

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Для заданной расчетной схемы рамы необходимо построить эпюры внутренних усилий (изгибающего момента M , перерезывающих сил Q , нормальных сил N) и проверить полученное решение.

Таблица 1

Исходные данные

Первая цифра шифра	P_1 , кН	P_2 , кН	l , м	Вторая цифра шифра	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	h , м	Третья цифра шифра (№ схемы)	$\frac{J_1}{J_2}$
1	2	0	4	√ 1	1	0	8	1	1:2
2	0	3	6	2	0	2	6	√ 2	3:4
3	4	0	2	3	3	0	4	3	3:2
4	0	5	5	4	0	4	9	4	2:1
5	3	0	7	5	2	0	7	5	1:3
6	0	2	9	6	0	1	5	6	2:3
7	4	0	12	7	3	0	12	7	3:1
8	0	5	10	8	0	2	10	8	1:2
9	2	0	6	9	4	0	8	9	1:3
√ 0	0	3	8	0	0	6	10	0	4:3

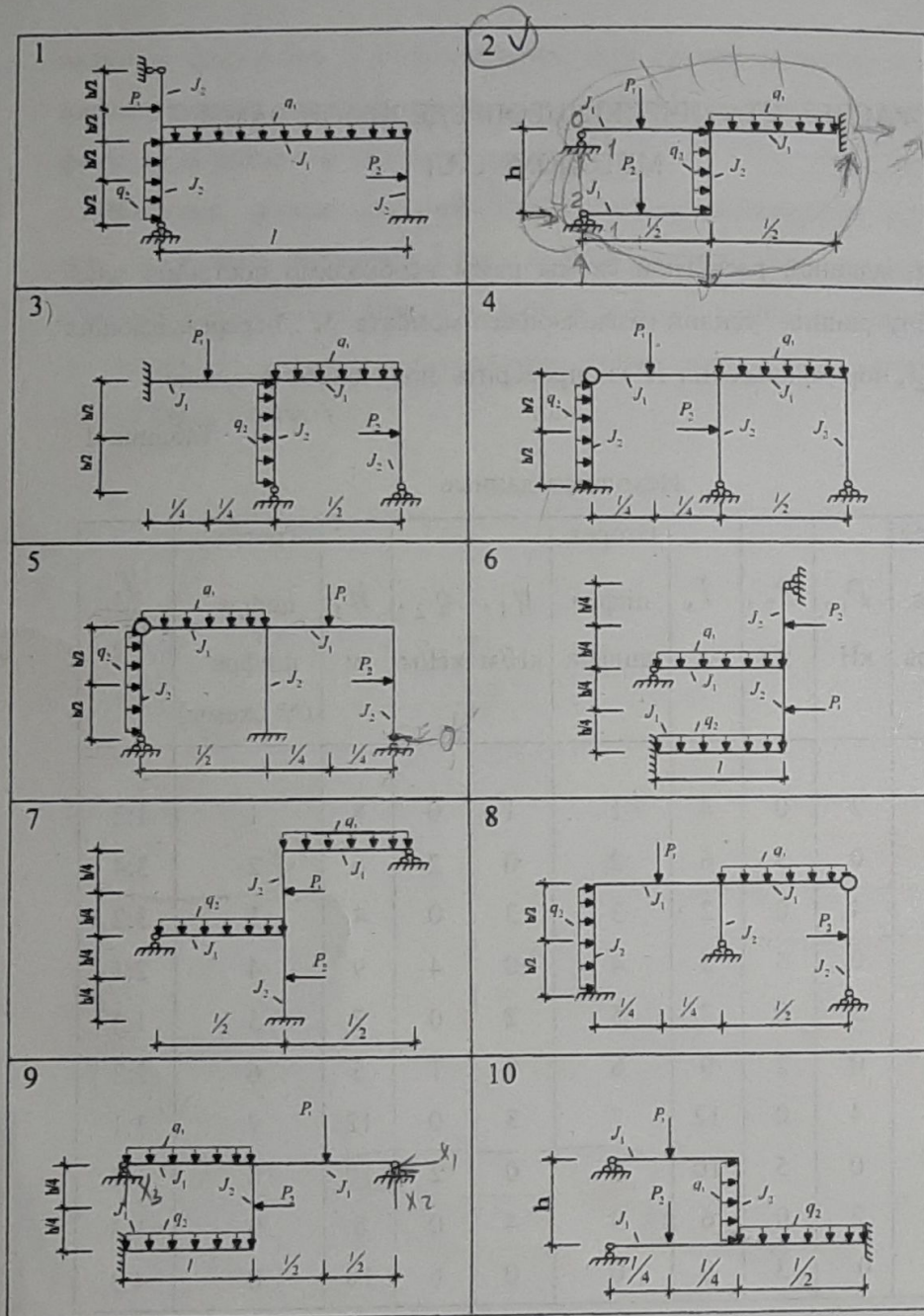


Рис.1

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Расчет заданной рамы (рис.2) необходимо выполнить в такой последовательности:

- 1) определить степень статической неопределимости рамы, выбрать основную систему метода сил и составить канонические уравнения;
- 2) построить эпюры изгибающих моментов в единичных и грузовом состояниях основной системы;
- 3) вычислить коэффициенты канонических уравнений и выполнить их проверки;
- 4) решить систему канонических уравнений;
- 5) построить окончательную эпюру изгибающих моментов M_X и проверить ее из условий деформаций;
- 6) построить окончательную эпюру поперечных сил Q_X ;
- 7) построить окончательную эпюру нормальных сил N_X ;
- 8) определить опорные реакции рамы;
- 9) проверить решение из условия равновесия рамы в целом под действием внешней нагрузки и вычисленных опорных реакций;
- 10) составить исходные матрицы и произвести расчет в матричной форме.

1. Степень статической неопределимости рамы (L) определяется по формуле

$$L = 3K - C_y,$$

где K — число замкнутых контуров, C_y — количество связей, устраненных по сравнению с жестким соединением.

$$L = 3 \times 2 - 4 = 2.$$

Здесь рама состоит из двух замкнутых контуров ADB и CDB.

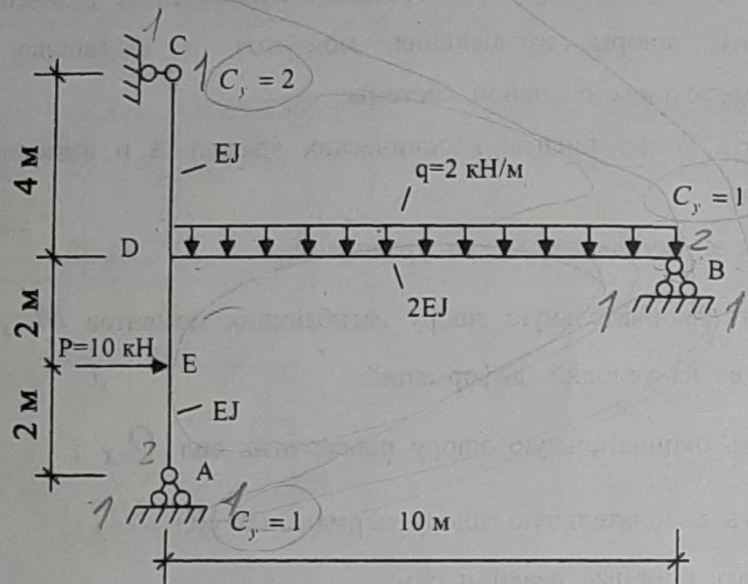


Рис. 2

Для дальнейшего расчета необходимо образовать основную систему метода сил, которая получается из заданной (рис.2), путем устранения «лишних» связей и замены их соответствующими неизвестными усилиями. При этом их количество равно степени статической неопределимости ($L=2$). Это можно сделать различными способами, убирая как внутренние, так и внешние (опорные) связи. Необходимо только иметь в виду, чтобы вновь образованная статически определимая основная система была геометрически неизме-

няемой. В нашем случае отбросим опору «А» и заменим ее двумя неизвестными опорными реакциями X_1, X_2 (рис.3).

Для того, чтобы вновь образованная расчетная схема в состоянии «X» деформировалась так же, как заданная схема (рис.2), необходимо, чтобы перемещения (Δ) в направлении отброшенных связей были равны нулю, т.е.:

$$1) \Delta_{1X} = 0, \quad 2) \Delta_{2X} = 0.$$

Здесь и ниже первый индекс у перемещения указывает направление, по которому оно происходит, второй - состояние загрузки.

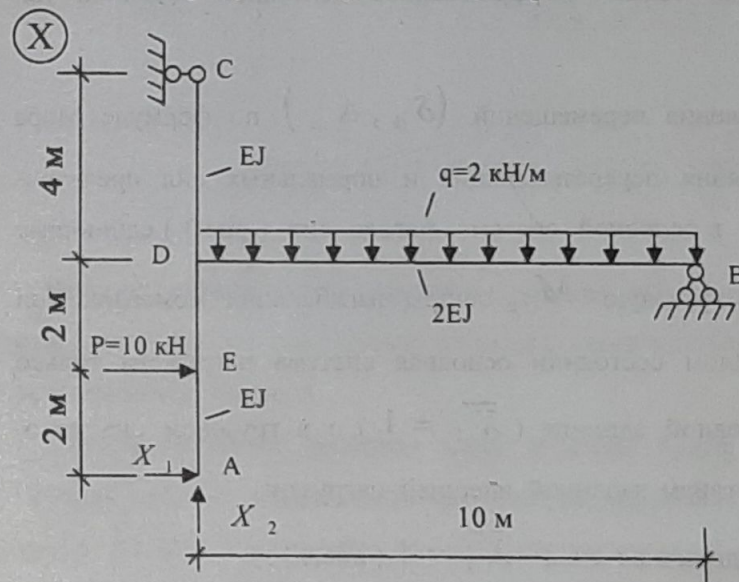


Рис.3

Используя принцип независимости действия сил, представим эти равенства в форме канонических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\},$$

где δ_{ik} ($i, k = 1, 2$) – перемещение точки «А» по направлению силы X_i , вызванное единичной силой $\bar{X}_k = 1$ (единичное перемещение); $\delta_{ik} X_k$ – перемещение той же точки по направлению силы X_i , вызванное силой X_k ; Δ_{ip} – перемещение точки «А» по направлению связи X_i , вызванное действием заданной нагрузки.

2. Для определения перемещений (δ_{ik}, Δ_{ip}) по формуле Мора без учета влияния перерезывающих и нормальных сил предварительно строим в основной системе метода сил (рис.3) единичные M_1, M_2 и грузовую M_p эпюры изгибающих моментов. При этом в единичном состоянии основная система нагружена только одной силой, равной единице ($\bar{X}_k = 1$), а в грузовом она находится под действием заданной внешней нагрузки:

А. Действует единичная сила $\bar{X}_1 = 1$ (рис.4):

Определяем опорные реакции:

- 1) $\sum y = 0; V_B = 0.$
- 2) $\sum M_C = 0, H_B \cdot 4 + \bar{X}_1 \cdot 8 = 0, H_B = -2.$
- 3) $\sum M_B = 0, H_C \cdot 4 - \bar{X}_1 \cdot 4 = 0, H_C = 1.$

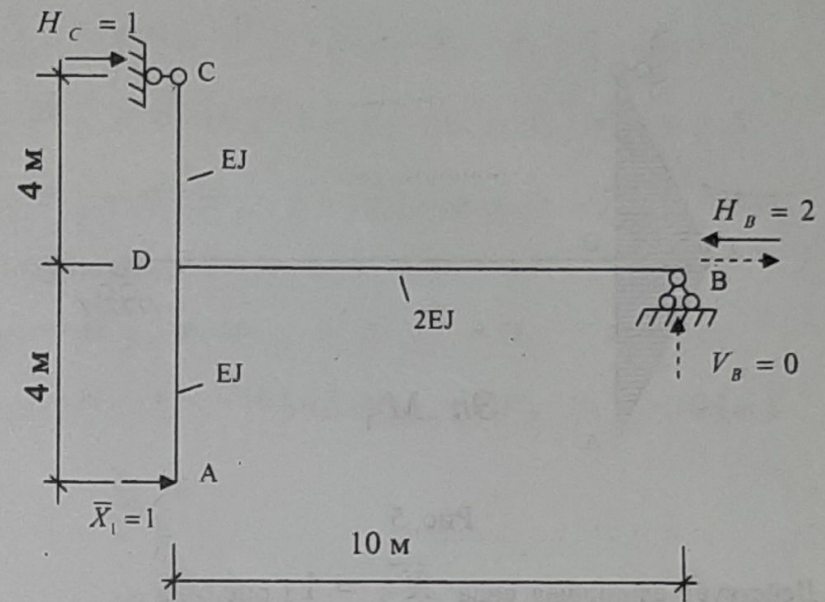


Рис.4

Следует отметить, что ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются на растянутых волокнах перпендикулярно оси соответствующего стержня

При выполнении расчетов здесь и ниже будем считать изгибающий момент положительным, если он направлен так, что стремится вызвать растяжение волокон, расположенных снизу от горизонтального и слева от вертикального элементов. В противном случае усилие считается отрицательным.

$$M_{AD} = M_{CD} = M_{BD} = M_{DB} = 0,$$

$$M_{DA} = \bar{X}_1 \cdot 4 = 4(\text{м}), \quad M_{DC} = H_C \cdot 4 = 4(\text{м}).$$

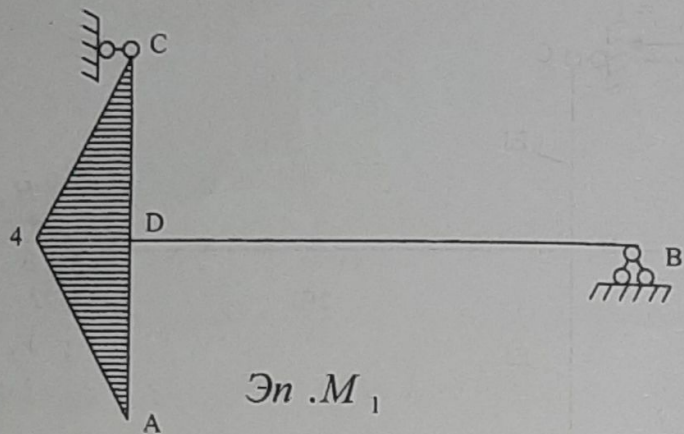


Рис. 5

Б. Действует единичная сила $\bar{X}_2 = 1$ (рис.6):

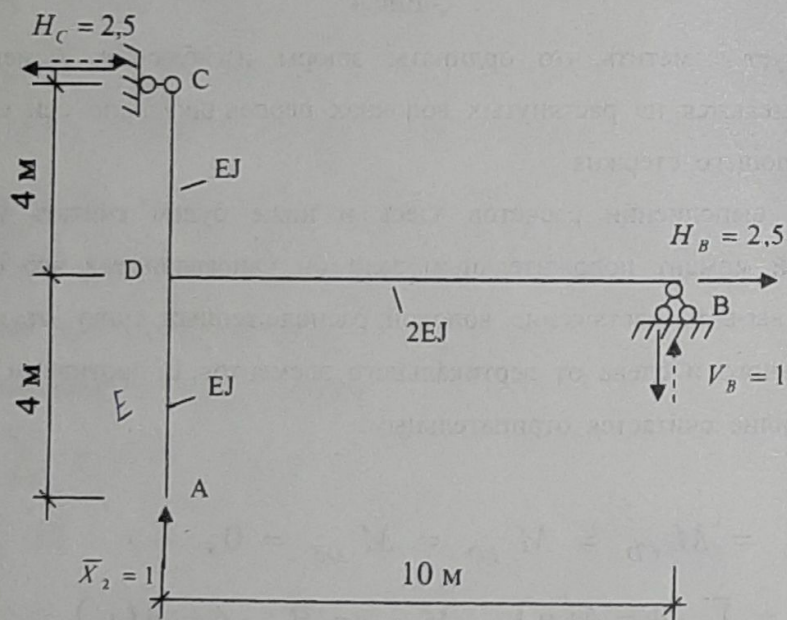


Рис. 6

Определяем опорные реакции:

- 1) $\sum y = 0; \bar{X}_2 + V_B = 0. V_B = -1.$
- 2) $\sum M_C = 0, H_B \cdot 4 - V_B \cdot 10 = 0, H_B = 2,5.$
- 3) $\sum M_B = 0, H_C \cdot 4 + \bar{X}_2 \cdot 10 = 0, H_C = -2,5.$

В результате:

$$M_{AD} = M_{DA} = M_{BD} = M_{CD} = 0,$$

$$M_{DC} = -H_C \cdot 4 = -10 (M), M_{DB} = -V_B \cdot 10 = -10 (M).$$

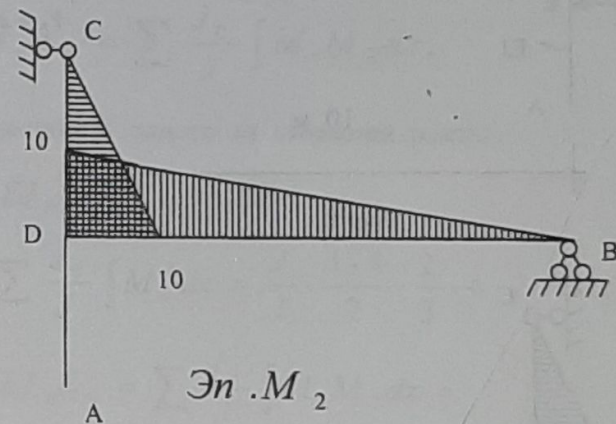


Рис. 7

В. Грузовое состояние (рис.8):

Определяем опорные реакции:

- 1) $\sum y = 0; V_B - q \cdot 10 = 0, V_B = 20 (кН)$
- 2) $\sum M_C = 0.$

$$H_B \cdot 4 + V_B \cdot 10 + P \cdot 6 - q \cdot 10 \cdot 5 = 0, H_B = -40 (кН)$$

$$3) \sum M_B = 0.$$

$$H_C \cdot 4 - P \cdot 2 - q \cdot 10 \cdot 5 = 0, \quad H_C = 30 \text{ (кН)}.$$

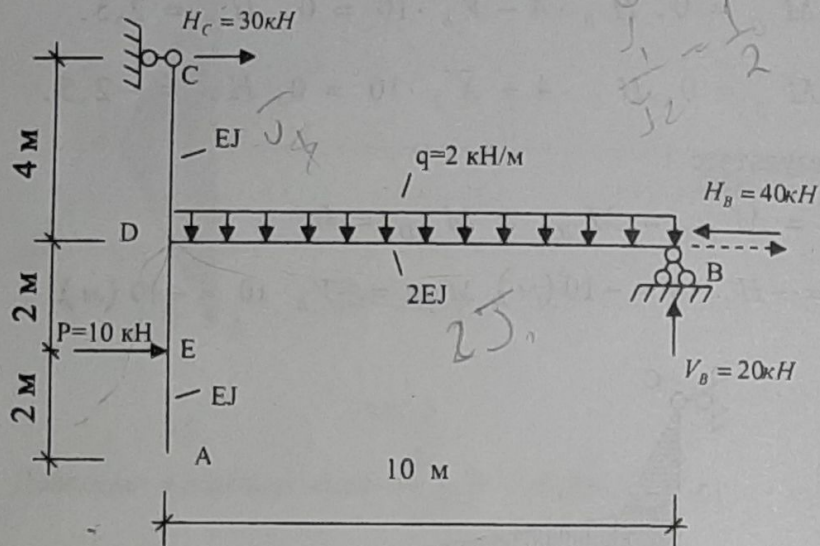


Рис. 8

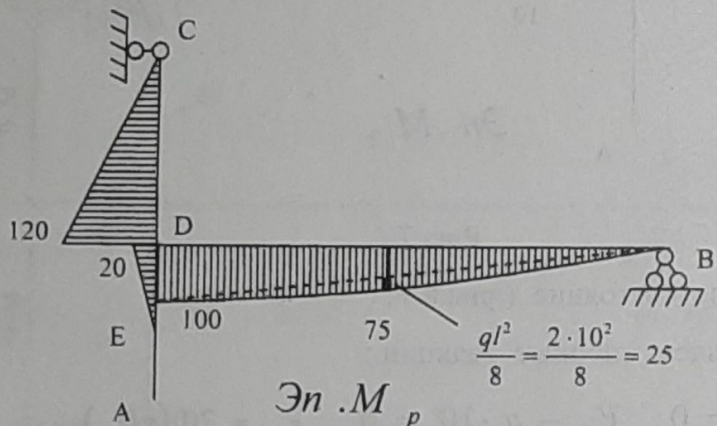


Рис. 9

$$M_{AE} = M_{EA} = M_{ED} = M_{BD} = M_{CD} = 0.$$

$$M_{DE} = P \cdot 2 = 20 \text{ (кНм)}.$$

$$M_{DC} = H_C \cdot 4 = 120 \text{ (кНм)}.$$

$$M_{DB} = V_B \cdot 10 - q \cdot 10 \cdot 5 = 100 \text{ (кНм)}.$$

3. Для удобства вычислений единичных и грузовых коэффициентов интеграл Мора принято увеличивать в EJ_0 раз. Тогда, в случае постоянного сечения стержней, данная формула принимает вид:

$$EJ_0 \Delta_{ik} = \sum \frac{J_0}{J} \int M_i M_k dx,$$

где EJ_0 - жесткость одного из стержней рамы.

$$\text{Примем } EJ_0 = EJ_{AB} = EJ.$$

$$EJ_0 \delta_{11} = \sum \frac{J_0}{J} \int M_1^2 dx = \frac{J}{J} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 = 42,67,$$

$$EJ_0 \delta_{12} = EJ_0 \delta_{21} = \sum \frac{J_0}{J} \int M_1 M_2 dx =$$

$$= \frac{J}{J} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-10) = -53,33,$$

$$EJ_0 \delta_{22} = \sum \frac{J_0}{J} \int M_2^2 dx = \frac{J}{J} \cdot \frac{10 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 +$$

$$+ \frac{J}{2J} \cdot \frac{10 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 = 300,$$

$$EJ_0 \Delta_{1r} = \sum \frac{J_0}{J} \int M_1 M_r dx = \frac{J}{J} \cdot \frac{20 \cdot 2}{2} \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) +$$

$$+ \frac{J}{J} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 120 = 706,67,$$

$$EJ_0 \Delta_{2P} = \sum \frac{J_0}{J} \int M_2 M_P dx = \frac{J}{J} \cdot \frac{10 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-120) +$$

$$+ \frac{J}{2J} \cdot \left[\frac{10 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} (-100) + \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 25 \cdot (-5) \right] = -3683,33.$$

При вычислении перемещений использовалось правило Верещагина.

Для исключения ошибок, которые могут образоваться в процессе расчета, необходимо на данном этапе выполнить проверку полученных коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.

Для этой цели необходимо построить суммарную эпюру изгибающих моментов M_Σ :

$$M_\Sigma = M_1 + M_2.$$

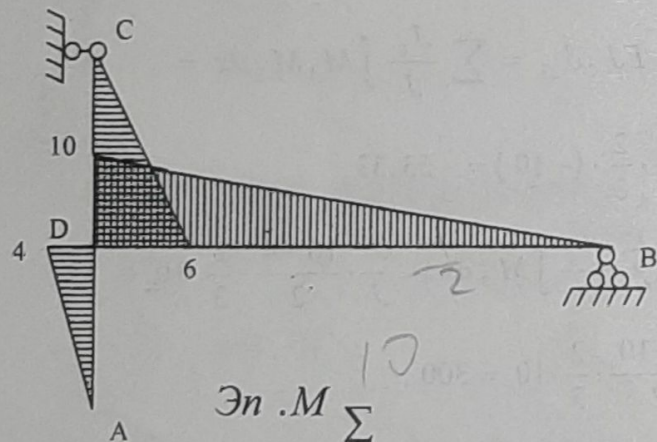


Рис.10

А. Универсальная проверка:

$$EJ_0 (\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}) = \sum \frac{J_0}{J} \int M_\Sigma^2 dx.$$

Для ее выполнения необходимо вычислить левую и правую части данного выражения и убедиться, что они равны.

$$EJ_0 (\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}) = 42,67 - 53,33 - 53,33 + 300 = 236,$$

$$\sum \frac{J_0}{J} \int M_\Sigma^2 dx = \frac{J}{J} \cdot \left(\frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) +$$

$$+ \frac{J}{2J} \cdot \frac{10 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 = 236.$$

Б. Построчная проверка:

$$EJ_0 (\delta_{11} + \delta_{12}) = \sum \frac{J_0}{J} \int M_1 M_\Sigma dx,$$

$$EJ_0 (\delta_{11} + \delta_{12}) = 42,67 - 53,33 = -10,66,$$

$$\sum \frac{J_0}{J} \int M_1 M_\Sigma dx = \frac{J}{J} \left[\frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \right.$$

$$\left. + \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6) \right] = -10,66.$$

$$EJ_0 (\delta_{21} + \delta_{22}) = \sum \frac{J_0}{J} \int M_2 M_\Sigma dx,$$

$$EJ_0 (\delta_{21} + \delta_{22}) = -53,33 + 300 = 246,67,$$

$$\sum \frac{J_0}{J} \int M_2 M_\Sigma dx = \frac{J}{J} \cdot \frac{10 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 +$$

$$+ \frac{J}{2J} \cdot \frac{10 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 = 246,67.$$

Библиотечка
Учебный фонд

В. Проверка свободных членов канонических уравнений:

$$EJ_0(\Delta_{1p} + \Delta_{2p}) = 706,67 - 3683,33 = -2976,66,$$

$$\begin{aligned} \sum \frac{J_0}{J} \int M \Sigma M_p dx &= \frac{J}{J} \cdot \left[\frac{20 \cdot 2}{2} \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \right. \\ &+ \frac{J}{J} \cdot \frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} (-120) \left. \right] + \frac{J}{2J} \cdot \left[\frac{10 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} (-100) + \right. \\ &+ \frac{2}{3} \cdot 25 \cdot 10 \cdot (-5) \left. \right] = -2976,66. \end{aligned}$$

4. Решая систему канонических уравнений

$$\begin{cases} 42,67 X_1 - 53,33 X_2 + 706,67 = 0; \\ -53,33 X_1 + 300 X_2 - 3683,33 = 0, \end{cases}$$

получаем: $186,7 X_1 + 291,337 = 0$

$$X_1 = -1,56 \text{ (кН)}; \quad X_2 = 12 \text{ (кН)}.$$

5. Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов M_X определяем на основании принципа независимости действия сил. В результате:

$$M_X = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_p.$$

$$M_{AE} = M_{CD} = M_{BD} = 0,$$

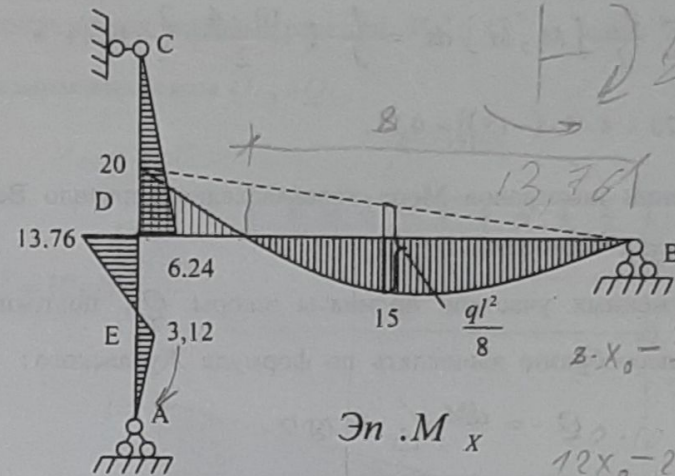
$$M_{EA} = 2 \cdot (-1,56) = -3,12 \text{ (кНм)},$$

$$M_{DE} = 4 \cdot (-1,56) + 20 = 13,76 \text{ (кНм)},$$

$$M_{DC} = 4 \cdot (-1,56) - 10 \cdot 12 + 120 = -6,24 \text{ (кНм)},$$

$$M_{DB} = -10 \cdot 12 + 100 = -20 \text{ (кНм)}.$$

16 + 4 = 20



Эп. M_X

Рис. 11

Проверка окончательной эпюры M_X осуществляется из условия деформаций, т.е. перемещения по направлению X_1, X_2 должны быть равны нулю: 1) $\Delta_{1X} = 0$; 2) $\Delta_{2X} = 0$.

Эти условия могут быть представлены такими равенствами:

$$1) EJ_0 \Delta_{1X} = \sum \frac{J_0}{J} \int M_1 M_X dx = 0;$$

$$2) EJ_0 \Delta_{2X} = \sum \frac{J_0}{J} \int M_2 M_X dx = 0.$$

Относительная погрешность решения в этом случае не должна превышать 5%.

$$\begin{aligned} EJ_0 \Delta_{1X} &= \sum \frac{J_0}{J} \int M_1 M_X dx = \frac{J}{J} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-3,12) + \right. \\ &+ \frac{2}{6} [2 \cdot (-3,12) + 4 \cdot 3 \cdot 5,32 + 4 \cdot 13,76] + \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6,24) \left. \right\} = 0,11. \end{aligned}$$

$$EJ_0 \Delta_{2x} = \sum \frac{J_0}{J} \int M_2 M_x dx = \frac{J}{J} \cdot \left(\frac{10 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6,24 + \right. \\ \left. + \frac{J}{2J} \cdot \frac{10}{6} [10 \cdot 20 + 4 \cdot 5 \cdot (-15)] \right) = 0,13.$$

При вычислении интегралов Мора использовались правило Верещагина и формула Симпсона.

6. Для незагруженных участков ординаты эпюры Q_x постоянны, поэтому их целесообразно вычислять по формуле Журавского:

$$Q = \frac{dM}{dx} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона эпюры изгибающих моментов к оси стержня.

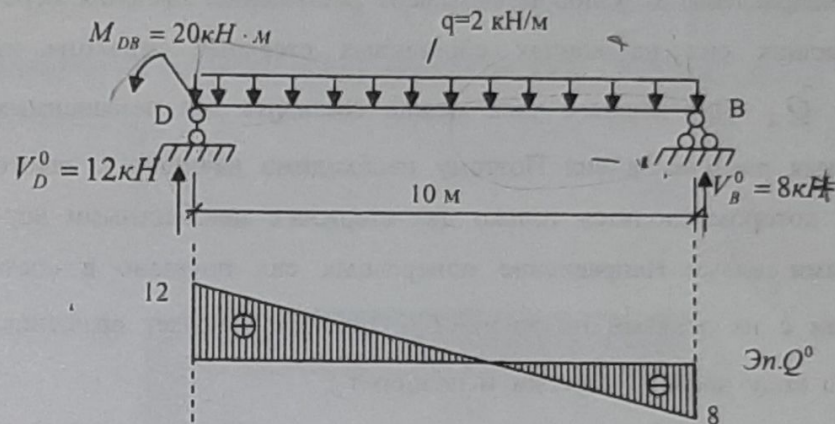
При вычислении Q_x по этой формуле принимаем следующее правило знаков: если при совмещении оси стержня с эпюрой изгибающих моментов по кратчайшему пути движение происходит по ходу часовой стрелки, то ординаты Q будут положительны, в противном случае — отрицательными.

$$Q_{AE} = \frac{3,12}{2} = 1,56 \text{ (кН)}, \quad Q_{ED} = -\frac{13,76 + 3,12}{2} = -8,44 \text{ (кН)},$$

$$Q_{CD} = -\frac{6,24}{4} = -1,56 \text{ (кН)}.$$

Чтобы определить значения Q по концам загруженного стержня (DB), необходимо рассмотреть его как статически определимую шарнирно-опертую балку, загруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q , а также концевыми моментами в соответствии с окончательной эпюрой M_x — $M_{DB}, M_{BD} = 0$. Для бал-

ки определяют опорные реакции V_D^0 и V_B^0 , а затем вычисляют перерезывающие силы Q_{DB} и Q_{BD} .

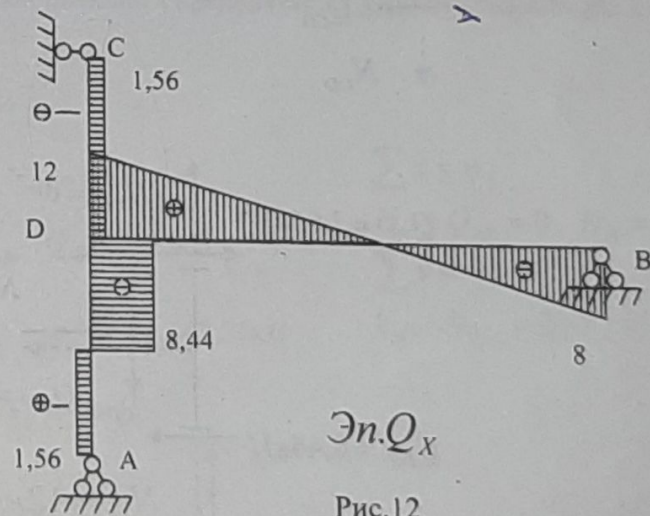


$$\sum M_D = 0, \quad V_B^0 \cdot 10 + M_{DB} - q \cdot 10 \cdot 5 = 0, \quad V_B^0 = 8 \text{ (кН)},$$

$$\sum M_B = 0, \quad V_D^0 \cdot 10 - M_{DB} - q \cdot 10 \cdot 5 = 0, \quad V_D^0 = 12 \text{ (кН)},$$

$$Q_D^0 = V_D^0 = 12 \text{ (кН)}, \quad Q_B^0 = -V_B^0 = -8 \text{ (кН)}.$$

Окончательная эпюра поперечных сил имеет вид:



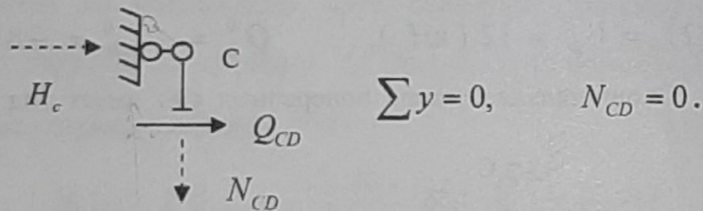
Эп. Q_x

Рис.12

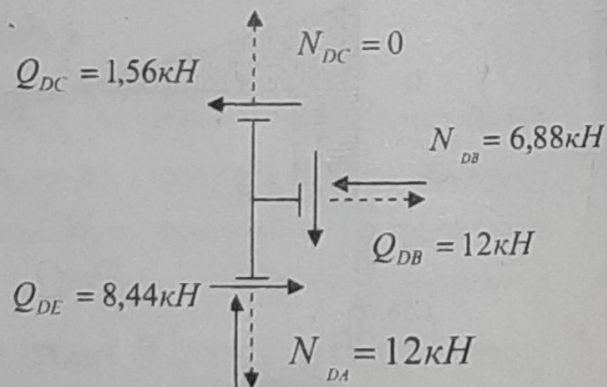
7. Нормальные усилия в стержнях определяют из условия равновесия сил в узлах рамы. При этом они считаются положительными, если направлены от узлов и вызывают растяжение. Значения перерезывающих сил на концах обрезанных стержней известны из эпюры Q_X . Для каждого узла можно составить два независимых уравнения равновесия сил. Поэтому необходимо начинать с такого узла, в котором сходятся только два стержня с неизвестными нормальными силами. Направление поперечных сил показано в соответствии с их знаками на эпюре Q_X («плюс» отвечает вращению узла по ходу часовой стрелки и наоборот).

В нашем случае существует только один узел «D», в котором сходятся три стержня. Поэтому предварительно необходимо вырезать опорный узел «C» и доказать, что нормальное усилие в стержне CD равно нулю.

Узел «C»:



Узел «D»:



$$\begin{aligned} \sum x = 0, \quad N_{DB} - Q_{DC} + Q_{DE} = 0, \quad N_{DB} = -6,88(\text{кН}), \\ \sum y = 0, \quad N_{DA} + Q_{DB} = 0, \quad N_{DA} = -12(\text{кН}). \end{aligned}$$

В результате получаем эпюру нормальных сил N_X (рис.13).

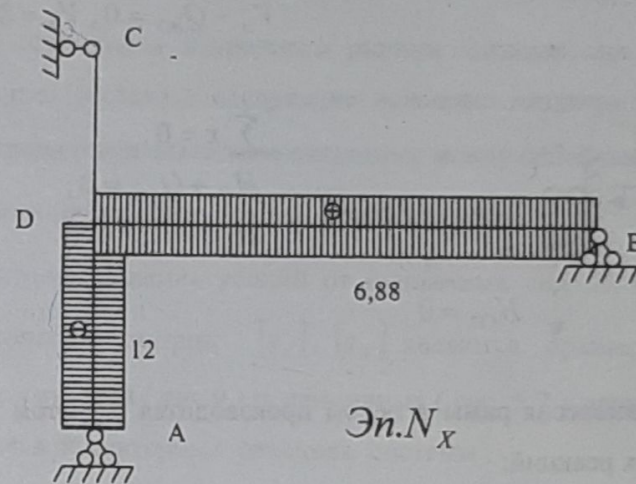
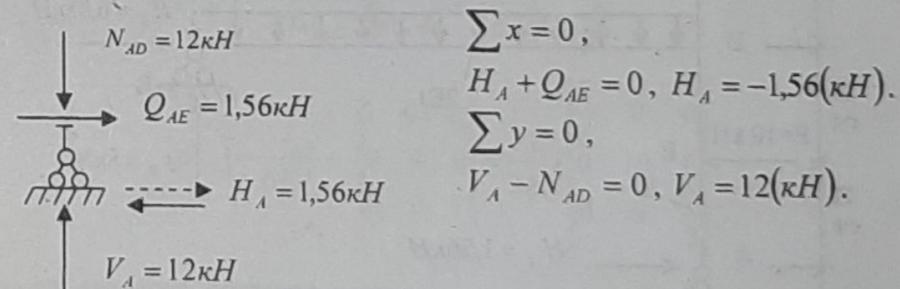


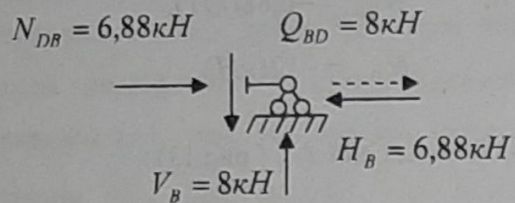
Рис. 13

8. Опорные реакции определяют из условия равновесия опорных узлов рамы.

Узел «A»:

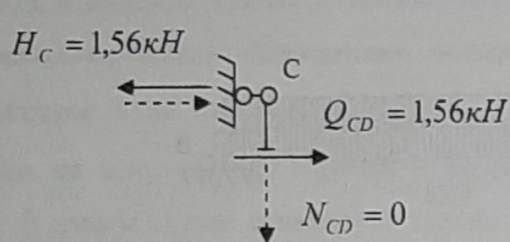


Узел «В»:



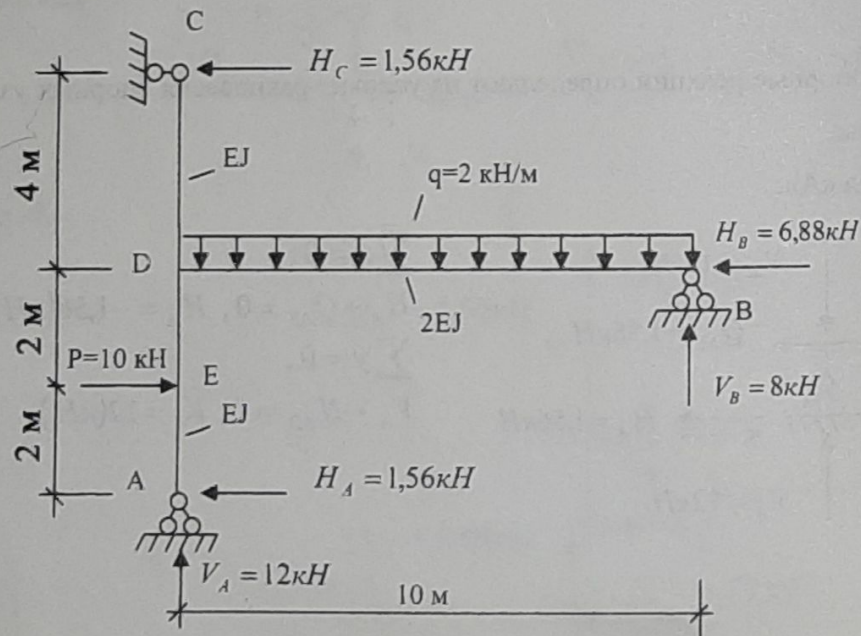
$$\begin{aligned} \sum x &= 0, \\ H_B + N_{DB} &= 0, \\ H_B &= -6,88(\text{кН}). \\ \sum y &= 0, \\ V_B - Q_{BD} &= 0, V_B = 8(\text{кН}). \end{aligned}$$

Узел «С»:



$$\begin{aligned} \sum x &= 0, \\ H_C + Q_{CD} &= 0, \\ H_C &= -1,56\text{кН}. \end{aligned}$$

9. Проверка равновесия рамы в целом производится с учетом вычисленных опорных реакций:



$$\begin{aligned} \sum x &= 0, P - H_A - H_B - H_C = 0, \\ \sum y &= 0, V_A + V_B - q \cdot 10 = 0, \\ \sum M_A &= 0, V_B \cdot 10 + H_B \cdot 4 + H_C \cdot 8 - P \cdot 2 - q \cdot 10 \cdot 5 = 0. \end{aligned}$$

Погрешность не должна превышать 5%.

10. Для проведения матричного расчета методом сил той же рамы необходимо составить следующие исходные матрицы:

$[\delta]$ -матрица податливости не связанных между собой элементов рамы;

$[\epsilon_p]$ - матрица влияния усилий от внешних сил;

$[\epsilon_x]$ - матрица влияния усилий от единичных сил $\bar{X}_1 = 1, \bar{X}_2 = 1$.

Элементами матриц $[\epsilon_p], [\epsilon_x]$ являются ординаты соответствующих грузовой (рис.9) и единичных (рис. 5,7) эпюр изгибающих моментов в характерных сечениях системы.

Матрицы податливости несвязанных элементов рамы имеют следующий вид:

$$[\delta_{AE}] = \frac{l_{AE}}{3EJ_{AE}} \cdot \|1\| = \frac{1}{3EJ} \|2\|, \quad [\delta_{DC}] = \frac{l_{DC}}{3EJ_{DC}} \cdot \|1\| = \frac{1}{3EJ} \|4\|,$$

$$[\delta_{DE}] = \frac{l_{DE}}{6EJ_{DE}} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3EJ} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$[\delta_{DB}] = \frac{l_{DB}}{6EJ_{DB}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3EJ} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ & & & 2 \end{vmatrix}$$

Тогда для всей системы имеем:

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Для заданной фермы необходимо определить нормальные усилия (N) в ее стержнях от постоянной нагрузки.

Расчетную схему (рис.13) и исходные данные студент выбирает из табл. 2 в соответствии с личным учебным шифром.

Таблица 2

Исходные данные

Первая цифра шифра	d (м)	h (м)	Вторая цифра шифра	P_1 (кН)	P_2 (кН)	P_3 (кН)	P_4 (кН)	Третья цифра шифра (номер схемы)	A_p	A_n
1	2	6	1	2	1	9	5	1	A	2,5A
2	4	8	2	3	3	8	6	2	1,5A	3A
3	6	10	3	4	5	7	7	3	2A	3,5A
4	8	4	4	5	7	6	8	4	2,5A	4A
5	1	5	5	6	9	5	9	5	3A	4,5A
6	3	7	6	7	2	4	10	6	3,5A	5A
7	5	9	7	8	4	3	1	7	4A	5,5A
8	7	3	8	9	6	2	3	8	4,5A	6A
9	9	2	9	10	8	1	5	9	5A	6,5A
0	2	5	0	11	2	3	8	0	5,5A	7A

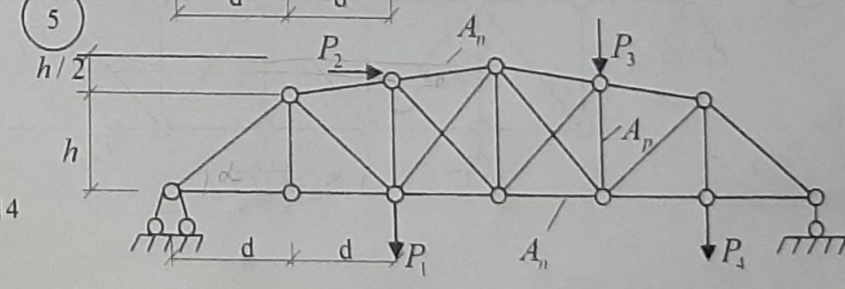
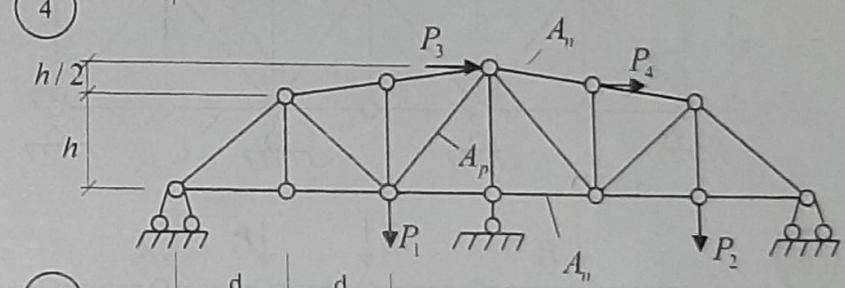
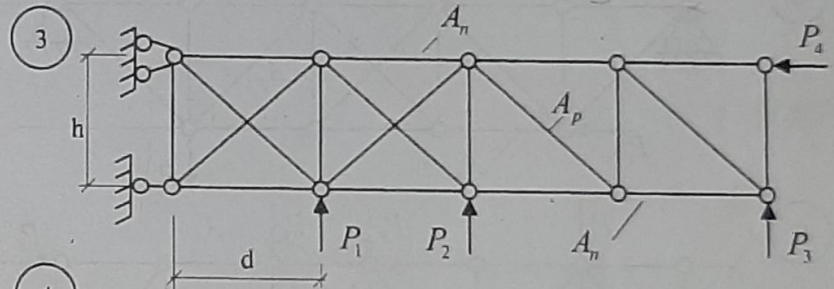
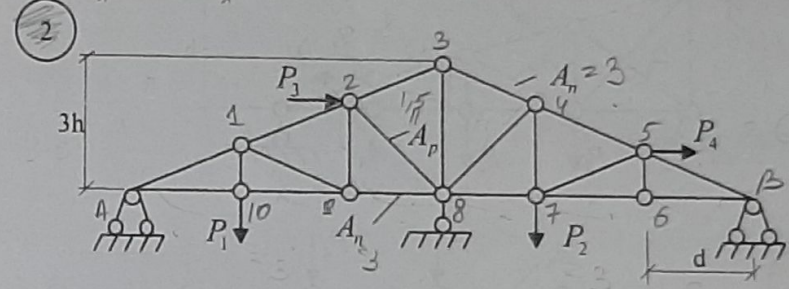
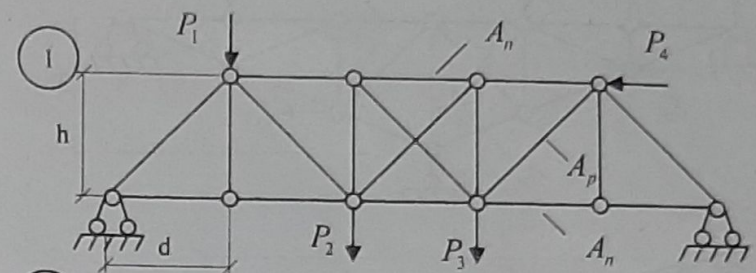
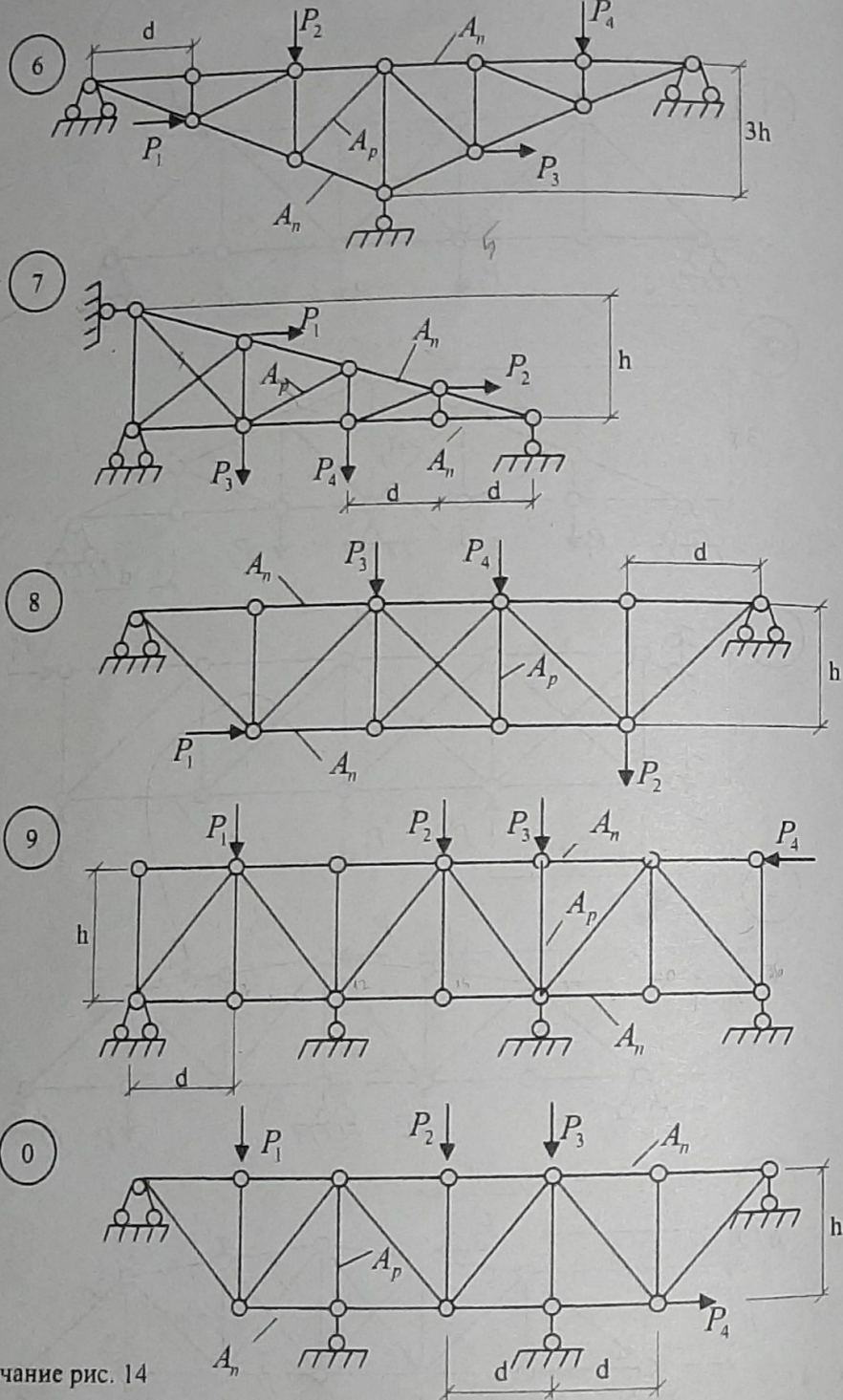


Рис.14



Окончание рис. 14

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Расчет заданной фермы (рис.15) необходимо выполнить в следующей последовательности:

- 1) определить степень статической неопределимости фермы, выбрать основную систему метода сил и составить канонические уравнения;
- 2) вычислить нормальные усилия в единичных и грузовом состояниях основной системы;
- 3) определить коэффициенты и решить систему канонических уравнений;
- 4) вычислить окончательные нормальные усилия и выполнить деформационную проверку.

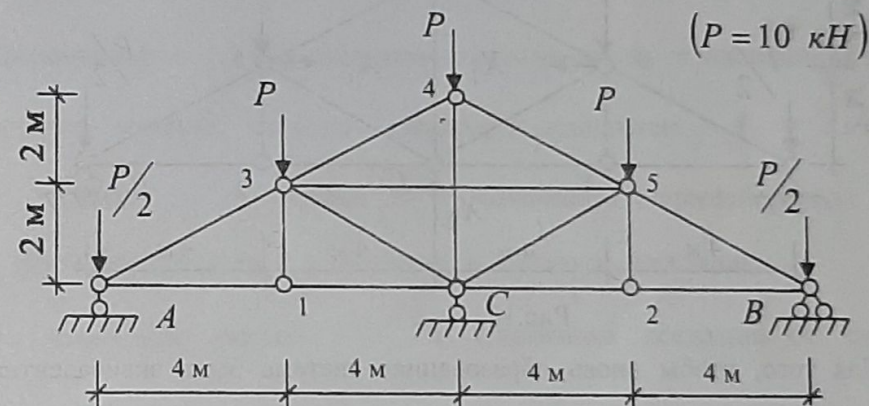


Рис.15

Площади поперечного сечения стержней : A - решетки, $2A$ - верхнего и нижнего поясов.

1. Степень статической неопределимости фермы определяем по

формуле

$$L = C_o + C_\phi - 2Y,$$

где C_o, C_ϕ — соответственно количество опорных связей и стержней фермы, Y — число узлов расчетной схемы.

$$L = 4 + 14 - 2 \times 8 = 2.$$

Заданная ферма один раз внутренне и один раз внешне статически неопределима. Для образования основной системы метода сил необходимо отбросить две лишние связи и заменить их усилиями X_1, X_2 (рис.16).

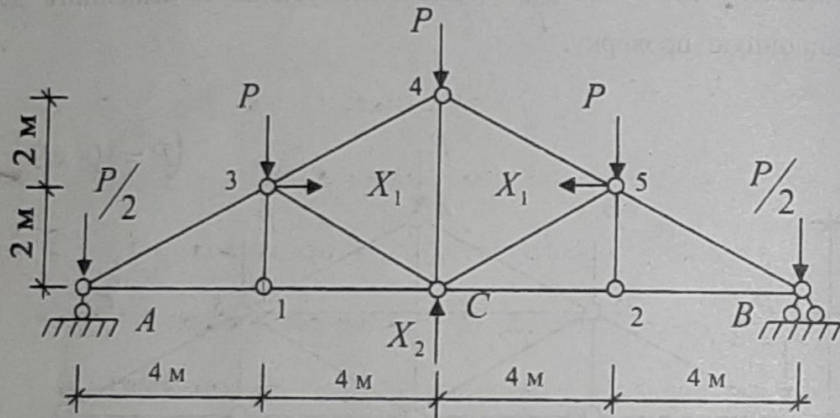


Рис.16

Для того, чтобы вновь образованная система была эквивалентна заданной расчетной схеме, необходимо выполнение следующих условий: 1) $\Delta_{1x} = 0$, 2) $\Delta_{2x} = 0$.

При этом первое условие означает отсутствие взаимного сближения (удаления), а второе — отсутствие перемещений по направлению отброшенных связей.

Канонические уравнения метода сил имеют вид:

$$\begin{cases} \Delta_{1x} = \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0, \\ \Delta_{2x} = \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

Для удобства вычисления все члены уравнения необходимо увеличить в EA_0 раз. Тогда для определения единичных и грузовых коэффициентов используют следующие равенства:

$$EA_0 \delta_{ik} = \sum_{j=1}^n \frac{A_0}{A_j} N_j^{(i)} N_j^{(k)} l_j,$$

$$EA_0 \Delta_{iP} = \sum_{j=1}^n \frac{A_0}{A_j} N_j^{(i)} N_j^{(P)} l_j.$$

Здесь $N_j^{(i)}, N_j^{(P)}$ — нормальные усилия j -го стержня в единичных ($i = 1, 2$) и грузовом состояниях; A_0 — площадь поперечного сечения любого стержня (принимаем $A_0 = 2A$); l_j — длина j -го стержня; n — количество стержней фермы.

2. Вычисляем усилия в единичных и грузовом состояниях:

А. Определяем усилия $N_j^{(1)}$ в единичном состоянии от силы

$$\bar{X}_1 = 1.$$

Вычисляем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad V_B \times 16 + \bar{X}_1 \times 2 - \bar{X}_1 \times 2 = 0, \quad V_B = 0,$$

$$\sum y = 0; \quad V_A + V_B = 0, \quad V_A = 0,$$

$$\sum x = 0; \quad H_B + \bar{X}_1 - \bar{X}_1 = 0, \quad H_B = 0.$$

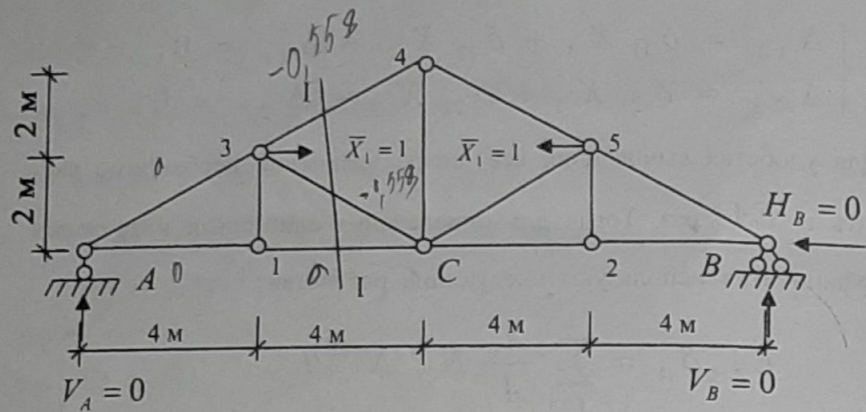
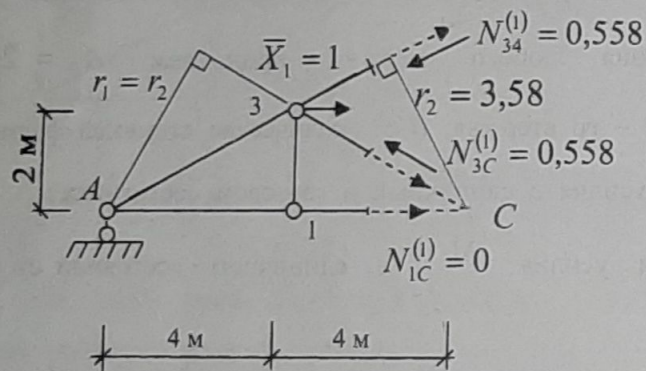


Рис.17

На основании признаков о нулевых стержнях можно определить

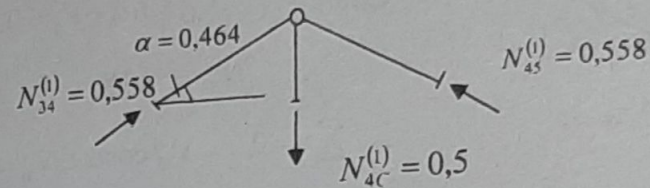
$$N_{A1}^{(1)} = N_{1C}^{(1)} = N_{C2}^{(1)} = N_{2B}^{(1)} = N_{13}^{(1)} = N_{25}^{(1)} = 0.$$

Сечение I-I:



$$\begin{aligned} \sum M_A = 0, \quad N_{3C}^{(1)} \cdot r_1 + \bar{X}_1 \cdot 2 = 0, \quad N_{3C}^{(1)} = -0,558. \\ \sum M_C = 0, \quad N_{34}^{(1)} \cdot r_2 + \bar{X}_1 \cdot 2 = 0, \quad N_{34}^{(1)} = -0,558. \end{aligned}$$

Узел «4»:



$$\sum y = 0, \quad (N_{34}^{(1)} + N_{45}^{(1)}) \cdot \sin \alpha - N_{4C}^{(1)} = 0, \quad N_{4C}^{(1)} = 0,5.$$

Б. Определяем усилия $N_j^{(2)}$ в единичном состоянии от силы

$\bar{X}_2 = 1$:

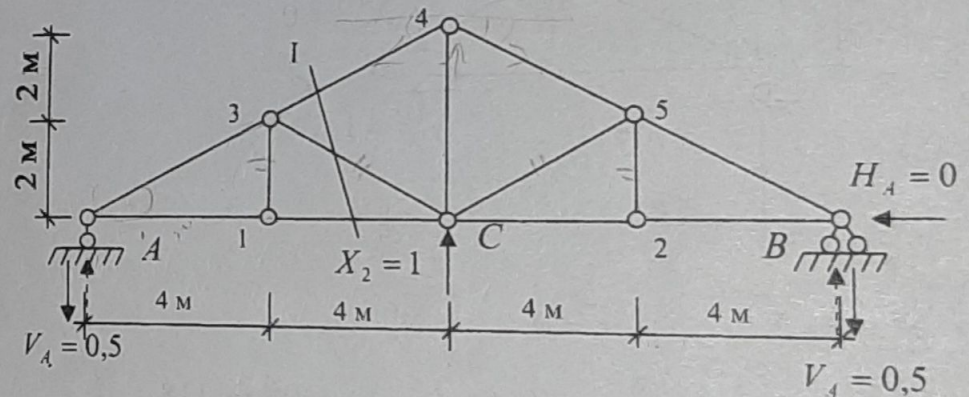
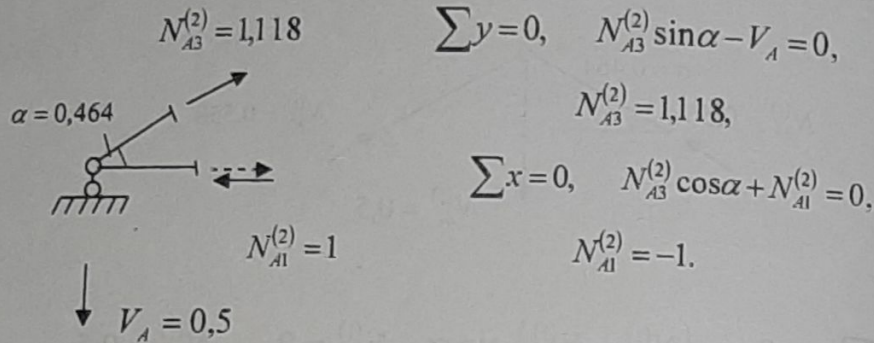


Рис.18

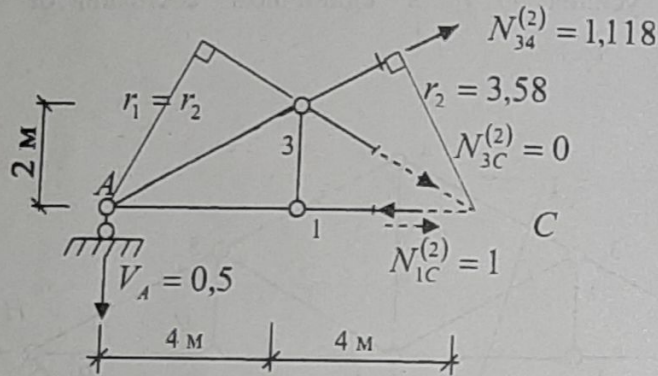
Определяем опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum x = 0, \quad H_B = 0, \\ V_A = V_B, \quad \sum y = 0, \quad V_A + V_B + \bar{X}_2 = 0, \quad V_A = -0,5. \end{aligned}$$

Узел «А»:



Сечение I-I:

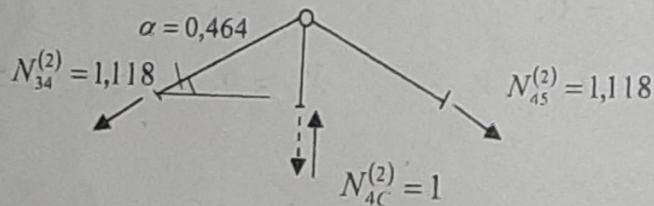


$$\sum M_A = 0, \quad N_{3C}^{(2)} \cdot r_1 = 0, \quad N_{3C}^{(2)} = 0,$$

$$\sum M_C = 0, \quad N_{34}^{(2)} \cdot r_2 - V_A \cdot 8 = 0, \quad N_{34}^{(2)} = 1,118,$$

$$\sum M_3 = 0, \quad N_{1C}^{(2)} \cdot 2 + V_A \cdot 4 = 0, \quad N_{1C}^{(2)} = -1.$$

Узел «4»:



$$\sum y = 0, \quad N_{4C}^{(2)} + (N_{34}^{(2)} + N_{45}^{(2)}) \sin \alpha = 0, \quad N_{4C}^{(2)} = -1.$$

На основании признаков нулевых стержней, здесь и в грузовом состоянии можно определить, что усилие в стержне 1-3 равно нулю. В. Грузовое состояние:

Определяем опорные реакции: $\sum x = 0, \quad H_A = 0,$

$$\sum y = 0, \quad V_A + V_B - 4P = 0, \quad V_A = V_B = 2P.$$

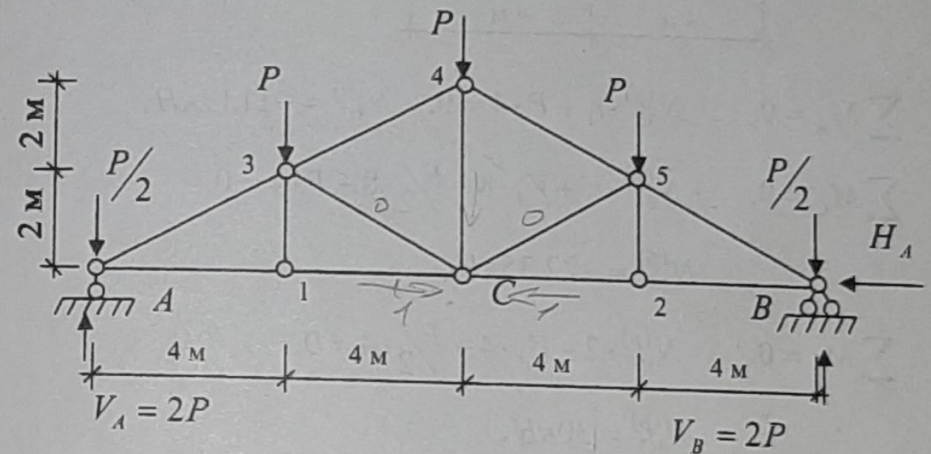
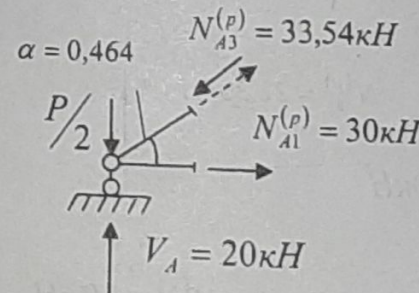


Рис.19

Узел «А»:



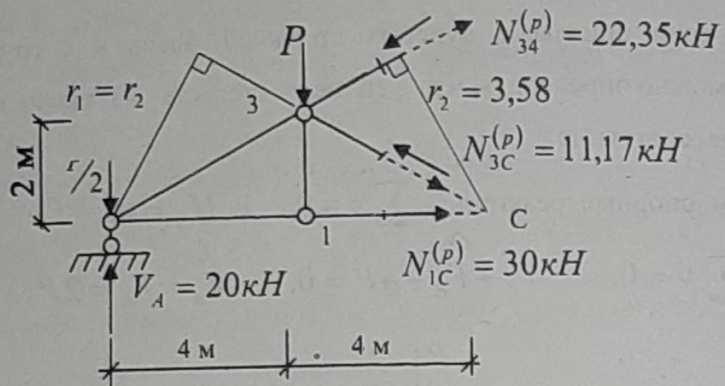
$$\sum y = 0,$$

$$N_{A3}^{(p)} \sin \alpha + V_A - P/2 = 0,$$

$$N_{A3}^{(p)} = -33,54кН,$$

$$\sum x = 0, \quad N_{A1}^{(p)} - N_{A3}^{(p)} \cos \alpha = 0, \quad N_{A1}^{(p)} = 30кН.$$

$$-V_A \cdot 6 + N \cdot \frac{5}{7,81} \cdot 6$$



$$\sum M_A = 0, \quad N_{3C}^{(p)} \cdot r_1 + P \cdot 4 = 0, \quad N_{3C}^{(p)} = -11,17 \text{ кН}.$$

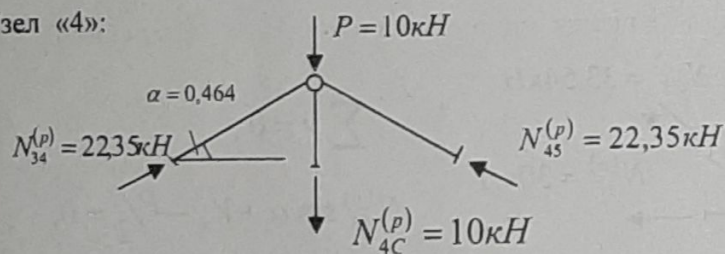
$$\sum M_C = 0, \quad N_{34}^{(p)} \cdot r_1 + V_A \cdot 8 - \frac{P}{2} \cdot 8 - P \cdot 4 = 0,$$

$$N_{34}^{(p)} = -22,35 \text{ кН};$$

$$\sum M_3 = 0, \quad N_{1C}^{(p)} \cdot 2 - V_A \cdot 4 + \frac{P}{2} \cdot 4 = 0,$$

$$N_{1C}^{(p)} = 30 \text{ кН};$$

Узел «4»:



$$\sum y = 0, \quad N_{4C}^{(p)} - (N_{34}^{(p)} + N_{45}^{(p)}) \sin \alpha + P = 0, \quad N_{4C}^{(p)} = 10 \text{ кН}.$$

3.4. Вычисляем коэффициенты, решаем систему канонических уравнений, определяем окончательные усилия в стержнях фермы, а также выполняем деформационную проверку в табличной форме (табл.3).

Усилия в стержнях фермы вычисляем по формуле

$$N_j^{(x)} = N_j^{(1)} \cdot X_1 + N_j^{(2)} \cdot X_2 + N_j^{(p)}.$$

Проверку решения выполняем из следующих условий деформации:

$$EA_0 \Delta_{1X} = \sum_{j=1}^n \frac{A_0}{A_j} N_j^{(1)} N_j^{(x)} l_j = 0,$$

$$EA_0 \Delta_{2X} = \sum_{j=1}^n \frac{A_0}{A_j} N_j^{(2)} N_j^{(x)} l_j = 0.$$

При этом относительная ошибка решения не должна превышать 5%.

Суммирование многочленов (табл.3) позволяет получить следующие значения коэффициентов:

$$EA_0 \delta_{11} = \sum_1 = 10,34, \quad EA_0 \delta_{22} = \sum_2 = 46,36, \quad EA_0 \delta_{12} = EA_0 \delta_{21} = \sum_3 = -9,58;$$

$$EA_0 \Delta_{1P} = \sum_4 = 262,98, \quad EA_0 \Delta_{2P} = \sum_5 = -1118,9.$$

Тогда в результате решения системы канонических уравнений получаем: $X_1 = -3,8 \text{ кН}$, $X_2 = 23,35 \text{ кН}$.

Врашиям $\sum A_0$ или $\sum N$ или $\sum P$

Таблица 3

Определение коэффициентов канонических уравнение и окончательных усилий в стержнях фермы

Номер стержня	Длина стержня $l, м$	$\frac{A_0}{A}$	$N_j^{(1)}$	$N_j^{(2)}$	$N_j^{(p)}$, кН	$\frac{A_0}{A} N_j^{(1)} l_j$	$\frac{A_0}{A} N_j^{(2)} l_j$
A1	4	1	0	-1	30	0	-4
C1	4	1	0	-1	30	0	-4
C2	4	1	0	-1	30	0	-4
B2	4	1	0	-1	30	0	-4
A3	4,472	1	0	1,118	-33,54	0	5
B5	4,472	1	0	1,118	-33,54	0	5
34	4,472	1	-0,558	1,118	-22,35	-2,495	5
45	4,472	1	-0,558	1,118	-22,35	-2,495	5
13	2	2	0	0	0	0	0
25	2	2	0	0	0	0	0
C3	4,472	2	-0,558	0	-11,17	-4,99	0
C5	4,472	2	-0,558	0	-11,17	-4,99	0
C4	4	2	0,5	-1	10	4	-8

✓ ✓ ✓ ✓ ✓

Δ_{1P} Δ_{2P}
Продолжение табл. 3

Номер стержня	δ_{11}	δ_{22}	$\delta_{12} = \delta_{21}$	$\frac{A_0}{A} N_j^{(1)} N_j^{(p)} l_j$	$\frac{A_0}{A} N_j^{(2)} N_j^{(p)} l_j$
	A1	0	4	0	0
C1	0	4	0	0	-120
C2	0	4	0	0	-120
B2	0	4	0	0	-120
A3	0	5,59	0	0	-167,7
B5	0	5,59	0	0	-167,7
34	1,39	5,59	-2,79	55,76	-111,75
45	1,39	5,59	-2,79	55,76	-111,75
13	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0
C3	2,78	0	0	55,73	0
C5	2,78	0	0	55,73	0
C4	2	8	-4	40	-80

$\sum_1 = 10,34$ $\sum_2 = 46,36$ $\sum_3 = -9,58$ $\sum_4 = 262,98$ $\sum_5 = -1118,9$
 δ_{11} δ_{22} δ_{21} Δ_{1P} Δ_{2P}

$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = \Delta_{1P} \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = \Delta_{2P} \end{cases}$ A $\begin{matrix} \delta_{11} \delta_{22} \\ \delta_{21} \delta_{12} \end{matrix}$ B $\begin{matrix} -\Delta_{1P} \delta_{22} \\ -\Delta_{2P} \delta_{12} \end{matrix}$

C $\begin{matrix} \delta_{11} - \Delta_{1P} \\ \delta_{21} - \Delta_{2P} \end{matrix}$

A = 467,6016 C = -3112,7312

B = 5028,3456

$X_1 = \frac{B}{A} = 10,753$ $X_2 = \frac{C}{A} = -6,656$

Номер стержня	$N_j^{(1)} \cdot X_1$ кН	$N_j^{(2)} \cdot X_2$ кН	$N_j^{(x)} = N_j^{(1)} \cdot X_1 +$ $+ N_j^{(2)} \cdot X_2 + N_j^{(p)}$ кН	$\frac{A_0}{A} N_j^{(1)} N_j^{(x)} l_j$	$\frac{A_0}{A} N_j^{(2)} N_j^{(x)} l_j$
A1	0	-23,35	6,654	0	-26,62
C1	0	-23,35	6,654	0	-26,62
C2	0	-23,35	6,654	0	-26,62
B2	0	-23,35	6,654	0	-26,62
A3	0	26,1	-7,44	0	-37,2
B5	0	26,1	-7,44	0	-37,2
34	2,12	26,1	5,885	-14,68	29,42
45	2,12	26,1	5,885	-14,68	29,42
13	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0
C3	2,12	0	-9,05	45,16	0
C5	2,12	0	-9,05	45,16	0
C4	-1,9	-23,35	-15,246	-60,98	121,97

$$\sum_6 = 0,02 \quad \sum_7 = 0,07$$

$$-0,27 \quad 0,03$$

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для заданной расчетной схемы рамы необходимо построить эпюры внутренних усилий (изгибающего момента M , перерезывающих сил Q , нормальных сил N) и проверить полученное решение.

Исходные данные студент выбирает также из табл. 1 в соответствии с личным учебным шифром по трем последним цифрам номера студенческого билета.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Расчет заданной рамы (рис. 20) необходимо выполнить в такой последовательности:

- 1) определить степень кинематической неопределимости рамы, выбрать основную систему метода перемещений и составить канонические уравнения;
- 2) вычислить погонные жесткости стержней;
- 3) построить эпюры изгибающих моментов в единичных, а также грузовом состояниях основной системы и вычислить коэффициенты канонических уравнений;
- 4) решить систему канонических уравнений;
- 5) построить окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и нормальных сил;
- 6) составить исходные матрицы и произвести расчет рамы в матричной форме.

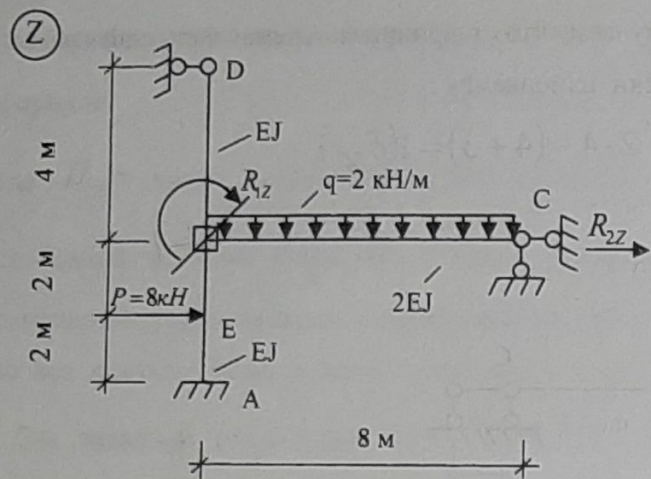


Рис. 22

$$\frac{EJ}{4} \quad \frac{2EJ}{2}$$

Для того, чтобы основная система (рис.22) деформировалась так же, как заданная рама (рис.20), необходимо, чтобы суммарная реакция в двух дополнительных связях R_{1z}, R_{2z} равнялась нулю.

Для заданной рамы получим такие два условия:

$$1) R_{1z} = 0, \quad 2) R_{2z} = 0.$$

Здесь и ниже первый индекс показывает номер связи, а второй - состояние основной системы.

В раскрытом виде эти равенства представляют собой систему канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{cases} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + R_{1p} = 0; \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + R_{2p} = 0, \end{cases}$$

где $r_{ik} (i, k = 1, 2)$ - реактивное усилие, возникающее в связи i от перемещения по направлению связи k , равного единице; R_{ip} - реактивное усилие в связи i от действующей нагрузки.

2. Приведенные погонные жесткости стержней рамы определяем по

$$\text{формуле} \quad i_n = \frac{J_n}{J_0} \cdot \frac{l_0}{l_n},$$

где J_0, l_0 - соответственно момент инерции и длина произвольного стержня. В нашем случае принимаем: $1 \cdot \frac{4}{4} = 1$

$$J_0 = J_{AB} = J, \quad l_0 = l_{AB} = 4\text{м}$$

$$\text{В результате получаем:} \quad i_{AB} = i_{BD} = 1, \quad i_{BC} = \frac{2J}{J} \cdot \frac{4}{8} = 1.$$

3. Для определения коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений необходимо предварительно построить эпюры изгибающих моментов в основной системе от единичных перемещений (по направлениям введенных связей) и от действующей нагрузки.

А. В первом единичном состоянии поворачиваем узел «B» рамы по

$$1) \bar{Z}_1 = 1$$

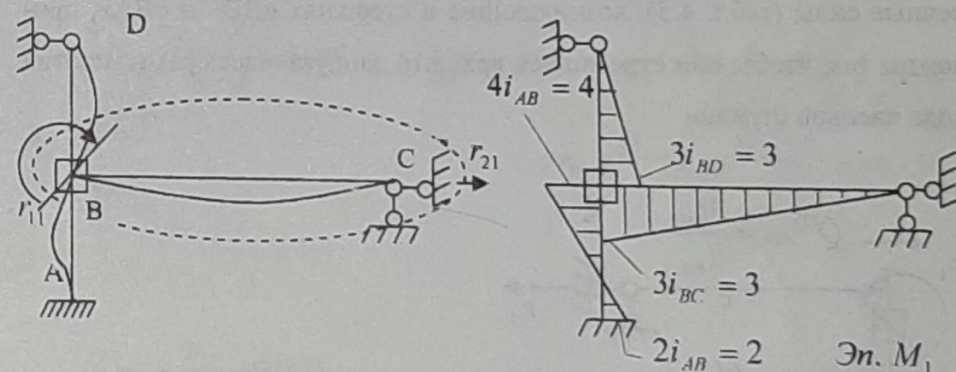


Рис.23

Рис.24

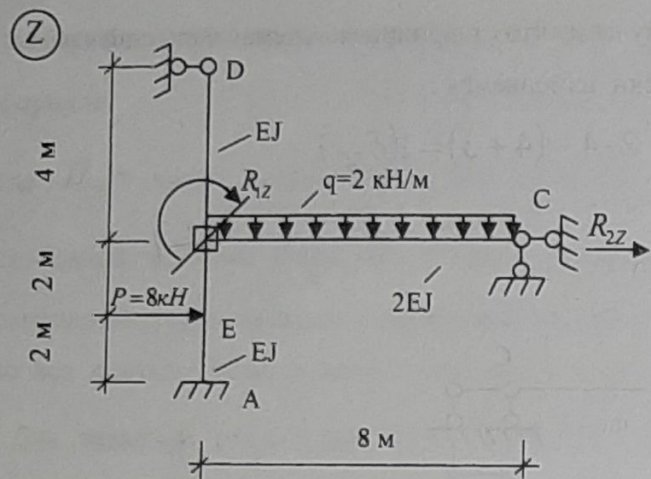


Рис. 22

$$\frac{EJ}{4} \quad \frac{2EJ}{2}$$

Для того, чтобы основная система (рис.22) деформировалась так же, как заданная рама (рис.20), необходимо, чтобы суммарная реакция в двух дополнительных связях R_{1z}, R_{2z} равнялась нулю.

Для заданной рамы получим такие два условия:

$$1) R_{1z} = 0, \quad 2) R_{2z} = 0.$$

Здесь и ниже первый индекс показывает номер связи, а второй - состояние основной системы.

В раскрытом виде эти равенства представляют собой систему канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{cases} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + R_{1p} = 0; \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + R_{2p} = 0, \end{cases}$$

где $r_{ik} (i, k = 1, 2)$ - реактивное усилие, возникающее в связи i от перемещения по направлению связи k , равного единице; R_{ip} - реактивное усилие в связи i от действующей нагрузки.

2. Приведенные погонные жесткости стержней рамы определяем по

$$\text{формуле} \quad i_n = \frac{J_n}{J_0} \cdot \frac{l_0}{l_n},$$

где J_0, l_0 - соответственно момент инерции и длина произвольного стержня. В нашем случае принимаем: $1 \cdot \frac{4}{4} = 1$

$$J_0 = J_{AB} = J, \quad l_0 = l_{AB} = 4\text{м}$$

$$\text{В результате получаем:} \quad i_{AB} = i_{BD} = 1, \quad i_{BC} = \frac{2J}{J} \cdot \frac{4}{8} = 1.$$

3. Для определения коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений необходимо предварительно построить эпюры изгибающих моментов в основной системе от единичных перемещений (по направлениям введенных связей) и от действующей нагрузки.

А. В первом единичном состоянии поворачиваем узел «B» рамы по

$$1) \bar{Z}_1 = 1$$

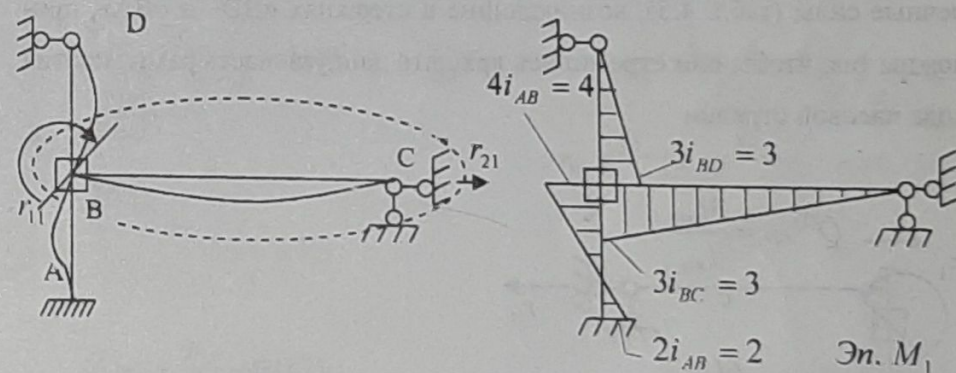


Рис.23

Рис.24

1. Степень кинематической неопределимости рамы определяется по формуле

$$\Pi = \Pi_y + \Pi_n,$$

где Π_y — число неизвестных углов поворота, равное количеству свободных жестких узлов; Π_n — число независимых линейных перемещений узлов системы, полученной из заданной путем введения во все жесткие узлы, включая опорные, полных шарниров.

Для заданной рамы (рис. 20) $\Pi_y = 1(\varphi_B)$. Величину Π_n определяем по шарнирной схеме рамы (рис. 21) по формуле

$$\Pi_n = W = 2Y - (C_o + C_\phi),$$

где Y — число свободных и опорных узлов, C_o — число опорных связей; C_ϕ — количество стержней.

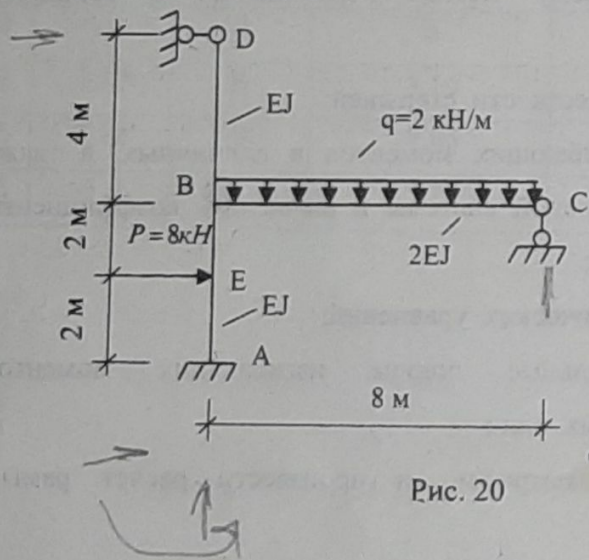


Рис. 20

В результате получаем, что шарнирная схема заданной рамы один раз геометрически изменяемая:

$$\Pi_n = 2 \cdot 4 - (4 + 3) = 1(\delta_{BC}).$$

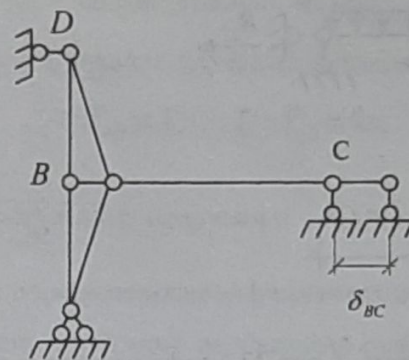


Рис. 21

Таким образом, для расчета заданной рамы (рис. 20) необходимо определить одно угловое и одно линейное перемещения:

$$\Pi = \Pi_y + \Pi_n = 1(\varphi_B, \delta_{BC}).$$

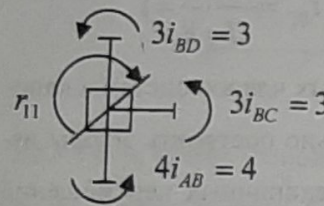
Для дальнейшего расчета необходимо образовать основную систему метода перемещений путем постановки дополнительной заделки в узле «В», препятствующей неизвестному угловому перемещению φ_B , и дополнительной горизонтальной опорной связи в плоскости «BC», устраняющей возможность линейного смещения δ_{BC} . Очевидно, что количество дополнительных связей должно быть равно степени кинематической неопределимости системы, т.е. числу неизвестных узловых перемещений.

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения:

$$\varphi_B = Z_1, \quad \delta_{BC} = Z_2.$$

ходу часовой стрелки на угол $\bar{Z}_1 = 1$ (рис.23). В результате рама деформируется, и в стержнях возникают внутренние усилия. Эпюра изгибающих моментов $\text{Эп.}M_1$ (рис.23) строится с помощью дополнительных данных, приведенных в табл. 4,5.

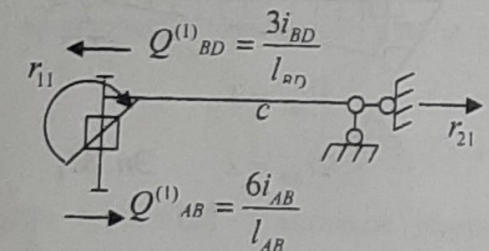
Для определения коэффициента r_{11} вырежем узел «В», приложим к нему моменты, взятые с эпюры M_1 (рис.24), в соответствии с растянутыми волокнами стержней и составим следующее уравнение равновесия:



$$\sum M_B = 0; \quad r_{11} - 3i_{BD} - 3i_{BC} - 4i_{AB} = 0;$$

$$r_{11} = 3i_{BD} + 3i_{BC} + 4i_{AB} = 10$$

Для определения коэффициента r_{21} проведем замкнутое сечение и рассмотрим равновесие вырезанной части рамы. Отрицательные поперечные силы (табл. 4,5), возникающие в стержнях «BD» и «BA», приложим так, чтобы они стремились вращать данную часть рамы против хода часовой стрелки



$$\sum x = 0; \quad r_{21} + Q^{(1)}_{AB} - Q^{(1)}_{BD} = 0;$$

$$r_{21} = -\frac{6i_{AB}}{l_{AB}} + \frac{3i_{BD}}{l_{BD}} = -0,75$$

Б. Во втором единичном состоянии линейно смещаем раму на величину $\bar{Z}_2 = 1$ (рис.25). В результате получаем $\text{Эп.}M_2$ (рис.26):

② $\bar{Z}_2 = 1$

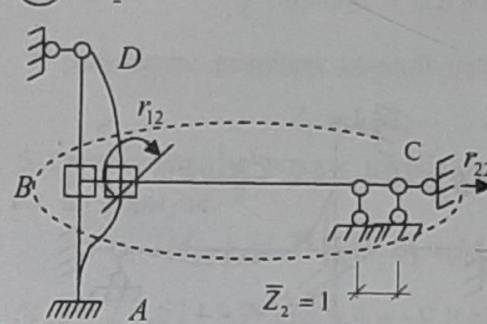


Рис.25

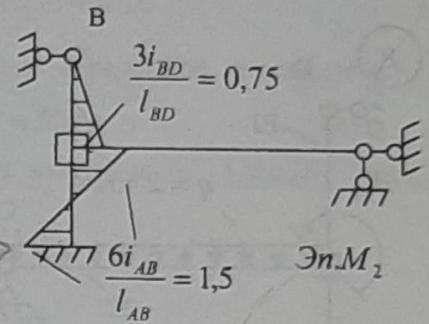
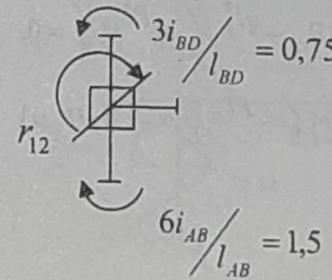


Рис.26

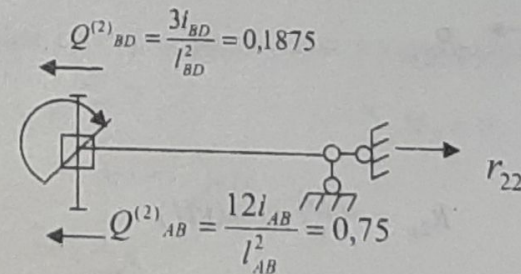
Численные значения и направления моментов и поперечных сил принимаются на основании данных, приведенных в табл. 4,5:

Коэффициенты r_{12}, r_{22} определяем аналогично состоянию «1»:



$$\sum M_B = 0 \quad r_{12} - \frac{3i_{BD}}{l_{BD}} + \frac{6i_{AB}}{l_{AB}} = 0,$$

$$r_{12} = \frac{3i_{BD}}{l_{BD}} - \frac{6i_{AB}}{l_{AB}} = -0,75.$$



$$Q^{(2)}_{BD} = \frac{3i_{BD}}{l_{BD}^2} = 0,1875$$

$$Q^{(2)}_{AB} = \frac{12i_{AB}}{l_{AB}^2} = 0,75$$

$$\sum x = 0; \quad r_{22} - Q^{(2)}_{AB} - Q^{(2)}_{BD} = 0; \quad r_{22} = \frac{12i_{AB}}{l_{AB}^2} + \frac{3i_{BD}}{l_{BD}^2} = 0,9375.$$

В. В грузовом состоянии (P) от заданной нагрузки (рис.27) эпюра M_p имеет вид (рис.28):

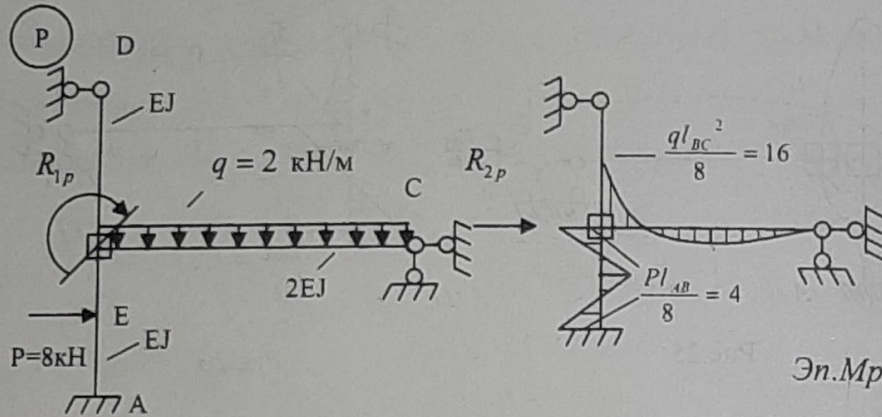


Рис.27

Рис.28

Реактивные усилия от внешней нагрузки определяются следующим образом:

$$\sum M_B = 0 \quad R_{1P} + \frac{ql_{BC}^2}{8} + \frac{Pl_{AB}}{8} = 0,$$

$$R_{1P} = -\frac{ql_{BC}^2}{8} - \frac{Pl_{AB}}{8} = -12(\text{кН} \cdot \text{м}).$$

$$\sum x = 0; \quad R_{2P} + Q_{AB}^{(P)} = 0, \quad R_{2P} = -Q_{AB}^{(P)} = -4(\text{кН}).$$

4. Решая систему канонических уравнений, определяем неизвестные перемещения:

$$\begin{cases} 10Z_1 - 0,75Z_2 - 12 = 0; \\ -0,75Z_1 + 0,9375Z_2 - 4 = 0. \end{cases}$$

В результате решения данной системы определяем неизвестные:

$$Z_1 = 1,62; \quad Z_2 = 5,56.$$

5. Окончательную эпюру изгибающих моментов M_z (рис.29) строим по формуле:

$$M_z = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + M_p;$$

$$M_{AB} = 2 \cdot 1,62 - 1,5 \cdot 5,56 - 4 = -9,1(\text{кН} \cdot \text{м});$$

$$M_{BA} = 4 \cdot 1,62 - 1,5 \cdot 5,56 + 4 = 2,1(\text{кН} \cdot \text{м});$$

$$M_{BD} = 3 \cdot 1,62 + 0,75 \cdot 5,56 + 0 = 9(\text{кН} \cdot \text{м});$$

$$M_{BC} = 3 \cdot 1,62 + 0 - 16 = -11,1(\text{кН} \cdot \text{м}).$$

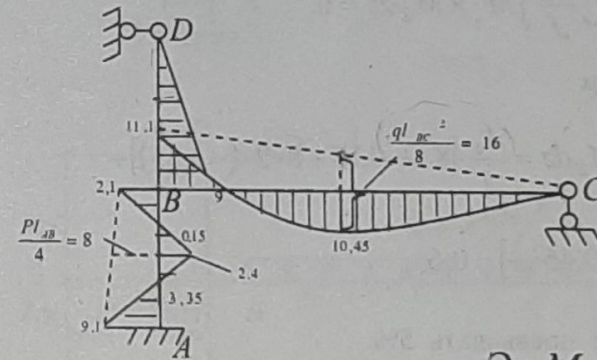
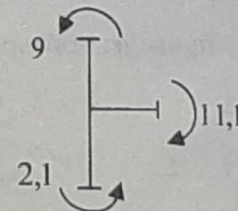


Рис.29

Эп. M_z

Для проверки равновесия в узлах рамы рассмотрим узел «В»:



$$\sum M_B = 0, \quad 11,1 - 9 - 2,1 = 0.$$

Для деформационной проверки выберем основную систему при расчете заданной рамы методом сил и построим эпюру изгибающих моментов от любого единичного неизвестного, например, от $\bar{X}_1 = 1$ (рис.30).

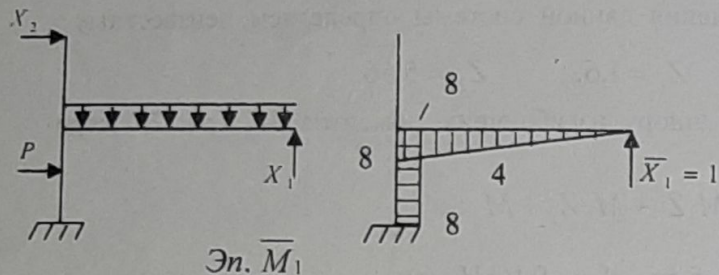


Рис.30

Перемещение по направлению силы X_1 должно быть равно нулю.

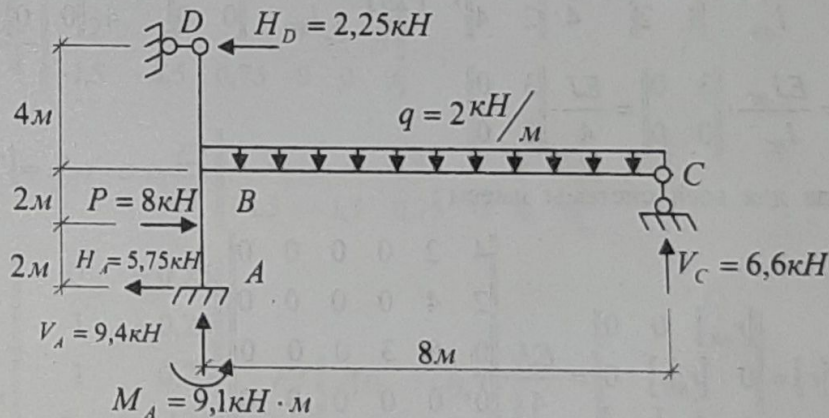
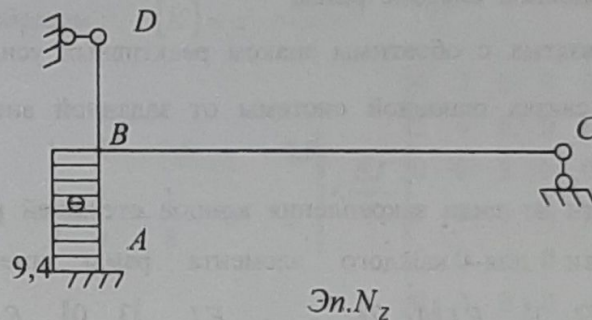
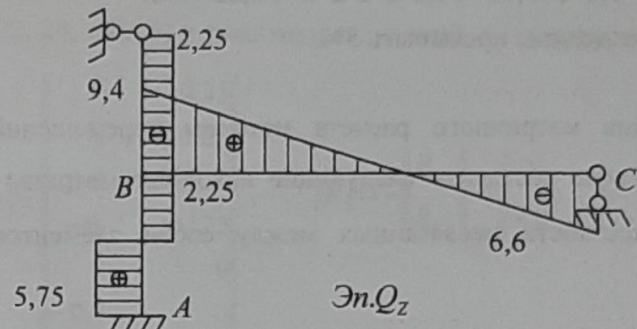
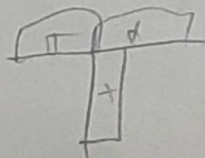
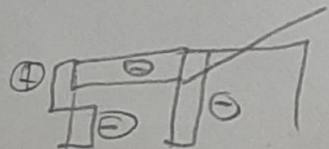
$$EJ_0 \Delta_{1X} = \sum \frac{J_0}{J} \int \bar{M}_1 \times M_z dz = 0.$$

В результате получаем:

$$EJ_0 \Delta_{1z} = \sum \frac{J_0}{J} \int \bar{M}_1 \times M_z dz = \frac{J_0}{J} \cdot [8 \cdot 2 \cdot 0,15 + 8 \cdot 2 \cdot (-3,35)] + \frac{J_0}{2J} \times \frac{8}{6} [(-11,1) \cdot 8 + 4 \cdot 10,45 \cdot 4] = 0,6.$$

Погрешность не должна превышать 5%.

Построение окончательные эпюры поперечных Q_z и нормальных N_z сил, определение опорные реакции и выполнение проверки всего решения осуществляем на основании методики, приведенной при решении рамы метода сил:



$$\begin{aligned} \sum X &= 0, & 8 - 5,75 - 2,25 &= 0, \\ \sum Y &= 0, & 9,4 + 6,6 - 2 \cdot 8 &= 0, \end{aligned}$$

$$\sum M_C = 0, \quad 9,4 \cdot 8 + 5,75 \cdot 4 - 9,1 \cdot 8 - 2 \cdot 8 \cdot 4 - 2,25 \cdot 4 = 0.$$

Погрешность не должна превышать 5%.

6. Для проведения матричного расчета методом перемещений той же рамы необходимо составить следующие исходные матрицы:

$[r]$ - матрица жесткости несвязанных между собой элементов рамы;

$[a]$ - матрица деформаций от единичных перемещений узлов, построенная в основной системе рамы;

$[R]$ - матрица взятых с обратным знаком реактивных усилий в дополнительных связях основной системы от заданной внешней нагрузки.

В зависимости от вида закрепления концов стержневой рамы матрица жесткости для каждого элемента рамы имеет вид:

$$[r_{AB}] = \frac{2EJ_{AB}}{l_{AB}} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{EJ}{4} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad [r_{BD}] = \frac{EJ_{BD}}{l_{BD}} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{EJ}{4} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$[r_{BC}] = \frac{EJ_{BC}}{l_{BC}} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{EJ}{4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда для всей системы имеем:

$$[r] = \begin{vmatrix} [r_{AB}] & 0 & 0 \\ 0 & [r_{BD}] & 0 \\ 0 & 0 & [r_{BC}] \end{vmatrix} = \frac{EJ}{4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матрицы деформаций от единичных перемещений узлов $[a]$

(рис.22, 24, табл.6) и реактивных усилий от нагрузки $[R]$ имеют вид:

$$[a] = \begin{vmatrix} 0 & -0,25 \\ 1 & -0,25 \\ 1 & 0,25 \\ -0, & -0,125 \\ 1 & 0 \\ -0,5 & 0 \end{vmatrix}, \quad [R] = - \begin{vmatrix} R_{1p} \\ R_{2p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 \\ 4 \end{vmatrix}.$$

Матрица жесткости всей стержневой системы определяется следующим образом: $[K] = a' \cdot r \cdot a$

$$a' \cdot r = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -0,5 & 1 & -0,5 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \frac{EJ}{4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{EJ}{4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ -1,5 & -1,5 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$[K] = a' \cdot r \cdot a = \frac{EJ}{4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ -1,5 & -1,5 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -0,25 \\ 1 & -0,25 \\ 1 & 0,25 \\ -0, & -0,125 \\ 1 & 0 \\ -0,5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{EJ}{4} \begin{vmatrix} 10 & -0,75 \\ -0,75 & 0,937 \end{vmatrix}.$$

Матрицы перемещений $[Z]$ и внутренних усилий от узловых перемещений $[S]$ определяются следующим образом:

$$[Z] = [K]^{-1} \cdot [R] = \frac{4}{EJ} \begin{vmatrix} 0,106 & 0,085 \\ 0,085 & 1,136 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 12 \\ 4 \end{vmatrix} = \frac{4}{EJ} \begin{vmatrix} 1,62 \\ 5,56 \end{vmatrix}$$

$$[S] = [r] \cdot [a] \cdot [Z]$$

$$[r] \cdot [a] = \frac{EJ}{4} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -0,25 \\ 1 & -0,25 \\ 1 & 0,25 \\ -0, & -0,125 \\ 1 & 0 \\ -0,5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{EJ}{4} \begin{vmatrix} 2 & -1,5 \\ 4 & -1,5 \\ 3 & 0,75 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$[S] = [r] \cdot [a] \cdot [Z] = \frac{EJ}{4} \begin{vmatrix} 2 & -1,5 \\ 4 & -1,5 \\ 3 & 0,75 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{4}{EJ} \begin{vmatrix} 1,62 \\ 5,56 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5,1 \\ -1,86 \\ 9 \\ 4,86 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Окончательные усилия в рассматриваемой раме (изгибающие моменты) определяются в результате суммирования матрицы $[S]$ и матрицы, учитывающей ординаты изгибающих моментов в грузовом состоянии M_p :

$$[M] = \begin{vmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BD} \\ M_{DB} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5,1 \\ -1,86 \\ 9 \\ 0 \\ 4,86 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -16 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9,1 \\ 2,1 \\ 9 \\ 0 \\ -11,1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Таблица 4

Единичные и грузовые реакции для стержня с одним шарнирным, а другим упруго закрепленным концами

№ п.п.	Расчетные схемы и эпюры моментов	Момент $M_{\alpha\beta}$	Поперечные силы	
			$Q_{\alpha\beta}$	$Q_{\beta\alpha}$
1		$3i_{\alpha\beta}$	$-\frac{3i_{\alpha\beta}}{l_{\alpha\beta}}$	$-\frac{3i_{\alpha\beta}}{l_{\alpha\beta}}$
2		$-\frac{3i_{\alpha\beta}}{l_{\alpha\beta}}$	$\frac{3i_{\alpha\beta}}{l_{\alpha\beta}^2}$	$\frac{3i_{\alpha\beta}}{l_{\alpha\beta}^2}$
3		$-\frac{3}{16}Pl$	$\frac{11}{16}P$	$-\frac{5}{16}P$
4		$-\frac{ql_{\alpha\beta}^2}{8}$	$\frac{5}{8}ql_{\alpha\beta}$	$-\frac{3}{8}ql_{\alpha\beta}$

Единичные и грузовые реакции для стержня
с двумя упруго закрепленными концами.

№ п.п.	Расчетные схемы и эпюры моментов	Моменты		Поперечные си- лы	
		M_{ab}	M_{ba}	Q_{ab}	Q_{ba}
1		$4i_{ab}$	$2i_{ab}$	$-\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}$	$-\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}$
2		$2i_{ab}$	$4i_{ab}$	$-\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}$	$-\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}$
3		$-\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}$	$-\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}$	$\frac{12i_{ab}}{l_{ab}^2}$	$\frac{12i_{ab}}{l_{ab}^2}$
4		$-\frac{Pl}{8}$	$\frac{Pl}{8}$	$\frac{P}{2}$	$-\frac{P}{2}$
5		$-\frac{ql^2_{ab}}{12}$	$\frac{ql^2_{ab}}{12}$	$\frac{ql_{ab}}{2}$	$-\frac{ql_{ab}}{2}$

Единичные деформации стержней

N	Вид деформирования	φ_a	φ_b
1.		1	-0.5
2.		1	0
3.		$-\frac{1}{l}$	$\frac{1}{2l}$
4.		$-\frac{1}{l}$	$-\frac{1}{l}$