ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

***Тема*:** Применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы для определения момента инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

1. Цель и задачи лабораторной работы

1.1 ***Цель выполнения работы*** - экспериментальное определение момента инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

1.2. ***Задачи выполнения работы***: 1) Приобретение умений и навыков применения теоремы об изменении кинетической энергии механической системы для определения момента инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси; 2) Приобретение практических навыков работы на лабораторной установке; 3) Овладение методиками экспериментального исследования и обработки полученных результатов.

2. Краткие теоретические сведения

2.1. ***Теорема об изменении кинетической энергии***.

Равенство, выражающее теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной форме, имеет вид

$$T - T_0 = A^i + A^e. \tag{2.1}$$

Здесь T_0 и T – значения кинетической энергии механической системы в начальном и конечном положениях, A^i – суммарная работа внутренних сил системы, A^e– суммарная работа внешних сил, приложенных к системе при ее переходе из начального положения в конечное.

Напомним, что единицей измерения кинетической энергии, как и работы силы, служит Джоуль (Дж), [Дж]=[Н·м].

Кинетическая энергия твердого тела, совершающего поступательное движение, вычисляется по формуле

$$T = \frac{MV^2}{2}, \tag{2.2}$$

где M – масса тела, V – его скорость.

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, определяется формулой

$$T = \frac{J_{zz}\omega^2}{2}, \tag{2.3}$$

где J_{zz} – момент инерции тела относительно его оси вращения Oz, ω – его угловая скорость.

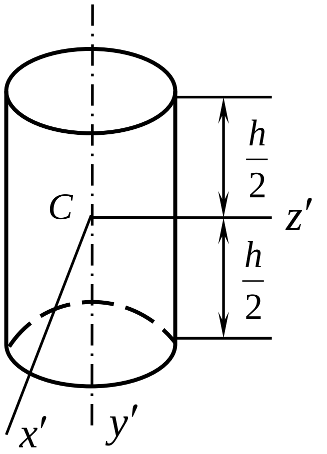

Рис. 2.1. Однородный круговой цилиндр

Моменты инерции однородного кругового цилиндра массы M, радиуса r и высоты h (рис. 2.1) относительно осей, проходящих через центр масс C цилиндра, даются формулами

$$J_{x'x'} = J_{z'z'} = \frac{M}{4}\left(r^2 + \frac{h^3}{3}\right),$$
$$J_{y'y'} = \frac{Mr^2}{2}. \tag{2.4}$$

Размерность моментов инерции [кгм^2].

2.2. *Теорема Штейнера-Гюйгенса*.

В курсе теоретической механики доказывается равенство, связывающее моменты инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс тела C.

$$J_{zz} = J_{z'z'} + Md^2, \tag{2.5}$$

где z' – ось, проходящая через центр C масс тела, d – расстояние между параллельными осями z' и z, M – масса тела.

Равенство (2.5) – это теорема Штейнера-Гюйгенса: момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

Из равенства (2.5) видно, что $J_{zz} > J_{z'z'}$. Следовательно, из всех моментов инерции относительно осей данного направления наименьшим будет момент относительно той оси, которая проходит через центр масс тела.

2.3. ***Работа силы тяжести***.

Из курса теоретической механики известно, что работа силы характеризует действие этой силы на перемещении ее точки приложения. Единица измерения работы – Джоуль (Дж).

Что касается силы тяжести, то также известно, что ее работа A_p равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля P силы тяжести на высоту H, на которую опускается или поднимается точка приложения этой силы:

$$A_p = \pm P \cdot H. \tag{2.6}$$

2.4. Момент силы, приложенный к твердому телу, оказывает вращательное действие на тело.

При повороте тела вокруг неподвижной оси под действием пары сил, характеризуемой моментом, момент силы совершает работу. Поскольку вращательное действие пары сил на тело полностью определяется моментом пары, то суммарную работу пары сил, ради краткости, называют работой момента.

В общем случае работа A_{M_0} момента M_0 определяется интегралом

$$A_{M_0} = \pm \int_0^{\varphi} M_0 d\varphi, \tag{2.7}$$

перед которым ставится знак плюс или минус. Здесь φ – угол поворота тела в радианах. Напомним, что знак плюс ставится перед интегралом (2.7), если момент M_0 и поворот тела на угол φ направлены в одну сторону, а знак минус – в противном случае.

Если момент M_0 пары сил не зависит от угла φ поворота тела, то есть $M_0 = const$, тогда работа момента определяется произведением

$$A_{M_0} = \pm M_0 \varphi, \tag{2.8}$$

перед которым также ставится знак плюс или минус.

2.5. В качестве примера применения приведенных выше формул рассмотрим движение механической системы, состоящей из прямолинейного стержня с двумя однородными круговыми цилиндрическими грузами, расположенными на вращающейся вокруг вертикальной оси рамке A и гири B, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок E с неподвижной осью

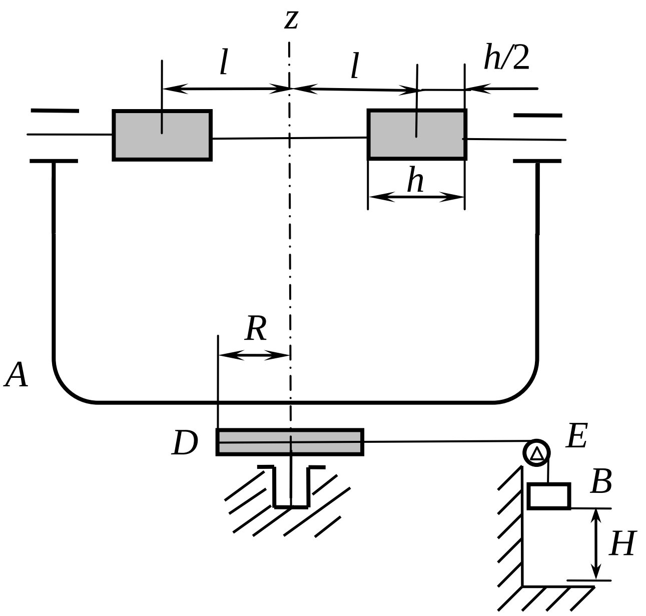

Рис. 2.2. Схема начального положения механизма

вращения (рис. 2.2). Движение механизма начинается из состояния покоя. При этом продолжительность опускания гири B на высоту H равна t_1. Если же рассматривать движение данной системы без двух цилиндрических грузов, то время опускания груза B на прежнюю высоту равно t_2. Массы гири B и цилиндрических грузов равны соответственно M_1 и M_2, радиус шкива D, жестко сидящего на оси вращения рамки, равен R, а расстояния от центров тяжести цилиндрических грузов до оси z вращения рамки

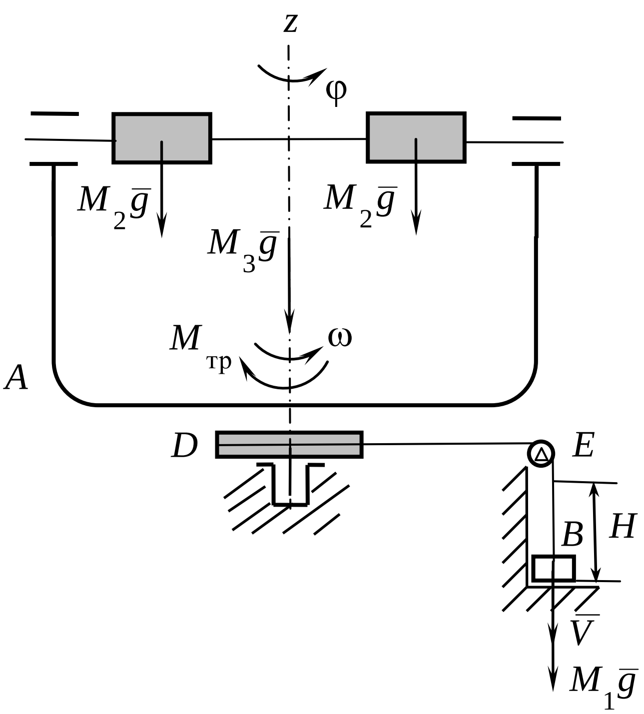

Рис. 2.3. Схема конечного положения механизма

равны l; радиус и высота цилиндрических грузов – r и h. Ставится задача − считая момент сил трения в опоре рамки с грузами постоянным и не зависящим от их массы, определить момент инерции J рамки и стержня без грузов.

Для решения поставленной задачи применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной форме. С этой целью рассматриваемый механизм изображен в начальном (рис. 2.2) и конечном (рис. 2.3) положениях.

Поскольку данный механизм начинает движение из состояния покоя, то

$$T_0 = 0. \qquad (2.9)$$

Тела, образующие механизм, являются абсолютно твердыми, а нить не растягивается, поэтому

$$A^i = 0. \qquad (2.10)$$

Кинетическая энергия T механизма равна сумме кинетических энергий T_B гири *B* и T_A рамки *A* с грузами

$$T = T_B + T_A. \qquad (2.11)$$

Гиря *B* движется поступательно со скоростью $\overline{V}$, поэтому по формуле (2.2)

$$T_B = \frac{M_1 V^2}{2}. \qquad (2.12)$$

Рамка с грузами совершает вращательное движение, следовательно, по формуле (2.3) имеем

$$T_A = \frac{J_{zz}\omega^2}{2}, \qquad (2.13)$$

где J_{zz} и ω – момент инерции и угловая скорость рамки с грузами.

Угловая скорость ω рамки с грузами и линейная скорость V гири *B* связаны кинематическим соотношением

$$\omega = \frac{V}{R}. \qquad (2.14)$$

Момент инерции J_{zz} рамки с грузами определяем, пользуясь формулами (2.4) и (2.5). Имеем

$$J_{zz} = J + M_2 c^2 \qquad (2.15)$$

где $c^2 = 2\left[l^2 + \frac{1}{4}\left(r^2 + \frac{h^2}{3}\right)\right]$.

Подставляя соотношения (2.14) и (2.15) в формулу (2.13), получаем

$$T_A = \frac{(J + M_2 c^2)V^2}{2R^2}. \qquad (2.16)$$

Таким образом, с учетом выражений (2.12) и (2.16) кинетическая энергия механизма запишется

$$T=\left(M_1+\frac{J+M_2c^2}{R^2}\right)\frac{V^2}{2}. \tag{2.17}$$

Суммарная работа A^e внешних сил, приложенных к механизму, складывается из работ силы тяжести гири *B* и постоянного момента $M_{\text{тр}}$ сил трения

$$A^e=A_{M_1g}+A_{M_{\text{тр}}}. \tag{2.18}$$

Работу силы тяжести M_1g гири *B* вычисляем по формуле (2.6)

$$A_{M_1g}=M_1g\cdot H. \tag{2.19}$$

Здесь g – гравитационное ускорение.

Работа постоянного момента $M_{\text{тр}}$ сил трения определяется формулой (2.8)

$$A_{M_{\text{тр}}}=-M_{\text{тр}}\varphi, \tag{2.20}$$

где $\varphi=\dfrac{H}{R}$ – угол поворота рамки с грузами при опускании гири *B* на высоту *H*.

С учетом равенств (2.19) и (2.20) выражение (2.18) принимает вид

$$A^e=\left(A_{M_1g}-\frac{M_{\text{тр}}}{\mathrm{R}}\right)H. \tag{2.21}$$

Подставляя выражения (2.9), (2.10), (2.17) и (2.21) в равенство (2.1), получаем

$$\left(M_1\frac{J+M_2c^2}{R^2}\right)\frac{V^2}{2}=\left(M_1g-\frac{M_{\text{тр}}}{R}\right)H. \tag{2.22}$$

Отсюда определяем квадрат модуля скорости гири

$$V^2=\frac{2\left(M_1g-\dfrac{M_{\text{тр}}}{R}\right)H}{M_1+\dfrac{J+M_2c^2}{R^2}}. \tag{2.23}$$

Для определения ускорения *a* гири *B* продифференцируем по времени обе части выражения (2.22), предполагая, что скорость *V* и высота *H* опускания гири *B* является функциями времени *t*. Тогда

$$\left(M_1+\frac{J+M_2c^2}{R^2}\right)\frac{2V\dfrac{dV}{dt}}{2}=\left(M_1g-\frac{M_{\text{тр}}}{R}\right)\frac{dH}{dt}.$$

Если учесть, что $\dfrac{dV}{dt}=a$ и $\dfrac{dH}{dt}=V$, то

$$a=\frac{M_1g-\dfrac{M_{\text{тр}}}{R}}{M_1+\dfrac{J+M_2c^2}{R^2}}=const. \tag{2.24}$$

То есть гиря *B* движется с постоянным ускорением a, поэтому в произвольный момент времени t имеет место уравнение $V=at$, откуда следует очевидное равенство

$$\frac{1}{t^2}=\frac{a^2}{V^2}. \tag{2.25}$$

Таким образом, при $t=t_1$ равенство (2.25) с учетом выражений (2.23) и (2.24) примет вид

$$\frac{1}{t_1^2}=\frac{M_1g-\dfrac{M_{\text{тр}}}{R}}{2\left(M_1+\dfrac{J+M_2c^2}{R^2}\right)\cdot H}. \tag{2.26}$$

Очевидно, что при отсутствии грузов на рамке в равенстве (2.26) следует положить $M_2=0$ и по условию задачи время t_1 заменить временем t_2:

$$\frac{1}{t_2^2}=\frac{M_1g-\dfrac{M_{\text{тр}}}{R}}{2\left(M_1+\dfrac{J}{R^2}\right)\cdot H}. \tag{2.27}$$

Разделив левую и правую части равенства (2.26) соответственно на левую и правую части равенства (2.27), после несложных преобразований получаем следующую формулу для определения момента инерции J рамки и стержня без грузов

$$J = \frac{M_2 c^2 t_2^2}{t_1^2 - t_2^2} - M_1 R^2. \tag{2.28}$$

3. Оборудование

3.1. Установка для изучения динамики вращательного движения ФДМ-006М.

3.2. Блок индикации временных интервалов.

4. Устройство и принцип работы установки

Схема установки для изучения динамики вращательного движения ФДМ 006М изображена на рис. 4.1.

Принцип работы установки основан на изменении частоты вращения рамки и стержня при различных положениях цилиндрических грузов относительно оси вращения.

Блок индикации предназначен для индикации временных интервалов прохождения грузом датчиков в процессе проведения лабораторных работ и управления электромагнитом.

Установка выполнена в настольном исполнении и состоит из собственно установки 3 и блока индикации 12.

Установка включает в себя опору 1 с регулировочными винтами 2, стержень с грузами 4, расположенными на вращающейся рамке 5, электромагнит 6, шкалу 7, фотодатчики 8, ускоряющий груз 11, подвешенный на нити 10, перекинутой через блок 9 и намотанной на шкив 13.

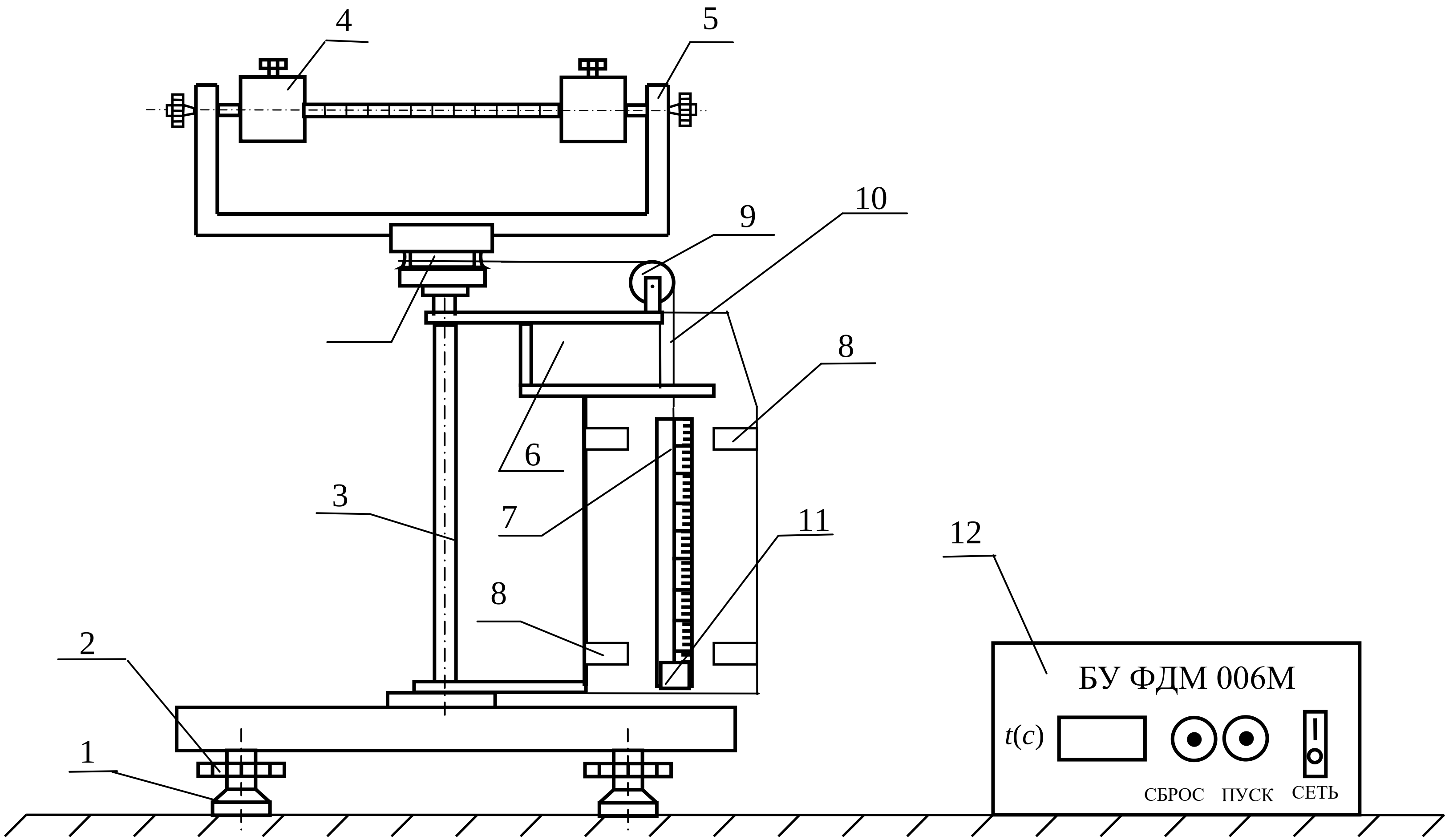

Рис. 4.1. Схема установки для изучения динамики вращательного движения ФДМ 006М.
1 – опора; 2 – регулировочные винты; 3 – установка; 4 – цилиндрические грузы; 5 – рамка и стержень; 6 – электромагнит; 7 – шкала; 8 – фотодатчики; 9 – блок; 10 – нить; 11 – ускоряющий груз; 12 – блок индикации; 13 – шкив, жестко сидящий на оси вращения рамки.

5. Указания мер безопасности

5.1. К работе с установкой допускаются лица, ознакомленные с ее устройством, принципом действия, а также разделом 6 настоящей лабораторной работы.

5.2. Работы, связанные с подготовкой установки к эксплуатации, ее обслуживанием, производить, не подключая блок индикации к питающей сети.

5.3. Перед началом работы с установкой необходимо убедиться, что блок индикации заземлен.

5.4. После проведения работы с установкой необходимо отключить блок индикации от сети.

6. Подготовка и порядок проведения лабораторной работы

Расположить установку на столе. С помощью регулировочных винтов 2 опоры 1 добиться, чтобы нить 10 подвеса ускоряющего груза 11, перекинутая через блок 9, находилась симметрично относительно корпусов оптоэлектронных датчиков, а ускоряющий груз не касался их при движении.

Числовые значения основных параметров установки следующие. $M_1 = 0{,}238$ кг и H = 0,3 м – масса и высота опускания ускоряющего груза 11; $M_2 = 0{,}81$ кг, r = 0,024 м и h = 0,06 м – масса, радиус и высота цилиндрических грузов 4; R = 0,02 м – радиус шкива 13, жестко сидящего на оси рамки 5.

6.2. Соединить установку с блоком индикации 12. Блок индикации подключить к питающей сети.

6.3. Нажать кнопку «СЕТЬ» на лицевой панели блока индикации 12.

6.4. Установить симметрично относительно оси вращения и зафиксировать цилиндрические грузы 4 на стержне рамки 5.

6.5. Измерить расстояние l_1 от оси вращения рамки 5 до ближайших торцевых плоскостей цилиндрических грузов 4.

6.6. Вычислить расстояние l от оси вращения рамки до центров тяжести цилиндрических грузов 4 по формуле $l = l_1 + h/2$.

6.7. Вращать рукой рамку 5 с грузами 4, пока ускоряющий груз 11 не коснется магнитопровода электромагнита 6.

6.8. Нажать кнопку «СБРОС» на лицевой панели блока индикации 12. При этом показание индикатора обнуляется.

6.9. Нажать кнопку «ЗАП» на лицевой панели блока индикации 12.

6.10. После опускания ускоряющего груза 11 на высоту H рукой остановить вращение рамки 5 и убедиться в наличии цифровой информации на индикаторном табло.

6.11. Записать время t_1 опускания ускоряющего груза 11.

6.12. Снять цилиндрические грузы 4 с рамки 5.

6.13. Вращать рукой рамку 5, пока ускоряющий груз 11 не коснется магнитопровода электромагнита 6.

6.14. Выполнить мероприятия по пунктам 7.9 и 7.10.

6.15. Записать время t_2 опускания ускоряющего груза 11.

6.16. Нажать кнопку «СБРОС». Убедиться в обнулении индикаторного табло.

6.17. По формуле (2.28) вычислить искомый момент инерции J рамки со стержнем относительно оси вращения

$$J = \frac{2M_2\left[l^2 + \frac{1}{4}\left(r^2 + \frac{h^2}{3}\right)\right]t_2^2}{t_1^2 - t_2^2} - M_1R^2 .$$

7. Содержание и оформлением отчета

7.1. Название лабораторной работы.

7.2. Цель лабораторной работы.

7.3. Результаты измерений и расчетов.

7.4. Выводы по лабораторной работе.

7.5. Лабораторная работа оформляется на сброшюрованных листах формата А4.

Контрольные вопросы

1. Записать равенство, выражающее теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной форме.

2. По какой формуле вычисляется кинетическая энергия поступательно движущегося твердого тела?

3. Какая формула определяет кинетическую энергию твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

4. Что является единицей измерения кинетической энергии?

5. Что характеризуют моменты инерции тела относительно осей?

6. В каких единицах измеряются моменты инерции тела относительно осей?

7. Каким равенством выражается теорема Штейнера-Гюйгенса?

8. Что характеризует работа силы?

9. Что является единицей измерения работы силы?

10. По какой формуле вычисляется работа силы тяжести?

11. По какой формуле вычисляется работа момента, приложенного к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси?

12. Какие силы называются внутренними силами механической системы?

13. Какие силы называются внешними силами механической системы?

14. В каких случаях работа внутренних сил равна нулю?