… Истинная наука не питает сновидениями своих исследователей, но всегда от первых истинных и доступных познанию начал постепенно продвигается к цели при помощи истинных заключений, как это явствует из первых математических наук, называемых арифметикой и геометрией. Эти науки с высшей достоверностью трактуют о величинах прерывных и непрерывных. Здесь не будут возражать, что дважды три больше или меньше шести или что в треугольнике углы меньше двух прямых углов. Всякое возражение оказывается здесь разрушенным, будучи приведено к вечному молчанию.

… Истина имеет одно единственное решение, и когда оно оглашено, спор прекращается навсегда. И если спор возникает снова и снова, то эта наука – лживая и путаная …

Леонардо да Винчи
«Об истинной и ложной науке»

Г.А. Маковкин

Конспект лекций по теоретической механике

ДИНАМИКА

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

- Яблонский А.А. Теоретическая механика.
- Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, Т.1,2. 2002.
- Диевский В.А. Курс лекций по теоретической механике. Ч. 1,2. СПб.: ВИТУ, 2002.
- Теоретическая механика. Динамика. Учебное пособие / А.С.Аистов, А.С.Баранова, Н.Ю. Трянина.- Н.Новгород: Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет.

Тема 1.
Основные законы механики

1.1. Предмет и задачи динамики.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение механических систем под действием сил.

Динамика является синтезом двух предыдущих разделов теоретической механики:

- **статики**, которая изучает преобразования систем сил и условия их равновесия, и
- **кинематики**, которая изучает способы математического описания движения тел.

Задачи, решаемые методами динамики, условно можно разделить на две группы:

- **Первая задача динамики (прямая)** предполагает, что закон движения механической системы известен, а силы которые вызывают это движение необходимо найти.
- **Вторая задача динамики (обратная)** предполагает, что известны силы, действующие на механическую систему, а найти необходимо закон движения.

Рис. 1.1

Динамика основывается на ряде принципов, которые могут быть названы законами или аксиомами. К ним относятся:

- принцип инерции и принцип относительности Галилея,
- закон равенства действия и противодействия,
- основной закон динамики (второй закон Ньютона).

1.2. Принципы Галилея.

Материальные точки, на которые не действуют никакие силы, будем называть **изолированными материальными точками**.

Принцип инерции Галилея состоит в следующем:

Всегда можно найти систему отсчета, в которой изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Такая система отсчета называется инерциальной.

Очевидно, что в инерциальной системе отсчета изолированная материальная точка имеет нулевое ускорение.

Если в одной системе отсчета ускорение точки равно нулю, то во всех системах, которые движутся относительно нее без ускорения, то есть равномерно и прямолинейно, оно также будет равно нулю.

Таких систем отсчета существует бесконечно много, и все они будут являться инерциальными.

В технике инерциальную систему отсчета обычно связывают с Землей.

Принцип относительности Галилея состоит в утверждении, что

Во всех инерциальных системах отсчета все механические процессы происходят одинаково, то есть все эти системы отсчета равноправны.

В неинерциальных системах те же процессы происходят иначе.

1.3. Закон равенства действия и противодействия

Третий закон Ньютона, который принят в качестве одной из аксиом статики, считается справедливым также для движущихся тел и материальных точек:

Силы взаимодействия тел всегда направлены по одной прямой, направлены в противоположные стороны и равны по модулю.

1.4. <u>Основной закон динамики</u>

Фундаментальное значение имеет **второй закон Ньютона**, который называют **основным законом динамики**:

Сила, действующая на свободную материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчета пропорционально этой силе:

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1.1}$$

В уравнение (1.1) входит величина *m*, которая называется **массой материальной точки.** Она является мерой инертности точки: чем больше масса, тем меньшее ускорение сообщает точке приложенная сила

Масса измеряется в килограммах (кг), и, следовательно, единица силы (ньютон) будет равна $1\,Н = 1\dfrac{кг \cdot м}{с^2}$.

Примечания:

- Если на точку действует несколько сил, то под $\vec{F}$ в уравнении (1.1) следует понимать их равнодействующую:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \quad . \tag{1.2}$$

- Если точка не является свободной, то нужно воспользоваться **принципом освобождаемости от связей** и к действующим на точку силам добавить соответствующие реакции.
- Для описания движения точки в неинерциальной системе отсчета уравнение (1.1) непосредственно применять нельзя.

Тема 2.
Динамика материальной точки

2.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Пусть материальная точка движется в инерциальной системе отсчета. Если движение задано в векторной форме, то

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

и тогда уравнение (1.1) примет вид, который называют **<u>дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме.</u>**

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \qquad (2.1)$$

в котором сила может зависеть от положения точки, от скорости точки и от времени, то есть:

$$\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right).$$

Спроектировав векторное равенство (2.1) на оси, получим **<u>дифференциальные уравнения движения материальной точки в координатной (аналитической) форме</u>**:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}. \qquad (2.2)$$

<u>Дифференциальные уравнения движения материальной точки в естественных осях</u> могут быть получены с помощью формул кинематики, после чего они приобретают следующий вид:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_\tau}{dt} = F_\tau \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases}. \qquad (2.3)$$

2.2. Первая задача динамики

Если закон движения задан в векторной форме, выражение для вектора силы могут быть найдены путем дифференцирования радиус-вектора по формулам (2.1).

Если закон движения задан в аналитической форме, проекции силы на декартовые оси могут быть найдены путем дифференцирования координат по формулам (2.2).

Если закон движения задан в естественной форме, проекции силы на оси естественного трехгранника могут быть найдены путем дифференцирования по (2.3).

ПРИМЕР

Движение точки массой m (кг) в плоскости происходит в соответствии с уравнениями: $x = C_1 t + C_2 t^2$, $y = C_3 t$, где *C1, C2, C3* - некоторые постоянные величины.

Найти силу, вызывающую это движение.

Решение

Движение точки задано координатным способом, поэтому применим уравнения (2.2), учитывая, что: $\ddot{x} = 2C_2$; $\ddot{y} = 0\frac{м}{с^2}$.

Тогда $F_x = m\ddot{x} = 2C_2 m$; $F_y = F_z = 0$.

Ответ: Действующая сила равна по модулю $F = 2C_2 m\ H$ и направлена по оси x .

2.3. Вторая задача динамики

Вторая задача динамики заключается в определении движения под действием заданных сил. Ее решение сводится к интегрированию дифференциальных уравнений (2.1), (2.2) или (2.3).

Пусть, движение точки описывается в декартовых осях. Тогда система уравнений (2.2)

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \quad x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t \\ m\ddot{y} = F_y \quad x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t \\ m\ddot{z} = F_z \quad x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t \end{cases}$$

имеет общее решение в виде

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3) \\ y = y(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3) \\ z = z(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3) \end{cases}.$$

При решении задач обычно принимают, что $t_0 = 0$, а $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ − постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий, описывающих состояние материальной точки в начальный момент времени $t = t_0$.

В качестве начальных условий задаются начальное положение точки и ее начальная скорость:

$$\begin{cases} x_0 = x\big|_{t=0} \\ \dot{x}_0 = \dot{x}\big|_{t=0} \\ y_0 = y\big|_{t=0} \\ \dot{y}_0 = \dot{y}\big|_{t=0} \\ z_0 = z\big|_{t=0} \\ \dot{z}_0 = \dot{z}\big|_{t=0} \end{cases}$$

Из этих шести уравнений определяются шесть постоянных интегрирования.

ПРИМЕР

Материальную точку бросают под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти уравнение движения материальной точки. Сопротивление воздуха и изменение с высотой силы тяжести не учитывать.

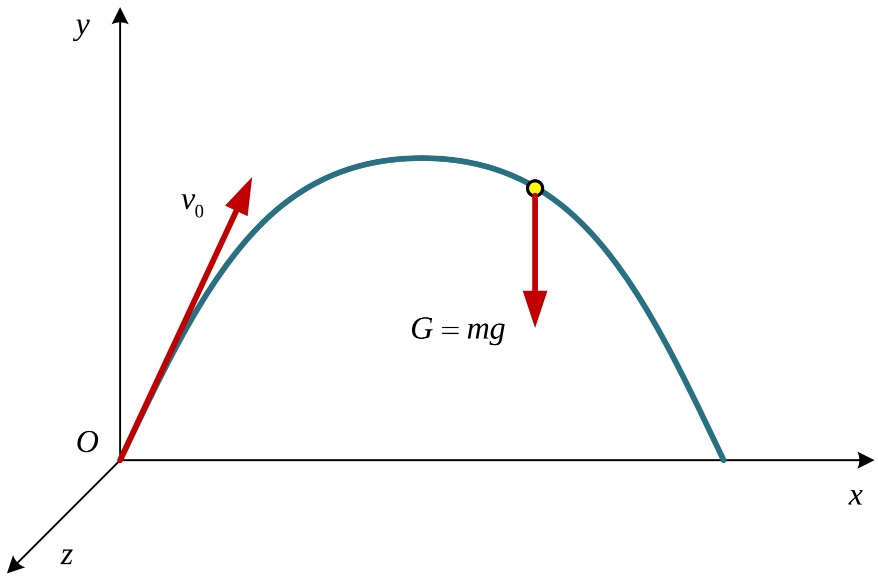

Рис. 2.1

Решение

1. Выберем систему отсчета (см. рис. 2.1).
2. Запишем дифференциальные уравнения (2.2):

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

3. Интегрируя уравнения, получаем:

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_2 \\ \dot{z} = C_3 \end{cases}$$

4. Интегрируя уравнения еще раз, получаем:

$$\begin{cases} x = C_1 t + D_1 \\ y = -gt^2/2 + C_2 t + D_2 \\ z = C_3 t + D_3 \end{cases} \qquad (*)$$

5. Для определения постоянных интегрирования $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ используем начальные условия:

$$\begin{cases} x_0 = x|_{t=0} = 0 \\ \dot{x}_0 = \dot{x}|_{t=0} = v_0 \cos\alpha \\ y_0 = y|_{t=0} = 0 \\ \dot{y}_0 = \dot{y}|_{t=0} = v_0 \sin\alpha \\ z_0 = z|_{t=0} = 0 \\ \dot{z}_0 = \dot{z}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

, откуда получаем:

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ C_1 = v_0 \cos\alpha \\ D_2 = 0 \\ C_2 = v_0 \sin\alpha \\ D_3 = 0 \\ C_3 = 0 \end{cases}$$

6. Подставляя постоянные интегрирования в уравнения (*), получим:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \; t \\ y = -gt^2/2 + v_0 \sin\alpha \; t \\ z = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

7. Исключим из уравнений (**) время, для чего выразим t из первого уравнения:

$$t = x / v_0 \cos\alpha ,$$

и затем подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + tg\,\alpha \; x.$$

В полученное соотношение не входит время. Оно представляет собой уравнение траектории материальной точки.

Ответ: Уравнение траектории точки: $y = -\dfrac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + tg\,\alpha \; x.$

2.4. Интегрирование уравнения прямолинейного движения

Пусть материальная точка движется в положительном направлении оси x.

Тогда $$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt}, \qquad F_x = F.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt} = F\;\; x,v,t$$

и рассмотрим способы его интегрирования с учетом начальных условий

$$\begin{cases} x_0 = x\big|_{t=0} \\ \dot{x}_0 = \dot{x}\big|_{t=0} \end{cases}$$

для трех частных случаев:

- когда сила зависит от времени $F = F\;\; t\;\;$,
- когда сила зависит от скорости $F = F\;\; v\;\;$,
- когда сила зависит от координаты $F = F\;\; x\;\;$.

Частный случай 1: сила зависит от времени:

$$m\frac{dv}{dt} = F\;\; t\;\;.$$

Умножив обе части уравнения на dt, разделим переменные t и v:

$$m\,dv = F\;\; t\;\; dt$$

При интегрировании уравнения можно пользоваться определенными или неопределенными интегралами.

Используем **неопределенные интегралы:**

$$m\int dv = \int F\;\; t\;\; dt, \text{ откуда } mv = \int F\;\; t\;\; dt + C_1,$$

где C_1 определяется из начального условия.

Используем **определенные интегралы:**

$$m\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t F\;\; t\;\; dt$$

Интегрируя и выполняя подстановку, получим:

$$mv - mv_0 = \int_0^t F\;\; t\;\; dt.$$

При использовании определенных интегралов определение постоянных интегрирования не требуется, так как после взятия интеграла и подстановки величину скорости можно будет выразить непосредственно.

Частный случай 2: сила зависит от скорости:

$$m\frac{dv}{dt}=F(v).$$

Умножив обе части равенства на $\frac{dt}{F(v)}$, получим

$$m\frac{dv}{F(v)}=dt$$

Используем **неопределенные интегралы:**

$$m\int\frac{dv}{F(v)}=\int dt,\quad \text{откуда}\quad m\int\frac{dv}{F(v)}=t+C_1,$$

где C_1 определяется из начального условия.

Используем **определенные интегралы:**

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{F(v)}=\int_0^t dt\quad \text{или}\quad m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{F(v)}=t.$$

После взятия интеграла и подстановки пределов получим выражение для v, не содержащее постоянных интегрирования.

Частный случай 3: сила зависит от координаты:

$$m\frac{dv}{dt}=F(x).$$

Выполним замену $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v$, получим уравнение

$$mv\frac{dv}{dx}=F(x).$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$mvdv=F(x)dx.$$

Используем **неопределенные интегралы:**

$$m\int vdv=\int F(x)dx,\quad \text{откуда}\quad m\frac{v^2}{2}=\int F(x)dx+C_1.$$

Постоянная C_1 определяется из начального условия.

Используем **определенные интегралы:**

$$m\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx, \text{ откуда } m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^{\,2}}{2} = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

После взятия интеграла и подстановки пределов получим выражение для v, не содержащее постоянных интегрирования.

Примечание

Если требуется получить не только выражение скорости $v(t)$, но и выражение для координаты точки $x(t)$, то описанный процесс интегрирования следует повторить.

Тема 3.
Теорема о движении центра масс

3.1. Дифференциальные уравнения движения механической системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из *n* точек. Положение *k*-й точки определяется радиус-вектором $\vec{r}_k$. Точка имеет массу m_k и движется со скоростью $\vec{v}_k$ и с ускорением $\vec{a}_k$.

Силы, действующие на материальную точку можно разбить на две группы.

Сделать это можно разными способами.

Первый способ

Разделим силы, действующие на *k*-ю точку, на внешние и внутренние. Получим следующую запись основного уравнения динамики:

$$m\vec{a} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3.1}$$

где $\vec{F}_k^e$ *external* – равнодействующая внешних сил,

$\vec{F}_k^i$ *internal* – равнодействующая сил, действующих со стороны тел системы.

Второй способ

Разделим силы, действующие на *k*-ю точку, на активные силы и реакции связей. Получим следующую запись:

$$m\vec{a} = \vec{F}_k + \vec{R}_k \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3.2}$$

где $\vec{F}_k$ – равнодействующая активных сил, приложенных к точке k,

$\vec{R}_k$ – равнодействующая реакций связей, действующих на точку k.

При этом выполнится равенство $\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i = \vec{F}_k + \vec{R}_k$.

Первый способ записи основного уравнения используется при решении задач динамики с помощью **ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ**, которые включают в себя:

- теорему о движении центра масс,
- теорему об изменении количества движения,
- теорему об изменении кинетического момента,
- теорему об изменении кинетической энергии.

Второй способ записи основного уравнения применяется при решении задач динамики методами **АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**, которые используют:

- принцип Лагранжа,
- принцип д'Аламбера,
- принцип д'Аламбера − Лагранжа,
- уравнения Лагранжа второго рода.

3.2. Центр масс механической системы

Массой механической системы называется сумма масс ее точек:

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k \ . \tag{3.3}$$

Центром масс механической системы называется геометрическая точка С, радиус-вектор которой определяется по формуле:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k \tag{3.4}$$

Проектируя последнее равенство на оси, получим формулы для координат центра масс, которые аналогичны формулам для определения координат центра тяжести:

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k x_k \ , \qquad y_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k y_k \ , \qquad z_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k z_k \tag{3.5}$$

Центр масс иногда называют центром инерции.

Центр масс более общее понятие, чем центр тяжести, поскольку сохраняет смысл даже при отсутствии сил тяжести.

Если массы материальных точек постоянны, то дифференцированием уравнения (3.4)

получим выражение для скорости центра масс

$$\vec{v}_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k \ , \tag{3.6}$$

и выражение для ускорения центра масс системы:

$$\vec{a}_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k \tag{3.7}$$

3.3. Теорема о движении центра масс механической системы

ТЕОРЕМА

Произведение массы системы на ускорение центра масс равно главному вектору внешних сил, действующих на точки системы:

$$m\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \qquad (3.8)$$

или в проекциях на оси

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}^e \\ m\ddot{y}_C = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}^e \\ m\ddot{z}_C = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz}^e \end{cases} \qquad (3.9)$$

Доказательство

Просуммируем все дифференциальные уравнения движения механической системы (3.1), в результате чего получим

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i .$$

Если учесть, что силы взаимодействия внутри системы попарно равны и противоположно направлены, получим, что главный вектор внутренних сил равен нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i = 0 .$$

Кроме того, по формуле (3.7) имеем $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = m\vec{a}_C$.

Отсюда следует справедливость уравнений (3.8), которые называются дифференциальными уравнениями поступательного движения твердого тела.

Теорема доказана

Другими словами, **центр масс механической системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.**

Вывод: **внутренние силы не могут изменить движение центра масс.**

3.4. Сохранение движения центра масс (следствия из теоремы о движении центра масс системы)

Следствие 1

Если главный вектор внешних сил механической системы все время равен нулю, то центр масс системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

Действительно, если $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e = 0$, то из (3.8) получаем, что $\vec{a}_C = 0$, откуда $\vec{v}_C = const$.

Следствие 2

Если сумма проекций всех внешних сил на какую-либо ось все время равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось постоянна.

Действительно, если $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e = 0$, то из (3.9) получаем, что $\ddot{x}_C = 0$.

Отсюда следует, что $\dot{x}_C = const$ (центр масс движется по оси x равномерно или покоится: $v_{Cx} = const$).

Тема 4.
Теорема об изменении количества движения

4.1. Теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме

Количеством движения материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы точки на ее скорость: $\vec{Q} = m\vec{v}$.

Количеством движения материальной системы называется векторная сумма количеств движения всех точек системы:

$$\vec{Q} = \sum_{r=1}^{n} m_r \vec{v}_r \,. \qquad (4.1)$$

Поскольку по формуле (3.6) $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k = m\vec{v}_C$, то

$$\vec{Q} = m\vec{v}_C \,. \qquad (4.2)$$

Количество движения характеризует только поступательную часть движения и никакого отношения не имеет к его вращательной составляющей.

ТЕОРЕМА

Производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \qquad (4.3)$$

или в проекциях на оси:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_x}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}^e \\ \dfrac{dQ_y}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}^e \,. \\ \dfrac{dQ_z}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz}^e \end{cases} \qquad (4.4)$$

Доказательство

Используем теорему о движении центра масс механической системы:

$$m\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \,.$$

Преобразуем левую часть формулы:

$$m\vec{a}_C = m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{d}{dt}\; m\vec{v}_C \; = \frac{d\vec{Q}}{dt}.$$

Теорема доказана

Примечания.

- Фактически теорема о движении центра масс системы и теорема об изменении количества движения системы являются различными формулировками одной и той же теоремы, которую можно записывать либо в форме (3.8) либо в форме (4.3).
- Теорема об изменении количества движения системы может применяться для систем, имеющих переменную массу, в то время как теорема о движении центра масс системы справедлива только для систем с постоянной массой.

4.2. Теорема об изменении количества движения в интегральной форме

Импульсом силы за некоторый промежуток времени $0,t$ называется величина равная интегралу от силы по времени

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F}\,dt \tag{4.5}$$

Если $\vec{F} = const$, то естественно, что $\vec{S} = \vec{F}\cdot\Delta t$, где Δt – промежуток времени.

Размерность импульса силы $S = H\cdot c = \frac{кг\cdot м}{c}$ совпадает с размерностью количества движения.

ТЕОРЕМА

изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за этот промежуток времени:

$$\Delta\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e \tag{4.6}$$

или в проекциях на координатные оси

$$\begin{cases} \Delta Q_x = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^e \\ \Delta Q_y = \sum_{k=1}^{n} S_{ky}^e \\ \Delta Q_z = \sum_{k=1}^{n} S_{kz}^e \end{cases}. \tag{4.7}$$

Доказательство

Запишем теорему в дифференциальной форме (4.3):

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e$$

Проинтегрируем левую и правую части равенства по времени за рассматриваемый промежуток (0,t).

Левая часть: $\int_0^t \frac{d\vec{Q}}{dt}dt = \int_0^t d\vec{Q} = \vec{Q}|_0^t = \vec{Q} - \vec{Q}_0.$

Правая часть: $\int_0^t \sum \vec{F}_k^e dt = \sum \int_0^t \vec{F}_k^e dt = \sum \vec{S}_k^e.$

Теорема доказана

Выводы:

- Для одной материальной точки теорема приобретает вид:
$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S},$$
где $\vec{S}$ - импульс равнодействующей всех сил, приложенных к точке.
То есть, **импульс является такой характеристикой силы, которая показывает насколько эта сила изменяет количество движения материальной точки или механической системы.**
- Внутренние силы не могут изменить количество движения механической системы.

4.3. Сохранение количества движения

Из теорем, доказанных в §4.1 и §4.1 можно сделать важные выводы.

Следствие 1

Если главный вектор внешних сил механической системы все время равен нулю, то вектор количества движения системы постоянен.

Действительно, если, $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^e \equiv 0$ то $\frac{d\vec{Q}}{dt} \equiv 0$ и, следовательно, $\vec{Q} \equiv const$, или $m\vec{v}_C \equiv const$.

Следствие 2

Если сумма проекций всех внешних сил механической системы на какую-либо ось все время равна нулю, то проекция количества движения на эту ось постоянна.

Действительно, если, $\sum_{i=1}^{n} F_{ix}^e \equiv 0$, то из (4.4) следует, что $\frac{dQ_x}{dt} \equiv 0$ и $Q_x \equiv const$.

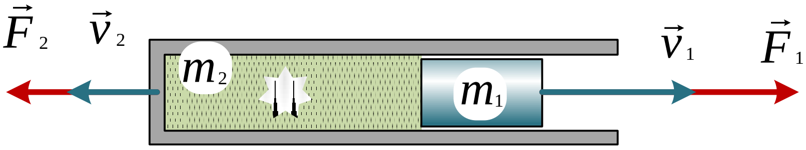

Рис. 4.1

При выстреле, например, $\vec{Q} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ и (в проекциях)

$Q_x = m_1 v_1 + m_2 v_2$, откуда $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$.

Отсюда видно, что скорость отката ствола будет равна $v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1$.

Тема 5.
Моменты инерции тела и механической системы

5.1. Моменты инерции относительно осей

Установлено, что мерой инертности материального тела является его масса. Но это справедливо только для поступательного движения.

Для вращательного движения мерой инертности является величина, которая называется моментом инерции.

Моменты инерции точки

Моментом инерции материальной точки относительно некоторой оси (осевым моментом инерции) называется величина, равная произведению массы точки на квадрат ее расстояния до этой оси.

Момент инерции принято обозначать буквами I или J, указывая при этом индекс соответствующей оси.

Пусть точка M в системе *Oxyz* (рис. 5.1) имеет координаты x, y, z и массу m.

Тогда ее момент инерции относительно оси z будет равен:

$$J_z = m\,h^2$$

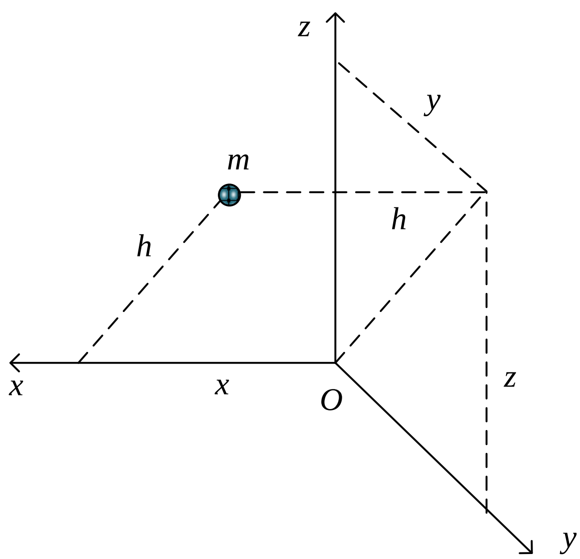

Рис. 5.1

Найдем моменты инерции этой точки относительно координатных осей.

Так как $h^2 = y^2 + z^2$, то

$$J_x = m \quad y^2 + z^2 \tag{5.1}$$

Аналогично получаются формулы относительно двух других осей:

$$J_y = m \quad z^2 + x^2$$

$$J_z = m \quad x^2 + y^2$$

Видно, что момент инерции всегда положительная величина.

Ее размерность $[J] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Механическая система из n материальных точек

Рассмотрим теперь механическую систему, состоящую из n точек.

Пусть k-я точка имеет массу m_k и координаты x_k, y_k, z_k.

Тогда моменты инерции механической системы можно вычислить путем суммирования моментов инерции входящих в нее точек:

$$J_x = \sum_{k=1}^{n} m_k \quad y_k^2 + z_k^2 \quad ,$$

$$J_y = \sum_{k=1}^{n} m_k \quad z_k^2 + x_k^2 \quad , \tag{5.2}$$

$$J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \quad x_k^2 + y_k^2 \quad .$$

Материальное тело

Рассмотрим твердое тело, в котором масса распределена непрерывно.

В этом случае тело следует поделить на бесконечно малые элементы объема с массами и вычислять моменты инерции путем интегрирования по всему объему тела:

$$J_x = \int_V \quad y^2 + z^2 \quad dm$$

$$J_y = \int_V \quad z^2 + x^2 \quad dm \tag{5.3}$$

$$J_z = \int_V \quad x^2 + y^2 \quad dm$$

Радиус инерции

Момент инерции твердого тела относительно оси имеет размерность произведения массы на квадрат некоторой линейной величины.

Представим его в виде $$J_z = m i_z^2, \qquad (5.4)$$

где m - масса тела, i_z - радиус инерции тела относительно оси z.

Радиус инерции твердого тела относительно некоторой оси – это расстояние от оси до точки, в которой надо сконцентрировать массу тела, чтобы момент инерции этой точки относительно оси был равен моменту инерции тела.

5.2. Моменты инерции некоторых однородных тел.

Ось, проходящая через центр масс твердого тела, называется центральной.

Рассмотрим, каким образом вычисляются моменты инерции некоторых простейших материальных тел относительно центральных осей.

1. Момент инерции тонкого однородного стержня (рис. 5.2)

Вычислим момент инерции однородного тонкого стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через его середину (рис. 5.2).

Масса единицы длины стержня равна m/l. Если выделить бесконечно малый элемент стержня длиной dx, лежащий на расстоянии x от оси Oz, то его масса будет ровна $dm = \frac{m}{l}\,dx$.

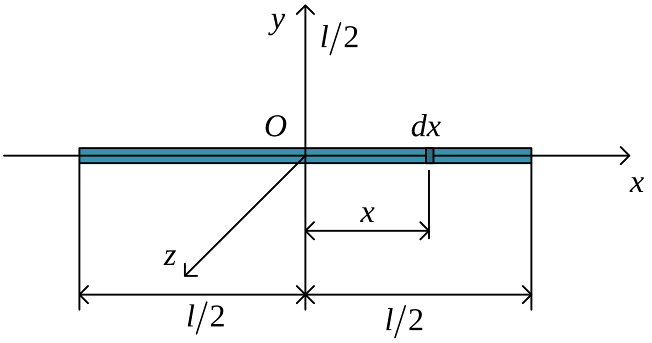

Рис. 5.2

Момент инерции относительно оси z можно определить путем интегрирования:

$$J_z = \int_V x^2 + y^2 \;\; dm = \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_{-l/2}^{+l/2} = ml^2/12 \qquad (5.5)$$

2.Тонкая однородная круглая пластина

Моменты инерции других однородных тел различной формы выводятся аналогично с помощью интегрирования.

Так момент инерции круглого однородного круглого диска массой m и радиуса r относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости (рис. 5.3, а) будет равен

$$J_z = \frac{mr^2}{2} \tag{5.6}$$

3.Круглый однородный цилиндр

Момент инерции круглого кольца (цилиндра, трубы) массой m, которая равномерно распределена вдоль окружности радиуса r, относительно оси, совпадающей с осью цилиндра (рис. 5.3, б), будет равен

$$J_z = mr^2. \tag{5.7}$$

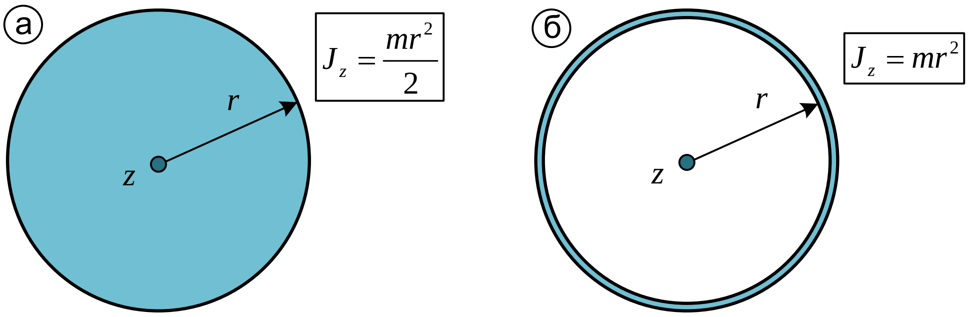

Рис. 5.3.

Примечания

- В случае, когда расположение оси отличается от показанного на рисунках 5.2 и 5.3, приведенными выше формулами пользоваться нельзя;
- Выражения для моментов инерции материальных тел, имеющих другую форму, можно найти в справочниках или вывести с помощью интегрирования.

5.3. Моменты инерции относительно параллельных осей

При решении задач приходится вычислять моменты инерции тел относительно осей вращения, которые не проходят через центр масс.

В этом случае применяют теорему Гюйгенса - Штайнера.

ТЕОРЕМА Гюйгенса - Штайнера

Момент инерции механической системы (тела) относительно некоторой оси равен сумме момента инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, и величины равной произведению массы системы на квадрат расстояния между осями:

$$J_z = J_{zC} + md^2 \tag{5.8}$$

Доказательство

Пусть имеются две системы координат: $Oxyz$ и $Cx'y'z'$, оси которых параллельны друг другу. Начало системы $Cx'y'z'$, находится в центре масс механической системы. Ось z отстоит от оси z_C на расстояние d.

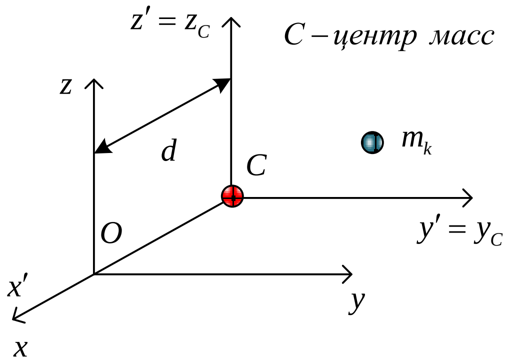

Рис. 5.4

Для произвольной точки системы m_k ее координаты при переходе из одной системы в другую изменятся следующим образом:

$$x_k = x'_k - d, \qquad y_k = y'_k.$$

Вычислим момент инерции системы относительно оси z:

$$J_z = \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right) = \sum m_k \left[\left(x'_k - d\right)^2 + y'^2_k\right] = \sum m_k x'^2_k - 2d\sum m_k x'_k + d^2 \sum m_k + \sum m_k y'^2_k.$$

Пусть $m = \sum m_k$ — масса системы.

По определению центра масс $\sum m_k x'_k = m x'_c$ (§ 3.2).

Но координата центра масс x'_c в системе $Cx'y'z'$ равна нулю.

По той причине второе слагаемое равно нулю: $2d\sum m_i x_i' = 0.$

Сумма первого и последнего слагаемых равна моменту инерции относительно оси , проходящей через центр тяжести:

$$\sum m_k x_k'^2 + \sum m_k y_k'^2 = \sum m_k \ \ x_k'^2 + y_k'^2 \ \ = J_{zC}$$

Третье слагаемое равно $d^2 m$.

Окончательно получим:

$$J_z = J_{zC} + md^2.$$

Теорема доказана.

Следствие из теоремы

Изо всех моментов инерции относительно параллельных осей наименьшим будет момент инерции, вычисленный относительно центральной оси.

ПРИМЕР

Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня массой m относительно оси z, проходящей через край стержня перпендикулярно к его оси.

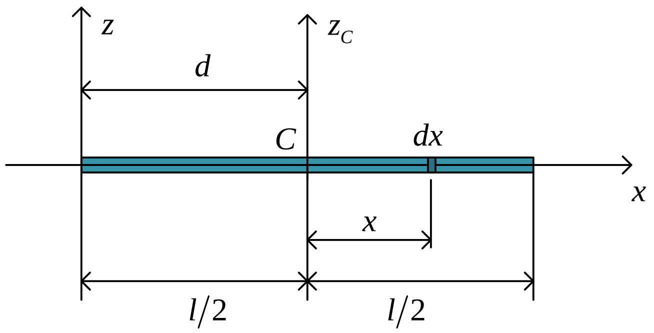

Рис. 5.5

Решение

Используем теорему Гюйгенса:

$$J_z = J_{zC} + md^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

Ответ: $J_z = ml^2/3.$

Тема 6.
Теорема об изменении кинетического момента

6.1. Кинетический момент

Теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения описывают только поступательную часть движения твердого тела. Вращательную часть движения описывает теорема об изменении кинетического момента.

Введем понятия: **момент количества движения и кинетический момент**.

Величину $\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r}\times\vec{F}$ называют моментом силы $\vec{F}$ относительно точки О.

Момент количества движения относительно некоторой точки определяется аналогично, но вместо вектора силы берется вектор количества движения.

То есть:

моментом количества движения материальной точки относительно некоторого центра называется векторное произведение

$$\vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r}\times m\vec{v}. \qquad (6.1)$$

а проекция этого вектора на некоторую ось z называется моментом количества движения материальной точки относительно этой оси $m_z(m\vec{v})$.

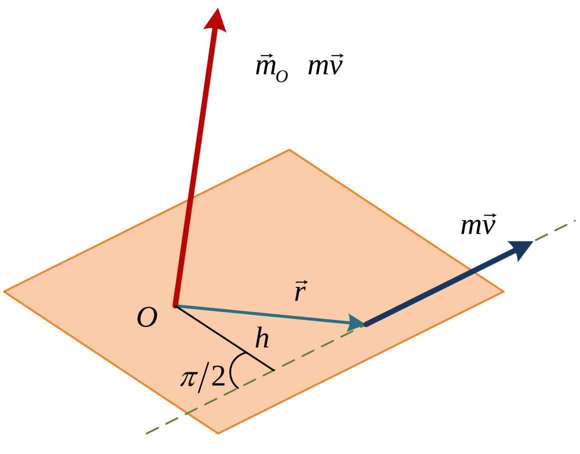

Рис. 6.1.

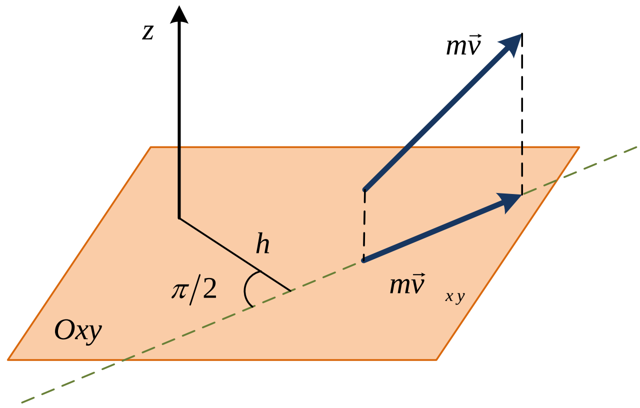

Рис. 6.2.

- Направление вектора кинетического момента количества движения относительно точки определяется по правилу правого винта.
- Его модуль равен произведению количества движения на плечо (рис. 6.1):

$$m_O\left(m\vec{v}\right)=mv\cdot h,$$

где h – плечо вектора количества движения относительно точки О.

- Размерность модуля момента количества движения: $\left[m_O\left(m\vec{v}\right)\right]=\dfrac{кг\cdot м^2}{с}$.

Чтобы вычислить момент количества движения относительно оси надо :

- Спроектировать вектор $m\vec{v}$ на плоскость перпендикулярную оси;
- Модуль этой проекции (рис. 6.2) умножить на ее плечо относительно точки пересечения оси с плоскостью;
- Добавить знак в зависимости от направления вектора.

В результате получим:

$$m_z\left(m\vec{v}\right)=\pm\left(mv\right)_{xy}\cdot h, \tag{6.2}$$

Теперь введем понятие **кинетического момента**.

Кинетическим моментом механической системы относительно некоторого центра О (или оси) называется сумма моментов количеств движения всех точек данной системы относительного данного центра (или оси):

$$\vec{K}_O=\sum_{i=1}^{n}\vec{m}_O\left(m_i\vec{v}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i, \tag{6.3}$$

$$K_z=\sum_{i=1}^{n}m_z\left(m_i\vec{v}_i\right). \tag{6.4}$$

Если точка О является началом системы координат, то спроектировав кинетический момент относительно центра О на оси, получим **кинетические моменты относительно координатных осей**:

$$\begin{cases} K_x=\left(\vec{K}_O\right)_x=\sum_{i=1}^{n}m_x\left(m_i\vec{v}_i\right)\\ K_y=\left(\vec{K}_O\right)_y=\sum_{i=1}^{n}m_y\left(m_i\vec{v}_i\right)\\ K_z=\left(\vec{K}_O\right)_z=\sum_{i=1}^{n}m_z\left(m_i\vec{v}_i\right)\end{cases} \tag{6.5}$$

Примечание

- Если механическая система представляет собой твердое тело, то кинетические моменты должны определяться не суммированием, а путем интегрирования по объему.

6.2. Кинетический момент вращающегося тела

Пусть материальное тело вращается относительно оси z с угловой скоростью ω (рис. 6.3). Вычислим кинетический момент тела относительно оси вращения K_z.

Для этого выделим бесконечно малый элемент объема с массой dm, который находится от оси вращения на расстоянии $h = \sqrt{x^2 + y^2}$. Его скорость будет равна $v = \omega h$, а его кинетический момент определится по формуле:

$$dK_z = dm \cdot vh \;\; = dm \cdot \omega h^2 = \omega \;\; x^2 + y^2 \;\; dm.$$

Кинетический момент всего тела получим, проинтегрировав моменты количеств всех бесконечно малых объемов тела:

$$K_z = \int_V dK_z = \omega \int_V \;\; x^2 + y^2 \;\; dm.$$

где интеграл

$$\int_V \;\; x^2 + y^2 \;\; dm = J_z$$

представляет собой осевой момент инерции .

Таким образом, **кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению осевого момента инерции на угловую скорость:**

$$K_z = J_z\,\omega. \qquad (6.6)$$

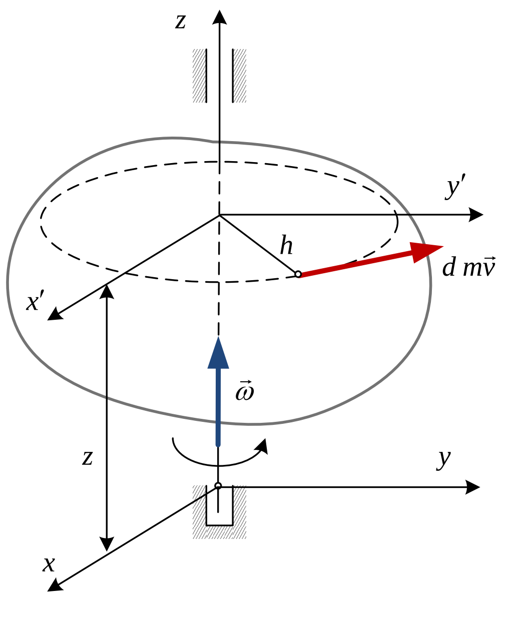

Рис. 6.3.

6.3. Теорема об изменении кинетического момента

ТЕОРЕМА

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительного некоторого центра (или оси) равна главному моменту внешних сил относительно этого же центра (или оси):

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\vec{m}_O\ \ \vec{F}_k^e \tag{6.7}$$

или

$$\begin{cases}\dfrac{dK_x}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{n}m_x\ \ \vec{F}_k^e\\ \dfrac{dK_y}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{n}m_y\ \ \vec{F}_k^e\\ \dfrac{dK_z}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{n}m_z\ \ \vec{F}_k^e\end{cases}. \tag{6.8}$$

Доказательство

1. **Рассмотрим одну материальную точку.**

Запишем для нее основное уравнение динамики:

$$m\,\vec{a}=\vec{F}\,.$$

Помножим радиус-вектор точки на левую и правую части равенства:

$$\vec{r}\times m\,\vec{a}=\vec{r}\times\vec{F}\ \ .$$

В правой части $\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}_O\ \ \vec{F}$ по определению, а в левой части

$$\vec{r}\times m\,\vec{a}=\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\ \ m\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\ \ \vec{r}\times m\vec{v}\ \ -\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}=\frac{d}{dt}\Big[\vec{m}_O\ \ m\vec{v}\ \ \Big]-\vec{v}\times m\vec{v}.$$

Вектор $\vec{v}$ параллелен вектору $m\vec{v}$ поэтому $\vec{v}\times m\vec{v}=0$ и мы получаем равенство

$$\frac{d}{dt}\Big[\vec{m}_O\ \ m\vec{v}\ \ \Big]=\vec{r}\times m\,\vec{a}.$$

Для материальной точки теорема доказана.

2. **Перейдем к механической системе.**

Просуммируем полученные равенства для всех точек системы.

В левой части получим:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}\left[\vec{m}_O\left(m_k\vec{v}_k\right)\right]=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\left[\vec{m}_O\left(m_k\vec{v}_k\right)\right]=\frac{d\vec{K}_O}{dt}.$$

В правой части отделим моменты внешних сил от моментов внутренних сил:

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\vec{m}_O\left(\vec{F}^e_k\right)+\sum_{k=1}^{n}\vec{m}_O\left(\vec{F}^i_k\right).$$

Внутренние силы, как силы взаимодействия, попарно равны и противоположно направлены, и по этой причине

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{m}_O\left(\vec{F}^i_k\right)=0.$$

В результате получим равенство:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\vec{m}_O\left(\vec{F}^e_k\right).$$

Теорема доказана.

Вывод из теоремы:

внутренние силы не могут изменить кинетический момент механической системы.

6.4. Дифференциальное уравнение вращательного движения

Предположим, что материальное тело вращается относительно оси z. По формуле (6.6) его кинетический момент будет равен $K_z=J_z\omega$ и тогда в соответствии с теоремой об изменении кинетического момента

$$\frac{d\left(J_z\omega\right)}{dt}=\sum_{k=1}^{n}m_z\left(\vec{F}^e_k\right).$$

Если тело в процессе вращения не изменяется, то $J_z=const$ и мы получаем **дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела:**

$$J_z\frac{d\omega}{dt}=\sum_{k=1}^{n}m_z\left(\vec{F}^e_k\right), \qquad (6.9)$$

Если учесть, что $\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, уравнение (6.9) можно записать в виде

$$J_z\varepsilon=J_z\ddot{\varphi}=\sum_{k=1}^{n}m_z\left(\vec{F}^e_k\right) \qquad (6.10)$$

Из сравнения формулы (3.8) для поступательного движения и формулы (6.10) для вращательного движения видно, что при поступательном движении мерой инертности тела является его масса, а при вращательном − его момент инерции.

6.5. Случаи сохранения кинетического момента

Из теоремы об изменении кинетического момента следуют два положения.

Следствие 1

Если главный момент внешних сил механической системы относительно некоторого центра все время равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра остается неизменным.

Действительно, если $\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_k^e\right) \equiv 0$, то $\dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = 0$ и $\vec{K}_O = const.$

Следствие 2

Если главный момент внешних сил относительно какой-либо оси все время равен нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси остается неизменным.

Действительно, если $\sum_{k=1}^{n} m_z\left(\vec{F}_k^e\right) \equiv 0$ то $\dfrac{dK_z}{dt} = 0$ и $K_z = const.$

1. Если механическая система представляет собой одно неизменяемое твердое тело, то $K_z = J_z\omega = const$ и поэтому $\omega = 0$, то есть тело вращается равномерно.
2. Если система изменяема, то из $J_z\omega = const$ следует, что увеличение момента инерции вызывает уменьшение угловой скорости (и наоборот).
3. Если система состоит из двух (или нескольких) вращающихся тел с одной осью вращения, то из $K_z = const$ следует, что $J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = 0$, и, следовательно, вращение одного тела будет вызывать вращение второго тела с угловой скоростью $\omega_2 = -\frac{J_1}{J_2}\omega_1$.

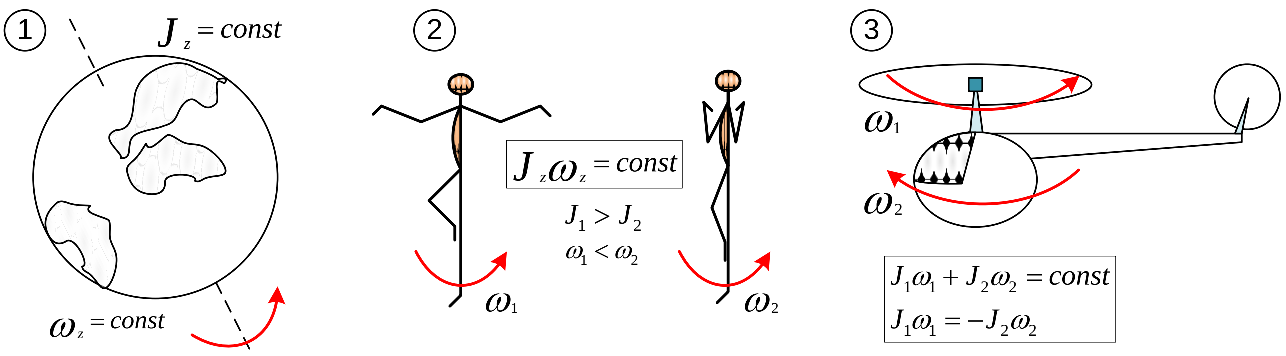

Рис. 6.4

Тема 7.
Мощность и работа сил

7.1. <u>Определение мощности и работы силы</u>

<u>Мощностью силы</u> называется величина, равная скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} = F\ v \cos\ \vec{F}, \vec{v}\ . \qquad (7.1)$$

Мощность может быть как положительной, так и отрицательной (рис. 7.1).

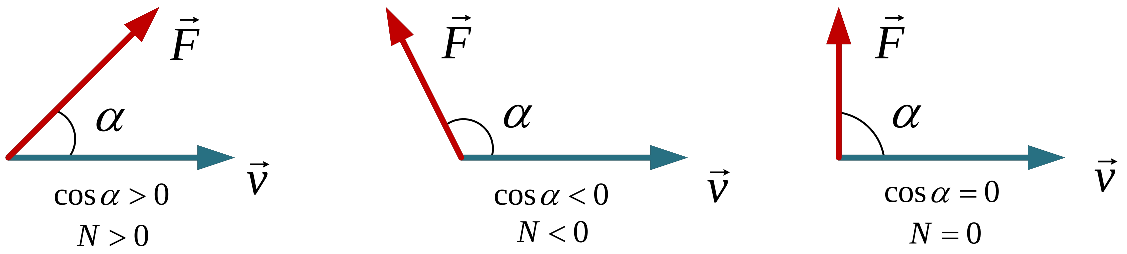

Рис. 7.1

Размерность мощности $N = F \quad v = Н \cdot м / с = Вт.$

Работой силы за некоторый промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ называется величина, равная интегралу от мощности силы по времени:

$$A = \int_0^t N\,dt\text{, и следовательно } N = \frac{dA}{dt} \qquad (7.2)$$

Если мощность постоянна, то $A = N\,\Delta t$.

Размерность работы $A = N \quad t = Вт \cdot с = \frac{Н \cdot м \cdot с}{с} = Н \cdot м$.

Выражение под знаком интеграла в (7.4) есть работа за бесконечно малый промежуток времени, которую называют **элементарной работой:**

$$dA = N\,dt = \left(\vec{F} \cdot \vec{v}\right) dt \qquad (7.3)$$

Вычисление работы при разных способах описания движения также будет отличаться.

Закон движения задан в векторной форме

Если учесть, что $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, то $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, и тогда

$$A = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (7.4)$$

При $\vec{F} = const$ из (7.5) следует, что

$$A = \vec{F} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}. \qquad (7.5)$$

Закон движения задан в аналитической форме

Пусть $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$.

Тогда $N = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z = F_x \dfrac{dx}{dt} + F_y \dfrac{dy}{dt} + F_z \dfrac{dz}{dt}$.

Тогда путем интегрирования мощности получаем, что работа равна

$$A = \int_{M_0}^{M} \left(F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz\right) \qquad (7.7)$$

Закон движения задан в естественной форме

Поскольку $\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau}$, то $N = F_\tau v_\tau = F_\tau \dot{s}$.

Отсюда следует, что при разложении силы по естественному базису мощность имеет только составляющая силы, направленная по касательной к траектории.

Тогда путем интегрирования мощности получаем, что работа равна

$$A = \int_0^S F_\tau\, ds \qquad (7.9)$$

Когда проекция силы на касательную к траектории постоянна, то есть $F_\tau = const$, получаем, что

$$A = F_\tau s \qquad (7.10)$$

7.2. Частные случаи вычисления мощности и работы

Работа силы, действующей на вращающееся тело

Силу, действующую на вращающееся тело (рис. 7.2), разложим на составляющие по естественным осям: $\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n + \vec{F}_b$.

Мощность имеет только $\vec{F}_\tau$. Мощность ее равна $N = \pm F_\tau v$, где $v = \omega h$.

Следовательно, $N = \pm F_\tau h\omega$, но $F_\tau h = m_z(\vec{F})$.

Таким образом, мощность силы равна произведению момента силы относительно оси вращения на угловую скорость тела:

$$N = \pm m_z(\vec{F})\omega.$$

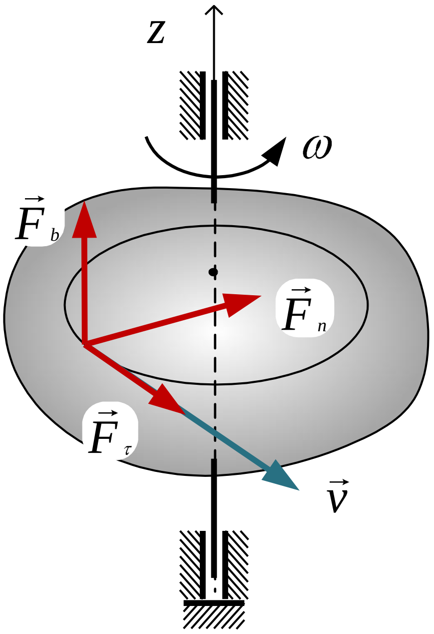

Рис. 7.2

Знак '+' соответствует случаю разгоняющей силы, а '-' — тормозящей силы.

Если на тело действует не сила, а пара сил с вращающим моментом M, то его мощность определяется аналогично:

$$N = \pm M\omega. \qquad (7.11)$$

Если учесть, что $\omega = d\varphi/dt$, то элементарная работа будет равна $dA = N\,dt = \pm M\,d\varphi$, а полная работа момента получится путем интегрирования:

$$A = \pm \int_0^{\varphi} M\,d\varphi. \qquad (7.12)$$

Откуда при $M = const$ получится, что $A = \pm M\varphi$.

Работа силы тяжести

Сила тяжести постоянна по величине и по направлению, поэтому для вычисления работы применим формулу (7.5): $A = \vec{F}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$.

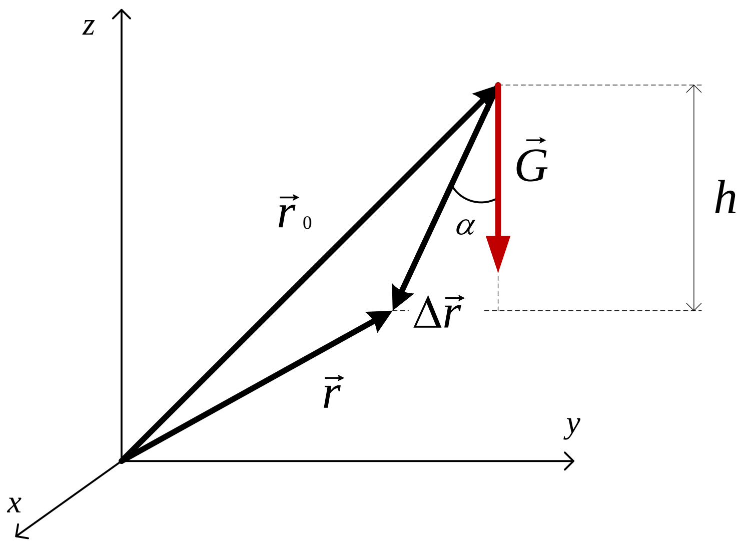

Рис. 7.3

Тогда $\qquad A = G\,|\Delta\vec{r}|\cos\alpha$

Поскольку $|\Delta\vec{r}|\cos\alpha = h$, то $\quad A_g = \pm Gh = \pm mgh$. $\qquad (7.13)$

Знак '+' соответствует опускающемуся, а '—' — его подъему.

Работа силы упругости

При растяжении (деформировании) в упругих элементах, таких как тросы, стержни или пружины, возникает сила, препятствующая деформации.

При действии на тело силы $\vec{P}$ в пружине (рис. 7.4) возникнет сила $\vec{F}$, которая в состоянии равновесия системы сил будет равна $\vec{F} = -\vec{P}$.

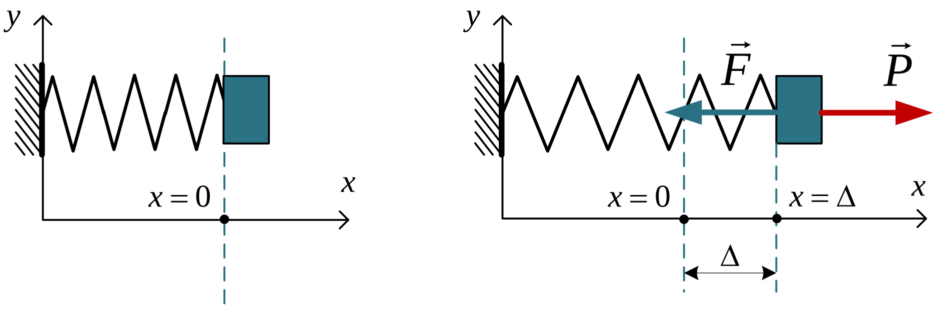

Рис. 7.4

Величина этой силы связана с деформацией законом Гука: $F_x = -C \cdot x,$

где x — деформация, отсчитываемая от нейтрального состояния,
F_x — проекция силы на ось деформируемого элемента,
C — коэффициент жесткости элемента, имеющий размерность Н/м.

Тогда работа силы будет равна

$$A_C = \int_0^\Delta F_x\,dx = -\int_0^\Delta Cx\,dx = -C\frac{x^2}{2}\Big|_0^\Delta, \quad \text{откуда} \quad A_C = -\frac{C}{2}\Delta^2. \quad (7.14)$$

7.3. Мощность и работа внутренних сил

Суммарная мощность внутренних сил может быть не равна нулю. Например, при выстреле из орудия $N = N_1 + N_2 > 0$, так как направления скоростей совпадают с направлением сил (см. рис. 7.5).

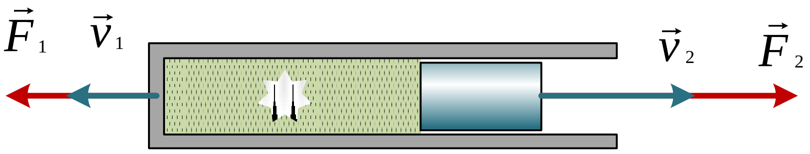

Рис. 7.5

Но можно указать ряд случаев, когда внутренние силы не работают, и использовать этот факт при решении задач.

1. Суммы мощностей и работ внутренних сил в абсолютно твердом теле равны нулю. Покажем это.

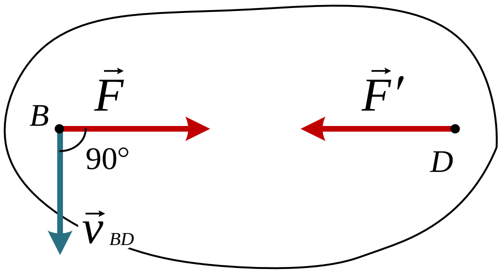

Рис. 7.6

Пусть в твердом теле действуют две силы $\vec{F}$ и $\overrightarrow{F'}$. По закону равенства действия и противодействия $\overrightarrow{F'} = -\vec{F}$. Их суммарная мощность равна

$$\overrightarrow{F'} \cdot \vec{v}_D + \overrightarrow{F} \cdot \vec{v}_B = -\vec{F} \cdot \vec{v}_D + \vec{F} \cdot \vec{v}_B = \vec{F} \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_D).$$

По теореме о сложении скоростей

$$\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{v}_{BD} \ \text{ или } \ \vec{v}_B - \vec{v}_D = \vec{v}_{BD},$$

где $\vec{v}_{BD}$ — скорость точки B во вращении относительно точки D. Скорость $\vec{v}_{BD}$ перпендикулярна силе $\vec{F}$. По этой причине $\vec{F} \cdot \vec{v}_{BD} = 0$. Поскольку внутренние силы всегда возникают попарно, то и общая сумма мощностей будет равна нулю.

2. Можно показать, что не работают внутренние силы в нерастяжимой, абсолютно гибкой нити.

<u>Механические системы, в которых суммарная мощность и работа внутренних сил равна нулю называют неизменяемыми.</u>

Признаки неизменяемых механических систем:

1. **Они должны состоять из абсолютно твердых тел и абсолютно гибких нерастяжимых нитей.**
2. **При взаимодействии тел системы должно отсутствовать взаимное проскальзывание.**

В примере с орудием нарушены оба признака: газ расширяется, снаряд проскальзывает по стволу.

Тема 8.
Теорема об изменении кинетической энергии

8.1. Кинетическая энергия

Кинетической энергией материальной точки называется величина, равная половине произведения массы точки на квадрат скорости:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \tag{8.1}$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий ее точек

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k {v_k}^2 \tag{8.2}$$

Кинетическая энергия твердого тела вычисляется по формуле аналогичной (8.2) с той разницей, что сумма заменяется интегралом:

$$T = \frac{1}{2} \int_v \ v^2 dm, \tag{8.3}$$

где m — масса бесконечно малого объема тела, а v — его скорость.

Примечания:

Кинетическая энергия не может быть отрицательной;

Кинетическая энергия (так же как и скорость) зависит от выбора системы отсчета.

Размерность кинетической энергии — джоуль:

$$[T] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = \text{Дж}.$$

Рассмотрим, как записывается кинетическая энергия при различных формах движения тела.

Поступательное движение тела

При поступательном движении скорости всех точек тела одинаковы и совпадают со скоростью центра масс. По этой причине (8.3) упрощается:

$$T = \frac{1}{2} v_C^2 \int_v \ dm = \frac{1}{2} m v_C^2 \tag{8.4}$$

Вращательное движение тела

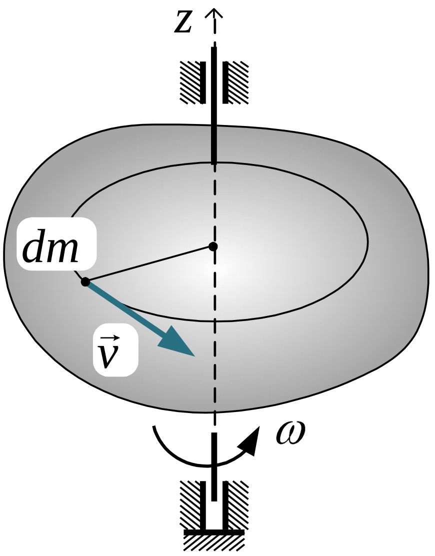

Рис. 8.1

Рассмотрим бесконечно малый элемент тела *dm*, находящийся на расстоянии *h* от оси вращения. Его скорость равна

$$v = \omega h.$$

Тогда

$$T = \frac{1}{2}\int_{v} v^2 dm = \frac{1}{2}\int_{v} \omega^2 h^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{v} h^2 dm.$$

Последний интеграл является моментом инерции. Окончательно получаем:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \tag{8.5}$$

Плоскопараллельное движение тела

При рассмотрении плоского движения тела применим теорему Кенига.

ТЕОРЕМА Кенига:

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии поступательной части движения и кинетической энергии системы в ее относительном движении относительно центра масс.

Рассмотрим материальное тело.

Кинетическая энергия поступательной части его движения равна $\frac{1}{2} m v_C^2$.

Относительное движение тела относительно центра масс является вращательным, поэтому его кинетическая энергия равна $\frac{1}{2} I_{zC} \omega^2$.

В результате в соответствии с теоремой Кенига получаем, что

$$T_{пл} = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2, \tag{8.6}$$

где v_C – скорость центра массы тела, а I_{zC} – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр массы тела перпендикулярно оси вращения.

8.2. Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

ТЕОРЕМА

Производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей всех действующих в системе сил:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=0}^{n} N_k \qquad (8.7)$$

или, после разделения мощностей внешних и внутренних сил:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=0}^{n} N_k^e + \sum_{k=0}^{n} N_k^i$$

Для неизменяемых систем, у которых внутренние силы не работают, получим:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=0}^{n} N_k^e$$

Доказательство

Уравнения движения одной материальной точки $m\vec{a} = \vec{F}$.

Умножим левую и правую части равенства на скорость точки:

$$m\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Преобразуем левую часть: $m\vec{a} \cdot \vec{v} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{dT}{dt}$.

В правой части равенства получили мощность: $\vec{F} \cdot \vec{v} = N$.

Таким образом, для материальной точки теорема справедлива:

$$\frac{dT}{dt} = N$$

Запишем такие равенства для всех точек материальной системы и сложим их.

Получим равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{dT_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} N_k$$

или $$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^{n} N_k$$

Теорема доказана.

Вывод

Величина мощности изменяет скорость изменения кинетической энергии.

8.3. Теорема об изменении кинетической энергии в интегральной форме

ТЕОРЕМА

Изменение кинетической энергии механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме работ всех действующих в системе сил:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k \qquad (8.8)$$

Или, выделяя отдельно работы внешних и внутренних сил:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i$$

где T — начальное, а T_0 — конечное значение кинетической энергии.

Для неизменяемых систем $\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0\right)$ можно записать:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e$$

Доказательство

Запишем теорему в дифференциальной форме и проинтегрируем левую и правую части равенства по времени за промежуток времени $(0,t)$:

$$\int_0^t \frac{dT}{dt} dt = \int_0^t \sum N_k dt.$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$\int_0^t \frac{dT}{dt} dt = T\Big|_0^t = T - T_0$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$\int_0^t \sum N_k dt = \sum A_k\,.$$

Приравнивая, получим $T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k$.

Теорема доказана.

Тема 9.
Потенциальное силовое поле

9.1. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

<u>Потенциальными или консервативными силами</u> называются силы, работа которых не зависит ни от траектории, по которой движется точка приложения силы, ни от характера этого движения, а определяется только начальным и конечным положением точки.

<u>Силовым полем</u> называется область пространства, в которой на помещенную туда материальную точку действует сила, однозначно определенная в любой момент времени по величине и по направлению:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t).$$

<u>Силовое поле называется стационарным</u>, если действующая в нем сила не зависит от времени:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z).$$

<u>Силовое поле называется однородным</u>, если действующая в нем сила постоянна как вектор:

$$\vec{F} = const.$$

<u>Силовое поле называется потенциальным или консервативным</u>, если для него существует функция координат $\Pi(x, y, z)$, такая, что проекции действующей силы могут быть вычислены через ее частные производные:

$$F_x = \partial\Pi/\partial x; \qquad F_y = \partial\Pi/\partial y; \qquad F_z = \partial\Pi/\partial z. \tag{9.1}$$

Эта функция называется **<u>потенциальной энергией.</u>**

Потенциальной энергией механической системы называется сумма потенциальных энергий ее точек:

$$\Pi = \sum_{k=1}^{n} \Pi_k.$$

Для исследования скалярных функций нескольких переменных используют векторную функцию, которую называют градиентом:

$$grad\,\Pi(x, y, z) = \frac{\partial\Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Pi}{\partial z}\vec{k}.$$

Так как $\quad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \quad$ то можно записать, что

$$\vec{F} = -grad\,\Pi(x, y, z). \tag{9.2}$$

Силовое поле является потенциальным при выполнении следующих условий:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}. \tag{9.3}$$

Примечания:

- Из (9.1) следует, что если $\Pi(x,y,z)$ потенциальная функция, то $\Pi(x,y,z)+C$ является потенциальной функцией того же самого силового поля.
- Из (9.3) следует, что однородное силовое поле всегда является потенциальным.

9.2. Работа и мощность потенциальной силы

В соответствии с (9.1) элементарная работа потенциальной силы равна:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz\right) = -d\Pi.$$

То есть для потенциальной силы элементарная работа представляет собой полный дифференциал некоторой функции координат:

$$dA = -d\Pi. \tag{9.4}$$

Из (9.4) следует, что мощность потенциальной силы равна:

$$N = -\,d\Pi/dt \tag{9.5}$$

Вычислим работу потенциальной силы конечном перемещении материальной точки по произвольной траектории из положения в другое положение:

$$A(M_0 \to M) = \int_{M_0}^{M} dA = -\int_{M_0}^{M} d\Pi = -\Pi|_{M_0}^{M}$$

или

$$A(M_0 \to M) = \Pi(x_0, y_0, z_0) - \Pi(x, y, z) \tag{9.6}$$

Работа потенциальной силы равна разности начального и конечного значений потенциальной энергии и не зависит от вида траектории и характера движения.

По этой причине работа потенциальной силы при перемещении по замкнутому контуру всегда равна нулю.

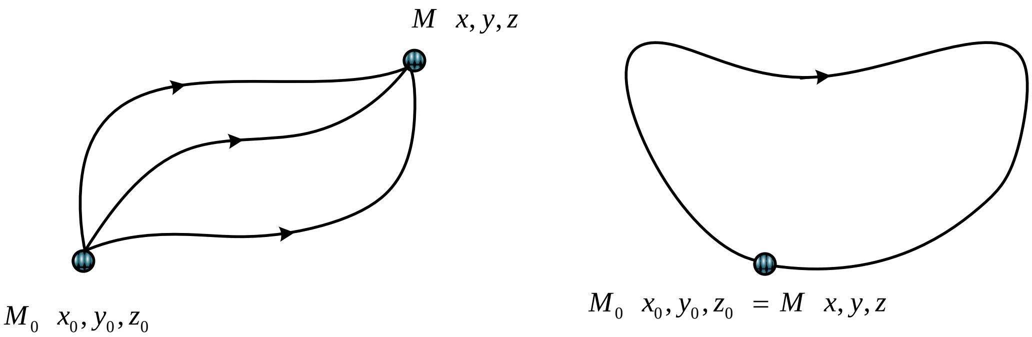

Рис. 9.1

Примеры:

- Потенциальным является поле силы тяжести. Потенциальная энергия в поле силы тяжести зависит только от положения материальной точки по вертикали (от координаты z) и равна $\Pi = mgz$.
- Потенциальная энергия системы материальных точек в поле силы тяжести зависит только от положения центра масс системы по вертикали (от координаты z_C) и равна $\Pi = mgz_C$.
- Потенциальным является поле силы упругости. Потенциальная энергия зависит только от смещения точки в направлении растягиваемого или сжимаемого элемента (координаты x) и равна $\Pi = cx^2/2$.

9.3. Консервативная механическая система

Консервативной называется механическая система, в которой полная механическая энергия сохраняется постоянной:

Полная механическая энергия системы равняется сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + \Pi.$$

Рассмотрим материальную точку M, на которую действуют только потенциальные силы.

При перемещении из точки M_0 в точку M суммарная работа сил будет равна разности начального и конечного значений потенциальной энергии:

$$\sum A_k = \Pi_0 - \Pi.$$

В то же время суммарная работа сил равна изменению кинетической энергии (теорема об изменении кинетической энергии в интегральной форме):

$$\sum A_k = T - T_0.$$

Правые части этих равенств равны, то есть

$$\Pi_0 - \Pi = T - T_0 \quad \text{или} \quad T_0 + \Pi_0 = T + \Pi\,,$$

откуда следует, что

$$E_0 = E \;\; \text{или} \;\; E = const.$$

Вывод:

- Если все действующие в системе силы потенциальны, то эта система является консервативной.
- Если в системе действуют непотенциальные силы, то полная механическая энергия сохраняться не будет, часть ее будет переходить в другие формы энергии (тепловую и т.п.) и рассеиваться. Такие системы называются неконсервативными или диссипативными (***dissipation*** **—** рассеивание).

Тема 10.
Введение в аналитическую механику

10.1. Классификация связей

Аналитическая механика позволяет описать поведение системы минимальным количеством уравнений, не вводя в решение неизвестные реакции связей.
Напомним, что связями называются ограничения, наложенные на положения и скорости точек механической системы.
Математически связи выражаются в виде уравнений или неравенств, содержащих координаты и скорости точек, а также время.

Связи могут быть

- интегрируемыми (голономными),
- неинтегрируемыми (неголономными).

В уравнения голономных связей не входят производные от координат (скорости), а в уравнения неголономных связей − входят.

Связи могут быть

- стационарными,
- нестационарными.

Стационарные связи выражаются уравнениями или неравенствами, в которые не входит время. Нестационарным соответствуют уравнения или неравенства, содержащие время.

Связи могут быть

- односторонними (неудерживающими),
- двухсторонними (удерживающими).

Удерживающие связи описываются уравнениями, а неудерживающие − неравенствами.

Приведем примеры математического описания связей.

Неголономная удерживающая стационарная связь:

$$f\left(x_1, y_1, z_1, \ldots.\dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n\right) = 0.$$

Голономная нестационарная неудерживающая связь:

$$f\left(x_1, y_1, z_1, \ldots. x_n, y_n, z_n, t\right) \leq 0.$$

Примеры связей (материальная точка):

1. Точка движется по поверхности сферы. Уравнение связи:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Связь голономная стационарная удерживающая.

2. Точка движется внутри бесконечного цилиндра. Уравнение связи:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2.$$

Связь голономная стационарная неудерживающая.

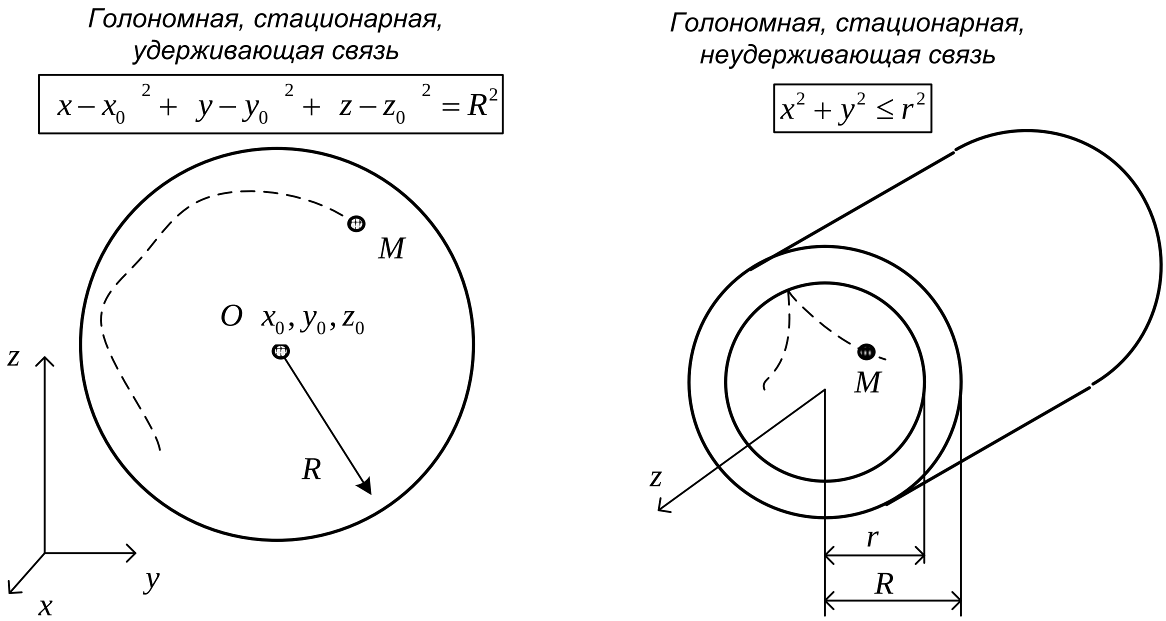

Рис. 10.1.

Примеры связей (механическая система):

3. Две движущиеся точки связаны стержнем. Уравнение связи:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = L^2.$$

Связь голономная стационарная удерживающая.

4. Две движущиеся по плоскости точки (корабли) связаны нитью, длина которой увеличивается каждую секунду на 0.5 метра. Уравнение связи:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq (L_0 + 0.5t)^2.$$

Связь голономная нестационарная неудерживающая.

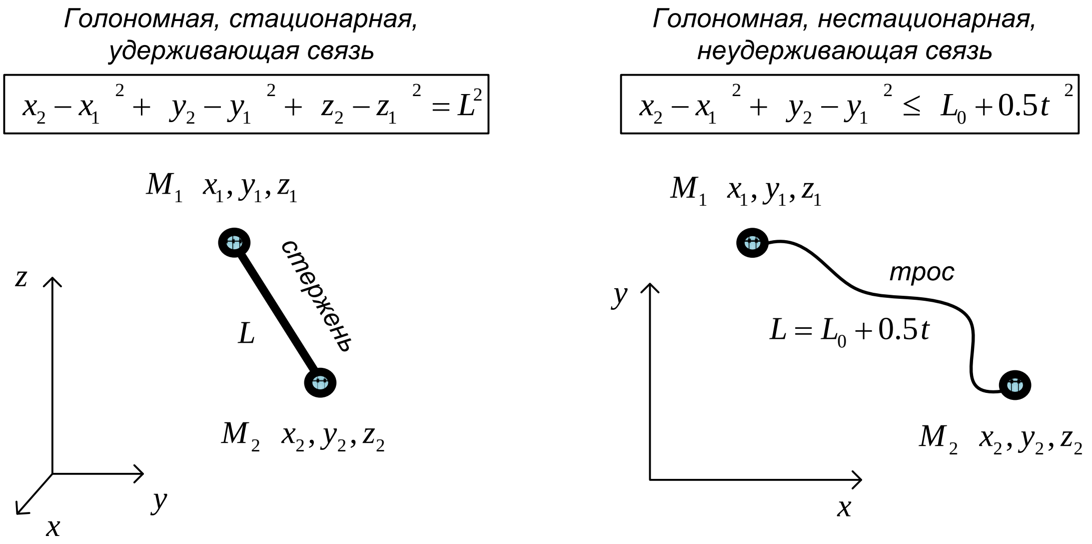

Рис. 10.2.

10.2. Возможные перемещения

<u>Возможным перемещением материальной точки</u> называется воображаемое бесконечно малое перемещение $\delta\vec{r}$, допускаемое в данный момент наложенными на нее связями.

<u>Возможным перемещением механической системы</u> называется любая совокупность возможных перемещений точек данной системы, допускаемая всеми наложенными на нее связями.

Рассмотрим случай движения одной материальной точки, на которую наложена одна голономная стационарная удерживающая связь:

$$f(x, y, z) = 0. \qquad (10.1)$$

Уравнение связи представляет собой уравнение поверхности, по которой движется точка. Точка движется по некоторой траектории, лежащей на этой поверхности, и таких траекторий может быть бесконечно много.

Пусть в некоторый момент времени она находится в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Любое бесконечно малое перемещение из точки M_0 будет лежать в касательной плоскости Π (рис. 10.3).

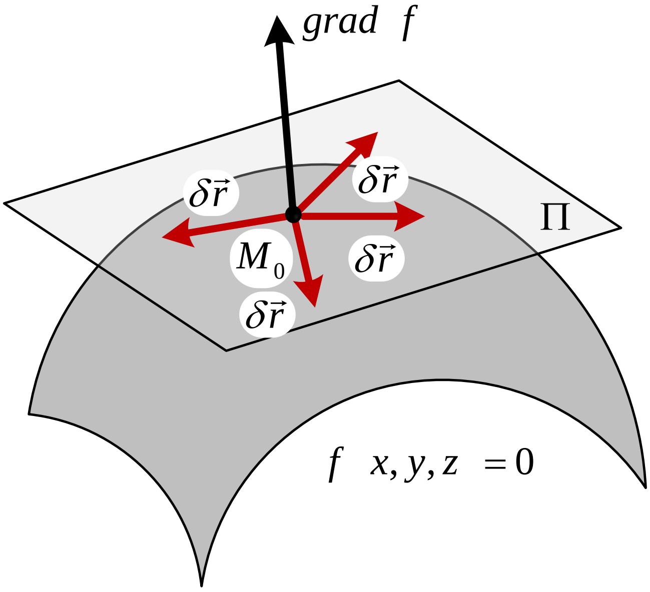

Рис. 10.3

Обозначим любое возможное перемещение точки как

$$\delta\vec{r} = \delta x\,\vec{\imath} + \delta y\vec{\jmath} + \delta z\,\vec{k}$$

и будем понимать его как всю совокупность (δ — знак вариации) бесконечно малых векторов перемещений, лежащих в касательной плоскости.

Градиент функции $f(x, y, z)$ в точке направлен по нормали к поверхности и дается формулой

$$\left(\overrightarrow{grad}\,f\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \vec{\imath} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \vec{\jmath} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \vec{k}$$

поскольку возможные перемещения перпендикулярны к градиенту, можно записать, что

$$\left(\overrightarrow{grad}\,f\right)_0 \cdot \delta\vec{r} = 0$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z = 0\,. \qquad (10.2)$$

Уравнение (10.2) определяет возможное перемещение (совокупность векторов).

Итак, для одной точки и одной связи мы получили одно уравнение (10.2), включающее в себя три неизвестных величины: $\delta x, \delta y, \delta z$.

Векторов $\delta\vec{r}$, удовлетворяющих такой системе, будет бесконечно много.

Для системы из n материальных точек, на которую наложено m связей, мы, аналогично рассуждая, получим m таких уравнений, в которые будет входить $3n$ неизвестных величин (по три для каждой материальной точки).

10.3. Обобщенные координаты

Для системы из n материальных точек, на которую наложено m связей мы получим m уравнений, в которые будет входить $3n$ неизвестных вариаций:

$$\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \quad \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2 \quad \dots, \quad \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n.$$

Таким образом, независимых вариаций будет только

$$s = (3n - m).$$

Число независимых между собой вариаций координат точек механической системы s называется ее <u>числом степеней свободы</u>.

Для того, чтобы в процессе решения задачи избавиться от зависимых координат, а заодно и от уравнений связей, вводят обобщенные координаты.

<u>Обобщенными координатами механической системы</u> называются независимые (между собой) параметры, однозначно определяющие положение механической системы.

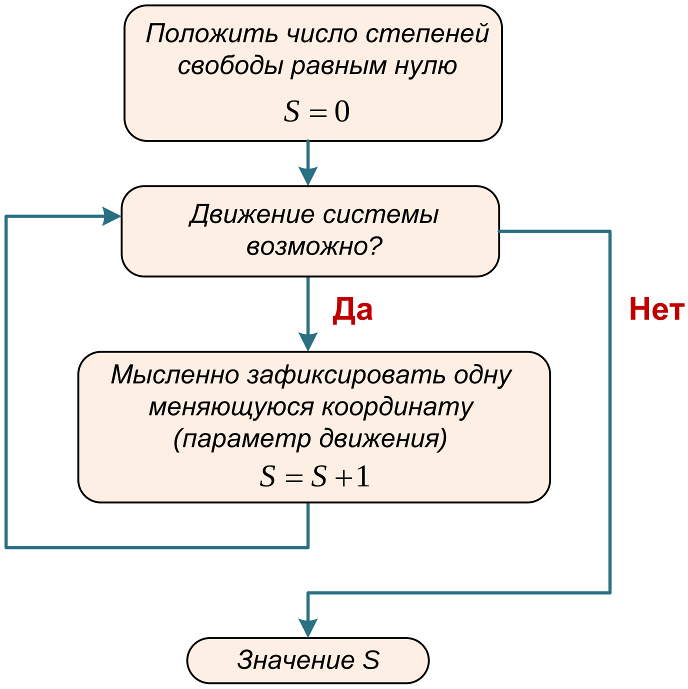

Рис. 10.4

Число обобщенных координат для голономной системы равно числу ее степеней свободы. Обобщенные координаты обозначаются:

$$q_1, q_2, \dots, q_s.$$

Это могут быть линейные перемещения, углы поворота и т.п.

В этом случае число степеней свободы можно найти по схеме (рис.10.4).

Минимальное количество независимых параметров, которые следует зафиксировать для прекращения возможности движения механической системы, равняется числу ее степеней свободы (s).

Производные по времени от обобщенных координат называются обобщенными скоростями:

$$\dot{q}_j = dq_j/dt\,, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Через $\boldsymbol{s}$ обобщенных координат и время могут быть выражены радиус-векторы всех точек системы или их координаты:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k\,(q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_s,\ t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \qquad (10.3)$$

или

$$\begin{cases} x_k = x_k\,(q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_s,\ t), \\ y_k = y_k\,(q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_s,\ t), \\ z_k = z_k\,(q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_s,\ t). \end{cases}$$

Пользуясь равенствами (10.3), вариации радиус-векторов (и координат) выразить через вариации обобщенных координат:

$$\delta\vec{r}_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j, \quad k=1,\ 2,\ \dots,\ n. \qquad (10.4)$$

При использовании обобщенных координат уравнения связей выполняются автоматически, что сильно упрощает решение задач.

10.4. Возможная работа и обобщенные силы

Возможной работой силы называется ее работа на возможном перемещении точки ее приложения:

$$\delta A = \vec{F}\cdot\delta\vec{r} \qquad (10.5)$$

Возможная работа для системы *n* сил вычисляются путем суммирования соответствующих работ и мощностей:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k\cdot\delta\vec{r}_k, \qquad (10.6)$$

Используя соотношение (10.4) для возможных перемещений, преобразуем выражение возможной работы:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k\cdot\delta\vec{r}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k\cdot\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\cdot\delta q_j\right) = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\right)\delta q_j.$$

Выражение, стоящее в скобках

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}, \tag{10.7}$$

называется **обобщенной силой, соответствующей обобщенной координате** q_j.

Используя обобщенные силы можно записать выражение возможной работы:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j \tag{10.8}$$

Для системы с одной степенью свободы выражение примет следующий вид:

$$\delta A = Q\ \delta q \tag{10.9}$$

Обобщенная сила не обязательно является физической силой.

Ее размерность зависит от размерности обобщенной координаты:

$$[Q] = [A]/[q] = \text{Н} \cdot \text{м}/[q] \qquad \text{(см. таблицу).}$$

Обобщенная координата		**Обобщенная сила**	
Чем является	Размерность	Чем является	Размерность
Линейная координата	м	Физическая сила	кН
Угол поворота	рад	Вращающий момент (пара)	кНм

Способы вычисления обобщенных сил:

1. **Через возможную работу.**
   Придавая системе такое возможное перемещение, при котором меняется только одна обобщенная координата q_j, а остальные фиксируются, определим соответствующую возможную работу
   $$\delta A_j = Q_j\ \delta \dot{q}_j, \qquad \text{откуда} \qquad Q_j = \delta A_j / \delta \dot{q}_j.$$

2. **Через потенциальную энергию.**
   В случае, когда силы системы являются консервативными, обобщенные силы могут быть выражены через потенциальную энергию.
   Обобщенная потенциальная сила равна частной производной от потенциальной энергии по обобщенной координате, взятой с противоположным знаком:
   $$Q_j = -\,\partial \Pi / \partial q_j.$$

Эту операцию следует повторить для всех обобщенных координат.

10.5. Идеальные связи

Связи, наложенные на систему, называются <u>идеальными</u>, если

сумма работ реакций этих связей на любых возможных перемещениях точек их приложения равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k \delta \vec{r}_k = 0.$$

Для одной материальной точки и одной связи это равенство примет вид:

$$\vec{R}\, \delta\vec{r} = 0.$$

Могут иметь место два варианта:

1. Случай, когда $\delta\vec{r} \neq 0$. В этом случае скалярное произведение будет равно нулю, когда реакция связи направлена перпендикулярно к возможному перемещению, то есть

   $$\vec{R} \perp \delta\vec{r} = 0.$$

   При движении тела по некоторой поверхности это возможно только при отсутствии сил трения.

2. Случай, когда $\delta\vec{r} = 0$. Это возможно, когда точка приложения реакции неподвижна или является мгновенным центром скоростей (МЦС).

Тема 11.
Принцип Лагранжа

11.1. Принцип возможных перемещений

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) ─ французский математик и механик. Основные работы посвящены теории дифференциальных уравнений, математическому анализу, геометрии. В 1788 издал книгу «Аналитическая механика», в которой предложил новые мощные методы решения задач динамики.

Пусть система находится в равновесии.

Будем считать, что наложенные на систему связи являются идеальными голономными стационарными и удерживающими.

Лагранж показал, что в этом случае справедливым является положение, известное под названием.

Принцип возможных перемещений

Для того чтобы механическая система находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы возможная работа всех активных сил на любых возможных перемещениях была равна нулю:

$$\delta A = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = 0 \qquad (11.1)$$

Уравнение (11.1) часто **общим уравнением статики**, поскольку из него могут быть получены все уравнения равновесия.

Примечание:

Для простых механизмов, преобразующих движение при отсутствии сил трения из принципа Лагранжа вытекает известное **золотое правило механики**:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{v_2}{v_1}.$$

11.2. Принцип Лагранжа в обобщенных силах

Согласно **принципу возможных перемещений**, для равновесия механической системы возможная работа всех активных сил на любых возможных перемещениях (при нулевых начальных скоростях) должна равняться нулю.

По формуле (10.8) для механических систем имеем

$$\sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = 0$$

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы (s = 1).

Получим: $Q_1 \delta q_1 = 0$. Далее возможны два случая:

1. Если $\delta q_1 = 0$. В этом случае обобщенная координата имеет стационарное значение (минимум или максимум).
2. Если $\delta q_1 \neq 0$. В этом случае должна быть равна нулю обобщенная сила.

Рассмотрим теперь механическую систему с s степенями свободы (s > 1).

Будем считать, что в текущем состоянии системы обобщенные координаты не имеют стационарных значений.

Обобщенные координаты не зависят друг от друга. По этой причине каждую из них можно менять, не затрагивая при этом остальные.

Выберем обобщенную координату с номером $\boldsymbol{k}$, а все остальные координаты зафиксируем. В этом случае равенство

$$\sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = 0$$

запишется как $Q_k \delta q_k = 0$, откуда следует, что $Q_k = 0$.

Повторяя это рассуждение для всех остальных координат, получим следующий принцип.

Принцип Лагранжа в обобщенных силах

В положении равновесия механической системы все обобщенные силы равны нулю:

$$Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \tag{11.2}$$

Равенства (11.2) в обобщенном виде содержат в себе все уравнения равновесия статики как для проекций сил, так и для моментов сил.

Принцип Лагранжа для консервативных механических систем

Если механическая система является консервативной (полная энергия в процессе движения не рассеивается, оставаясь постоянной), принцип Лагранжа можно сформулировать через потенциальную энергию.

В положении равновесия консервативной механической системы потенциальная энергия имеет стационарное значение:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \tag{11.3}$$

Обычно это стационарное значение является ***<u>минимальным значением</u>*** потенциальной энергии.

Тема 12.
Принцип д'Аламбера (d'Alembert)

12.1. Принцип д'Аламбера для материальной точки

Жан Лерон Даламбер (d'Alembert) (1717-1783) ─ математик, философ, астроном, почетный член Петербургской АН. Основные работы посвящены гидродинамике, математической физике, теории пределов и рядов. Автор методов кинетостатики.

Принцип д'Аламбера применяется для определения реакций связей при заданном законе движения, то есть для решения **первой задачи динамики**.

Рассмотрим движение несвободной материальной точки. В любой момент времени ее движение должно подчиняться основному уравнению динамики

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{N},$$

где m ─ масса точки, $\vec{a}$ ─ ускорение точки, $\vec{F}^a$ ─ активная сила,

$\vec{N}$ ─ динамическая реакция связи.

Введем понятие силы инерции:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}, \qquad \Phi = ma \qquad (12.1)$$

Сила инерции точки **равна произведению массы точки на ее ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению.**

Тогда уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\vec{F}^a + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0. \qquad (12.2)$$

Это равенство выражает принцип д'Аламбера для точки:

Если в любой момент времени к движущейся материальной точке приложить силу инерции, то вместе с активной силой и реакцией связи она составит уравновешенную систему сил.

Примечание:

Фактически, применение принципа д'Аламбера означает, что задача решается в инерциальной системе отсчета связанной с точкой, а в этой системе отсчета точка является покоящимся телом.

В этом случае уравнения динамики принимают вид уравнений равновесия, из которых находятся динамические реакции связей.

На применении принципа д'Аламбера основан самостоятельный раздел динамики, который называют **кинетостатикой**.

Движение материальной точки по траектории

В этом случае ускорение точки (рис. 12.1) складывается из касательного и нормального ускорений $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, поэтому сила инерции также будет представлена в виде суммы касательной и нормальной сил инерции:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_\tau + \vec{\Phi}_n$$

где $$\Phi_\tau = ma_\tau = m\frac{dv_\tau}{dt}, \qquad \Phi_n = ma_n = m\frac{v^2}{\rho}.$$

Движение точки вращающегося тела

Ускорения точки вращающегося тела (рис. 12.2) называют вращательным $\vec{a}_\tau$ и центростремительным $\vec{a}_n$. Им соответствуют вращательная сила инерции и центростремительная сила инерции:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_\tau + \vec{\Phi}_n$$

где $$\Phi_\tau = ma_\tau = m\varepsilon r, \qquad \Phi_n = ma_n = m\omega^2 r.$$

Сложное движение точки

При сложном движении абсолютное ускорение складывается из относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n + \vec{a}_{cor}$$

Им соответствуют относительная, переносная и кориолисова силы инерции:

$$\vec{\Phi}_r = -m\vec{a}_r, \qquad \vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e, \qquad \vec{\Phi}_{cor} = -m\vec{a}_{cor}$$

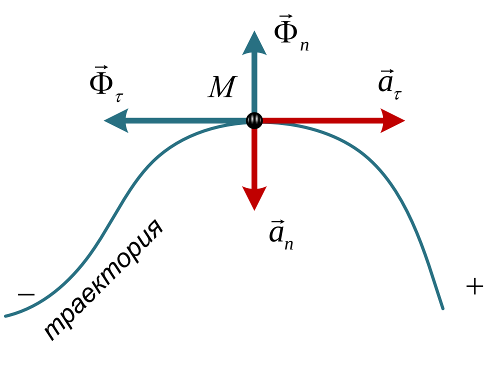

Рис. 12.1

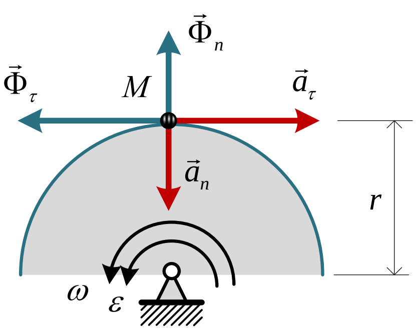

Рис. 12.2

12.2. Принцип д'Аламбера для механических систем

Принцип д'Аламбера для механической системы (в записи для сил)

При движении механической системы сумма главных моментов активных сил, реакций связей и сил инерции всегда равна нулю.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n точек. Для каждой точки запишем выражение принципа д'Аламбера:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{12.3}$$

где $\vec{\Phi}_k = -m_k \vec{a}_k$ — сила инерции k-й точки.

Просуммируем эти уравнения по всем точкам и получим уравнение

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0, \tag{12.4}$$

в левой части которого суммируются три главных вектора:

- главный вектор активных сил: $\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$,
- главный вектор реакций связей: $\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k$,
- главный вектор сил инерции: $\vec{\Phi} = \sum_{k=1}^{n} \vec{\Phi}_k$.

Принцип д'Аламбера для механической системы (в записи для моментов)

При движении механической системы сумма главных векторов активных сил, реакций связей и сил инерции относительно любой точки пространства всегда равна нулю.

Выберем в пространстве произвольный центр O и проведем из него к каждой материальной точке системы радиус вектор $\boldsymbol{\vec{r}_k}$.

Векторно умножим на него каждое слагаемое в уравнении (12.3). Получим:

$$\vec{F}_k \times \vec{r}_k + \vec{R}_k \times \vec{r}_k + \vec{\Phi}_k \times \vec{r}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

или $$\vec{M}_0(\vec{F}_k) + \vec{M}_0(\vec{R}_k) + \vec{M}_0(\vec{\Phi}_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Суммируя полученные уравнения по всем материальным точкам, получим:

$$\vec{M}_0^F + \vec{M}_0^R + \vec{M}_0^\Phi = 0, \tag{12.5}$$

где

- $\vec{M}_0^F = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k)$ – главный момент активных сил,
- $\vec{M}_0^R = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{R}_k)$ – главный момент реакций связей,
- $\vec{M}_0^\Phi = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{\Phi}_k)$ – главный момент сил инерции.

Векторные уравнения принципа д'Аламбера могут быть записаны в скалярном виде, например в проекциях на координатные оси:

$$\begin{cases} \begin{cases} F_x + R_x + \Phi_x = 0, \\ F_y + R_y + \Phi_y = 0, \\ F_z + R_z + \Phi_z = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} M_x^F + M_x^R + M_x^\Phi = 0, \\ M_y^F + M_y^R + M_y^\Phi = 0, \\ M_z^F + M_z^R + M_z^\Phi = 0. \end{cases} \end{cases} \tag{12.6}$$

Примечание:

При составлении уравнений (12.4 ÷ 12.6) внутренние силы не должны приниматься во внимание, поскольку для них главный вектор и главный момент равны нулю.

Если механическая система находится в равновесии, то силы инерции отсутствуют и уравнения принципа д'Аламбера превращаются в обычные уравнения равновесия.

12.3. Главный вектор и главный момент сил инерции

Чтобы при описании движения использовать принцип д'Аламбера, нужно уметь вычислять главный вектор и главный момент сил инерции.

Главный вектор сил инерции

Считая массы точек системы постоянными, преобразуем выражение для главного вектора сил инерции:

$$\vec{\Phi} = \sum_{k=1}^{n} \vec{\Phi}_k = -\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = -\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{d(m_k \vec{v}_k)}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k$$

Окончательно получаем

$$\vec{\Phi} = -\frac{d\vec{Q}}{dt} \tag{12.7}$$

<u>Главный вектор сил инерции</u> механической системы равен производной по времени от количества движения системы, взятой с обратным знаком.

Если это соотношение подставить в (12.4), то принцип д'Аламбера примет вид теоремы об изменении количества движения:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$$

Если учесть, что количество движения системы равно $\vec{Q} = m\vec{v}_C$, то получаем

$$\vec{\Phi} = -\frac{d}{dt}(m\vec{v}_C) = -m\frac{d\vec{v}_C}{dt},$$

или

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C \tag{12.8}$$

<u>Главный вектор сил инерции</u> определяется, как произведение массы системы и ускорения центра масс и направлен против этого ускорения.

Если это соотношение подставить в (12.4), то принцип д'Аламбера примет вид теоремы о движении центра масс:

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$$

Главный момент сил инерции

Главный момент сил инерции равен:

$$\vec{M}_O^\Phi = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O\left(\vec{\Phi}_k\right) = \sum \vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k = -\sum \vec{r}_k \times m_k\vec{a}_k = -\sum \vec{r}_k \times m_k\frac{\overrightarrow{dv_k}}{d}$$

Можно показать, что последняя сумма равна производной от кинетического момента системы, то есть:

$$\vec{M}_O^\Phi = -\frac{d\vec{K}_O}{dt} \tag{12.9}$$

<u>Главный момент сил инерции</u> механической системы равен производной по времени от кинетического момента системы, взятой с обратным знаком.

В проекциях на координатные оси равенство (12.9) принимает вид:

$$M_x^\Phi = -\frac{dK_x}{dt}, \quad M_y^\Phi = -\frac{dK_y}{dt}, \quad M_z^\Phi = -\frac{dK_z}{dt} \tag{12.10}$$

При подстановке этого соотношения в (12.5) принцип д'Аламбера примет форму теоремы об изменении кинетического момента:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^e\right).$$

12.4. Главный момент сил инерции твердого тела

Вращение тела относительно неподвижной оси

Кинетический момент тела относительно оси вращения равен $K_z = J_z\varepsilon$.

Подставляя эту формулу в (12.10), получим, что

<u>главный момент сил инерции твердого тела</u> относительно оси вращения равен по модулю произведению осевого момента инерции на угловое ускорение:

$$M_z^{\Phi} = -J_z\frac{d\omega}{dt} = -J_z\varepsilon \qquad (12.11)$$

Знак «минус» в (12.11) означает, что момент сил инерции следует направить противоположно угловому ускорению (рис. 12.3).

Если (12.11) подставить в последнее уравнение системы (12.6)

$$M_z^F + M_z^R + M_z^{\Phi} = 0,$$

то оно примет вид дифференциального уравнения вращательного движения:

$$J_z\varepsilon = \sum M_z(\vec{F}_k^e).$$

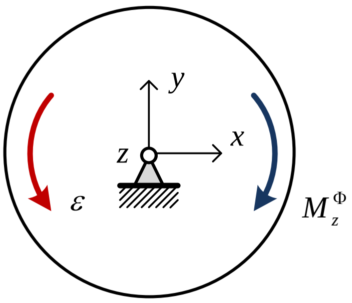

Рис. 12.3

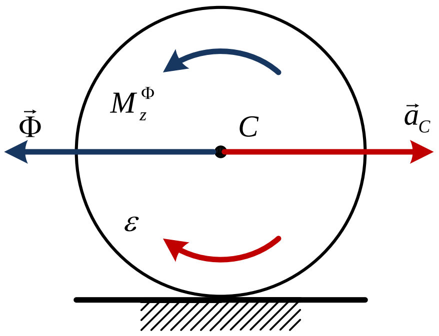

Рис. 12.4

Плоскопараллельное движение твердого тела

При описании плоского движения следует перейти к системе отсчета, связанной с центром масс, в которой теорема об изменении кинетического момента записывается так же, как и в неподвижной системе отсчета.

В этом случае формулы (12.9) и (12.11) сохранят свой вид:

$$\vec{M}_C^{\Phi} = -\frac{d\vec{K}_O}{dt}, \qquad M_{zC}^{\Phi} = -J_{zC}\varepsilon.$$

Система сил инерции при плоскопараллельном движении будет представлена и главным вектором и главным моментом сил инерции относительно оси, проходящей через центр масс (рис. 12.4).

12.5. Применение принципа д'Аламбера к решению задач динамики

Применение принципа д'Аламбера к решению задач состоит в следующем:

К действующим на механическую систему силам следует добавить силы инерции, после чего уравнения движения можно составлять как обычные уравнения статики.

На этом подходе основан раздел динамики, называемый **кинетостатикой.**

ПРИМЕР

Грузоподъемная установка состоит из барабана массой m_2 с осевым моментом инерции J и радиусом r, невесомого и нерастяжимого троса и груза массой m_1. К барабану приложен вращающий момент M.

Определить ускорение груза $\boldsymbol{a}$ и составляющие реакции оси барабана X_0 и Y_0.

Решение

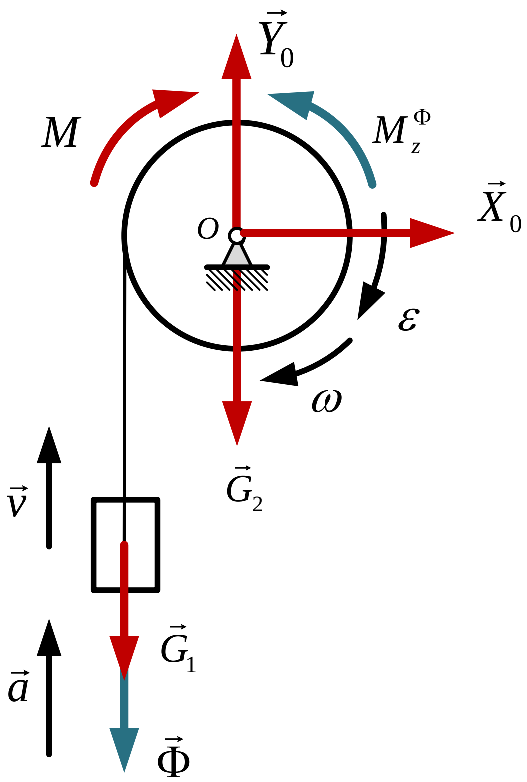

Рис. 12.5

К телам системы приложены активные силы: сила тяжести груза $\vec{G}_1 = m_1\vec{g}$
и сила тяжести барабана $\vec{G}_2 = m_2\vec{g}$.
и составляющие реакции оси барабана: $\vec{X}_O$ и $\vec{Y}_O$.
Добавим к ним силы инерции:

Силу инерции груза $\Phi = -m_1 a$, направив ее противоположно ускорению за $\vec{a}$, и пару с моментом, который равен главному моменту сил инерции барабана $M_z^\Phi = -J\varepsilon$, направив эту пару противоположно угловому ускорению барабана ε.

При таком направлении сил инерции знаки окажутся учтенными, и далее надо будет оперировать только с модулями этих величин: $\Phi = m_1 a$ и $\left|M_z^\Phi\right| = J\varepsilon$.

Теперь, в соответствии с принципом д'Аламбера, уравнения движения можно составлять как обычные уравнения статики для данной плоской системы сил:

$$\begin{cases} \sum_k F_{kx} = 0 \\ \sum_k F_{ky} = 0 \\ \sum_k M_O(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \quad \text{и далее} \quad \begin{cases} X_0 = 0 \\ Y_0 - G_1 - G_2 - \Phi = 0 \\ M - \left|M_z^\Phi\right| - G_1 r - \Phi r = 0. \end{cases}$$

Теперь подставим в эти уравнения выражения сил инерции:

$$\Phi = m_1 a \quad \text{и} \quad \left|M_z^\Phi\right| = J\varepsilon,$$

выражения сил тяжести:

$$\vec{G}_1 = m_1\vec{g} \quad \text{и} \quad \vec{G}_2 = m_2\vec{g},$$

и учтем, что $a = \varepsilon r$.

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ Y_0 - m_1 g - m_2 g - m_1 a = 0 \\ M - J\frac{a}{r} - m_1 g\, r - m_1 a\, r = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим величину ускорения:

$$a = \left(M\frac{1}{r} - mg\right) / \left(m + J\frac{1}{r^2}\right),$$

и вертикальную и горизонтальную составляющие реакции оси барабана:

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = m_1 g + m_2 g + m_1 a.$$

Тема 13.
Уравнения Лагранжа второго рода

13.1. Принцип д'Аламбера – Лагранжа

Принцип д'Аламбера ─ Лагранжа объединяет в себе принцип д'Аламбера и принцип Лагранжа.

Рассмотрим механическую систему из n материальных точек, на которую наложены m идеальных голономных стационарных удерживающих связей.

Для каждой точки запишем выражение принципа д'Аламбера:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + \overrightarrow{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Придадим точкам системы возможные перемещения $\delta\vec{r}_k$. Каждое из приведенных уравнений умножим на соответствующее возможное перемещение и просуммируем уравнения:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k\, \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k\, \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\Phi}_k \delta\vec{r}_k = 0.$$

Учтем, что $\sum \vec{R}_k\, \delta\vec{r}_k = 0,$ поскольку все связи идеальны.

Получим уравнение, которые называют **общим уравнением динамики**:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\vec{F}_k + \overrightarrow{\Phi}_k\right) \delta\vec{r}_k = 0 \tag{13.1}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\vec{F}_k - m\vec{a}_k\right) \delta\vec{r}_k = 0. \tag{13.2}$$

Принцип д'Аламбера ─ Лагранжа

При движении механической системы сумма возможных работ активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях равна нулю.

Если система находится в равновесии и силы инерции отсутствуют, то уравнения (13.1) принимают вид общего уравнения статики (11.1):

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \delta\vec{r}_k = 0.$$

Таким образом, принцип возможных перемещений Лагранжа является частным случаем принципа д'Аламбера ─ Лагранжа.

Если в уравнении (13.1) вариации координат выразить через вариации обобщенных координат, используя для этого формулу (10.4):

$$\delta\vec{r}_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j, \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

получим следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}+\sum_{k=1}^{n}\vec{\Phi}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\right)\delta q_j=0,$$

в котором первое слагаемое в скобке является обобщенной силой, соответствующей j-й обобщенной координате:

$$Q_j=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j},$$

а второе слагаемое, равное

$$Q_j^{\Phi}=\sum_{k=1}^{n}\vec{\Phi}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j} \qquad (13.3)$$

назовем обобщенной силой инерции для j-й обобщенной координаты.

При этих обозначениях уравнение принципа д'Аламбера-Лагранжа примет вид:

$$\sum_{j=1}^{s}\left(Q_j+Q_j^{\Phi}\right)\delta q_j=0,\quad j=1,2,\dots,s. \qquad (13.4)$$

Поскольку обобщенные координаты не зависят друг от друга, каждую из них можно менять, не меняя при этом остальных.

Зафиксировав все обобщенные координаты, кроме одной q_j, получим уравнение

$$Q_j+Q_j^{\Phi}=0.$$

Общее число уравнений, которые таким образом можно сформировать, равно s. Вместе они представляют выражение принципа д'Аламбера-Лагранжа в обобщенных силах:

$$Q_j+Q_j^{\Phi}=0,\quad j=1,2,\dots,s. \qquad (13.5)$$

Принцип д'Аламбера ─ Лагранжа в обобщенных силах

При движении механической системы сумма обобщенной активной силы и обобщенной силы инерции по каждой обобщенной координате равна нулю.

Примечание:

Если система находится в равновесии, то силы инерции отсутствуют и уравнение (13.5) приобретает вид принципа Лагранжа в обобщенных силах (11.2): $Q_j=0,\ j=1,2,\dots,s.$

То есть, принцип Лагранжа является частным случаем принципа д'Аламбера-Лагранжа.

13.2. Уравнения Лагранжа второго рода

Лагранжем были предложены две формулировки уравнений для описания движения механических систем. Уравнения Лагранжа первого рода мы не рассматриваем, поскольку они не получили широкого распространения.

Уравнения Лагранжа второго рода, наоборот, получили широчайшее применение, поскольку обладают целым рядом достоинств:

1. Число этих уравнений минимально и равно числу степеней свободы s;
2. Они не содержат реакций идеальных связей;
3. Они находят применение не только в механике, но и в других науках.

Для формулировки этих уравнений Лагранж и Эйлер выразили обобщенные силы инерции через кинетическую энергию системы, получив выражение:

$$Q_j^{\Phi} = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right), \quad j = 1,2,\dots,s.$$

После подстановки этих уравнений в уравнения принципа Лагранжа-Даламбера (13.5), получаем уравнения, которые называют

уравнениями Лагранжа II-го рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1,2,\dots,s. \tag{13.6}$$

После подстановки в них выражения кинетической энергии $T = T(q_1,\dots,q_s,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_s)$ они приобретают вид обыкновенных дифференциальных уравнений II-го рода, в которых неизвестными являются обобщенные координаты.

13.3. Уравнения Лагранжа второго рода для консервативных механических систем

Если все действующие на механическую систему силы являются потенциальными, то обобщенные силы определяются формулой

$$Q_j^{\boldsymbol{\Pi}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1,2,\dots,s.$$

Тогда уравнение Лагранжа II-го рода принимает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1,2,\dots,s.$$

Если учесть, что потенциальная энергия системы не зависит от скоростей, то есть $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$, то полученные уравнения можно переписать так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\mathrm{T}-\Pi)}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial(T-\Pi)}{\partial q_j}=0,\quad j=1,2,\dots,s.$$

Ведем обозначение

$$L=T-\Pi, \tag{13.7}$$

И вновь запишем уравнения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0,\quad j=1,2,\dots,s. \tag{13.8}$$

Эти уравнения называются уравнениями Лагранжа второго рода для консервативных систем.

Функция $L=T-\Pi$ называется функцией Лагранжа или кинетическим потенциалом.

Тема 14.
Удар

14.1. Ударный импульс

Явление, при котором скорости точек тела за малый промежуток времени меняются на конечную величину, называется ударом.

Ударный импульс

$$\vec{S}_{уд} = \int_0^t \vec{F}_{уд}\, dt = \vec{F}_{\text{уд}}^{\text{ср}}\, \tau \qquad (14.1)$$

отличается от импульса неударных сил тем, что время удара τ мало, ударные силы $F_{уд}$ велики, а $S_{уд}$ принимает конечное значение. Поэтому, изучая удар, будем пренебрегать:

- неударными силами по сравнению с ударными,
- перемещениями точек тела во время удара.

Теорема об изменении количества движения в случае удара имеет вид:

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e. \qquad (14.2)$$

А теорема об изменении кинетического момента системы относительно некоторой точки A имеет вид:

$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} = \sum_k \vec{m}_A\left(\vec{F}_k\right).$$

Тогда, для случая удара, с учетом (14.1) получим:

$$\vec{K}_A^1 - \vec{K}_A^0 = \sum \vec{m}_A \vec{S}_k^e \qquad (14.3)$$

14.2. Удар материальной точки о поверхность

Пусть точка массой m с некоторой высоты H падает на поверхность и отскакивает на высоту h (рис. 14.1, а). Скорость точки при ударе о поверхность равна v, а при отскоке от поверхности — u (рис. 14.1, б). Очевидно, что $u < v$.

Отношение $k = \frac{u}{v}$ называют **коэффициентом восстановления при ударе**.

Его можно найти экспериментально.

Согласно формуле Галилея, $v = \sqrt{2gH}$, $u = \sqrt{2gh}$, откуда $$k = \sqrt{h/H}. \tag{14.4}$$

Коэффициент восстановления меняется в пределах $0 \le k \le 1$.

Теорема об изменении количества движения в случае удара материальной точки массой m о поверхность запишется следующим образом

$$mu - mv = S_{уд} \tag{14.5}$$

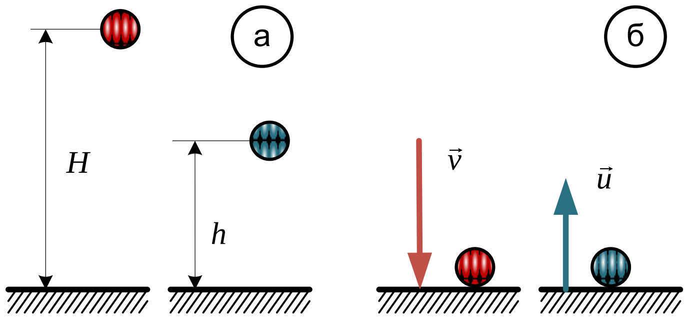

Рис. 14.1

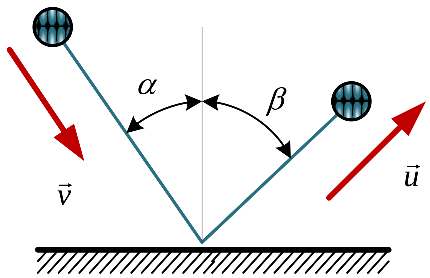

Рис. 14.2

14.3. Косой удар

ПРИМЕР

Материальная точка падает со скоростью v на гладкую плоскость под углом α. Под каким углом β (рис. 14.2) отскочит точка от поверхности, если коэффициент восстановления равен k?

Решение

Запишем закон изменения количества движения точки в проекции на плоскость (ось x). Так как плоскость гладкая, горизонтальных сил и их импульсов нет. Закон изменения имеет форму закона сохранения:

$$mu_x - m\,v_x = 0 \tag{14.6}$$

Так как $u_x = u \sin\beta$, $v_x = v \sin\alpha$, то $u \sin\beta = v \sin\alpha$.

Модули нормальных проекций скоростей связаны коэффициентом восстановления:

$$k = \frac{u\cos\beta}{v\cos\alpha} \tag{14.7}$$

Из (14.6) и (14.7) следует, что $tg\,\beta = (1/k)\,tg\,\alpha$. При $k = 0$ получим, что $\beta = \pi/2$, то есть точка покатится по поверхности (мяч, брошенный в песок).