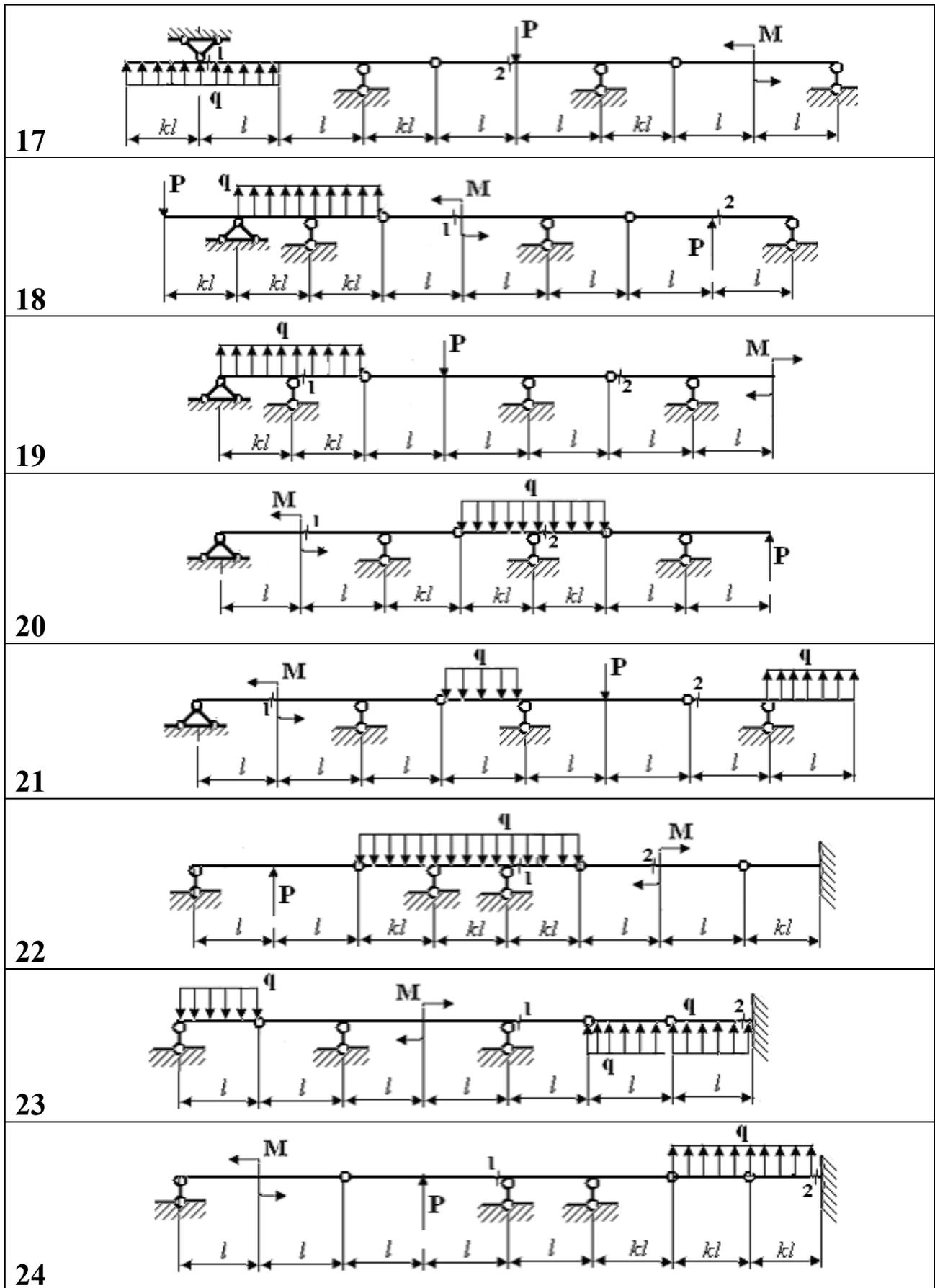


Рис. 30

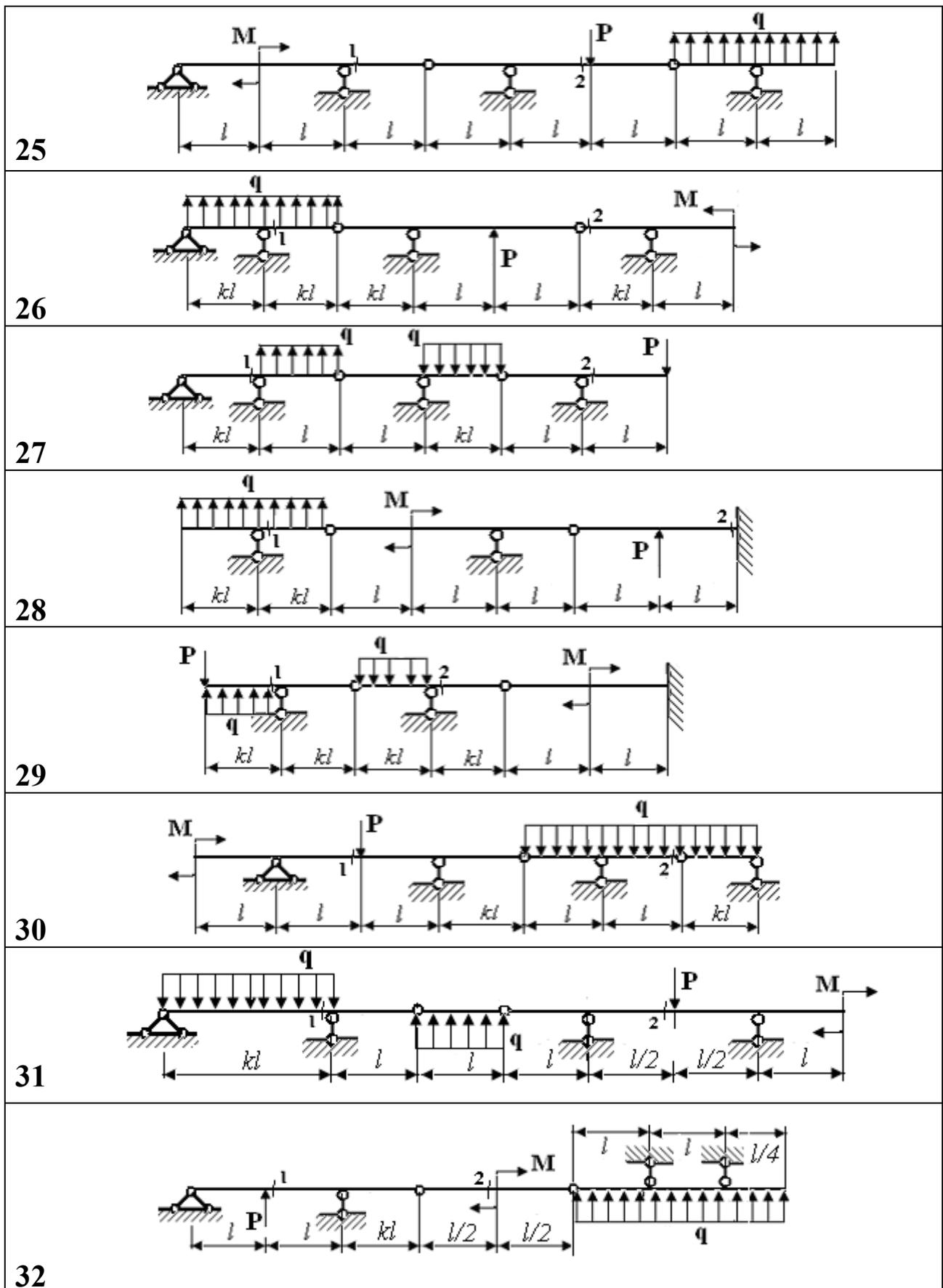


Рис. 31