

Е. А. Митюшов, С. А. Берестова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: СТАТИКА. КИНЕМАТИКА. ДИНАМИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Издание второе. Исправленное и дополненное



Москва ♦ Ижевск

2005

Интернет-магазин

MATHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

Митюшов Е. А., Берестова С. А.

Теоретическая механика: Статика. Кинематика. Динамика. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 176 с.

Конспект лекций предназначен для студентов всех форм обучения, изучающих теоретическую механику в техническом вузе. Содержание соответствует полной программе обучения и требованиям государственных образовательных стандартов. Он может быть также использован в качестве справочного пособия при дальнейшем обучении и работе по специальности.

ISBN 5-93972-067-6

© Институт компьютерных исследований, 2005

<http://rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Лекция 1. Введение. Основные понятия статики	9
Предмет механики	9
Основные понятия и аксиомы статики	10
Связи и реакции связей	11
Лекция 2. Система сходящихся сил	14
Теорема о существовании равнодействующей сходящихся сил	14
Условия равновесия системы сходящихся сил	15
Теорема о трех силах	16
Лекция 3. Момент силы относительно центра и оси. Пары сил	17
Момент силы относительно центра и оси	17
Способы вычисления момента силы относительно оси	18
Пара сил	19
Теоремы о парах	20
Условие равновесия системы пар	23
Лекция 4. Основная теорема статики	24
Лемма Пуансо	24
Основная теорема статики. (Теорема Пуансо).	24
Условия равновесия произвольной пространственной системы сил	26
Условия равновесия системы параллельных сил	27
Условия равновесия произвольной плоской системы сил	27
Лекция 5. Равновесие плоской системы сил	29
Равновесие системы тел	29
Расчет плоских ферм	30
Равновесие при наличии трения скольжения. Законы Амонтона – Кулона	32
Равновесие при наличии трения качения	33

ЛЕКЦИЯ 6. Инварианты статики	35
Инварианты статики	35
Частные случаи приведения произвольной системы сил	36
Теорема Вариньона	38
ЛЕКЦИЯ 7. Центр параллельных сил и центр тяжести	39
Центр параллельных сил	39
Центр тяжести твердого тела	40
ЛЕКЦИЯ 8. Кинематика точки	45
Задачи кинематики точки	45
Способы задания движения точки в заданной системе отсчета	45
Скорость точки	46
Ускорение точки	47
Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения	47
ЛЕКЦИЯ 9. Скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения	49
Естественные оси	49
Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения	50
ЛЕКЦИЯ 10. Простейшие движения твердого тела	52
Задачи кинематики твердого тела	52
Поступательное движение твердого тела	52
Вращательное движение твердого тела	53
Определение скоростей и ускорений точек вращающегося тела	54
Векторные выражения скорости и ускорения точки вращающегося тела	55
ЛЕКЦИЯ 11. Сложное движение точки	57
Основные понятия	57
Теорема о сложении скоростей	58
Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)	59
Ускорение Кориолиса	60

ЛЕКЦИЯ 12. Плоскопараллельное движение твердого тела	61
Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела	61
Определение скоростей точек тела при плоском движении	62
Мгновенный центр скоростей (МЦС)	63
Способы нахождения МЦС	64
Определение ускорений точек тела при плоском движении	64
Мгновенный центр ускорений (МЦУ)	65
ЛЕКЦИЯ 13. Сферическое и свободное движения твердого тела	66
Уравнения сферического движения твердого тела	66
Скорости точек твердого тела при сферическом движении. Мгновенная ось вращения	67
Уравнения свободного движения твердого тела	70
Скорости точек тела при свободном движении	70
ЛЕКЦИЯ 14. Законы динамики	72
Законы Галилея – Ньютона	72
Инерциальные системы отсчета	73
Основные задачи динамики	73
Дифференциальные уравнения движения материальной точки	73
Уравнения относительного движения	75
ЛЕКЦИЯ 15. Прямолинейные колебания материальной точки	77
Классификация сил	77
Свободные колебания	78
Вынужденные колебания без сопротивления. Резонанс	81
Влияние сопротивления на вынужденные колебания	81
ЛЕКЦИЯ 16. Введение в динамику механической системы	84
Механическая система. Классификация сил	84
Дифференциальные уравнения движения механической системы	85
Теорема о движении центра масс	85
Меры движения	86
Меры действия сил	88
Консервативные системы	91

Лекция 17. Общие теоремы динамики	93
Теорема об изменении количества движения	93
Динамика точки переменной массы	94
Теорема Эйлера	96
Теорема об изменении момента количества движения	97
Теорема об изменении кинетической энергии	98
Лекция 18. Динамика твердого тела	101
Дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоскопараллельного движений твердого тела	101
Тензор инерции	102
Динамика вращательного и сферического движения твердого тела .	108
Динамические уравнения Эйлера. (Дифференциальные уравнения сферического движения твердого тела)	109
Дифференциальные уравнения свободного движения твердого тела	111
Приближенная теория гироскопа	111
Лекция 19. Принцип Д’Аламбера	116
Сила инерции материальной точки	116
Принцип д’Аламбера	116
Приведение системы сил инерции твердого тела к простейшему виду	118
Определение динамических реакций	120
Лекция 20. Введение в аналитическую механику	123
Связи и их уравнения	123
Классификация связей	124
Виртуальные перемещения. Виртуальная работа силы. Идеальные связи	125
Принцип виртуальных перемещений	127
Общее уравнение динамики	129
Лекция 21. Метод обобщенных координат	130
Обобщенные координаты и скорости	130
Обобщенные силы и способы их вычисления	132
Условие равновесия в обобщенных координатах	133

Лекция 22. Дифференциальные уравнения движения механиче- ской системы в обобщенных координатах	135
Тождества Лагранжа	135
Уравнения Лагранжа второго рода	136
Уравнения Лагранжа для консервативных механических систем . .	137
Уравнение движения машины	138
Лекция 23. Интегральный вариационный принцип	141
Принцип Гамильтона–Остроградского	141
Принцип Гамильтона–Остроградского для консервативных систем	143
Лекция 24. Устойчивость равновесия	145
Определение устойчивого положения равновесия	145
Теорема Лагранжа–Дирихле	146
Потенциальная энергия в малой окрестности положения равновесия	148
Условие устойчивости консервативных механических систем . . .	149
Лекция 25. Малые колебания механических систем с одной степе- нью свободы	150
Кинетическая энергия механической системы в малой окрестности устойчивого положения равновесия	150
Дифференциальные уравнения движения механических систем около устойчивого положения равновесия	151
Малые колебания системы с одной степенью свободы	152
Лекция 26. Малые колебания механических систем с двумя степе- нями свободы	154
Малые свободные колебания механических систем с двумя степе- нями свободы. Главные колебания	154
Вынужденные колебания механических систем с двумя степенями свободы	155
Понятие о виброзащите. Динамический гаситель колебаний	157
Дифференциальные уравнения малых колебаний упругих систем .	157
Колебания упругой системы с двумя степенями свободы	160
Вынужденные колебания упругих систем с двумя степенями свободы	161

ЛЕКЦИЯ 27. Элементы теории удара	163
Явление удара. Основные допущения при ударе	163
Основное уравнение теории удара	163
Общие теоремы динамики при ударе	164
Коэффициент восстановления при ударе	165
Удар о неподвижную поверхность	166
Удар двух тел	167
Теорема Карно (теорема об изменении кинетической энергии)	168
Удар по вращающемуся телу. Определение импульсов ударных реакций	169
Центр удара	170
Литература	172
Предметный указатель	173

ЛЕКЦИЯ 1

Введение. Основные понятия статики

1. Предмет механики.
2. Основные понятия и аксиомы статики.
3. Связи и реакции связей.

Предмет механики

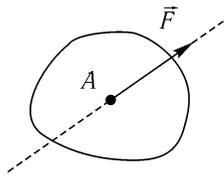
Механика — это наука, изучающая основные законы механического движения, т. е. законы изменения взаимного расположения материальных тел или частиц в сплошной среде с течением времени. Содержанием курса теоретической механики в техническом вузе является изучение равновесия и движения абсолютно твердых тел, материальных точек и их систем. Теоретическая механика является базой для многих обще-профессиональных дисциплин (сопротивление материалов, детали машин, теория машин и механизмов и др.), а также имеет самостоятельное мировоззренческое и методологическое значение. Иллюстрирует научный метод познания закономерностей окружающего нас мира — от наблюдения к математической модели, её анализ, получение решений и их применение в практической деятельности.

Курс теоретической механики традиционно делится на три части. **Статика** — изучает правила эквивалентного преобразования и условия равновесия систем сил. **Кинематика** — рассматривает движение тел с геометрической стороны, без учета сил, вызывающих это движение. **Динамика** — изучает движение тел в связи с действующими на них силами.

Основные задачи статики:

1. Изучение методов преобразования одних систем сил в другие, эквивалентные данным.
2. Установление условий равновесия систем сил.

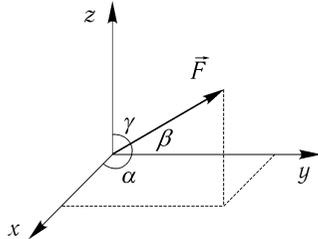
Основные понятия и аксиомы статики



Сила — мера механического воздействия одного тела на другое. Физическая природа сил в механике не рассматривается.

Сила задается модулем, направлением и точкой приложения. Обозначается большими буквами латинского алфавита: $\vec{F}, \vec{R}, \vec{N}, \dots, |\vec{F}| = F$ — модуль силы.

Аналитически силу можно задать ее проекциями на оси координат: F_x, F_y, F_z , а направление в пространстве — направляющими косинусами: $\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \cos \gamma = \frac{F_z}{F}$.



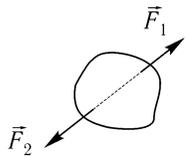
Совокупность нескольких сил, действующих на твердое тело, называется **системой сил**. Две системы сил **эквивалентны** (\sim)

между собой, если, не нарушая состояния тела, одну систему сил можно заменить другой.

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется **равнодействующей**: $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{R}$. Не всегда систему сил можно заменить равнодействующей.

Систему сил, приложенную к свободному твердому телу, находящемуся в равновесии, и не выводящую его из этого состояния, называют **уравновешенной системой сил** $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim 0$. **Абсолютно твердое тело** — тело, у которого расстояние между любыми двумя точками остается неизменным.

Аксиомы:



1. Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.

2. Не нарушая состояния абсолютно твердого тела, к нему можно прикладывать или отбрасывать уравновешенную систему сил.

Следствие. Точку приложения силы можно переносить вдоль линии действия силы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

К телу в точке A приложена сила \vec{F} . Добавим в точке B систему сил, $\{\vec{F}', \vec{F}''\} \sim 0: F = F' = F''$.

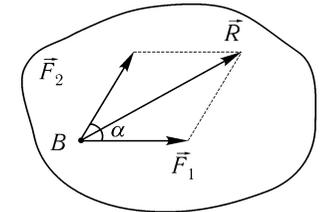
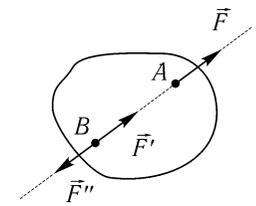
$\{\vec{F}\} \sim \{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\}$, но $\{\vec{F}, \vec{F}''\} \sim 0$, следовательно, $\{\vec{F}\} \sim \{\vec{F}'\}$. Следствие доказано.

3. Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, проходящую через эту точку и равную их геометрической сумме. $\{\vec{R}\} \sim \{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}, \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$.

Из этой аксиомы следует, что силу можно разложить на любое количество составляющих сил по заранее выбранным направлениям.

4. Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

5. Равновесие деформируемого тела не нарушится, если это тело отвердеет. Иными словами, необходимые условия равновесия деформируемых и абсолютно твердых тел совпадают, что позволяет применять получаемые результаты для реальных тел и конструкций, не являющихся абсолютно твердыми.



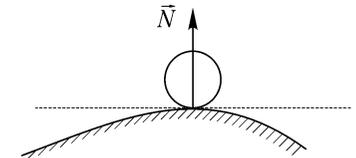
Связи и реакции связей

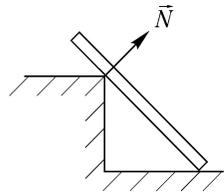
Тело называется **свободным** если его перемещение в пространстве ничем не ограничено. В противном случае тело называется **несвободным**, а тела, ограничивающие перемещения данного тела, — **связями**.

Силы, с которыми связи действуют на данное тело, называются **реакциями связей**.

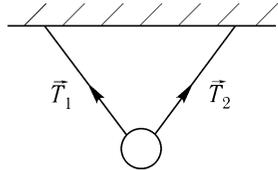
Основные виды связей и их реакции:

1. **Гладкая поверхность** (без трения): Реакция гладкой поверхности направлена по нормали к этой поверхности (перпендикулярна общей касательной).

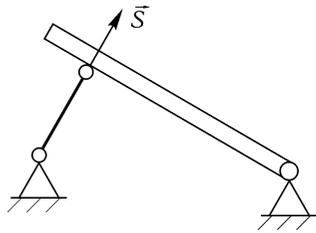




2. Опорная точка (ребро):
Реакция перпендикулярна опирающейся поверхности.

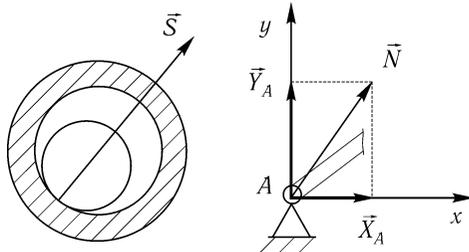


3. Идеальная нить (гибкая, невесомая, нерастяжимая):
Моделирует трос, канат, цепь, ремень, ...
Реакция идеальной нити направлена по нити к точке подвеса.

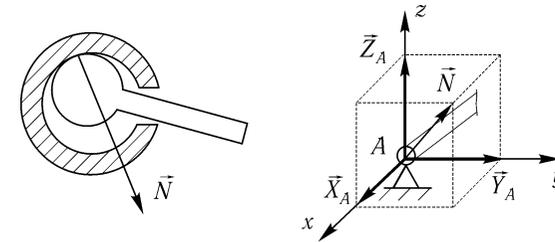


4. Идеальный стержень (жесткий, невесомый стержень, на концах которого шарниры):
Реакция связи направлена по стержню.
В отличие от нити стержень может работать и на сжатие.

5. Цилиндрический шарнир:



Такая связь позволяет телу перемещаться вдоль оси, поворачиваться вокруг оси шарнира, но не позволяет точке закрепления перемещаться в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Реакция лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, и проходит через нее. Положение этой реакции не определено, но она может быть представлена двумя взаимно перпендикулярными составляющими.

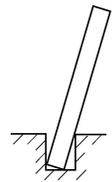


6. Сферический шарнир:

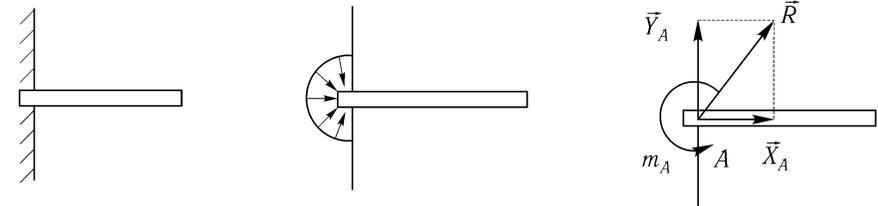
Такая связь не дает точке закрепления перемещаться ни в одном из направлений. Положение реакции не определено, но она может быть представлена тремя взаимно перпендикулярными составляющими.

7. Подпятник:

Реакция данной связи задается аналогично предыдущему случаю.



8. Жесткая заделка:



Такая связь препятствует перемещению и повороту вокруг точки закрепления. Контакт тела со связью осуществляется по поверхности. Имеем распределенную систему сил реакции, которая, как будет показано, может быть заменена одной силой и парой сил.

Аксиома освобожденности от связей: Всякое несвободное тело можно считать свободным, если мысленно освободиться от связей, а их действие заменить соответствующими реакциями.

Литература:

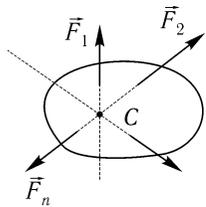
- [1, § 1–3];
- [2, § 1–3];
- [4, п. 1.1–1.4].

ЛЕКЦИЯ 2

Система сходящихся сил

1. Теорема о существовании равнодействующей сходящихся сил.
2. Условия равновесия системы сходящихся сил.
3. Теорема о трех силах.

Теорема о существовании равнодействующей сходящихся сил



Силы называются **сходящимися**, если линии их действия пересекаются в одной точке.

Теорема. Система сходящихся сил имеет равнодействующую, которая равна геометрической сумме этих сил и проходит через точку пересечения их линий действия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Перенесем все силы по линии действия в точку пересечения. Последовательно складывая по аксиоме 3:

$$\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad \vec{R}_{123} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_3 \text{ и т. д., находим}$$

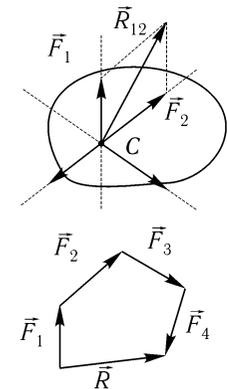
$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Теорема доказана.

Геометрически равнодействующая может быть найдена как замыкающая сторона силового многоугольника.

Аналитически по проекциям на оси координат

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$



Модуль и направление равнодействующей определяются формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos(\vec{R}, Ox) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}, Oy) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}, Oz) = \frac{R_z}{R}.$$

Условия равновесия системы сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут (условие равновесия в геометрической форме).

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно равенство нулю алгебраических сумм проекций всех сил данной системы на каждую из координатных осей (условие равновесия в аналитической форме).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Из теоремы о существовании равнодействующей условие равновесия эквивалентно равенству $\vec{R} = 0$, т. е.

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0 \quad \text{или}$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0.$$

Условие доказано.

Эти условия позволяют определять неизвестные величины, в частности, реакции связей. Число неизвестных для произвольно расположенной в пространстве системы сходящихся сил не должно превышать трех.

Задача статики о равновесии называется **статически определимой**, если количество неизвестных не превышает количества уравнений. Иначе задача статически неопределима и методами статики не решается. Для плоской системы сходящихся сил количество независимых условий (или уравнений) равновесия равно двум:

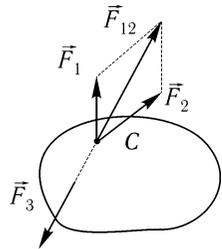
$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0.$$

Теорема о трех силах

Теорема. Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Т.к. силы не параллельны, то $\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. По условию $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \sim 0$, следовательно, $\{\vec{F}_3, \vec{F}_{12}\} \sim 0$ и сила \vec{F}_3 проходит через точку C . Теорема доказана.



Литература:

[1, § 4–7];
[2, § 4–11];
[4, п. 2.1–2.3].

ЛЕКЦИЯ 3

Момент силы относительно центра и оси. Пары сил

1. Момент силы относительно центра и оси.
2. Способы вычисления момента силы относительно оси.
3. Пара сил.
4. Теоремы о парах.
5. Условие равновесия системы пар.

Момент силы относительно центра и оси

Действие силы на твердое тело, закрепленное в одной точке, заключается в стремлении повернуть его вокруг точки закрепления. Для характеристики вращательного действия силы вводится понятие момента силы относительно центра (или точки).

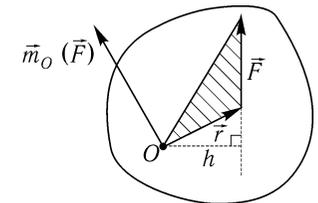
Моментом силы относительно центра называется векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы.

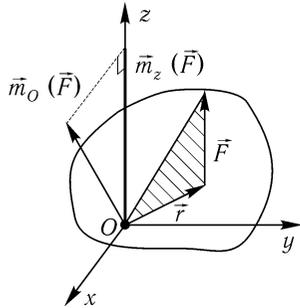
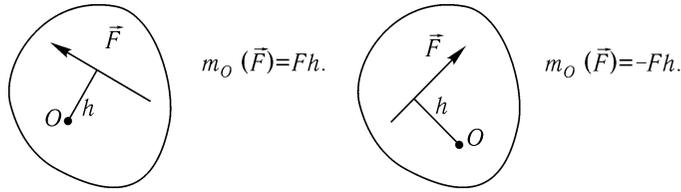
$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Вектор момента направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и точка, в ту сторону, откуда поворот от действия силы виден происходящим против хода часовой стрелки. Вектор момента характеризует положение плоскости и направление вращательного действия силы, а также дает меру этого действия:

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = rF \sin(\vec{F}, \vec{r}) = Fh,$$

h — **плечо силы** (кратчайшее расстояние от центра момента до линии действия силы). Если сила проходит через точку, то ее момент относительно этой точки равен нулю.





Если силы расположены в одной плоскости, то используется понятие алгебраического момента силы. **Алгебраическим моментом силы относительно центра** называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля силы на плечо. Знак плюс выбирается в том случае, если сила стремится поворачивать плоскость относительно центра момента против хода часовой стрелки.

Для характеристики вращательного действия силы на тело, закрепленное на оси, служит **момент силы относительно оси** — алгебраическая величина, равная проекции вектора момента силы относительно произвольной точки оси на эту ось:

$$m_z(\vec{F}) = np_z \vec{m}_O(\vec{F}).$$

Способы вычисления момента силы относительно оси

1. Аналитический

По правилу вычисления векторного произведения:

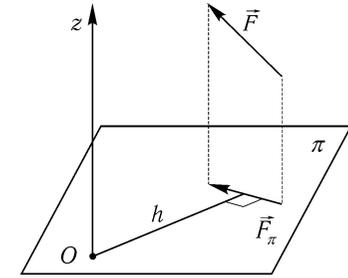
$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} m_x(\vec{F}) &= (yF_z - zF_y), \\ m_y(\vec{F}) &= (zF_x - xF_z), \\ m_z(\vec{F}) &= (xF_y - yF_x). \end{aligned}$$

2. Геометрический

Провести плоскость π , перпендикулярную данной оси (Oz), спроектировать силу на эту плоскость и вычислить момент проекции \vec{F}_π относительно точки O — точки пересечения оси z с плоскостью π .

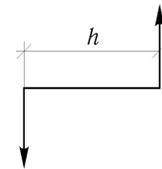


Момент положителен, если глядя с положительного направления оси вращения видно происходящим против хода часовой стрелки. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси или линия действия силы пересекает ось.

При вычислении момента силы ее бывает удобно предварительно разложить на составляющие и находить момент каждой составляющей отдельно. При этом момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих. (Для общего случая это доказывается в лекции 6.)

Пара сил

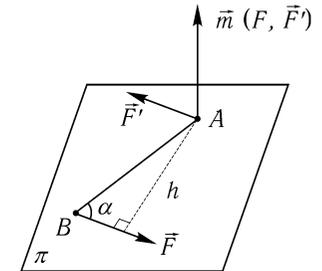
Система двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, — **пара сил** (неупрощаемая система сил). h — **плечо пары** расстояние между линиями действия сил.



Для характеристики действия пары сил на твердое тело вводится понятие момента пары.

Вектор момента пары сил равен векторному моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы:

$$\begin{aligned} \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}') &= \vec{m}_A(\vec{F}) = \vec{m}_B(\vec{F}'), \\ |\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')| &= |\vec{F}| AB \sin \alpha = |\vec{F}| h. \end{aligned}$$



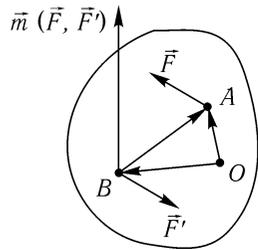
Он направлен перпендикулярно плоскости π действия пары в ту сторону, откуда видно, что вращение происходит против хода часовой стрелки.

Момент пары — это свободный вектор, и, как будет видно из дальнейшего изложения, он полностью определяет действие пары на твердое тело.

Для пар, расположенных в одной плоскости, используется понятие алгебраического момента пары.

Алгебраический момент пары сил равен алгебраическому моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы или, что то же самое, равен взятому со знаком плюс или минус произведению модуля одной из сил пары на плечо. Момент пары положителен, если пара стремится повернуть плоскость против хода часовой стрелки.

Суммарное вращательное действие сил, составляющих пару, определяется следующей теоремой:



Теорема. Сумма моментов сил пары относительно произвольной точки равна моменту пары.

Доказательство.

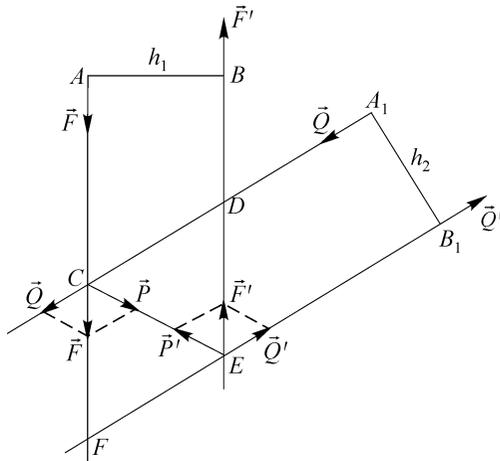
Возьмем произвольную точку O . Сумма моментов сил пары относительно точки O : $\vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{OB} \times \vec{F}'$, так как $\vec{F} = -\vec{F}'$, то $\vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = (\vec{OA} - \vec{OB}) \times \vec{F} = \vec{BA} \times \vec{F} = \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')$.

Теорема доказана.

Основные свойства пар (правила их эквивалентного преобразования) даются следующими тремя теоремами:

Теоремы о парах

Теорема 1. Пару сил, приложенную к твердому телу, можно перемещать в плоскости действия, сохраняя при этом ее момент.



Доказательство.

Выберем в плоскости действия пары сил $\{\vec{F}, \vec{F}'\}$ произвольный отрезок A_1B_1 и восстановим перпендикуляры в его концах до пересечения с линиями действия сил \vec{F} и \vec{F}' .

Перенесем силы \vec{F} и \vec{F}' по линиям их действия в точки C и E и разложим на составляющие $\vec{F} \sim \{\vec{P}, \vec{Q}\}$ и $\vec{F}' \sim \{\vec{P}', \vec{Q}'\}$. Система сил $\{\vec{P}, \vec{P}'\} \sim 0$, а силы \vec{Q} и \vec{Q}' образуют пару сил и могут быть перенесены по линиям их действия в точки A_1 и B_1 .

В результате эквивалентных преобразований пара сил $\{\vec{F}, \vec{F}'\}$ заменена парой сил $\{\vec{Q}, \vec{Q}'\}$, момент которой равен моменту заданной пары. Действительно, рассматривая площадь параллелограмма $CDEF$

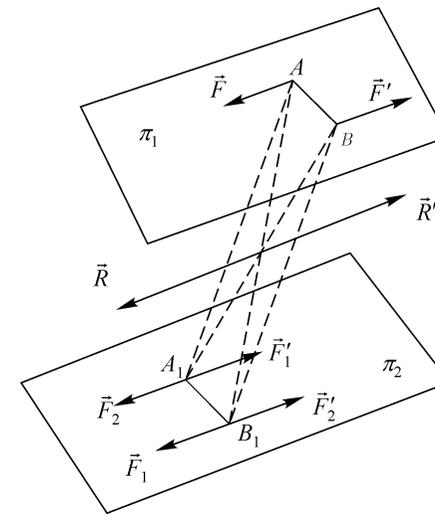
$$S_{CDEF} = h_1CF = h_2CD,$$

из подобия соответствующих треугольников

$$\frac{CF}{|\vec{F}|} = \frac{CD}{|\vec{Q}|} \implies h_1|\vec{F}| = h_2|\vec{Q}|.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пару сил, действующую на твердое тело, можно перенести в любую плоскость, параллельную плоскости ее действия.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Плечо AB пары сил $\{\vec{F}, \vec{F}'\}$, лежащей в плоскости π_1 , переместим параллельно в положение A_1B_1 на плоскости π_2 и приложим систему сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}'_1, \vec{F}_2, \vec{F}'_2\} \sim 0$, равных по модулю F .

Силы \vec{F}, \vec{F}'_1 имеют равнодействующую $R = 2F$, которая приложена в точке пересечения диагоналей параллелограмма ABA_1B_1 . Силы \vec{F}', \vec{F}'_1 также имеют равнодействующую $R' = 2F$, которая направлена в противоположную сторону. Т. е.

$$\{\vec{F}, \vec{F}'_1, \vec{F}', \vec{F}'_1\} \sim \{\vec{R}, \vec{R}'\} \sim 0.$$

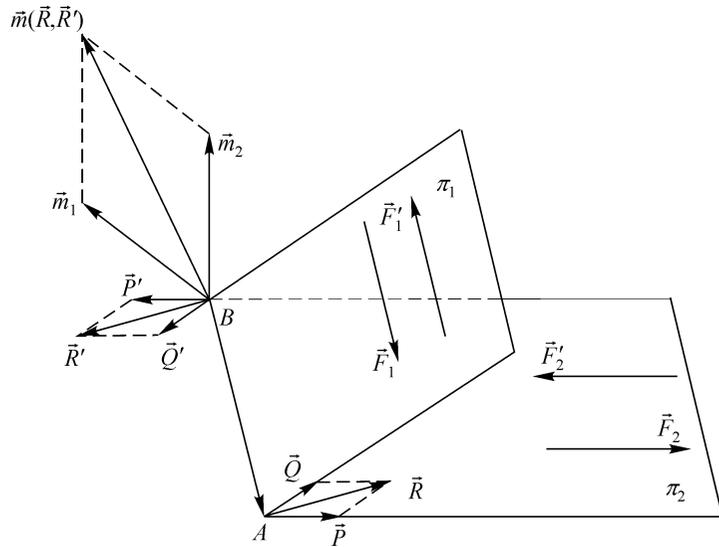
По второй аксиоме статики

$$\{\vec{F}, \vec{F}'\} \sim \{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}_1, \vec{F}'_1, \vec{F}_2, \vec{F}'_2\} \sim \{\vec{R}, \vec{R}', \vec{F}_2, \vec{F}'_2\} \sim \{\vec{F}_2, \vec{F}'_2\}.$$

В результате эквивалентных преобразований пары сил $\{\vec{F}, \vec{F}'\}$ заменена парой сил $\{\vec{F}_2, \vec{F}'_2\}$ в параллельной плоскости, которая имеет тот же момент и стремится повернуть тело в том же направлении.

Теорема доказана.

Теорема 3. Две пары, действующие на твердое тело и лежащие в пересекающихся плоскостях, эквивалентны одной паре, момент которой равен геометрической сумме моментов составляющих пар.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим две пары $\{\vec{F}_1, \vec{F}'_1\}$ и $\{\vec{F}_2, \vec{F}'_2\}$ с моментами \vec{m}_1 и \vec{m}_2 , лежащие в пересекающихся плоскостях π_1 и π_2 . Пользуясь теоремой 1, перенесем пары так, чтобы силы были приложены в точках A и B на линии пересечения плоскостей.

По правилу сложения сил имеем

$$\vec{R} \sim \{\vec{P}, \vec{Q}\} \quad \text{и} \quad \vec{R}' \sim \{\vec{P}', \vec{Q}'\}.$$

Система сил $\{\vec{R}, \vec{R}'\}$ образует пару. Момент этой пары

$$\vec{m}(\vec{R}, \vec{R}') = \vec{BA} \times \vec{R} = \vec{BA} \times (\vec{P} + \vec{Q}) = \vec{BA} \times \vec{P} + \vec{BA} \times \vec{Q},$$

где

$$\vec{BA} \times \vec{P} = \vec{m}_2, \quad \vec{BA} \times \vec{Q} = \vec{m}_1.$$

Т. е.

$$\vec{m}(\vec{R}, \vec{R}') = \vec{m}_2 + \vec{m}_1.$$

Теорема доказана.

В частном случае:

Две пары, лежащие в одной плоскости, эквивалентны одной паре, момент которой равен алгебраической сумме моментов составляющих пар.

Из теоремы следует, что любую систему пар можно заменить одной парой, момент которой равен сумме моментов составляющих пар. Это позволяет получить условие равновесия системы пар.

Условие равновесия системы пар

Для равновесия системы пар, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов пар равнялась нулю:

$$\sum_{k=1}^n \vec{m}_k = 0 \quad \text{— в случае пространственной системы пар;}$$

$$\sum_{k=1}^n m_k = 0 \quad \text{— для системы пар, расположенных в одной плоскости.}$$

Литература:

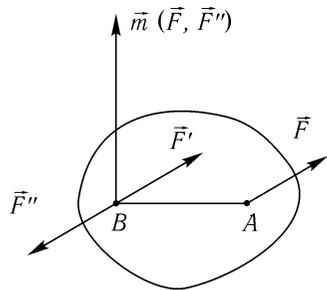
- [1, § 8–10, 14];
 [2, § 13–22];
 [4, п. 3.1–3.4].

ЛЕКЦИЯ 4

Основная теорема статики

1. Лемма Пуансо.
2. Основная теорема статики. (Теорема Пуансо.)
3. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
4. Условия равновесия системы параллельных сил.
5. Условия равновесия произвольной плоской системы сил.

Лемма Пуансо¹



Лемма. Не изменяя действия силы на твердое тело, ее можно переносить параллельно самой себе в любую точку тела, добавляя при этом пару, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

К телу в точке A приложена сила \vec{F} . Добавим в точке B уравновешенную систему сил: $\{\vec{F}', \vec{F}''\} \sim 0, F = F' = F'',$

$\vec{F} \sim \{(\vec{F}', \vec{F}''), \vec{F}\} \sim \{\vec{F}', (\vec{F}'', \vec{F})\}$. \vec{F}, \vec{F}'' — пара сил с моментом $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}'') = \vec{m}_B(\vec{F})$.

Лемма доказана.

Основная теорема статики. (Теорема Пуансо)

Теорема. Произвольную систему сил, действующую на твердое тело, можно заменить эквивалентной системой, состоящей из силы и пары сил.

¹Пуансо Луи (3.1.1777–5.12.1859) — франц. математик и механик, член Французской АН. Основные исследования посвящены теории чисел и механике. В работах по механике использовал геометрические методы; предложил теорию пар сил. Исследовал вращение твердого тела вокруг неподвижной точки.

Сила равна главному вектору системы сил и приложена в произвольно выбранной точке (центре приведения), момент пары равен главному моменту системы сил относительно этой точки.

Главным вектором \vec{R} системы сил называется геометрическая сумма всех сил системы $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k,$

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz};$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Главным моментом \vec{M}_O системы сил относительно данного центра называется сумма моментов всех сил системы относительно этого центра:

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k).$$

Главный момент определяется своими проекциями на оси координат:

$$M_{Ox} = \sum_{k=1}^n m_{Ox}(\vec{F}_k), \quad M_{Oy} = \sum_{k=1}^n m_{Oy}(\vec{F}_k),$$

$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^n m_{Oz}(\vec{F}_k),$$

или, с учетом определения момента силы относительно оси:

$$M_{Ox} = \sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k), \quad M_{Oy} = \sum_{k=1}^n m_y(\vec{F}_k), \quad M_{Oz} = \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k),$$

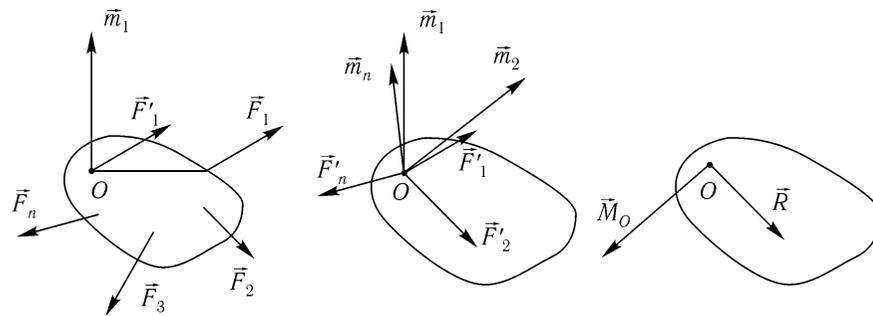
$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Точка O — центр приведения. По лемме Пуансо перенесем силу \vec{F}_1 в точку O : $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{m}'_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1)$.

Аналогично перенесем все остальные силы. $\vec{F}'_k = \vec{F}_k, \vec{m}'_k = \vec{m}_O(\vec{F}_k)$.

В результате получим систему сходящихся сил и систему пар сил. По теореме о существовании равнодействующей системы сходящихся сил их



можно заменить одной силой $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$, равной главному вектору. Систему пар по теореме о сложении пар можно заменить одной парой, момент которой равен главному моменту $\vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k)$. Теорема доказана.

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Из основной теоремы статики вытекает условие равновесия произвольной системы сил.

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы равнялись нулю:

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = 0.$$

В аналитической форме:

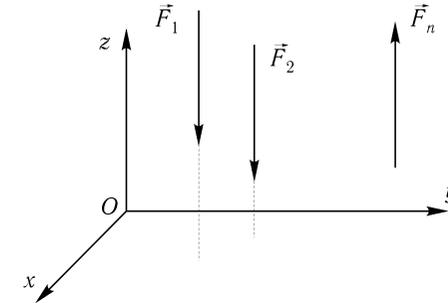
Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси и суммы моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_y(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Условия равновесия могут быть использованы для решения задач на равновесие при определении неизвестных величин (реакций связей). Чтобы задача была статически определимой, число неизвестных должно быть не более шести.

Условия равновесия системы параллельных сил



Для системы параллельных сил условиями равновесия являются равенства:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_y(\vec{F}_k) = 0.$$

Условия равновесия произвольной плоской системы сил

Плоская система сил — это такая система, все силы которой лежат в одной плоскости.

В этом случае в результате приведения получаем силу и пару, лежащие в одной плоскости. Главный вектор плоской системы сил определяется его проекциями на две координатные оси, а главный момент является скалярной суммой алгебраической суммы моментов всех сил системы относительно выбранного центра приведения.

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы равнялись нулю:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_O(\vec{F}_k) = 0.$$

Условия равновесия плоской системы сил могут быть записаны в следующих эквивалентных формах:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\vec{F}_k) = 0$$

(отрезок AB не перпендикулярен оси Ox).

$$\sum_{k=1}^n m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_C(\vec{F}_k) = 0$$

(точки A, B, C не лежат на одной прямой).

Литература:

- [1, § 11–13, 15, 16, 30];
 [2, § 19–25, 30];
 [4, п. 4.1–4.4, 5.1–5.3, 7.3].

ЛЕКЦИЯ 5

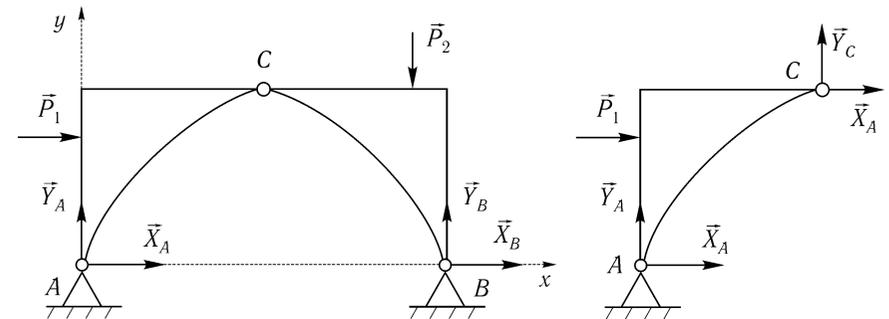
Равновесие плоской системы сил

1. Равновесие системы тел.
2. Расчет плоских ферм.
3. Равновесие при наличии трения скольжения. Законы Амонтона–Кулона.
4. Равновесие при наличии трения качения.

Равновесие системы тел

Если в равновесии находится не одно тело, а система тел, то для определения всех неизвестных величин необходимо расчленять систему, вводя в рассмотрение реакции внутренних связей. При этом возможны два способа составления уравнений равновесия. Проиллюстрируем их применение на примере равновесия двух тел.

Первый способ (рассмотреть равновесие конструкции и одной ее части):



Количество неизвестных реакций внешних связей превышает количество уравнений равновесия плоской системы сил.

В этом случае помимо трех уравнений равновесия конструкции в целом составляются три дополнительных уравнения равновесия одной из частей конструкции.

Второй способ (рассмотреть равновесие каждой части конструкции).

Способ выбираем из соображений удобства решения системы уравнений равновесия.

Расчет плоских ферм

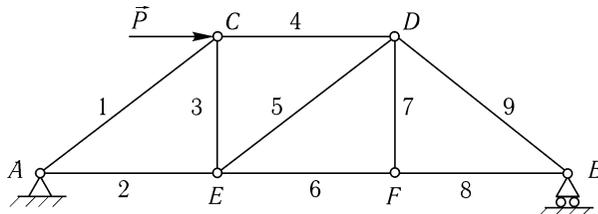
Ферма — жесткая (геометрически неизменяемая) конструкция из стержней, соединенных между собой шарнирами. Шарнирные соединения называются **узлами**.

Задачей расчета ферм является определение реакций внешних связей и усилий в стержнях. Основные допущения — это идеальность стержней фермы и распределение внешней нагрузки по ее узлам.

У статически определимых ферм количество стержней s и количество узлов n связаны соотношением: $s = 2n - 3$. Это равенство получается из того факта, что добавление к простейшей треугольной ферме каждого нового узла требует двух стержней: $s = 2(n - 3) + 3$.

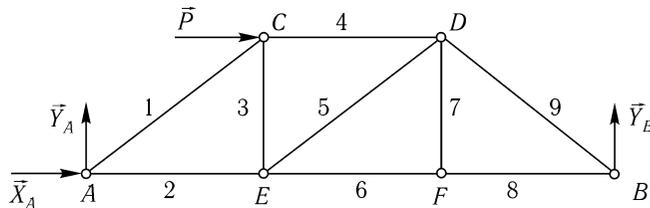
Основные методы расчета усилий в стержнях плоских ферм: метод вырезания узлов (последовательно вырезаются узлы, в которых сходится не более двух стержней с неизвестными усилиями, и составляются уравнения равновесия системы сходящихся сил) и метод сечений (Риттера) (производится сечение фермы по трем стержням с неизвестными усилиями и составляются уравнения равновесия одной части фермы).

ПРИМЕР.



Дано: $P = 30$ кН, $AE = EC = EF = FB = 2$ м. Найти усилия в стержнях.

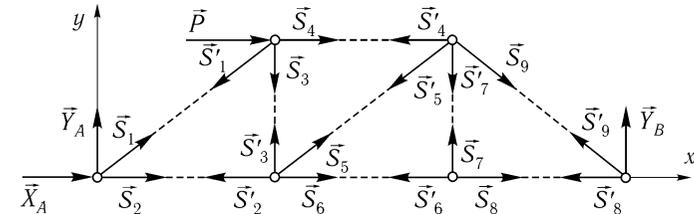
Вначале определим опорные реакции:



$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^n m_A(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \begin{cases} X_A + P = 0, \\ Y_A + Y_B = 0, \\ -P \cdot CE + Y_B \cdot 3AE = 0. \end{cases}$$

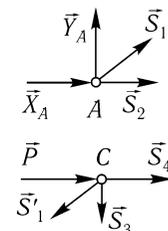
Отсюда $Y_B = 10$ кН, $Y_A = -10$ кН, $X_A = -30$ кН.

Определив реакции в т. A и в т. B , рассмотрим последовательно равновесие каждого узла, мысленно отбросив сходящиеся в них стержни и заменив их действия реакциями (усилиями). Полагая, что стержни растянуты, направим их усилия от узлов.



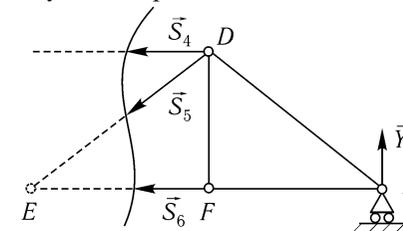
Покажем каждый узел в отдельности и составим уравнения их равновесия:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases} \begin{cases} X_A + S_1 \cos 45^\circ + S_2 = 0, \\ Y_A + S_1 \sin 45^\circ = 0, \\ P - S'_1 \cos 45^\circ + S_4 = 0, \\ -S'_1 \cos 45^\circ - S_3 = 0, \\ S'_1 = S_1, \end{cases}$$



и т. д.

Для иллюстрации метода Риттера рассечем ферму по 4, 5 и 6 стержню и рассмотрим равновесие правой части. Действие отброшенной части фермы заменяется соответствующими реакциями.



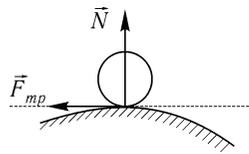
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 & -S_5 \sin 45^\circ + Y_B = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_D(\vec{F}_k) = 0 & Y_B \cdot FB - S_6 \cdot FD = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_E(\vec{F}_k) = 0 & Y_B \cdot 2FB + S_4 \cdot FD = 0. \end{cases}$$

Получаем:

$$S_5 = 10\sqrt{2} \text{ кН}, \quad S_6 = 10 \text{ кН}, \quad S_4 = -20 \text{ кН}.$$

Знак минус означает, что соответствующий стержень работает на сжатие. При определении усилий в стержнях по методу сечений составляются уравнения равновесия, в каждое из которых входит по одной неизвестной.

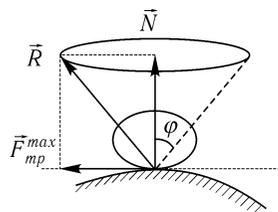
Равновесие при наличии трения скольжения. Законы Амонтона – Кулона



При стремлении сдвинуть тело, лежащее на шероховатой поверхности, возникает сила реакции, которая имеет две составляющие — нормальную и **силу трения скольжения**.

В результате экспериментальных исследований были установлены: **Законы Амонтона¹ – Кулона²**:

1. Сила трения скольжения при равновесии тела принимает значения от нуля до максимального значения.
2. Максимальное значение силы трения скольжения не зависит от площади контакта, а определяется величиной нормальной реакции, материалом и состоянием контактирующих поверхностей. $F_{mp}^{\max} = fN$, где f — **коэффициент трения скольжения**.



Конус трения — поверхность, образованная линией действия максимальной реакции при стремлении сдвинуть тело в различных направлениях: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{mp}^{\max}}{N} = \frac{fN}{N} = f$,

$$\operatorname{tg} \varphi = f.$$

¹Амонтон Гийом (31.08.1663–11.10.1705) — франц. механик и физик, член Французской АН. Работы по теории трения и термометрии.

²Кулон Шарль Огюстен (14.07.1736–13.08.1806) — франц. физик, механик, инженер, член Французской АН. Исследования по строительной механике, гидравлике, теории трения, сопротивлению материалов, один из основателей электростатики.

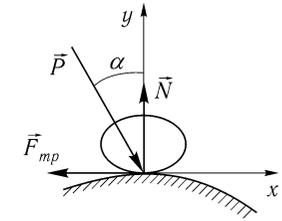
Рассмотрим равновесие тела на шероховатой поверхности под действием силы P .

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 & P \sin \alpha - F_{mp} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 & -P \cos \alpha + N = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{mp}}{N} \leq \frac{F_{mp}^{\max}}{N} = f = \operatorname{tg} \varphi,$$

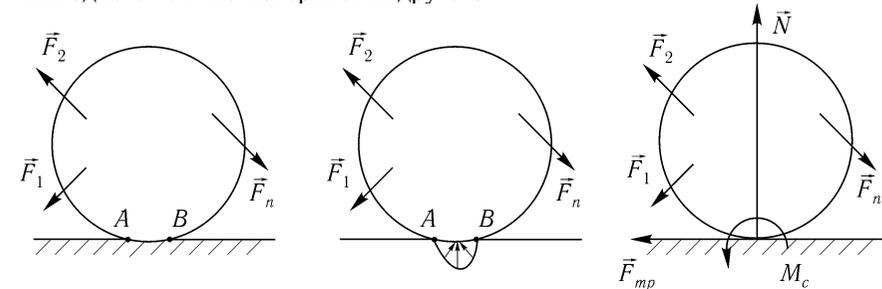
$$\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi, \quad \boxed{\alpha \leq \varphi}.$$



Никакая сила, лежащая внутри конуса трения, не может вывести тело из состояния покоя.

Равновесие при наличии трения качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.



Вследствие деформации тел их касание происходит вдоль площадки AB и имеем распределенную систему сил реакции, которая может быть заменена силой и парой. Сила раскладывается на две составляющие — нормальную и силу трения скольжения. При равновесии тела момент сопротивления качению определяется из условий равновесия системы сил. При этом установлено, что момент сопротивления принимает значения от нуля до максимального значения. Максимальное значение момента сопротивления, соответствующее началу качения, определяется равенством

$$M_c \max = N\delta,$$

где δ — **коэффициент трения качения** (по аналогии с трением скольжения).

Коэффициент трения качения имеет размерность длины, зависит от материала контактирующих тел и геометрии зоны контакта.

Литература:

[1, § 18, 22, 23–25, 27];
[2, § 35, 36, 39];
[4, п. 5.4, 5.8, 6.1–6.2].

ЛЕКЦИЯ 6

Инварианты статики

1. Инварианты статики.
2. Частные случаи приведения произвольной системы сил.
3. Теорема Вариньона.

Инварианты статики

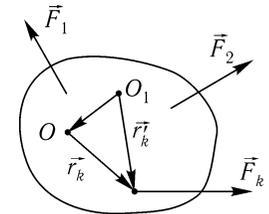
Инварианты статики — характеристики системы сил, не зависящие от выбора центра приведения.

Первый инвариант статики — главный вектор системы сил (по определению).

Второй инвариант статики — скалярное произведение главного вектора и главного момента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Главный момент зависит от выбора центра приведения. Рассмотрим произвольную систему сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$. Главный момент системы сил относительно центра O : $\vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k) = = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k$, главный момент относительно нового центра приведения O_1 :



$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^n \vec{r}'_k \times \vec{F}_k, \text{ где } \vec{r}'_k = \overrightarrow{O_1 O} + \vec{r}_k. \text{ Тогда}$$

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^n (\overrightarrow{O_1 O} + \vec{r}_k) \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{O_1 O} \times \vec{F}_k + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k =$$

$$= \overrightarrow{O_1 O} \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \overrightarrow{O_1 O} \times \vec{R} + \vec{M}_O \text{ и}$$

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{m}_{O_1}(\vec{R})$$

— главный момент системы сил относительно нового центра приведения равен сумме главного момента относительно старого центра приведения и момента главного вектора, приложенного в старом центре приведения, относительно нового центра.

Умножив скалярно обе части последнего равенства на главный вектор, получим

$$\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} + (O_1\vec{O} \times \vec{R}) \cdot \vec{R};$$

$$(O_1\vec{O} \times \vec{R}) \cdot \vec{R} = 0, \quad \text{так как } O_1\vec{O} \times \vec{R} \perp \vec{R},$$

следовательно, $\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$, т. е. $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \text{const}$ — второй инвариант статики. Утверждение доказано.

$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = M_O R \cos \alpha$, $M_O \cos \alpha = \text{const}$. Из этого следует, что инвариантом является и проекция главного момента на направление главного вектора.

Частные случаи приведения произвольной системы сил

По инвариантам статики можно судить о возможных частных случаях приведения исходной системы сил.

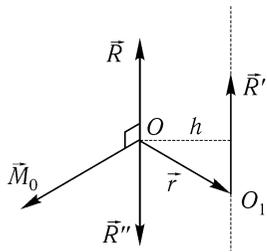
1. $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_O = 0$. Система сил приводится к одной силе — равнодействующей, при этом линия действия равнодействующей проходит через центр приведения.

2. $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_O \neq 0$. Исходную систему сил можно заменить двумя силами, образующими пару сил.

3. $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$. Система сил приводится к силе и паре.

а) $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$, т. е. $\vec{R} \perp \vec{M}_O$ — пара и сила лежат в одной плоскости. Выбирая силы, составляющие пару $\{\vec{R}', \vec{R}''\}$, $\vec{R}' = -\vec{R}'' = \vec{R}$, находим ее плечо: $hR = M_O$, $h = \frac{M_O}{R}$.

Силы \vec{R} и \vec{R}'' образуют уравновешенную систему сил. В результате исходная система сил приводится к равнодействующей $\{\vec{R}, \vec{R}', \vec{R}''\} \sim \{\vec{R}'\}$, которая проходит через точку O_1 , отстоящую от центра приведения на расстоянии, равном отношению главного момента к главному вектору.



С учетом зависимости главного момента от выбора центра приведения $\vec{M}_O = \vec{M}_{O_1} + \vec{r} \times \vec{R}'$, но $M_{O_1} = 0$, и векторное уравнение линии действия равнодействующей имеет вид: $\vec{M}_O - \vec{r} \times \vec{R} = 0$, или в координатной форме:

$$\begin{cases} M_{O_x} - (yR_z - zR_y) = 0, \\ M_{O_y} - (zR_x - xR_z) = 0, \\ M_{O_z} - (xR_y - yR_x) = 0. \end{cases}$$

б) $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$ — система сил приводится к силе и паре, не лежащих в одной плоскости.

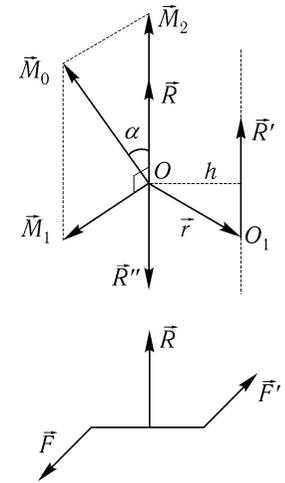
Разложим главный момент так, чтобы $\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, $\vec{M}_1 \perp \vec{R}$. Для составляющей \vec{M}_1 проводим аналогичные предыдущему случаю рассуждения. Тогда: $hR = M_1$, $h = \frac{M_1}{R} = \frac{M_O \sin \alpha}{R}$ и в центре O_1 имеем силу и пару, лежащую в плоскости, перпендикулярной силе, которые образуют силовой (динамический) винт. Момент этой пары равен проекции главного момента на направление главного вектора (не зависит от выбора центра приведения) $M_2 = m(\vec{F}, \vec{F}') = M_O \cos \alpha$ или $M_2 = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{R}$.

При перемене центра приведения $\vec{M}_O = \vec{M}_{O_1} + \vec{r} \times \vec{R}'$, но $\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_2$, следовательно $\vec{M}_2 = \vec{M}_O - \vec{r} \times \vec{R}'$. Так как $\vec{M}_2 \parallel \vec{R}$, то $\vec{M}_2 = k\vec{R}$, где $k = \frac{\vec{M}_2 \cdot \vec{R}}{R^2} = \frac{M_O \cos \alpha}{R}$. Тогда векторное уравнение **центральной винтовой оси** (линии в точках которой заданная система сил приводится к динамическому винту) имеет вид:

$$\frac{M_O \cos \alpha}{R} \vec{R} = \vec{M}_O - \vec{r} \times \vec{R}, \quad \text{или в координатной форме:}$$

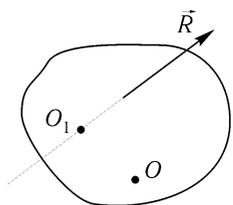
$$\frac{M_{O_x} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{O_y} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{O_z} - (xR_y - yR_x)}{R_z}.$$

4. $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_O = 0$ — уравновешенная система сил.



Теорема Вариньона¹

Теорема. Если система сил имеет равнодействующую, то ее момент относительно любого центра (или оси) равен сумме моментов всех сил системы относительно того же центра (или оси).



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{R}$, пусть O_1 — точка на линии действия равнодействующей. Как было доказано: $\vec{M}_O = \vec{M}_{O_1} + \vec{m}_O(\vec{R})$, но $\vec{M}_{O_1} = 0$, следовательно,

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k).$$

В проекции на ось, проходящую через центр O ,

$$m_x(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k).$$

Теорема доказана.

[1, § 12, 13, 28, 29];
[2, § 41, 42, 44–47];
[4, п. 7.1–7.2].

Литература:

¹Вариньон Пьер (1654–22.12.1722) — франц. математик и механик, член Французской АН. Труды по геометрии и статике.

ЛЕКЦИЯ 7

Центр параллельных сил и центр тяжести

1. Центр параллельных сил.
2. Центр тяжести твердого тела.

Центр параллельных сил

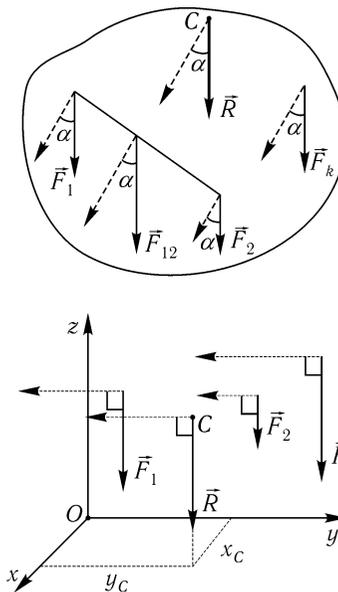
Рассмотрим систему параллельных сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$.

При повороте всех сил системы на один и тот же угол линия действия равнодействующей системы параллельных сил повернется в ту же сторону на тот же угол вокруг некоторой точки. Эта точка называется **центром параллельных сил**. Для определения координат центра параллельных сил воспользуемся теоремой Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси. Относительно оси x :

$$m_x(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k),$$

$$-y_C R = -\sum_{k=1}^n y_k F_k \quad \text{и}$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n y_k F_k}{\sum_{k=1}^n F_k}.$$



Относительно оси y : $m_y(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n m_y(\vec{F}_k)$, $x_C R = \sum_{k=1}^n x_k F_k$ или $x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k F_k}{\sum_{k=1}^n F_k}$. Чтобы определить координату z_C повернем все силы на 90° так,

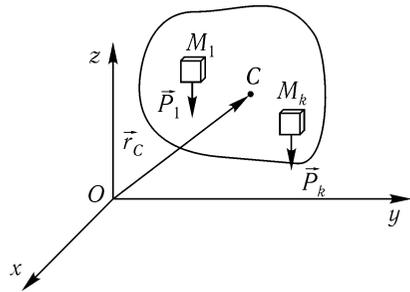
чтобы они стали параллельны оси y . Тогда

$$m_z(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k), \quad z_C R = \sum_{k=1}^n z_k F_k \quad \text{и} \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n z_k F_k}{\sum_{k=1}^n F_k}.$$

Следовательно, формула для определения радиус-вектора центра параллельных сил принимает вид

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n F_k}.$$

Центр тяжести твердого тела



Центр тяжести твердого тела — это центр параллельных сил тяжести частиц данного тела.

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \vec{r}_k}{P}.$$

Для однородного тела положение центра тяжести тела не зависит от материала, а определяется геометрической формой тела.

γ — удельный вес однородного тела, $P_k = \gamma \Delta V_k$, $P = \gamma V$. Подставив эти значения в формулу для определения \vec{r}_C , имеем

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta V_k \vec{r}_k}{V}.$$

Откуда, проектируя на оси и переходя к пределу, получаем координаты центра тяжести однородного объема:

$$x_C = \lim_{\Delta V_k \rightarrow 0} \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \Delta V_k x_k = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dV,$$

$$y_C = \lim_{\Delta V_k \rightarrow 0} \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \Delta V_k y_k = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dV,$$

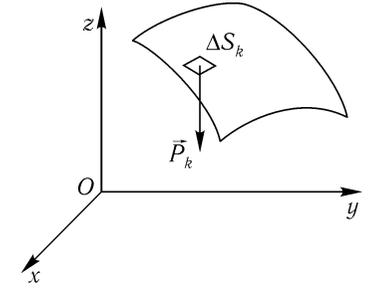
$$z_C = \lim_{\Delta V_k \rightarrow 0} \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \Delta V_k z_k = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dV.$$

Аналогично для координат центра тяжести однородной поверхности:

$$x_C = \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n \Delta S_k x_k = \frac{1}{S} \iint_{(S)} x dS,$$

$$y_C = \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n \Delta S_k y_k = \frac{1}{S} \iint_{(S)} y dS,$$

$$z_C = \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n \Delta S_k z_k = \frac{1}{S} \iint_{(S)} z dS;$$

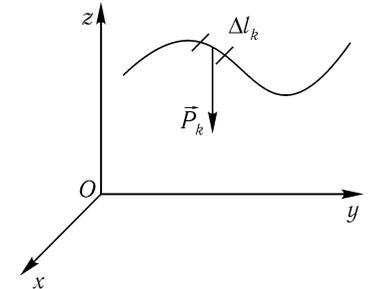


и координат центра тяжести однородной линии:

$$x_C = \lim_{\Delta l_k \rightarrow 0} \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \Delta l_k x_k = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl,$$

$$y_C = \lim_{\Delta l_k \rightarrow 0} \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \Delta l_k y_k = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl,$$

$$z_C = \lim_{\Delta l_k \rightarrow 0} \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \Delta l_k z_k = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl.$$



Способы нахождения координат центра тяжести:

1. Аналитический (интегрированием).

2. Метод симметрии

- Если тело имеет плоскость или ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой плоскости или оси.
- Если тело имеет две оси симметрии, то центр тяжести лежит в точке пересечения этих осей.

3. Экспериментальный (метод подвешивания тела).

4. Метод разбиения на части.

Разновидность метода разбиения на части — метод отрицательных площадей и объемов (для тел с полостями).

Центры тяжести простейших фигур:

1. Треугольник.

Центр тяжести площади треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан.

$$DM = MB, CM = \frac{1}{3}AM.$$

2. Дуга окружности.

Дуга имеет ось симметрии. Центр тяжести лежит на этой оси, т. е. $y_C = 0$.

$x_C = \frac{1}{L} \int x dl$, $dl = R d\varphi$, R — радиус окружности, $x = R \cos \varphi$, $L = 2\alpha R$,

$$x_C = \frac{1}{2\alpha R} \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi R d\varphi = \frac{R^2}{2\alpha R} \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

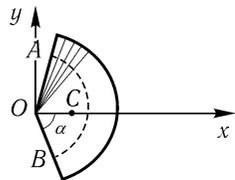
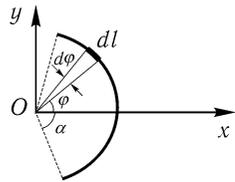
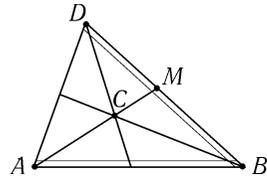
Следовательно:

$$x_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

3. Круговой сектор.

Рассмотрим круговой сектор радиуса R с центральным углом 2α . Сектор имеет ось симметрии Ox , на которой находится центр тяжести. Разбиваем сектор на элементарные секторы, которые можно считать треугольниками. Центры тяжести элементарных секторов располагаются на дуге окружности радиуса $\frac{2}{3}R$. Центр тяжести сектора совпадает с центром тяжести дуги AB .

$$x_c = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$



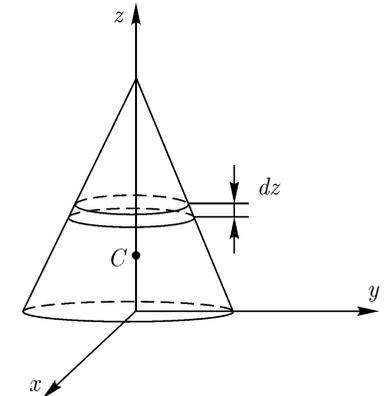
4. Конус.

Рассмотрим однородный конус с радиусом основания R и высотой H . Поместим начало координат в центр основания конуса и ось z совместим с осью конуса.

Оси x и y лежат в плоскости основания конуса и из соображений симметрии $x_C = 0$, $y_C = 0$.

Координату z_C определяем аналитически

$$z_C = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dV.$$



Разбиваем конус горизонтальными плоскостями на элементарные объемы, которые в пределе, при увеличении количества элементов разбиения, можно принять за диски толщины dz . Выделим элементарный диск на расстоянии z от основания конуса. Радиус элементарного диска (из подобия треугольников) $r = \frac{R(H-z)}{H}$, а его объем

$$dV = \pi r^2 dz = \pi \frac{R^2(H-z)^2}{H^2} dz.$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{1}{V} \int_0^H z \pi \frac{R^2(H-z)^2}{H^2} dz = \\ &= \frac{1}{V} \left(\frac{\pi R^2 z^2}{2} - \frac{2\pi R^2 z^3}{3H} + \frac{\pi R^2 z^4}{4H^2} \right) \Big|_0^H = \frac{\pi R^2 H^2}{12V}. \end{aligned}$$

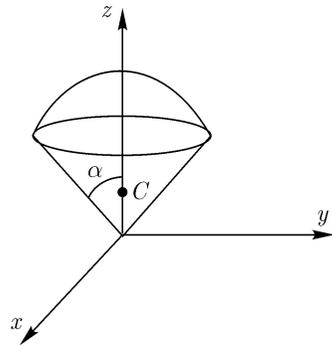
Так как $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, то

$$z_C = \frac{H}{4}.$$

5. Шаровой сектор.

Рассмотрим однородный шаровой сектор радиуса R с углом α между образующей и осью симметрии.

Поместим начало координат в центр шара и направим ось z по оси симметрии. Из соображений симметрии $x_C = 0$, $y_C = 0$.



Координату z_C определяем аналитически

$$z_C = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dV.$$

Переходя к сферическим координатам ($z = r \cos \theta$, $dV = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr$), находим

$$z_C = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} d\theta \int_0^R r^3 \cos \theta \sin \theta dr,$$

$$\text{где } V = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos \alpha).$$

Откуда

$$z_C = \frac{3}{8} R (1 + \cos \alpha).$$

В частности, для центра тяжести полушара

$$z_C = \frac{3}{8} R.$$

Литература:

[1, § 31–35];
[2, § 53–60];
[4, п. 8.1–8.4].

ЛЕКЦИЯ 8

Кинематика точки

1. Задачи кинематики точки.
2. Способы задания движения точки в заданной системе отсчета.
3. Скорость точки.
4. Ускорение точки.
5. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения.

Задачи кинематики точки

1. Описание способов задания движения точки.
2. Определение кинематических характеристик движения точки (скорости, ускорения) по заданному закону движения.

Задать движение — это дать способ, с помощью которого можно определить положение точки в любой момент времени по отношению к выбранной системе отсчета.

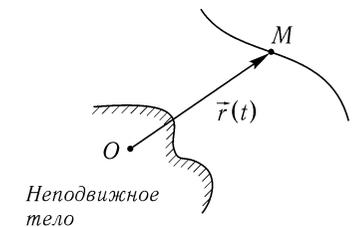
Способы задания движения точки в заданной системе отсчета

1. Векторный способ задания движения.

Положение точки определяется радиус-вектором, проведенным из неподвижной точки в выбранной системе отсчета.

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

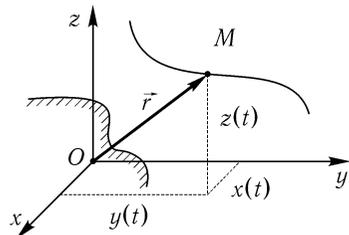
— векторное уравнение движения точки.



2. Координатный способ задания движения.

В этом случае задаются координаты точки как функции времени:

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t) \end{cases} \quad \text{— уравнения движения точки в координатной форме.}$$



Это и параметрические уравнения **траектории** движущейся точки, в которых роль параметра играет время t . Чтобы записать ее уравнение в явной форме, надо исключить из них t . Например, в случае плоской траектории

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \end{cases}$$

исключив t , получим:

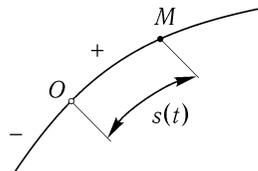
$$F(x, y) = 0 \quad \text{или} \quad y = \varphi(x).$$

Для задания движения точки могут быть использованы другие системы координат — цилиндрическая, сферическая, полярная и т. д.

3. Естественный способ задания движения.

Задаются:

- Траектория точки.
- Начало отсчета на траектории с указанием положительного направления отсчета.
- Закон изменения дуговой координаты:



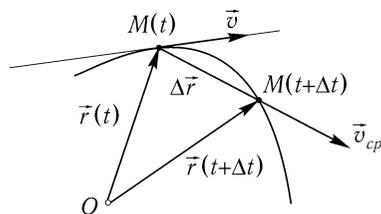
$$s = f(t).$$

Этим способом удобно пользоваться в том случае, когда траектория точки заранее известна.

Скорость точки

Рассмотрим перемещение точки за малый промежуток времени Δt : $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$. Тогда $\vec{v}_{cp} = \Delta \vec{r} / \Delta t$ — средняя скорость точки за промежуток времени Δt . Скорость точки в данный момент времени

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$



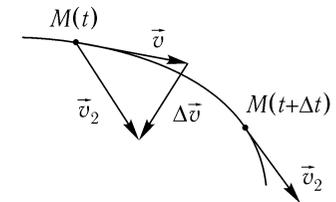
Скорость точки — это кинематическая мера ее движения, равная производной по времени от радиус-вектора этой точки в рассматриваемой системе отсчета

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

Ускорение точки

Среднее ускорение $\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ характеризует изменение вектора скорости за малый промежуток времени Δt . Ускорение точки в данный момент времени $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.



Ускорение точки — это мера изменения ее скорости, равная производной по времени от скорости этой точки или второй производной от радиус-вектора точки по времени. Ускорение точки характеризует изменение вектора скорости по величине и направлению и направлено в сторону вогнутости траектории.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

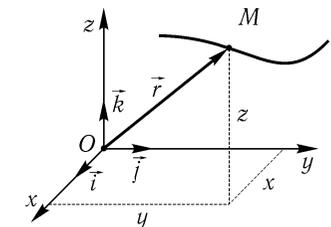
Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения

Связь векторного способа задания движения и координатного дается соотношением $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Из определения скорости: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$.

Проекции скорости на оси координат равны производным соответствующих координат по времени

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Точкой сверху здесь и в дальнейшем обозначается дифференцирование по времени.



Модуль и направление скорости определяются выражениями:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{v_z}{v}.$$

Из определения ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{y} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.$$

Проекции ускорения на оси координат равны вторым производным соответствующих координат по времени:

$$\boxed{a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}.}$$

Модуль и направление ускорения определяются выражениями:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{a_z}{a}.$$

Литература:

- [1, §36–40];
[2, §62–66, 68, 70, 71, 76];
[4, п. 9.1–9.6].

ЛЕКЦИЯ 9

Скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения

1. Естественные оси.
2. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения.

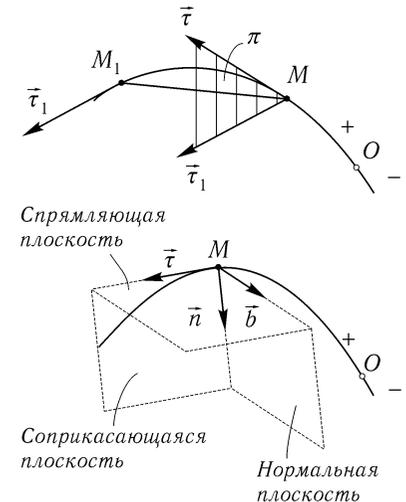
Естественные оси

Естественные оси (касательная, главная нормаль, бинормаль) — это оси подвижной прямоугольной системы координат с началом в движущейся точке. Их положение определяется траекторией движения.

Касательная (с единичным вектором $\vec{\tau}$) направлена по касательной в положительном направлении отсчета дуговой координаты и находится как предельное положение секущей, проходящей через данную точку.

Через касательную проходит **соприкасающаяся плоскость**, которая находится как предельное положение плоскости π при стремлении точки M_1 к точке M . **Нормальная плоскость** перпендикулярна касательной. Линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей — **главная нормаль**. Единичный вектор главной нормали \vec{n} направлен в сторону вогнутости траектории.

Бинормаль с единичным вектором \vec{b} направлена перпендикулярно касательной и главной нормали так, что орты $\vec{\tau}$, \vec{n} и \vec{b} образуют правую систему координат.



Координатные плоскости введенной подвижной системы координат (соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая) образуют **естественный трехгранник**, который перемещается вместе с движущейся точкой, как твердое тело. Его движение в пространстве определяется траекторией и законом изменения дуговой координаты.

Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения

Из определения скорости точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \vec{\tau}$, $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной.

Тогда:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}, \quad \boxed{\vec{v} = \dot{s} \vec{\tau}.}$$

Алгебраическая скорость $v_\tau = \dot{s}$ — проекция вектора скорости на касательную, равная производной от дуговой координаты по времени. Если производная положительна, то точка движется в положительном направлении отсчета дуговой координаты.

Из определения ускорения

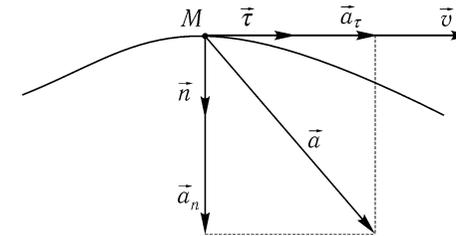
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{s} \vec{\tau}) = \ddot{s} \vec{\tau} + \dot{s} \frac{d\vec{\tau}}{dt},$$

$\vec{\tau}$ — переменный по направлению вектор и $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\vec{\tau}}{ds}$. Производная $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ определяется только свойствами траектории в окрестности данной точки, при этом $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$, \vec{n} — единичный вектор главной нормали, ρ — радиус кривизны траектории в данной точке.

Таким образом $\vec{a} = \ddot{s} \vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n}$, т. е. вектор ускорения раскладывается на две составляющие — **касательное и нормальное ускорения**

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n}, \quad \boxed{\vec{a}_\tau = \ddot{s} \vec{\tau} = \dot{v}_\tau \vec{\tau}}, \quad \boxed{\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}},$$

где $a_\tau = \dot{s} = \dot{v}_\tau$ — алгебраическое значение касательного ускорения (проекция вектора ускорения на касательную) характеризует изменение скорости по величине; $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ — нормальное ускорение (проекция вектора ускорения на главную нормаль) характеризует изменение скорости по направлению. Вектор ускорения всегда лежит в соприкасающейся плоскости и проекция ускорения на бинормаль равна нулю ($a_b = 0$).



Движение точки ускоренное, если знаки проекций векторов скорости и ускорения на касательную совпадают.

Литература:

- [1, § 42–43];
- [2, § 67, 72, 73, 75];
- [4, п. 9.4–9.6].

ЛЕКЦИЯ 10

Простейшие движения твердого тела

1. Задачи кинематики твердого тела.
2. Поступательное движение твердого тела.
3. Вращательное движение твердого тела.
4. Определение скоростей и ускорений точек вращающегося тела.
5. Векторные выражения скорости и ускорения точки вращающегося тела.

Задачи кинематики твердого тела

1. Описание способов задания движения твердого тела.
2. Определение кинематических характеристик движения тела.
3. Определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Поступательное движение твердого тела

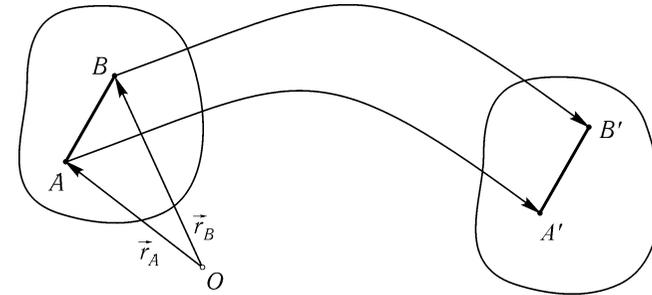
Поступательное движение твердого тела — это движение, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельной своему начальному положению.

Теорема. При поступательном движении твердого тела траектории, скорости и ускорения точек тела одинаковы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В любой момент движения выполняется равенство:

$$\vec{r}_B(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{AB}, \quad \vec{AB} = \text{const};$$



откуда следует одинаковость траекторий. Дифференцируя его по времени дважды, установим равенство скоростей и ускорений:

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt}, \quad \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_B}{dt^2}.$$

Теорема доказана.

Для задания поступательного движения твердого тела достаточно задать движение одной из его точек:

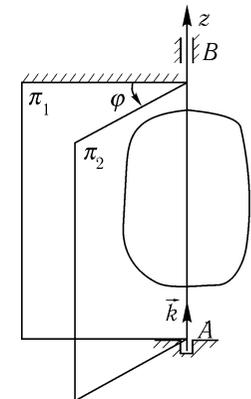
$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ z_A = z_A(t), \end{cases} \quad \text{— уравнения поступательного движения твердого тела.}$$

Вращательное движение твердого тела

Вращательное движение — это движение твердого тела, имеющего две неподвижные точки. Прямая, проходящая через эти точки, называется **осью вращения**. Положение тела определено, если задан угол между плоскостями π_1 и π_2 , одна из которых неподвижна, а другая жестко связана с телом.

$$\varphi = \varphi(t) \quad \text{— уравнение вращательного движения твердого тела.}$$

За положительное направление отсчета принимается вращение против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси вращения z .



Для характеристики изменения угла поворота с течением времени вводится величина, которая называется **угловой скоростью** ω , определяемая как предел средней угловой скорости $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, т. е. $\omega = \dot{\varphi}$ — алгебраическая угловая скорость.

Вектор угловой скорости — это вектор, направленный по оси вращения в ту сторону, откуда оно видно происходящим против хода часовой стрелки, с модулем, равным модулю алгебраической угловой скорости

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k},$$

где \vec{k} — единичный вектор оси вращения.

Угловое ускорение — мера изменения угловой скорости. Определяется как предел среднего углового ускорения $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ т. е.

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad \text{— алгебраическое значение углового ускорения.}$$

Вектор углового ускорения — производная вектора угловой скорости по времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \vec{k}) = \ddot{\varphi} \vec{k}.$$

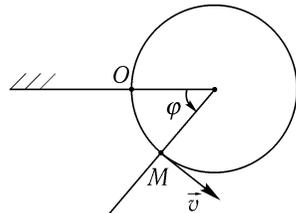
Если вектор углового ускорения совпадает по направлению с вектором угловой скорости, то вращение тела ускоренное.

Определение скоростей и ускорений точек вращающегося тела

Так как траектории точек вращающегося тела — окружности, при определении скорости и ускорения удобно воспользоваться естественным способом задания движения.

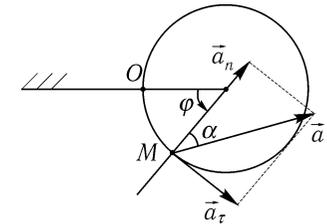
Дуговая координата, определяющая положение точки на траектории, связана с углом поворота равенством: $s = \varphi R$. Откуда: $v_\tau = \dot{s} = \dot{\varphi} R = \omega R$,

$$v_\tau = \omega R.$$



Ускорение определяем как сумму:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{\varphi}^2 R^2}{R} = \omega^2 R, \\ \boxed{a_n &= \omega^2 R}, \\ a_\tau &= \dot{v} = \dot{\varphi} R = \varepsilon R, \\ \boxed{a_\tau &= \varepsilon R}. \end{aligned}$$



$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \text{ — модуль ускорения, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_\tau|}{|a_n|} = \frac{|\varepsilon R|}{\omega^2 R} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Касательное и нормальное ускорения при вращательном движении твердого тела называют также вращательным и центростремительным:

$$\vec{a}_\tau = \vec{a}_{\text{вр}}, \quad \vec{a}_n = \vec{a}_{\text{ц.}}$$

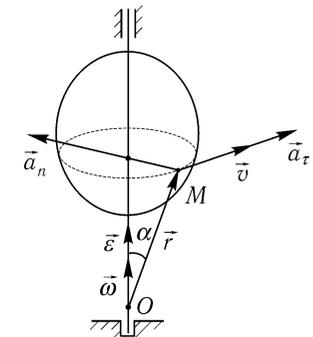
Векторные выражения скорости и ускорения точки вращающегося тела

Модуль скорости точки вращающегося тела $v = \omega R = \omega r \sin \alpha$ равен модулю векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Направление скорости совпадает с направлением векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Следовательно:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{— формула Эйлера.}^1$$

Для получения векторных формул для ускорений точек вращающегося тела продифференцируем это выражение по времени.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$



¹Эйлер Леонард (15.04.1707–18.09.1783) — математик, механик, физик и астроном (род. в г. Базеле, Швейцария). Академик Петербургской АН, член Парижской АН, Берлинской АН, Лондонского королевского общества. Научные интересы Эйлера относятся ко всем основным областям естествознания. Труды по вариационному исчислению, интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, степенным рядам, специальным функциям, дифференциальной геометрии, теории чисел, гидродинамике, небесной механике, теории теплоты, оптике и по некоторым прикладным вопросам. Список трудов Эйлера содержит около 850 названий. Заложил основы математической физики, механики твердого тела, механики машин. С 1726 по 1741 и с 1766 по 1783 г. жил и работал в Петербурге.

Воспользовавшись определением векторного произведения, нетрудно убедиться в том, что первое слагаемое — вращательное, а второе — центростремительное ускорения. Т. е.

$$\vec{a}_{\text{вр}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_{\text{ц}} = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Литература:

- [1, § 48, 49, 51];
 [2, § 78–82,];
 [4, п. 10.1–10.2].

ЛЕКЦИЯ 11

Сложное движение точки

1. Основные понятия.
2. Теорема о сложении скоростей.
3. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса).
4. Ускорение Кориолиса.

Основные понятия

Сложное движение точки (или тела) — движение, которое рассматривается одновременно в разных системах отсчета.

$O_1x'y'z'$ — основная система координат.

$Oxyz$ — подвижная система координат.

M — движущаяся точка.

Движение точки M по отношению к основной системе координат называется **абсолютным движением**.

Движение точки M по отношению к подвижной системе координат называется **относительным движением**.

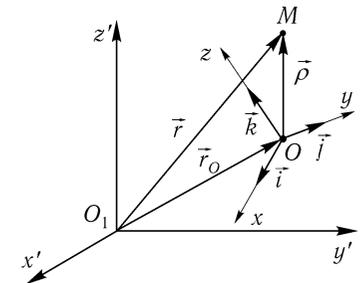
Переносное движение — движение подвижной системы координат по отношению к основной.

Абсолютная скорость и абсолютное ускорение точки — это скорость и ускорение точки в основной системе координат:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Относительная скорость и относительное ускорение точки — это скорость и ускорение точки в подвижной системе координат:

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$



$$\vec{v}_r = \left. \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right|_{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \text{const}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

$$\vec{a}_r = \left. \frac{d\vec{v}_r}{dt} \right|_{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \text{const}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.$$

Переносная скорость и переносное ускорение точки — это скорость и ускорение того места подвижной системы координат, с которым в данный момент совпадает движущаяся точка:

$$\vec{v}_e = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{x, y, z = \text{const}},$$

$$\vec{v}_e = \left. \frac{d}{dt} (\vec{r}_O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \right|_{x, y, z = \text{const}} = \dot{\vec{r}}_O + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

$$\vec{a}_e = \left. \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right|_{x, y, z = \text{const}} = \ddot{\vec{r}}_O + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.$$

Теорема о сложении скоростей

Теорема. При сложном движении точки абсолютная скорость равна сумме ее относительной и переносной скоростей. $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

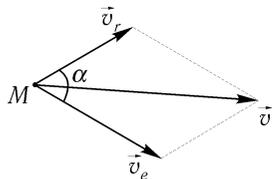
В каждый момент времени справедлива зависимость:

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho} = \vec{r}_O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Тогда

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \underbrace{\dot{\vec{r}}_O + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}}_{\vec{v}_e} + \underbrace{\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}}_{\vec{v}_r}.$$

Теорема доказана.



$$\text{Модуль скорости: } v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos \alpha}.$$

Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)¹

Теорема. При непоступательном переносном движении абсолютное ускорение точки находится как сумма трех ускорений: относительного, переносного и ускорения Кориолиса.

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r,$$

где $\vec{\omega}_e$ — угловая скорость переносного вращения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По теореме о сложении скоростей:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_O + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}.$$

Дифференцируя по времени, находим:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}_O + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + 2(\dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}) + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.$$

Производные от постоянных по модулю единичных векторов определяются по формуле Эйлера:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}.$$

С учетом этого:

$$\begin{aligned} \dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}} &= \dot{x}(\vec{\omega}_e \times \vec{i}) + \dot{y}(\vec{\omega}_e \times \vec{j}) + \dot{z}(\vec{\omega}_e \times \vec{k}) = \\ &= \vec{\omega}_e \times (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) = \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \end{aligned}$$

В итоге: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае поступательного переносного движения ($\vec{\omega}_e = 0$) абсолютное ускорение точки находится как сумма ее относительного и переносного ускорений.

¹Кориолис Гюстав Гаспар (21.05.1792–19.09.1843) — франц. механик, член Парижской АН. Основные исследования относятся к аналитической механике. Дал определение понятия работы и ввел этот термин. Ввел понятие полного ускорения.

Ускорение Кориолиса

Ускорение Кориолиса учитывает изменение относительной скорости, вызванное переносным движением, и изменение переносной скорости, вызванное относительным движением. Способы вычисления ускорения Кориолиса:

1. По правилу векторного произведения

1. По правилу векторного произведения

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r,$$

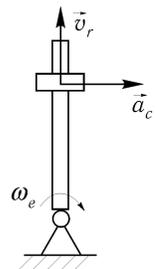
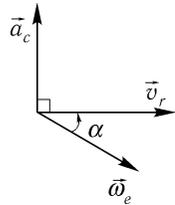
$$a_c = 2|\vec{\omega}_e| |\vec{v}_r| \sin \alpha.$$

2. По правилу Жуковского¹.

Для определения направления ускорения Кориолиса надо вектор относительной скорости спроектировать на плоскость, перпендикулярную оси вращения, и повернуть в сторону вращения на угол 90° .

Литература:

- [1, § 64–66];
[2, § 111–116];
[4, п. 13.1–13.4].



¹Жуковский Николай Егорович (17.01.1847–17.03.1921) — русский ученый в области механики, основоположник современной аэродинамики, чл.-корр. Петербургской АН. Работы относятся к аэродинамике, гидродинамике, прикладной механике, теории дифференциальных уравнений, теории механизмов, математике и астрономии. Вывел формулу для определения подъемной силы крыла.

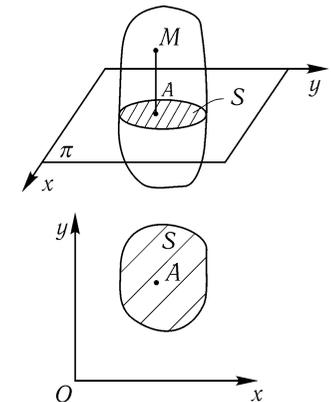
ЛЕКЦИЯ 12

Плоскопараллельное движение твердого тела

1. Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.
2. Определение скоростей точек тела при плоском движении.
3. Мгновенный центр скоростей (МЦС).
4. Способы нахождения МЦС.
5. Определение ускорений точек тела при плоском движении.
6. Мгновенный центр ускорений (МЦУ).

Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела

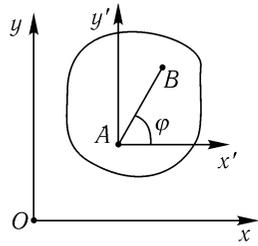
Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела — движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Из определения следует, что перпендикуляр MA остается параллелен своему начальному положению. По теореме о поступательном движении траектории, скорости и ускорения точек M и A совпадают. Таким образом исследование плоского движения твердого тела можно свести к рассмотрению движения плоской фигуры S в ее плоскости.



Примеры плоскопараллельного движения:



Для задания движения плоской фигуры введем подвижную систему координат, совершающую поступательное движение с точкой A . Движение плоской фигуры рассмотрим как сложное, при этом переносное движение — это поступательное движение подвижной системы координат вместе с точкой A (полюсом). Относительное движение — это вращение вокруг полюса.



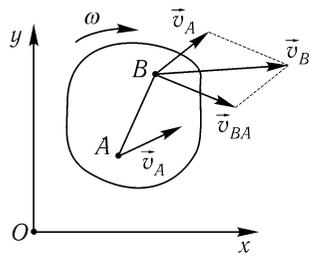
Положение плоской фигуры можно задать двумя координатами полюса и одним углом между отрезком, жестко связанным с телом, и направлением одной из неподвижных осей:

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

— уравнения движения плоской фигуры.

При задании плоского движения за полюс может приниматься любая точка тела. Следовательно, вид первых двух уравнений движения зависит от выбора полюса. Закон изменения угла от выбора полюса не зависит. Для характеристики изменения угла поворота плоской фигуры вводится, как и при вращательном движении, угловая скорость — $\omega = \dot{\varphi}$, которая также не зависит от выбора полюса. Изменение угловой скорости характеризует угловое ускорение — $\varepsilon = \dot{\omega}$.

Определение скоростей точек тела при плоском движении



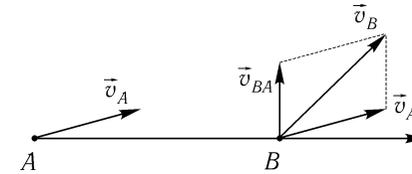
Теорема. *Скорость любой точки тела при плоском движении находится как сумма скорости полюса и скорости данной точки во вращательном движении вокруг полюса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Используем теорему о сложении скоростей при сложном движении точки: $\vec{v}_B = \vec{v}_r + \vec{v}_e$, $\vec{v}_e = \vec{v}_A$, так как подвижная система движется поступательно, $\vec{v}_r = \vec{v}_{BA}$, $v_{BA} = \omega \cdot BA$, так как относительное движение вращательное.

Следовательно: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$. Теорема доказана.

Следствие. *Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на направление вектора, соединяющего эти точки, равны между собой.*



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad np_{\overline{AB}} \vec{v}_B = np_{\overline{AB}} \vec{v}_A + \underbrace{np_{\overline{AB}} \vec{v}_{BA}}_{=0}, \quad np_{\overline{AB}} \vec{v}_A = np_{\overline{AB}} \vec{v}_B.$$

Следствие доказано.

Мгновенный центр скоростей (МЦС)

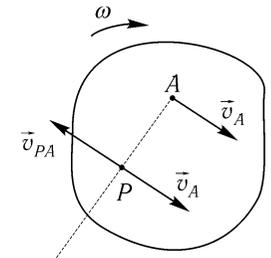
Теорема. *При непоступательном движении плоской фигуры существует жестко связанная с ней точка, скорость которой в данный момент движения равна нулю. Эта точка является **мгновенным центром скоростей**.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Отложим перпендикуляр к скорости в т. A и выберем на нем точку на расстоянии: $AP = \frac{v_A}{\omega}$. По теореме о скоростях: $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}$, где $v_{PA} = \omega \cdot AP = v_A$. Следовательно: $v_P = v_A - v_{PA} = 0$.

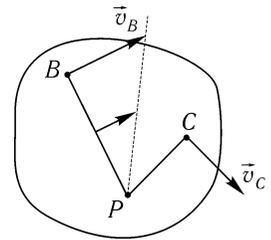
Теорема доказана.

Выбирая мгновенный центр скоростей за полюс, нетрудно убедиться, что скорость любой точки плоской фигуры находится как скорость во вращательном движении вокруг МЦС.

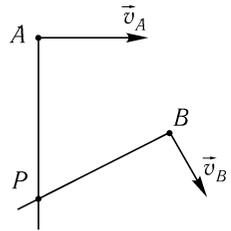


$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_P + \vec{v}_{BP}, \\ v_P &= 0, \\ v_B &= v_{BP} = \omega \cdot BP, \\ v_C &= v_{CP} = \omega \cdot CP, \\ \frac{v_C}{v_B} &= \frac{CP}{BP}, \quad \omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_B}{BP}. \end{aligned}$$

Через МЦС проходит мгновенная ось вращения тела.

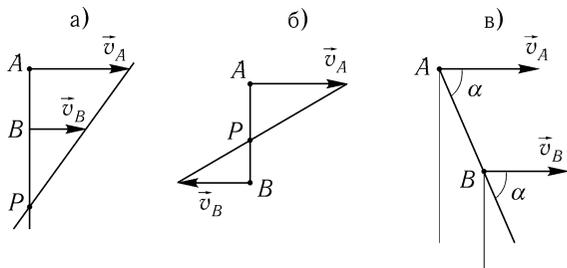


Способы нахождения МЦС



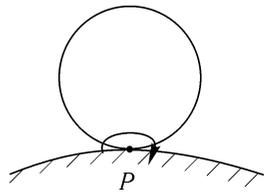
1. Известны направления скоростей двух точек тела и они не параллельны. МЦС лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям.

2. Известны направления скоростей двух точек тела и они параллельны.



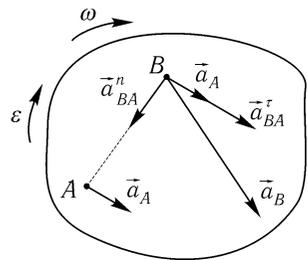
в) $v_A \cdot \cos \alpha = v_B \cdot \cos \alpha$, т. е. $v_A = v_B$ и $v_{BA} = \omega \cdot BA = 0$.

Если МЦС не существует (находится в бесконечности), то тело совершает **мгновенно-поступательное** движение. Угловая скорость равна нулю. Скорости всех точек одинаковы.



3. Качение без скольжения по неподвижной поверхности (нет проскальзывания). МЦС находится в точке касания тела с неподвижной поверхностью.

Определение ускорений точек тела при плоском движении



Теорема. Ускорение точки плоской фигуры равно сумме ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении вокруг полюса.

Доказательство.

Дано: $\vec{a}_A, \omega, \epsilon$.

Ускорение точки B в ее сложном движении: $\vec{a}_B = \vec{a}_r + \vec{a}_e$, где относительное движе-

ние — вращение вокруг полюса A , переносное движение — поступательное вместе с полюсом, $\vec{a}_e = \vec{a}_A, \vec{a}_r = \vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^r + \vec{a}_{BA}^n, \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^r + \vec{a}_{BA}^n$. Теорема доказана.

Мгновенный центр ускорений (МЦУ)

Теорема. При любом непоступательном движении плоской фигуры существует жестко связанная с ней точка, ускорение которой в данный момент движения равно нулю. Эта точка называется **мгновенным центром ускорений**.

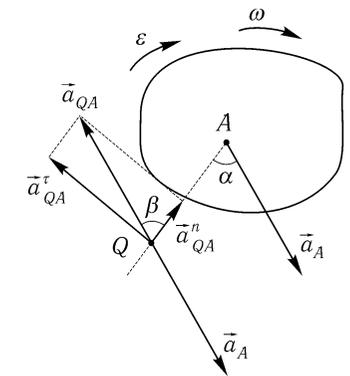
Доказательство.

Проведем прямую через точку A под углом α к направлению вектора ускорения. При этом $\tan \alpha = \frac{\epsilon}{\omega^2}$. Отложим отрезок: $AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}$.

Определим ускорение найденной точки Q : $\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA}$:

$$\vec{a}_{QA} = \vec{a}_{QA}^r + \vec{a}_{QA}^n, \text{ где } a_{QA}^r = \epsilon \cdot QA, \\ a_{QA}^n = \omega^2 \cdot QA.$$

Следовательно, $a_{QA} = \sqrt{a_{QA}^{r^2} + a_{QA}^{n^2}} = QA \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} = a_A, \beta = \alpha$. Получаем, что ускорения \vec{a}_{QA} и \vec{a}_A равны по модулю, но противоположны по направлению. Следовательно: $a_Q = 0$. Точка Q — мгновенный центр ускорений.



Теорема доказана.

Выбирая мгновенный центр ускорений за полюс, находим, что при плоскопараллельном движении ускорение любой точки можно найти как ускорение во вращательном движении вокруг МЦУ.

Литература:

- [1, §52, 54–59];
- [2, §85–87, 90–92, 96–100];
- [4, п. 11.1, 11.2, 11.4, 11.5].

ЛЕКЦИЯ 13

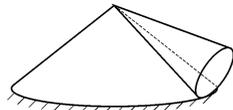
Сферическое и свободное движения
твердого тела

1. Уравнения сферического движения твердого тела
2. Скорости точек твердого тела при сферическом движении. Мгновенная ось вращения.
3. Уравнения свободного движения твердого тела.
4. Скорости точек тела при свободном движении.

Сферическое движение твердого тела — движение, при котором одна из точек тела во все время движения остается неподвижной. Например:



Качение подвижного конуса по неподвижному



Уравнения сферического движения твердого тела

Для описания сферического движения твердого тела введем две системы координат: неподвижную — $Oxyz$ и подвижную — $O\xi\eta\zeta$, жестко связанную с телом. Положение подвижной системы координат по отношению к неподвижной можно определить заданием трех углов Эйлера — ψ , θ , φ :

- ψ — угол прецессии,
 θ — угол нутации,
 φ — угол собственного вращения.

Построение подвижной системы координат по трем углам Эйлера начинается с изображения **линии узлов** OK — линии пересечения плоскости Oxy неподвижной и плоскости $O\xi\eta$ подвижной систем координат. Для этого необходимо повернуть ось Ox на угол ψ вокруг оси Oz . Положение оси $O\xi$ подвижной системы координат находится поворотом оси Oz на угол θ вокруг линии узлов, а положение оси $O\eta$ определяется поворотом линии узлов вокруг оси $O\xi$ на угол φ . Подвижная система координат построена и, если задан закон изменения углов Эйлера от времени, то заданы уравнения сферического движения твердого тела:

$$\psi = f_1(t), \quad \theta = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

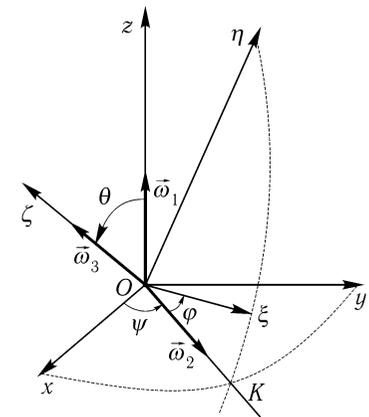
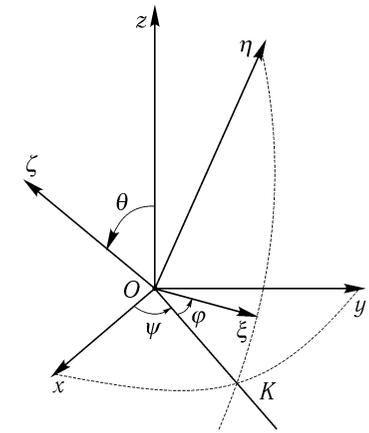
Помимо углов Эйлера возможно задание сферического движения твердого тела и при помощи других параметров, например, корабельных углов — крена, тангажа и курса.

Сферическое движение можно рассматривать как три одновременно происходящих вращения вокруг оси Oz , линии узлов и оси $O\xi$. Мерами изменения углов Эйлера являются соответствующие угловые скорости:

$$\omega_1 = \dot{\psi},$$

$$\omega_2 = \dot{\theta},$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi}.$$

Скорости точек твердого тела при сферическом движении.
Мгновенная ось вращения

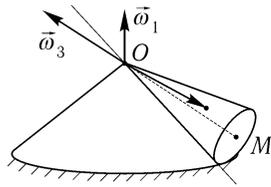
Теорема. Скорость любой точки тела при его сферическом движении находится как вращательная вокруг мгновенной оси вращения с угловой

скоростью, равной геометрической сумме угловых скоростей составляющих вращений:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

где $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$, \vec{r} — радиус-вектор точки тела, проведенный из неподвижного центра.

Мгновенная ось вращения — геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент времени равны нулю. (Существование мгновенной оси можно проиллюстрировать на примере качения без проскальзывания подвижного конуса по неподвижному. Очевидно, что мгновенной осью является линия контакта между конусами.)



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим сначала сложение двух вращательных движений (угол θ , например, будем считать фиксированным) и определим скорость произвольной точки тела по теореме сложения скоростей, принимая вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ за переносное, а вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_3$ за относительное движение.

По теореме сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

По формуле Эйлера:

$$\vec{v}_r = \vec{\omega}_3 \times \vec{OM},$$

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}_1 \times \vec{OM},$$

$$\text{и } \vec{v} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_3) \times \vec{OM}.$$

Вектор $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_3$ есть абсолютная угловая скорость в случае сложения двух вращательных движений.

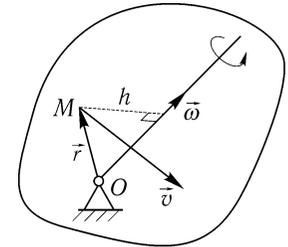
Так как в общем случае сферического движения тело одновременно участвует в трех вращениях, абсолютная угловая скорость определяется равенством $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$.

(Принимаем результат предыдущего сложения двух вращательных движений за переносное движение, а вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ за относительное.) Скорость любой точки тела, совершающего сферическое движение, находится по формуле Эйлера:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{OM}.$$

Вектор $\vec{\omega}$ называется **мгновенной угловой скоростью**.

Из определения векторного произведения следует, что если векторы $\vec{\omega}$ и \vec{OM} направлены по одной прямой, то $\vec{v} = 0$. Это доказывает существование мгновенной оси вращения, положение которой совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$. При известном положении мгновенной оси вращения модули скоростей точек тела определяются формулой: $v = \omega h$. Теорема доказана.



Аналитически скорость может быть найдена по проекциям на оси подвижной или неподвижной систем координат.

Найдем проекции скорости произвольной точки тела на оси подвижной системы координат, для чего запишем выражения проекций ее радиус-вектора и угловых скоростей на соответствующие оси:

$$\vec{OM}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\vec{\omega}_1(\omega_1 \sin \theta \sin \varphi, \omega_1 \sin \theta \cos \varphi, \omega_1 \cos \theta),$$

$$\vec{\omega}_2(\omega_2 \cos \varphi, -\omega_2 \sin \varphi, 0),$$

$$\vec{\omega}_3(0, 0, \omega_3),$$

$$\vec{\omega}(\omega_1 \sin \theta \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi, \omega_1 \sin \theta \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi, \omega_1 \cos \theta + \omega_3).$$

Записываем векторное произведение в координатной форме

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}.$$

Откуда:

$$v_\xi = \zeta(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) - \eta(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}),$$

$$v_\eta = \xi(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) - \zeta(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi),$$

$$v_\zeta = \eta(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) - \xi(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi).$$

Предлагается в качестве упражнения найти проекции вектора скорости на оси неподвижной системы координат.

Следствие. Проекции скоростей двух точек тела при его сферическом движении на направление вектора, соединяющего эти точки, равны между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим точки A и B тела, совершающего сферическое движение. Их скорости определяются равенствами

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{OA}, \quad \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{OB}.$$

Вычитая одно равенство из другого и умножая скалярно на вектор \vec{AB} , находим

$$(\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{AB} = (\vec{\omega} \times (\vec{OA} - \vec{OB})) \cdot \vec{AB} \implies (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{AB} = (\vec{\omega} \times \vec{BA}) \cdot \vec{AB} = 0.$$

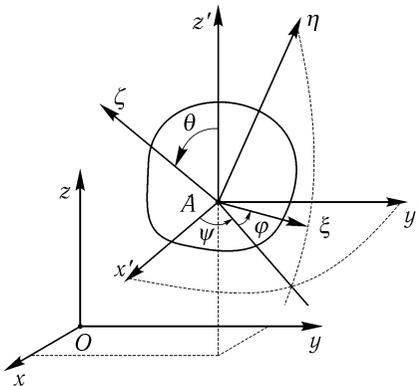
Откуда

$$\vec{v}_A \cdot \vec{AB} = \vec{v}_B \cdot \vec{AB} \quad \text{или} \quad \text{пр}_{\vec{AB}} \cdot \vec{v}_A = \text{пр}_{\vec{AB}} \cdot \vec{v}_B.$$

Следствие доказано.

Уравнения свободного движения твердого тела

Положение свободного твердого тела в пространстве можно задать тремя координатами некоторой точки тела, принятой за полюс, и тремя углами Эйлера, определяющими поворот тела вокруг этого полюса. Т. е. уравнения **свободного движения** твердого тела имеют вид:



$$\begin{aligned} x_A &= f_1(t), \\ y_A &= f_2(t), \\ z_A &= f_3(t), \\ \psi &= f_4(t), \\ \theta &= f_5(t), \\ \varphi &= f_6(t). \end{aligned}$$

Скорости точек тела при свободном движении

Теорема. Скорость любой точки свободного твердого тела равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в ее сферическом движении вокруг полюса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

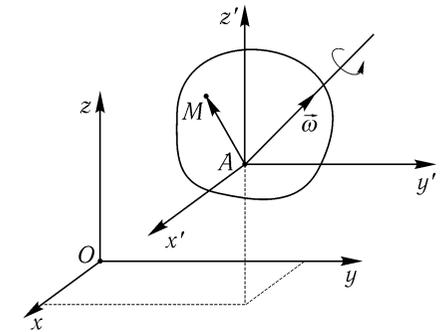
По теореме сложения скоростей $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$. Переносное движение — поступательное с полюсом A : $\vec{v}_e = \vec{v}_A$. Относительное движение — сферическое $\vec{v}_r = \vec{\omega} \times \vec{AM}$. Следовательно:

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AM}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Проекции скоростей двух точек тела при его свободном движении на направление вектора, соединяющего эти точки, равны между собой.

Доказывается аналогично следствию из теоремы о скоростях точек при сферическом движении.



Литература:

- [2, § 101, 102, 104, 107–109];
[4, п. 14.3, 14.8].

ЛЕКЦИЯ 14

Законы динамики

1. Законы Галилея – Ньютона.
2. Инерциальная система отсчета.
3. Основные задачи динамики.
4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.
5. Уравнения относительного движения.

В основании динамики лежат установленные в результате обобщения опыта законы.

Законы Галилея¹ – Ньютона²

1. Закон инерции.

Материальная точка сохраняет равномерное и прямолинейное движение или находится в состоянии покоя до тех пор, пока на нее не подействует сила.

2. Закон пропорциональности силы и ускорения.

Сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, которое пропорционально силе и направлено в сторону ее действия

$$m\vec{a} = \vec{F}$$
 — основное уравнение динамики,

m — масса точки, являющаяся мерой ее инертности.

¹Галилей Галилео (15.02.1564–8.01.1642) — итальянский физик, механик, математик, астроном, один из основателей точного естествознания. Исследования по статике, динамике и механике материалов.

²Ньютон Исаак (4.01.1643–31.03.1727) — английский математик, физик, механик, астроном, основоположник современной механики, член и президент Лондонского королевского общества, иностранный член Парижской АН. Открыл закон всемирного тяготения, создал теоретические основы механики и астрономии, разработал дифференциальное и интегральное исчисление. Также работы по теоретической и экспериментальной оптике, по геометрии и алгебре.

3. Закон равенства действия и противодействия.

Два тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными в противоположные стороны.

4. Закон независимости действия сил.

Материальная точка при действии на нее системы сил приобретает ускорение, равное сумме ускорений, возникающих от действия каждой силы в отдельности.

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n, \quad \text{где} \quad m\vec{a}_k = \vec{F}_k.$$

Откуда

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Инерциальные системы отсчета

Система отсчета, в которой выполняются первый и второй законы динамики, называется **инерциальной системой отсчета**. Инерциальность той или иной системы отсчета может быть проверена только опытным путем.

Для большинства технических задач за такую систему можно взять систему координат, связанную с Землей.

Основные задачи динамики

Первая задача динамики.

Определение сил, действующих на материальную точку, если известна масса точки и закон ее движения.

Вторая задача динамики.

Определение закона движения материальной точки при известной массе и силах, действующих на точку.

Примером решения первой и второй задач динамики служит аналитический вывод Ньютона силы всемирного тяготения из законов движения планет Кеплера¹ и решение обратной задачи — получение законов Кеплера при известной силе всемирного тяготения.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Воспользуемся основным уравнением динамики

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

¹Кеплер Иоганн (27.12.1571–15.11.1630) — немецкий астроном, математик и механик. Вывел два первых закона движения планет. Положил начало небесной механике.

Из закона независимости действия сил:

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \text{ — равнодействующая всех сил.}$$

В общем случае силы, действующие на точку, являются переменными. Тогда в проекциях на оси декартовой системы координат можно записать:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{cases}$$

Эти уравнения содержат производные координат и образуют систему дифференциальных уравнений движения материальной точки.

Общее решение этих уравнений содержит шесть произвольных постоянных:

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases}$$

Произвольные постоянные находятся из начальных условий:

$$\begin{cases} x|_{t=0} = x_0, & \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0, \\ y|_{t=0} = y_0, & \dot{y}|_{t=0} = \dot{y}_0, \\ z|_{t=0} = z_0, & \dot{z}|_{t=0} = \dot{z}_0. \end{cases}$$

Если точка движется по известной траектории, то основное уравнение динамики удобно записать в проекциях на оси естественной системы координат. В этом случае:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau(t, s, \dot{s}), \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n(t, s, \dot{s}), \\ 0 = F_b(t, s, \dot{s}). \end{cases}$$

Правые части этих уравнений содержат неизвестные силы реакций связей, так как движущаяся точка несвободна. Исследование движения предполагает одновременное решение первой и второй задач динамики при следующих начальных условиях:

$$s|_{t=0} = s_0, \quad \dot{s}|_{t=0} = \dot{s}_0.$$

Уравнения относительного движения

Получим уравнения движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета. Для этого воспользуемся теорией сложного движения точки, рассматривая ее движение одновременно в двух системах координат — основной $O'x'y'z'$ (инерциальная система отсчета) и подвижной $Oxyz$.

Пусть \vec{F} — равнодействующая сил, действующих на точку M .

В инерциальной системе отсчета:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Вспользуемся выражением для абсолютного ускорения точки (теорема Кориолиса): $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$. Тогда $m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = \vec{F}$, или $m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$.

Величины $m\vec{a}_e$ и $m\vec{a}_c$ имеют размерность силы. Вводя обозначения: $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$ — **переносная сила инерции**, $\vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c$ — **кориолисова сила инерции**, получаем

$$\boxed{\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c} \text{ — основное уравнение динамики относительного движения.}$$

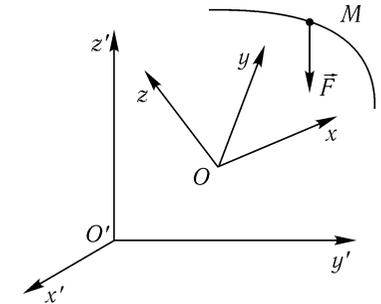
Уравнение движения в подвижной системе координат не совпадает с основным уравнением динамики, следовательно, соответствующая система отсчета не является инерциальной.

Итак, чтобы получить уравнение движения точки в неинерциальной системе отсчета, необходимо добавить переносную и кориолисову силы инерции.

Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки имеют вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \Phi_{ex} + \Phi_{cx}, \\ m\ddot{y} = F_y + \Phi_{ey} + \Phi_{cy}, \\ m\ddot{z} = F_z + \Phi_{ez} + \Phi_{cz}. \end{cases}$$

Если подвижная система координат движется поступательно, равномерно и прямолинейно, то переносная и кориолисова силы инерции равны



нулю и относительное движение описывается основным уравнением динамики. Это выражает принцип относительности классической механики, заключающийся в том, что уравнения движения не зависят от того, относятся ли их к неподвижным осям или подвижным, перемещающимся поступательно, равномерно и прямолинейно.

Литература:

- [1, §74, 77–80, 91];
 [3, §1, 10, 26];
 [4, п. 1.1–1.7, 6.1, 6.3].

ЛЕКЦИЯ 15

Прямолинейные колебания материальной точки

1. Классификация сил.
2. Свободные колебания.
3. Вынужденные колебания без сопротивления. Резонанс.
4. Влияние сопротивления на вынужденные колебания.

Классификация сил

Колебание — это движение, обладающее той или иной степенью повторяемости во времени. Необходимым условием возникновения колебаний материальной точки является наличие положения равновесия и силы, стремящейся вернуть точку в положение равновесия. В качестве примера рассмотрим простейший случай прямолинейных колебаний. Ось Ox совместим с линией движения, а начало координат поместим в положение равновесия. Введем следующую классификацию сил, действующих на материальную точку при колебаниях.

Восстанавливающие силы.

Силы, которые стремятся вернуть точку в положение равновесия. В дальнейшем рассматриваем случай, имеющий большое практическое значение, когда восстанавливающие силы пропорциональны отклонению точки от положения равновесия $\vec{F} = -c\vec{r}$, где c — коэффициент пропорциональности. В проекции на ось Ox : $F_x = -cx$.

Силы сопротивления.

Силы, препятствующие движению материальной точки. Рассмотрим силы сопротивления, пропорциональные скорости. Они возникают при движении тел с небольшими скоростями в вязких жидкостях или газах, т. е. $\vec{R} = -b\vec{v}$, где b — коэффициент сопротивления. В проекции на ось Ox : $R_x = -b\dot{x}$.

Возмущающие силы.

Силы, зависящие от времени. Наибольший интерес представляют возмущающие силы, которые изменяются с течением времени по периодическому закону: $Q_x = H \sin pt$, где H — амплитуда возмущающей силы, p — частота возмущающей силы.

Составим дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием восстанавливающей силы, силы сопротивления и возмущающей силы:

$$m\ddot{x} = F_x + R_x + Q_x \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -cx - b\dot{x} + H \sin pt.$$

После тождественных преобразований получаем

$$\boxed{\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin pt}$$
 — дифференциальное уравнение прямолинейных колебаний материальной точки.

С начальными условиями: $x|_{t=0} = x_0$, $\dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0$.

В данном уравнении $2n = \frac{b}{m}$ характеризует силу сопротивления среды, приходящуюся на единицу массы, $k^2 = \frac{c}{m}$ характеризует действие восстанавливающей силы, приходящейся на единицу массы, $h = \frac{H}{m}$ характеризует действие возмущающей силы.

Свободные колебания

Свободными называются колебания при отсутствии возмущающих сил ($h = 0$).

Рассмотрим движение точки в среде без сопротивления ($n = 0$).

$$\boxed{\ddot{x} + k^2x = 0}$$
 — дифференциальное уравнение гармонических свободных колебаний.

Для интегрирования этого линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами составим характеристическое уравнение

$$r^2 + k^2 = 0, \quad \text{его корни} \quad r_{1,2} = \pm ki.$$

Так как корни мнимые, общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Дифференцируя данное решение по времени, получим второе уравнение для определения постоянных интегрирования

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

С учетом начальных условий: $x|_{t=0} = x_0$, $\dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0$ имеем

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

Рассмотрим другой вид записи общего решения, для чего введем следующую подстановку:

$$C_1 = A \sin \alpha, \quad C_2 = A \cos \alpha,$$

тогда

$$x = A \sin(kt + \alpha).$$

Свободные прямолинейные колебания материальной точки происходят по гармоническому закону («по закону синуса»). При этом:

A — **амплитуда** колебаний,

α — **начальная фаза** колебаний,

$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ — **циклическая или круговая частота** свободных колебаний,

$T = \frac{2\pi}{k}$ — **период** свободных колебаний,

$\nu = \frac{1}{T}$ — **частота** колебаний (количество колебаний за одну секунду).

Частота и период свободных колебаний не зависят от начальных условий движения.

Рассмотрим движение точки в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, под действием линейной восстанавливающей силы ($h = 0$). В этом случае

$$\boxed{\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0}$$
 — дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

Характеристическое уравнение, соответствующее данному дифференциальному уравнению, имеет вид:

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0, \quad \text{его корни} \quad r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Если $n < k$ (случай малого сопротивления), то корни комплексные и общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = e^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2}t \right),$$

или в амплитудной форме:

$$x = Ae^{-nt} \sin \left(\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha \right).$$

Множитель e^{-nt} указывает на то, что амплитуда колебаний с течением времени уменьшается. Такие колебания называются **затухающими**.

Период затухающих колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}},$$

где T — период свободных колебаний без сопротивления. Если $n \ll k$, то сопротивление не влияет в значительной степени на период колебаний.

Рассмотрим влияние сопротивления на изменение амплитуды колебаний. В некоторый момент времени $t = t_1$:

$$x_1(t_1) = Ae^{-nt_1} \sin \left(\sqrt{k^2 - n^2}t_1 + \alpha \right);$$

через промежуток времени, равный периоду

$$\begin{aligned} x_2(t_1 + T_1) &= Ae^{-n(t_1+T_1)} \sin \left(\sqrt{k^2 - n^2}t_1 + \sqrt{k^2 - n^2}T_1 + \alpha \right) = \\ &= e^{-nT_1} Ae^{-nt_1} \sin \left(\sqrt{k^2 - n^2}t_1 + \alpha \right) = e^{-nT_1} x_1(t_1). \end{aligned}$$

Амплитуда затухающих колебаний уменьшается по закону геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{-nT_1}$, который называется **декрементом** затухающих колебаний. Натуральный логарифм декремента — $|\ln q| = nT_1$ называется **логарифмическим декрементом**. Коэффициент n называют **коэффициентом затухания**.

Движение материальной точки теряет колебательный характер (становится **апериодическим**) в случае большого сопротивления при $n \geq k$. Если $n > k$, то корни характеристического уравнения действительные и общее решение имеет вид:

$$x = e^{-nt} \left(C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}t} \right).$$

При $n = k$ имеем равные действительные корни. В этом случае

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2).$$

Вынужденные колебания без сопротивления. Резонанс

Рассмотрим случай, когда $n = 0$, т. е. точка движется в среде без сопротивления.

$$\boxed{\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt} \text{ — дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.}$$

Общее решение полученного неоднородного дифференциального уравнения находится как сумма общего решения $x^* = A \sin(kt + \alpha)$ однородного уравнения (собственные колебания точки) и частного решения $x^{**} = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt$ неоднородного уравнения (**вынужденные колебания точки**). Тогда

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

При $p = k$ вынужденные колебания определяются равенством: $x^{**} = -\frac{h}{2k} t \cos kt$. Возникает явление **резонанса**, которое характеризуется возрастанием амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты возмущающей силы с частотой собственных колебаний.

Влияние сопротивления на вынужденные колебания

Рассмотрим общий случай вынужденных колебаний

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin pt.$$

Общее решение этого уравнения складывается из общего решения однородного уравнения, которое в случае малого сопротивления имеет вид:

$$x^* = Ae^{-nt} \sin \left(\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha \right) \quad (\text{собственные колебания})$$

и частного решения $x^{**} = A_B \sin(pt - \delta)$ (вынужденные колебания).

Амплитуда и начальная фаза вынужденных колебаний не зависят от начальных условий и определяются выражениями:

$$A_B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

С течением времени собственные колебания затухают и движение материальной точки подчиняется не зависящему от начальных условий закону вынужденных колебаний. Влияние сопротивления среды и частоты возмущающей силы качественным образом сказывается на изменении амплитуды и частоты вынужденных колебаний. Проиллюстрируем это влияние на примере построения, так называемой амплитудно-частотной характеристики.

Введем отношение круговой частоты вынужденных колебаний материальной точки к круговой частоте ее собственных колебаний

$$\boxed{z = \frac{p}{k}} \text{ — коэффициент расстройки.}$$

Рассмотрим статическое отклонение материальной точки $A_{ст}$ от положения равновесия под действием постоянной силы \vec{H} , равной амплитуде возмущающей силы,

$$cA_{ст} = H \Rightarrow \frac{H}{m} = \frac{cA_{ст}}{m} \Rightarrow h = k^2 A_{ст} \Rightarrow A_{ст} = \frac{h}{k^2}.$$

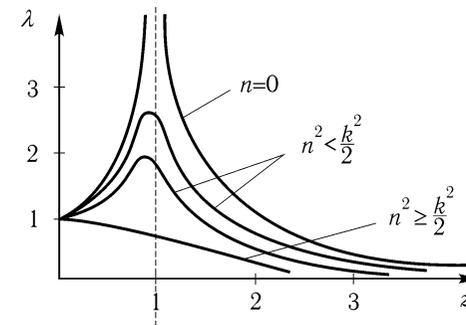
Введем в рассмотрение **коэффициент динамичности**, который характеризует динамический эффект от действия возмущающей силы и равен отношению амплитуды вынужденных колебаний к статическому смещению точки от постоянной силы, равной по величине амплитуде возмущающей силы. С учетом сделанных обозначений для коэффициента динамичности имеем

$$\boxed{\lambda = \frac{A_{в}}{A_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4 \left(\frac{n}{k}\right)^2 z^2}}.}$$

Зависимость коэффициента динамичности от коэффициента расстройки дается графиком, который позволяет оценить влияние частоты возмущающей силы и сопротивления среды на изменение амплитуды вынужденных колебаний, т. е. $A_{в} = \lambda A_{ст}$.

Из графика видно, что при $z \ll 1$ и $z \gg 1$ амплитуда вынужденных колебаний мало зависит от сопротивления среды.

При $z \approx 1$ влияние сопротивления на амплитуду вынужденных колебаний становится существенным. При достаточно большом сопротивлении $n \geq \frac{k}{\sqrt{2}}$ явление резонанса не наблюдается во всем диапазоне изменения частоты возмущающей силы. Этот эффект используется при создании



технических устройств, призванных гасить вредные колебания в механических системах. Подробнее об этом будет сказано в лекции 26.

Литература:

- [1, § 94–96];
- [3, § 11–20];
- [4, п. 2.1–2.3, 2.5, 2.6].

ЛЕКЦИЯ 16

Введение в динамику механической системы

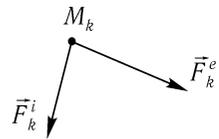
1. Механическая система. Классификация сил.
2. Дифференциальные уравнения движения механической системы.
3. Теорема о движении центра масс.
4. Меры движения.
5. Меры действия сил.
6. Консервативные системы.

Механическая система. Классификация сил

Механическая система — совокупность взаимодействующих между собой материальных точек.

При движении механической системы к каждой ее точке приложены силы двух типов: **внутренние силы**, действующие между точками одной механической системы, и **внешние силы**, действующие на точки данной механической системы со стороны других систем.

Рассмотрим произвольную точку системы M_k ($k = 1, \dots, n$), тогда:
 \vec{F}_k^e — равнодействующая внешних сил, действующих на точку M_k ;
 \vec{F}_k^i — равнодействующая внутренних сил, действующих на точку M_k .



Свойство внутренних сил:

Главный вектор и главный момент внутренних сил механической системы равны нулю, так как это силы взаимодействия между точками системы, которые входят попарно

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0, \quad \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^i) = 0.$$

Дифференциальные уравнения движения механической системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Тогда из основного уравнения динамики для k -й точки:

$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i, \quad m_k \ddot{y}_k = F_{ky}^e + F_{ky}^i, \quad m_k \ddot{z}_k = F_{kz}^e + F_{kz}^i \quad (k = 1, \dots, n)$$

— дифференциальные уравнения движения механической системы.

Интегрирование этих уравнений связано со значительными трудностями. В некоторых случаях при исследовании движения механической системы можно ограничиться изучением движения центра масс.

Центр масс механической системы это точка, положение которой определяется радиус-вектором:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

Теорема о движении центра масс

Теорема. *Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе всей системы, к которой приложена сила, равная главному вектору внешних сил*

$$m \vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e, \quad m = \sum_{k=1}^n m_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Основное уравнение динамики для k -й материальной точки

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i, \quad k = 1, \dots, n.$$

Просуммируем эти равенства: $\sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i$ и, используя свойство внутренних сил, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} m \vec{r}_C = \\ &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow m \vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствия.

1. Если главный вектор внешних сил равен нулю, то центр масс движется равномерно и прямолинейно или находится в покое.

2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо из осей равна нулю, то по отношению к этой оси центр масс движется равномерно или соответствующая координата центра масс постоянна.

3. Внутренние силы не влияют на движение центра масс.

Теорема о движении центра масс позволяет, в частности, записать дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.

$$m\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad m\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad m\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e.$$

В общем случае, при изучении движения механических систем необходимо ввести меры движения и соответствующие им меры действия сил.

Напомним эти знакомые из курса физики понятия.

Меры движения

Количество движения материальной точки (импульс) — векторная мера ее движения, равная произведению массы точки на ее скорость

$$\vec{q} = m\vec{v}.$$

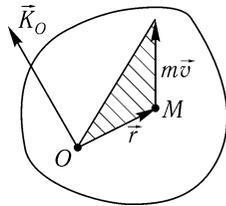
Количество движения механической системы — векторная мера движения, равная сумме количеств движения точек системы

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k.$$

$$\text{Откуда: } \vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = \frac{d}{dt} (m\vec{r}_C) = m \frac{d\vec{r}_C}{dt} = m\vec{v}_C.$$

Вектор количества движения механической системы равен произведению массы системы на скорость центра масс: $\vec{Q} = m\vec{v}_C$.

Момент количества движения материальной точки (кинетический момент) относительно центра — это вектор, определяемый равенством:

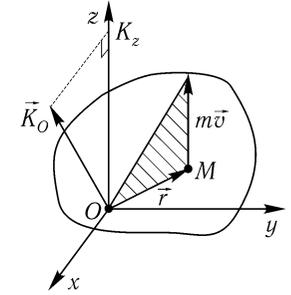


$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Момент количества движения относительно оси — это проекция вектора момента количества движения относительно центра, лежащего на оси, на эту ось: $K_z = np_z(\vec{K}_O) = m_z(m\vec{v})$.

Главный момент количества движения (или **кинетический момент**) механической системы относительно центра O или оси Oz равен соответственно геометрической или алгебраической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно того же центра или оси

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k, \quad K_z = \sum_{k=1}^n m_z(m_k \vec{v}_k).$$



В качестве примера вычислим кинетический момент вращающегося с угловой скоростью ω твердого тела относительно оси вращения

$$v_k = \omega h_k, \quad K_z = \sum_{k=1}^n m_k v_k h_k = \sum_{k=1}^n m_k \omega h_k^2 = \omega \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = J_z \omega,$$

где h_k — расстояние от k -й точки до оси вращения, J_z — момент инерции тела относительно оси вращения Oz (подробней о моментах инерции будет сказано в лекции 18).

Кинетическая энергия материальной точки — скалярная мера ее движения, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия механической системы — сумма кинетических энергий точек этой системы

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Определим кинетическую энергию твердого тела в некоторых частных случаях движения.

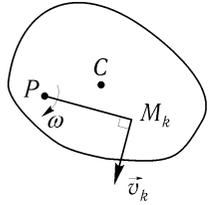
1. Поступательное движение.

По теореме о поступательном движении скорости всех точек одинаковы, следовательно:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum_{k=1}^n m_k = \frac{mv^2}{2}.$$

2. Вращательное движение.

$$v_k = \omega h_k, \quad T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k(\omega h_k)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}.$$



3. Плоскопараллельное движение.

Скорости точек тела при плоском движении пропорциональны расстояниям до мгновенного центра скоростей $v_k = \omega |PM_k|$,

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k |PM_k|^2 \omega^2}{2} = \frac{J_{zP} \omega^2}{2}.$$

По теореме Гюйгенса¹–Штейнера²: $J_{zP} = J_{zC} + m|PC|^2$.

$$\text{Тогда } T = \frac{m|PC|^2 \omega^2}{2} + \frac{J_{zC} \omega^2}{2} \Rightarrow T = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{J_{zC} \omega^2}{2}.$$

При плоском движении тела кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

Это частный случай более общей теоремы Кенига³, которая для твердого тела может быть сформулирована следующим образом:

Теорема. *Кинетическая энергия твердого тела при свободном движении равна сумме кинетической энергии его поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии сферического движения вокруг центра масс.*

(Выражение для кинетической энергии при сферическом движении приводится в лекции 18.)

Меры действия сил

Элементарный импульс силы — векторная мера действия силы за элементарный промежуток времени dt : $d\vec{S} = \vec{F} dt$.

¹Гюйгенс Христиан (14.06.1629–8.07.1695) — голландский ученый, член Лондонского королевского общества, Французской АН, ее первый президент. Труды по механике, физике, математике и астрономии.

²Штейнер Якоб (18.03.1796–1.04.1863) — немецкий математик, член Берлинской АН. Основные исследования относятся к проективной геометрии.

³Кениг Иоганн Самуэль (1712–21.08.1757) — швейцарский математик и механик, чл.-кор. Французской АН, член Берлинской АН, Лондонского королевского общества, Геттингенской АН. Основное направление исследований — динамика.

Импульс силы за конечный промежуток времени равен сумме элементарных импульсов, т. е. $\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$.

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt.$$

Если на точку действуют несколько сил, то можно показать, что импульс равнодействующей этих сил равен сумме импульсов составляющих сил.

Элементарная работа силы — скалярная мера действия силы на элементарном перемещении $d\vec{r}$ точки ее приложения, определяемая скалярным произведением $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Возможны другие формы записи элементарной работы силы:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz;$$

$dA = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha$, где α — угол между силой и направлением элементарного перемещения; $dA = F_\tau ds$, где F_τ — проекция силы на направление скорости точки приложения силы или на направление элементарного перемещения;

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{v} dt, \text{ где } \vec{v} \text{ — скорость точки приложения силы.}$$

В случае силы, приложенной к свободному твердому телу,

$$dA = \vec{F} \cdot (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}) dt,$$

где \vec{v}_O — скорость полюса, $\vec{\omega}$ — угловая скорость тела, \vec{r} — радиус-вектор, проведенный из полюса O в точку приложения силы. С учетом свойств смешанного произведения

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{v}_O dt + (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{\omega} dt \quad \text{или}$$

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{v}_O dt + \vec{m}_O(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} dt.$$

В случае вращательного движения, так как $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k}$, то

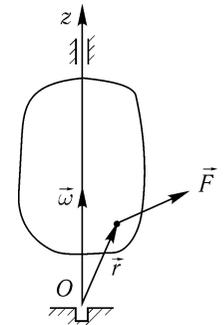
$$dA = \vec{m}_O(\vec{F}) \cdot \vec{k} d\varphi = m_z(\vec{F}) d\varphi.$$

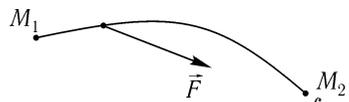
Суммарная элементарная работа пары сил $\{\vec{F}, \vec{F}'\}$ с моментом \vec{m} , приложенной к твердому телу, определяется равенством

$$dA = \vec{m} \cdot \vec{\omega} dt.$$

Действительно, с учетом теоремы о сумме моментов сил, составляющих пару,

$$dA(\vec{F}) + dA(\vec{F}') = [\vec{F} \cdot \vec{v}_O + \vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{F}' \cdot \vec{v}_O + \vec{m}_O(\vec{F}')] \cdot \vec{\omega} dt = \vec{m} \cdot \vec{\omega} dt.$$





Работа силы на конечном перемещении равна сумме элементарных работ силы на этом перемещении

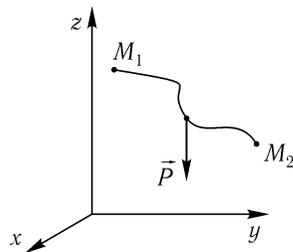
$$A_{12} = \int_{M_1 M_2} dA, \quad A_{12} = \int_{M_1 M_2} F_\tau ds \quad \text{или}$$

$$A_{12} = \int_{M_1 M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу, при повороте на конечный угол φ определяется интегралом

$$A_{12}(\vec{F}) = \int_0^\varphi m_z(\vec{F}) d\varphi.$$

ПРИМЕР 1. Вычисление работы силы тяжести.



Проекция силы тяжести:

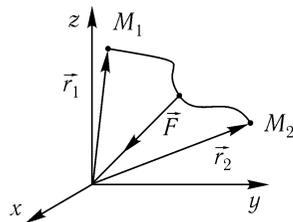
$$P_x = P_y = 0, \quad P_z = -mg;$$

$$A_{12} = \int_{M_1 M_2} P_x dx + P_y dy + P_z dz,$$

$$A_{12} = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = mg(z_1 - z_2),$$

$$A_{12} = \pm mgh.$$

Знак «+», если точка приложения силы тяжести опускается. Работа силы тяжести не зависит от формы траектории.



ПРИМЕР 2. Вычисление работы линейной центральной силы.

Центральная сила $\vec{F} = -c\vec{r}$ имеет проекции на оси координат: $F_x = -cx$, $F_y = -cy$, $F_z = -cz$. Тогда

$$A_{12} = \int_{M_1 M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad \text{и}$$

$$A_{12} = -c \int_{M_1 M_2} x dx + y dy + z dz = -c \int_{M_1 M_2} d \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} =$$

$$= -\frac{c}{2} \int_{M_1 M_2} d(x^2 + y^2 + z^2) = -\frac{c}{2} \int_{M_1 M_2} dr^2 = -\frac{c}{2}(r_2^2 - r_1^2).$$

В частности, для работы силы упругости пружины имеем $A_{12} = -\frac{c}{2}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$, где λ_1, λ_2 — деформации пружины в первом и во втором положении.

Работа линейной центральной силы и работа силы упругости также не зависят от формы траектории.

Из свойства криволинейных интегралов следует, что работа равнодействующей равна сумме работ составляющих сил. Сумма работ внутренних сил в абсолютно твердом теле равна нулю, так как расстояния между точками попарно присутствующих сил взаимодействия не изменяются.

Мощностью (обозначается N) называется величина, измеряемая отношением элементарной работы силы к элементарному промежутку времени ее совершения

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Мощность силы

$$N = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

В случае силы, приложенной к вращающемуся твердому телу, — через угловую скорость его вращения

$$N = \vec{m}_O(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} \quad \text{или} \quad N = \vec{m}_z(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}.$$

Мощность пары сил с моментом \vec{m} , приложенной к твердому телу, определяется равенством

$$N = \vec{m} \cdot \vec{\omega}.$$

Консервативные системы

Консервативной называется механическая система, в которой действуют только потенциальные силы. **Потенциальной** называется сила, работа которой не зависит от траектории перемещения точки ее приложения (работа силы на замкнутом контуре равна нулю) или, то же самое, элементарная работа силы есть полный дифференциал некоторой функции от координат точки ее приложения. Примерами потенциальных сил служат сила тяжести и сила упругости.

По определению полного дифференциала, элементарная работа потенциальной силы может быть выражена через функцию координат точки ее приложения $\Pi(x, y, z)$ соотношением

$$dA = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \right) = -d\Pi.$$

Т. е. для проекций потенциальной силы на оси координат имеем:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Функция $\Pi(x, y, z)$, определяющая таким образом силу, действующую на материальную точку, называется **потенциальной энергией материальной точки** в данном ее положении.

Как следует из определения, потенциальная энергия материальной точки в положении M_2 , принимаемом за произвольное, определяется интегрированием

$$\Pi = - \int_{M_1 M_2} dA.$$

После интегрирования: $\Pi = -A_{12} + \text{const}$ или $\Pi = A_{21} + \text{const}$.

Потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого. Принимая значение этого постоянного слагаемого равным нулю (это эквивалентно предположению о равенстве нулю значения потенциальной энергии в точке M_1), находим, что потенциальная энергия в точке M_2 находится как работа потенциальной силы при перемещении точки ее положения из точки M_2 в точку M_1 .

Потенциальная энергия консервативной механической системы — это функция координат материальных точек системы $\Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k, \dots, x_n, y_n, z_n)$, определяющая силы, действующие на эти точки, соотношениями:

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Потенциальная энергия консервативной механической системы в данном ее положении равна работе, которую произведут все действующие на систему силы, при перемещении системы из этого положения в то, где потенциальная энергия условно принимается равной нулю ($\Pi = 0$).

Литература:

- [1, § 83, 87, 88, 100, 106–109, 115, 121, 122];
 [3, § 31, 42–47, 53, 55];
 [4, п. 3.1–3.3, 3.5, 8.1, 8.3, 9.1, 10.1].

ЛЕКЦИЯ 17

Общие теоремы динамики

1. Теорема об изменении количества движения.
2. Динамика точки переменной массы.
3. Теорема Эйлера.
4. Теорема об изменении момента количества движения.
5. Теорема об изменении кинетической энергии.

Теорема об изменении количества движения

Теорема. Производная по времени от количества движения механической системы равна сумме всех внешних сил, действующих на систему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Из теоремы о движении центра масс

$$m\vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow \frac{dm\vec{v}_C}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e}.$$

Теорема доказана.

Теорема (в интегральной форме). Изменение количества движения механической системы за какой-либо промежуток времени равно сумме всех импульсов внешних сил, действующих на систему за тот же промежуток времени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В результате интегрирования полученного дифференциального уравнения находим:

$$d\vec{Q} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e dt \Rightarrow \int_{Q_1}^{Q_2} d\vec{Q} = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k^e dt \Rightarrow \boxed{\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e}.$$

Теорема доказана.

Следствия.

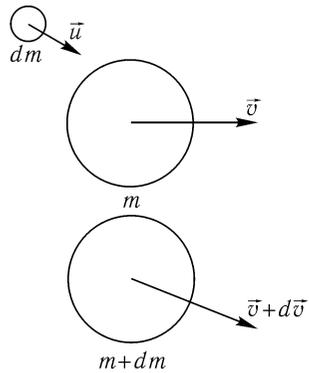
1. Внутренние силы, действующие между точками механической системы, не влияют на изменение количества движения системы.

2. Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то количество движения системы не изменяется (закон сохранения количества движения).

3. Если проекция главного вектора внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось постоянна.

Теорема об изменении количества движения применяется для исследования движения тел переменной массы и сплошных сред, а также в изучении явления удара.

Динамика точки переменной массы



Рассмотрим движение материальной точки с массой $m(t)$, являющейся функцией времени.

Точка массы m движется с абсолютной скоростью \vec{v} . В некоторый момент времени t к точке присоединяется частица массы dm , которая двигалась со скоростью \vec{u} .

Рассмотрим момент времени $t + dt$, масса точки в этот момент времени $m + dm$, скорость $\vec{v} + d\vec{v}$.

Для исследования движения точки воспользуемся теоремой об изменении количества движения $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}$. $d\vec{Q}$ — приращение количества

движения за время dt : $d\vec{Q} = \vec{Q}(t + dt) - \vec{Q}(t)$, при этом $\vec{Q}(t + dt) = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v})$, $\vec{Q}(t) = m\vec{v} + dm\vec{u} \Rightarrow d\vec{Q} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - m\vec{v} - dm\vec{u} = \vec{v}dm + m d\vec{v} - \vec{u}dm$ (с точностью до величин первого порядка малости). Тогда

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} - (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dm}{dt} = \vec{F},$$

где $\vec{u} - \vec{v} = \vec{v}_r$ — относительная скорость присоединенных (или отбрасываемых) частиц. Отсюда $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_r \frac{dm}{dt} + \vec{F}$ и

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \Phi, \quad \text{— уравнение Мещерского}^1,$$

¹Мещерский Иван Всеволодович (10.08.1859–7.01.1935) — русский ученый в области механики. Основное направление исследований — динамика тела переменной массы.

где $\vec{\Phi} = \vec{v}_r \frac{dm}{dt}$ — реактивная сила, $\frac{dm}{dt}$ — скорость изменения массы. Если $\frac{dm}{dt} > 0$ — присоединение массы, то $\vec{\Phi}$ сонаправлена с относительной скоростью присоединяемой частицы. Если $\frac{dm}{dt} < 0$ — потеря массы, то $\vec{\Phi}$ направлена противоположно относительной скорости отделяемой частицы.

В качестве примера рассмотрим движение ракеты.

Первая задача Циолковского¹ о движении ракеты.

Рассмотрим движение ракеты без учета внешних сил. Полагая, что $v_r = \text{const}$ (в первых космических кораблях $v_r \sim 2000$ м/с), из уравнения Мещерского находим:

$$m(t) \frac{dv}{dt} = -v_r \frac{dm}{dt} \Rightarrow dv = -v_r \frac{dm}{m} \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = -v_r \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} \Rightarrow v - v_0 = -v_r \ln \frac{m}{m_0}.$$

$$v = v_0 + v_r \ln \frac{m_0}{m}$$

— формула Циолковского, которая позволяет определять скорость ракеты в зависимости от ее начальной скорости, относительной скорости выброса топлива и отношения $\frac{m_0}{m}$.

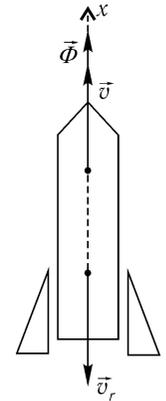
Найдем скорость ракеты в конце активного участка полета. $m_0 = m_k + m_r$, m_k — полезная масса, m_r — масса горючего, $m = m_k$ — масса ракеты в конце активного участка полета. $v_1 = v_0 + v_r \ln \left(1 + \frac{m_r}{m_k}\right)$, $\frac{m_r}{m_k}$ — число Циолковского ($\sim \frac{3}{4}$).

Увеличение максимальной скорости ракеты достигается за счет применения многоступенчатых ракет.

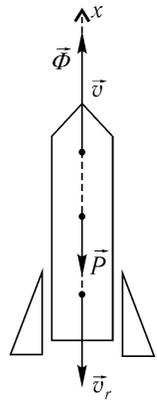
Вторая задача Циолковского о движении ракеты.

Движение ракеты рассматривается с учетом действующих на нее внешних сил (вес ракеты, сопротивление среды). С учетом веса ракеты

$$m(t) \frac{dv}{dt} = -v_r \frac{dm}{dt} - P.$$



¹Циолковский Константин Эдуардович (17.09.1857–19.09.1935) — русский ученый и изобретатель, основоположник космонавтики. В 1921 году получил от правительства пожизненную пенсию для занятий научной работой. Основные исследования относятся к аэронавтике, ракетодинамике и космонавтике.



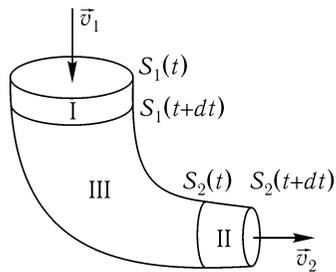
Для интегрирования уравнения необходимо задать закон изменения массы ракеты. Наибольший интерес представляют:

линейный $m = m_0(1 - \alpha t)$, $\alpha = \text{const}$, что соответствует движению ракеты с постоянной тягой, при непрерывном увеличении ускорения;

экспоненциальный $m = m_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha = \text{const}$, при этом ракета движется с постоянным ускорением.

Теорема Эйлера

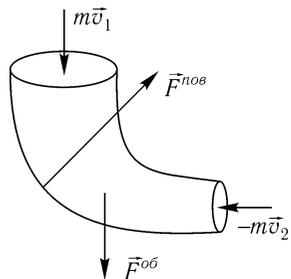
Рассмотрим движение жидкости в канале переменного сечения.



Воспользуемся теоремой об изменении количества движения механической системы для исследования установившегося движения жидкости, заключенной между сечениями площади S_1 и S_2 : $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e$. Изменение количества движения: $d\vec{Q} = \vec{Q}(t+dt) - \vec{Q}(t)$. Разделим объем на три части, тогда $\vec{Q}(t) = \vec{Q}_I + \vec{Q}_{III}$, $\vec{Q}(t+dt) = \vec{Q}_{III} + \vec{Q}_{II}$,

где $\vec{Q}(t) = \vec{Q}_I + \vec{Q}_{III}$, $\vec{Q}(t+dt) = \vec{Q}_{III} + \vec{Q}_{II}$,

$d\vec{Q} = \vec{Q}_{II} - \vec{Q}_I$, где $\vec{Q}_I = \gamma S_1 v_1 dt \vec{v}_1$, $m_1 = \gamma S_1 v_1$ — секундная масса (расход) — масса жидкости, проходящая через сечение за одну секунду, γ — плотность жидкости, $\vec{Q}_{II} = \gamma S_2 v_2 dt \vec{v}_2$, $m_2 = \gamma S_2 v_2$ — расход жидкости во втором сечении, \vec{v}_1, \vec{v}_2 — скорости частиц жидкости.



Из условия несжимаемости жидкости ее количество, проходящее через каждое сечение, одинаково: $m_1 = m_2 = m$. Тогда по теореме об изменении количества движения

$$d\vec{Q} = (m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1)dt \quad \text{и} \quad m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}^e.$$

Разделяя внешние силы на объемные и поверхностные $\vec{F}^e = \vec{F}^{об} + \vec{F}^{нов}$, устанавливаем теорему.

Теорема (Эйлера). Сумма главного вектора объемных сил, главного вектора поверхностных сил и секундных количеств движения, направленных внутрь объема, равна нулю.

$$\vec{F}^{об} + \vec{F}^{нов} + m\vec{v}_1 + (-m\vec{v}_2) = 0.$$

Теорема об изменении момента количества движения

Теорема. Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра равна геометрической сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим движение произвольной точки системы $m\vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$, либо $\frac{dm_k \vec{v}_k}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$, умножим векторно слева на радиус-вектор \vec{r}_k

$$\vec{r}_k \times \frac{dm_k \vec{v}_k}{dt} = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i \Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_O(\vec{F}_k^i).$$

Выполняя суммирование по всем точкам системы, с учетом свойства внутренних сил находим:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^i) \Rightarrow \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^e).$$

Теорема доказана.

Следствия.

1. Внутренние силы, действующие между точками механической системы, не влияют на изменение кинетического момента механической системы.

2. Если главный момент внешних сил системы относительно какого-либо центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра не изменяется (закон сохранения кинетического момента).

Проектируя полученное равенство на ось Oz , устанавливаем теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно оси.

Теорема. Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно неподвижной оси равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно этой оси

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k^e).$$

Следствие. Если сумма моментов внешних сил относительно какой-либо оси равна нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси постоянен.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы сохраняет свою форму в системе отсчета, которая движется поступательно вместе с центром масс.

Теорема. Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно центра масс в системе отсчета, которая движется поступательно вместе с центром масс, равна геометрической сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно центра масс

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_C(\vec{F}_k^e).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В подвижной (неинерциальной) системе координат теорема об изменении кинетического момента принимает вид

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_C(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \vec{m}_C(\vec{\Phi}_k^e),$$

где $\vec{\Phi}_k^e = -m_k \vec{a}_C$ — переносные силы инерции.
Но

$$\sum_{k=1}^n \vec{m}_C(\vec{\Phi}_k^e) = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times (-m_k \vec{a}_C) = - \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k \right) \times \vec{a}_C = -m \vec{r}_C \times \vec{a}_C = 0,$$

так как радиус-вектор центра масс в выбранной подвижной системе координат равен нулю. Откуда следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Теорема об изменении кинетической энергии

Теорема. Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему, на том же перемещении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим движение произвольной точки системы $m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$, либо $\frac{dm_k \vec{v}_k}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$, умножим скалярно на дифференциал радиус-век-

тора $d\vec{r}_k$, тогда $m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot d\vec{r}_k = \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k \Rightarrow m_k d\vec{v}_k \cdot \vec{v}_k = dA_k^e + dA_k^i \Rightarrow m_k \frac{dv_k^2}{2} = dA_k^e + dA_k^i \Rightarrow d \left(\frac{m_k v_k^2}{2} \right) = dA_k^e + dA_k^i \Rightarrow \int_{T_{k1}}^{T_{k2}} dT_k = \int_{M_1 M_2} dA_k^e + \int_{M_1 M_2} dA_k^i \Rightarrow \frac{m_k v_{k2}^2}{2} - \frac{m_k v_{k1}^2}{2} = A_{12}(\vec{F}_k^e) + A_{12}(\vec{F}_k^i)$. Просуммируем по всем точкам системы $\sum_{k=1}^n \frac{m_k v_{k2}^2}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_{k1}^2}{2} = \sum_{k=1}^n A_{12}(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n A_{12}(\vec{F}_k^i) \Rightarrow$

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A_{12}(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n A_{12}(\vec{F}_k^i).$$

Теорема доказана.

Теорема (в дифференциальной форме). Производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на систему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для произвольной точки системы $dT_k = dA_k^e + dA_k^i \Rightarrow \frac{dT_k}{dt} = \frac{dA_k^e}{dt} + \frac{dA_k^i}{dt} \Rightarrow \frac{dT_k}{dt} = N_k^e + N_k^i$. Суммируя по всем точкам системы, получаем

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^e + \sum_{k=1}^n N_k^i.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если механическая система является консервативной, то полная механическая энергия системы, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, при ее движении остается постоянной (закон сохранения энергии).

Из теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме следует

$$dT = dA,$$

где dA — элементарная работа всех внешних и внутренних сил, действующих на механическую систему.

В случае консервативной системы

$$dT = -d\Pi \implies d(T + \Pi) = 0 \implies T + \Pi = \text{const.}$$

Литература:

[1, § 84, 85, 89, 110–112, 116–118, 123, 126, 127];

[3, § 48, 50, 52, 54, 56, 62, 67, 69, 74];

[4, п. 8.2, 8.4, 9.3, 10.4, 11.2, 11.5, 11.6].

ЛЕКЦИЯ 18

Динамика твердого тела

1. Дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоскопараллельного движений твердого тела.
2. Тензор инерции.
3. Динамика вращательного и сферического движения твердого тела.
4. Динамические уравнения Эйлера. (Дифференциальные уравнения сферического движения твердого тела.)
5. Дифференциальные уравнения свободного движения твердого тела.
6. Приближенная теория гироскопа.

Дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоскопараллельного движений твердого тела

Как было показано, твердое тело может совершать поступательное, вращательное, плоскопараллельное, сферическое и свободное движение.

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела, которые были получены из теоремы о движении центра масс, имеют вид:

$$m\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad m\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad m\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e.$$

Применение теоремы об изменении кинетического момента в скалярной форме к вращающемуся телу позволяет получить дифференциальное уравнение вращательного движения

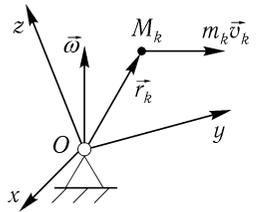
$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z (\vec{F}_k^e).$$

При описании плоскопараллельного движения твердого тела из теорем о движении центра масс и об изменении кинетического момента в относительном движении находим соответствующие дифференциальные уравнения

$$m\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad m\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad J_{zC} \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_{zC} (\vec{F}_k^e).$$

Прежде чем приступить к изучению других случаев движения твердого тела, рассмотрим некоторые дополнительные характеристики распределения масс.

Тензор инерции



Рассмотрим выражение кинетического момента твердого тела в случае его сферического движения. С учетом формулы Эйлера для скорости точки имеем

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k),$$

где $\vec{\omega}$ — мгновенная угловая скорость сферического движения.

В проекциях на оси системы координат, связанной с движущимся телом,

$$\begin{aligned} K_{Ox} &= \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2) \omega_x - \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k \omega_y - \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k \omega_z, \\ K_{Oy} &= - \sum_{k=1}^n m_k y_k x_k \omega_x + \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2) \omega_y - \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k \omega_z, \\ K_{Oz} &= - \sum_{k=1}^n m_k z_k x_k \omega_x - \sum_{k=1}^n m_k z_k y_k \omega_y + \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) \omega_z. \end{aligned}$$

Так как $(y_k^2 + z_k^2)$, $(z_k^2 + x_k^2)$, $(x_k^2 + y_k^2)$ — квадраты расстояний от точки с массой m_k до координатных осей Ox , Oy , Oz , то

$$\boxed{J_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2)}, \quad \boxed{J_y = \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2)}, \quad \boxed{J_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2)}$$

— **осевые моменты инерции.**

Введем обозначения:

$$\boxed{J_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k}, \quad \boxed{J_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k}, \quad \boxed{J_{zx} = \sum_{k=1}^n m_k z_k x_k}$$

— **центробежные моменты инерции** ($J_{xy} = J_{yx}$, $J_{yz} = J_{zy}$, $J_{zx} = J_{xz}$).

Тогда

$$\begin{aligned} K_{Ox} &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z, \\ K_{Oy} &= -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z, \\ K_{Oz} &= -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z. \end{aligned}$$

В общем случае вектор кинетического момента не совпадает по направлению с вектором угловой скорости. В матричном виде эта связь записывается выражением

$$\begin{pmatrix} K_{Ox} \\ K_{Oy} \\ K_{Oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

Или как линейное отображение (оператор) в трехмерном векторном пространстве:

$$\vec{K}_O = \mathcal{J} \vec{\omega}.$$

Линейному оператору \mathcal{J} соответствует в фиксированном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ матрица

$$J = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \text{ — тензор инерции.}$$

Матрица J является симметричной и ее элементы определяются моментами инерции твердого тела, характеризующими распределение масс относительно фиксированной системы координат.

Как известно, при изменении базиса (преобразовании системы координат) матрицу линейного преобразования можно привести к диагональному виду

$$J' = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix},$$

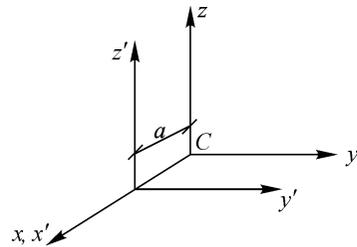
где J_ξ , J_η , J_ζ — собственные значения линейного оператора \mathcal{J} , которые находятся из уравнения

$$\det(J - \lambda E) = 0, \quad E \text{ — единичная матрица.}$$

Соответствующие оси $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$ называются **главными осями инерции** твердого тела. Если начало координат совпадает с центром масс, то они называются **главными центральными осями инерции**. Главной осью инерции, кроме того, по определению называется ось координат, для

которой центробежные моменты инерции, содержащие индекс этой оси, равны нулю. Например, если $J_{xz} = J_{yz} = 0$, то Oz — главная ось инерции. Если она проходит через центр масс, то ее называют главной центральной осью инерции. Из определения центробежных моментов инерции следует: ось симметрии однородного тела является главной для всех точек данной оси; для точек, лежащих в плоскости материальной симметрии, главной является ось, перпендикулярная этой плоскости. Для точек, лежащих на главных центральных осях инерции тела, главные оси инерции параллельны главным центральным осям инерции.

Для доказательства рассмотрим две системы координат,



где Cx, Cy, Cz — главные центральные оси инерции.

Тогда

$$J_{x'z'} = \sum_{k=1}^n x'_k z'_k m_k = \sum_{k=1}^n (x_k - a) z_k m_k = J_{xz} - a \sum_{k=1}^n z_k m_k = J_{xz} - a z_C m = 0,$$

$$J_{y'z'} = \sum_{k=1}^n y'_k z'_k m_k = \sum_{k=1}^n y_k z_k m_k = J_{yz} = 0.$$

В определении моментов инерции использовалась модель абсолютно твердого тела как совокупности конечного числа материальных точек, расстояние между которыми не изменяется. В общем случае сплошного тела суммирование при соответствующем предельном переходе заменяется интегрированием по линии, поверхности или объему в зависимости от размерности рассматриваемой фигуры. Для некоторых тел соответствующие моменты инерции относительно главных осей приведены в таблице.

Одно и то же линейное преобразование в двух разных базисах имеет разные матрицы J' и J . Используя традиционную нумерацию координатных осей, обозначая через $L = \|l_{ij}\| = \|\vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j\|$ ортогональную матрицу перехода от базиса (e'_1, e'_2, e'_3) , соответствующего главным осям, к базису (e_1, e_2, e_3)

Таблица 1. Моменты инерции некоторых однородных тел, моделируемых простейшими геометрическими фигурами, относительно главных центральных осей

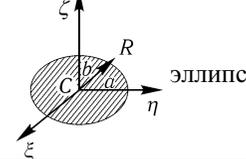
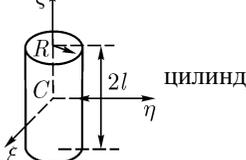
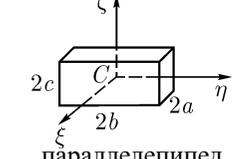
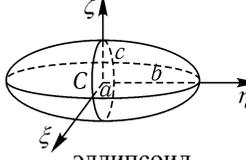
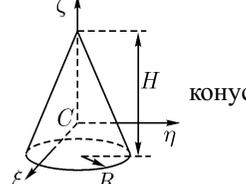
	J_ξ	J_η	J_ζ
<p>стержень</p>	$\frac{ml^2}{3}$	0	$\frac{ml^2}{3}$
<p>кольцо</p>	mR^2	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{2}$
<p>диск</p>	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$
<p>прямоугольник</p>	$\frac{m(a^2 + b^2)}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{ma^2}{3}$
<p>треугольник</p>	$\frac{m(3a^2 + h^2)}{18}$	$\frac{mh^2}{18}$	$\frac{ma^2}{6}$

с произвольным расположением базисных векторов, имеем

$$J = LJ'L^{-1}, \quad L^{-1} = L^T$$

(в силу ортогональности обратная матрица совпадает с транспонированной).

Таблица 1 (продолжение). Моменты инерции некоторых однородных тел, моделируемых простейшими геометрическими фигурами, относительно главных центральных осей

 <p>эллипс</p>	$\frac{mb^2}{4}$	$\frac{ma^2}{4}$	$\frac{m(a^2 + b^2)}{4}$
 <p>цилиндр</p>	$m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$	$m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$	$m \frac{R^2}{2}$
 <p>параллелепипед</p>	$\frac{m}{3} (b^2 + c^2)$	$\frac{m}{3} (c^2 + a^2)$	$\frac{m}{3} (a^2 + b^2)$
 <p>эллипсоид</p>	$\frac{m}{5} (b^2 + c^2)$	$\frac{m}{5} (c^2 + a^2)$	$\frac{m}{5} (a^2 + b^2)$
 <p>конус</p>	$\frac{3m(H^2 + 4R^2)}{80}$	$\frac{3m(H^2 + 4R^2)}{80}$	$\frac{3mR^2}{10}$

Тогда связь между элементами матриц J' и J можно записать в виде

$$J_{ij} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 l_{im} l_{jn} J'_{mnn}$$

где $l_{im} = \cos(\angle Ox'_i Ox'_m)$ – косинусы углов между новыми и старыми осями.

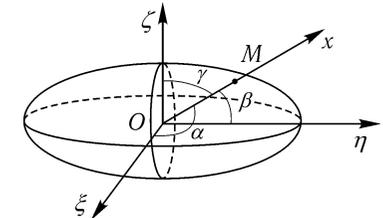
В частности, момент инерции относительно произвольной оси Ox , составляющей углы α, β и γ с главными осями $O\xi, O\eta$ и $O\zeta$, в соответствии с указанным правилом перехода от одного базиса к другому определится равенством

$$J_x = J_\xi \cos^2 \alpha + J_\eta \cos^2 \beta + J_\zeta \cos^2 \gamma.$$

Этому равенству можно дать геометрическую интерпретацию.

Вдоль оси Ox отложим отрезок $OM = \frac{1}{\sqrt{J_x}}$. Координаты точки M равны

$$\xi = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{J_x}}, \quad \eta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{J_x}}, \quad \zeta = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{J_x}}.$$



Тогда $J_\xi \xi^2 + J_\eta \eta^2 + J_\zeta \zeta^2 = 1$ или $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$, где $a = (\sqrt{J_\xi})^{-1}$,

$b = (\sqrt{J_\eta})^{-1}, c = (\sqrt{J_\zeta})^{-1}$.

Геометрическим местом точек M является поверхность эллипсоида, называемого **эллипсоидом инерции**, с полуосями, обратными корням квадратным из соответствующих главных моментов инерции. Каждой точке твердого тела можно сопоставить эллипсоид инерции. По построению, длина отрезка, соединяющего данную точку с произвольной точкой поверхности эллипсоида, обратно пропорциональна корню квадратному из момента инерции твердого тела относительно оси соответствующего направления. Вместе с массой эллипсоид инерции полностью определяет инертные свойства твердого тела. Связь между моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс, дается следующей теоремой.

Теорема Гюйгенса – Штейнера. *Момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями*

$$J_{z'} = J_{zC} + ma^2,$$

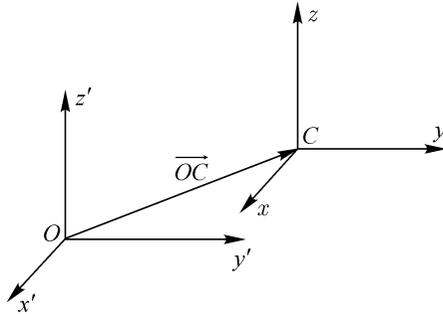
где a – расстояние между осями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Действительно:

$$J_{z'} = \sum_{k=1}^n m_k (x'_k{}^2 + y'_k{}^2) = \sum_{k=1}^n m_k ((x_k + a_x)^2 + (y_k + a_y)^2) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) + 2a_x \sum_{k=1}^n m_k x_k + 2a_y \sum_{k=1}^n m_k y_k + \sum_{k=1}^n m_k (a_x^2 + a_y^2),$$

здесь x_k, y_k — координаты точек в системе координат $Cxyz$, с началом в центре масс и осями, параллельными исходной системе координат $Ox'y'z'$, $\{a_x, a_y\}$ — проекции вектора \vec{OC} на соответствующие оси, $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ — расстояние между осями Oz и Oz' .



По определению центра масс

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k = \sum_{k=1}^n m_k y_k = 0.$$

Тогда

$$J_{z'} = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) + \sum_{k=1}^n m_k (a_x^2 + a_y^2) = J_{zC} + ma^2.$$

Теорема доказана.

Динамика вращательного и сферического движения твердого тела

Для получения дифференциальных уравнений вращательного и сферического движения твердого тела воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e.$$

Левую часть этого равенства можно рассматривать как абсолютную скорость точки, совпадающей с концом вектора \vec{K}_O . Движение этой точки можно рассматривать как сложное. Оно происходит за счет изменения

вектора \vec{K}_O в подвижной системе координат, жестко связанной с твердым телом, (относительное движение) и его поворота с угловой скоростью $\vec{\omega}$ по отношению к неподвижной системе координат (переносное движение). Тогда по теореме сложения скоростей

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \left(\frac{d\vec{K}_O}{dt} \right)_{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \text{const}} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O,$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты подвижной системы координат.

Подставляя это выражение в теорему об изменении кинетического момента $\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e$ и проектируя на оси подвижной системы координат, находим

$$\frac{dK_{Ox}}{dt} + (\omega_y K_{Oz} - \omega_z K_{Oy}) = M_{Ox}^e,$$

$$\frac{dK_{Oy}}{dt} + (\omega_z K_{Ox} - \omega_x K_{Oz}) = M_{Oy}^e,$$

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} + (\omega_x K_{Oy} - \omega_y K_{Ox}) = M_{Oz}^e.$$

При вращательном движении твердого тела (например, вокруг оси Oz) направление вектора угловой скорости остается постоянным ($\omega_x = \omega_y = 0$). В этом случае имеем

$$-J_{xz} \frac{d\omega_z}{dt} + J_{yz} \omega_z^2 = M_{Ox}^e, \quad -J_{yz} \frac{d\omega_z}{dt} - J_{xz} \omega_z^2 = M_{Oy}^e, \quad J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_{Oz}^e.$$

Последнее равенство позволяет получить дифференциальное уравнение вращательного движения

$$J_z \ddot{\varphi} = M_{Oz}^e, \quad \varphi — \text{угол поворота тела.}$$

Первые два могут быть использованы для определения динамических реакций подшипников, когда ось вращения не является главной осью инерции (динамическая неуравновешенность).

Динамические уравнения Эйлера. (Дифференциальные уравнения сферического движения твердого тела)

В случае сферического движения, если в качестве подвижных осей взять главные оси инерции тела и ввести обозначения

$$p = \omega_\xi, \quad q = \omega_\eta, \quad r = \omega_\zeta; \quad A = J_\xi, \quad B = J_\eta, \quad C = J_\zeta,$$

то

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} - qr(B - C) = M_{\xi}^e, \\ B \frac{dq}{dt} - rp(C - A) = M_{\eta}^e, \\ C \frac{dr}{dt} - pq(A - B) = M_{\zeta}^e. \end{cases}$$

Эти уравнения называются динамическими уравнениями Эйлера. Они допускают аналитическое интегрирование при произвольных начальных условиях движения в трех случаях.

1. Случай Эйлера–Пуансо. Центр масс тела произвольной формы совпадает с неподвижной точкой. Движение тела происходит по инерции.

2. Случай Лагранжа¹–Пуассона². Эллипсоидом инерции для неподвижной точки является эллипсоид вращения $A = B \neq C$ и центр масс лежит на оси вращения эллипсоида инерции. (Симметричный волчок.)

3. Случай Ковалевской³. Эллипсоид инерции для неподвижной точки есть вытянутый эллипсоид вращения при $A = B = 2C$. Центр масс тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. (Асимметричный волчок.)

Уместно отметить, что кинетический момент относительно неподвижной точки и кинетическая энергия твердого тела при сферическом движении определяются выражениями:

$$K_O = \sqrt{K_{O\xi}^2 + K_{O\eta}^2 + K_{O\zeta}^2} = \sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2},$$

$$T = \frac{J_O \omega^2}{2} =$$

$$\frac{1}{2}(J_{\xi} \cos^2 \alpha \omega^2 + J_{\eta} \cos^2 \beta \omega^2 + J_{\zeta} \cos^2 \gamma \omega^2) = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

¹Лагранж Жозеф Луи (25.01.1736–10.06.1813) — французский математик и механик, член Французской АН, член и президент Берлинской АН. Труды по вариационному исчислению, математическому анализу, теории чисел, алгебре и дифференциальным уравнениям. Написал трактат «Аналитическая механика».

²Пуассон Симеон Дени (21.06.1781–25.04.1840) — французский математик и механик, член института Франции, почетный член Петербургской АН. Работы посвящены теории рядов Фурье, теории неопределенных интегралов, вариационному исчислению, теории вероятностей, математической физике, теоретической механике. Написал «Курс механики».

³Ковалевская Софья Васильевна (15.01.1850–10.02.1891) — русский математик и механик, чл.-кор. Петербургской АН. Доктор философии Геттингенского университета. Профессор Стокгольмского университета. Исследования относятся к динамике, математической физике, небесной механике, теории дифференциальных уравнений; наиболее важные — к теории вращения твердого тела. Автор литературных произведений.

В случае Эйлера–Пуансо два интеграла движения находятся непосредственно из законов сохранения кинетического момента и энергии

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \text{const},$$

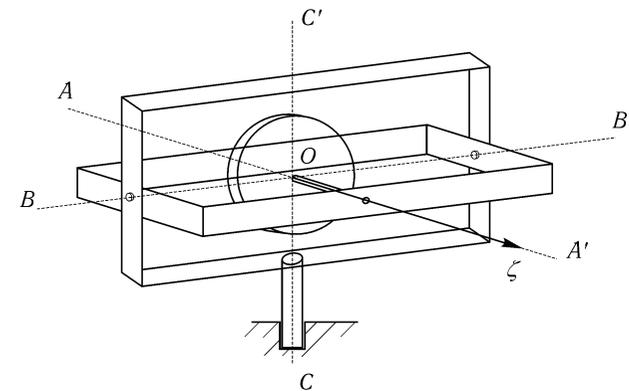
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const}.$$

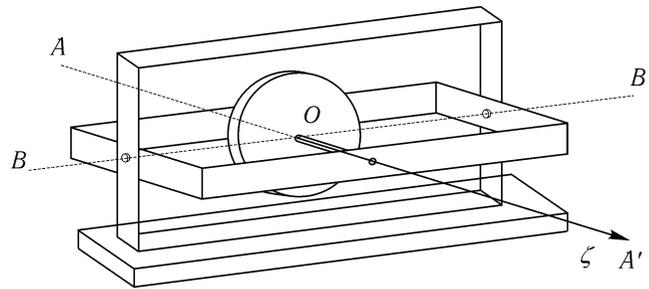
Дифференциальные уравнения свободного движения твердого тела

Дифференциальные уравнения свободного движения твердого тела нетрудно получить, если рассмотреть движение тела как сложное, принимая за переносное движение поступательное с центром масс, а за относительное — сферическое движение вокруг центра масс. Т.е. к динамическим уравнениям Эйлера необходимо добавить дифференциальные уравнения движения центра масс.

Приближенная теория гироскопа

Гироскоп — быстро вращающееся симметричное твердое тело, ось вращения которого (ось симметрии) может изменять свое направление в пространстве. Гироскопы обладают рядом интересных свойств, обуславливающих их широкое применение в различных технических устройствах. В качестве примера на рисунке изображены гироскоп с тремя степенями свободы, когда ротор может совершать три независимых вращения вокруг осей AA' , BB' , CC' , пересекающихся в одной точке O (карданов подвес), и гироскоп с двумя степенями свободы, когда ротор может вращаться только вокруг осей AA' , BB' .





Гироскопы совершают сферическое движение. Если неподвижная точка O совпадает с центром масс, то такой гироскоп называется **астатическим (уравновешенным)**, в противном случае — **тяжелым**.

Элементарная или прецессионная теория гироскопа основана на допущении, что угловая скорость вращения гироскопа вокруг оси материальной симметрии значительно превышает угловую скорость поворота этой оси.

Пусть $\vec{\omega}_1$ — угловая скорость быстро вращающегося гироскопа, $\vec{\omega}_2$ — угловая скорость вращения оси гироскопа. В рамках прецессионной теории можно считать, что кинетический момент гироскопа относительно неподвижной точки направлен вдоль оси симметрии гироскопа $O\zeta$ и равен

$$\vec{K}_O = J_\zeta \omega_1 \vec{k}.$$

Для установления основных свойств гироскопа докажем следующую теорему.

Теорема Резаля¹

Теорема. *Скорость конца вектора кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра геометрически равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему, относительно того же центра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть точка A — конец вектора \vec{K}_O . Скорость ее движения: $\vec{v}_A = \frac{d\vec{K}_O}{dt}$. Сравнивая данное соотношение с теоремой об изменении кинетического момента, получим $\vec{v}_A = \vec{M}_O^e$.

Теорема доказана.

¹Резаль Анри Эме (27.01.1828–22.08.1896) — французский ученый в области механики, член Парижской АН. Работы посвящены вопросам механики, баллистики и термодинамики.

Отметим, что это кинематическая интерпретация теоремы об изменении кинетического момента.

Используя теорему Резаля, можно:

1. Зная внешние силы, найти, как движется ось гироскопа.
2. Зная движение оси гироскопа, можно найти главный момент внешних сил.

Основные свойства гироскопа

Рассмотрим установившееся вращательное движение с угловой скоростью ω_1 астатического гироскопа с тремя степенями свободы. При этом главный момент внешних сил, действующих на гироскоп, относительно неподвижной точки равен нулю. Тогда по теореме об изменении кинетического момента

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = 0 \text{ или } \vec{K}_O = J_\zeta \omega_1 \vec{k} = \text{const.}$$

Т.е. вектор \vec{k} , который задает положение оси гироскопа, остается постоянным по направлению в инерциальной системе отсчета, и имеет место следующее свойство:

Первое свойство астатического гироскопа

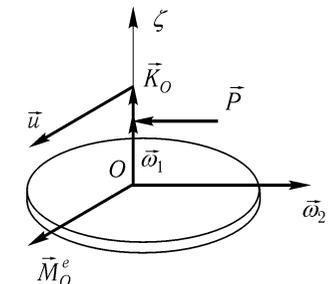
Ось быстро вращающегося уравновешенного (с тремя степенями свободы) гироскопа устойчиво сохраняет свое направление в инерциальной системе отсчета. Удары или толчки могут вызвать вибрацию оси гироскопа, но не отклонение от первоначального положения.

Это свойство широко используется в различных навигационных приборах и стабилизаторах движения. Второе свойство гироскопа обнаруживается, когда на его ось начинает действовать сила (или пара сил), стремящаяся привести ось в движение.

Пусть на ось гироскопа действует постоянная сила \vec{P} , как указано на рисунке.

По теореме Резаля: $\vec{v} = \vec{M}_O^e$. Т.е. действие постоянной силы на ось гироскопа приводит к повороту этой оси с некоторой угловой скоростью ω_2 . По формуле Эйлера для скорости точки, совпадающей с концом вектора \vec{K}_O

$$\vec{v} = \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_O.$$



С учетом равенства $K_O = J_\zeta \omega_1$ из теоремы Резаля находим $\vec{M}_O^e = \vec{\omega}_2 \times J_\zeta \vec{\omega}_1$ или $M_O^e = J_\zeta \omega_1 \omega_2 \sin \theta$, где θ — угол нутации.

Движение, совершаемое осью гироскопа от постоянной силы, называется **прецессией**. ω_2 — угловая скорость прецессии

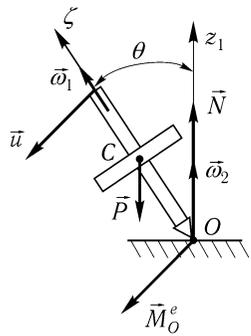
$$\omega_2 = \frac{M^e}{J_\zeta \omega_1 \sin \theta} \quad \text{— закон прецессии.}$$

Это равенство выражает следующее свойство.

Второе свойство гироскопа

При действии силы (или пары сил) на ось быстро вращающегося гироскопа она будет отклоняться не в сторону действия силы, как это было бы при невращающемся роторе, а в направлении, перпендикулярном этой силе. При этом вращение оси будет происходить с постоянной угловой скоростью.

Данное свойство наблюдается как у астатического, так и тяжелого гироскопа.

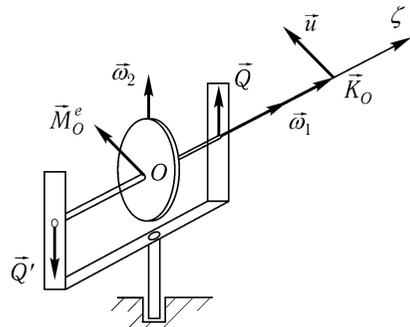


Рассмотрим движение волчка. Действующие на него внешние силы — сила тяжести \vec{P} и сила реакции \vec{N} .

Главный момент внешних сил: $M_O^e = P|CO| \sin \theta$.

$$\text{Из закона прецессии } \omega_2 = \frac{P|CO| \sin \theta}{J_\zeta \omega_1} = \frac{P|CO|}{J_\zeta \omega_1}.$$

Угловая скорость прецессии тем меньше, чем больше угловая скорость вращения волчка вокруг его оси симметрии.



Регулярная прецессия — движение гироскопа с постоянными угловыми скоростями собственного вращения, прецессии и постоянным углом нутации.

Момент гироскопических реакций

Рассмотрим движение астатического гироскопа с двумя степенями свободы, когда ось гироскопа принудительно поворачивается.

В этом случае главный момент внешних сил, действующих на гироскоп, отличен от нуля $\vec{M}_O^e = \vec{u} = \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_O$.

Силы, создающие этот момент — силы **гироскопических реакций** в подшипниках. Противоположный момент создают силы давления на подшипники \vec{Q}, \vec{Q}' . $\vec{M}(\vec{Q}, \vec{Q}') = \vec{K}_O \times \vec{\omega}_2$. Так как $\vec{K}_O = J_\zeta \vec{\omega}_1$, то $\vec{M}(\vec{Q}, \vec{Q}') = J_\zeta (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$ или $M(\vec{Q}, \vec{Q}') = J_\zeta \omega_1 \omega_2 \sin \theta$, где θ — угол между осью собственного вращения гироскопа и осью прецессии.

Под действием гироскопической пары сил давления на подшипники система может перемещаться. Пара сил $\{\vec{Q}, \vec{Q}'\}$ стремится совместить ось вращения гироскопа с осью прецессии.

Данный результат можно сформулировать в виде следующего правила.

Правило Жуковского

Если гироскопу сообщают вынужденное прецессионное движение, то возникает гироскопическая пара сил давления на подшипники, стремящаяся кратчайшим путем установить ось гироскопа параллельно оси прецессии так, чтобы векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ совпали.

Возможность возникновения гироскопических реакций при вынужденной прецессии быстро вращающихся деталей машин (например, роторов судовых и авиационных двигателей) необходимо учитывать в инженерных расчетах.

Литература:

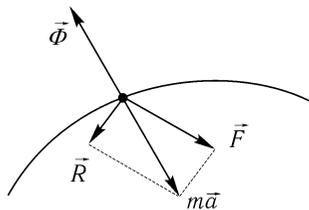
- [1, § 57, 102–105, 131, 132];
- [3, § 34–41, 88–95];
- [4, п. 12.1–12.9, 13.4, 14.1, 15.1–15.6].

ЛЕКЦИЯ 19

Принцип Д'Аламбера

1. Сила инерции материальной точки.
2. Принцип д'Аламбера.
3. Приведение системы сил инерции твердого тела к простейшему виду.
4. Определение динамических реакций.

Сила инерции материальной точки



\vec{F} — равнодействующая активных сил, приложенных к точке,

\vec{R} — равнодействующая реакций связей,

$\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ — сила инерции материальной точки.

Сила инерции материальной точки — сила, равная по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленная в сторону, противоположную ускорению.

Принцип д'Аламбера

Принцип д'Аламбера¹ для точки:

Если в фиксированный момент движения, кроме действующих на точку сил, добавить силу инерции, то система сил будет уравновешенной.

¹Д'Аламбер Жан Лерон (16.11.1717–29.10.1783) — французский математик, механик, философ, член Французской АН. Почетный член Петербургской АН и член ряда других академий наук. Исследования в области механики, гидродинамики, небесной механики, теории дифференциальных уравнений, теории рядов, алгебре. Основоположник методов прикладной механики.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРИНЦИПА ВТОРОМУ ЗАКОНУ НЬЮТОНА.

Из основного уравнения динамики путем тождественных преобразований находим

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} \implies \vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0 \implies \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0.$$

Эквивалентность установлена.

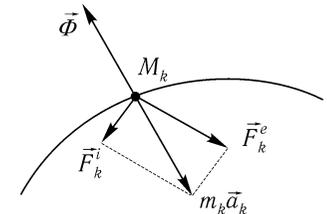
Принцип д'Аламбера для механической системы:

Если в фиксированный момент времени к каждой точке механической системы, кроме действующих сил, добавить силы инерции, то система сил будет уравновешенной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Силы, приложенные к каждой точке системы, разделим на внешние и внутренние. Тогда, принцип д'Аламбера для каждой точки запишется в виде

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$



Принципу д'Аламбера для механической системы можно придать другую математическую форму.

Суммируя полученные выражения по всем точкам системы, находим

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i + \sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k = 0,$$

а умножая векторно слева на радиус-векторы \vec{r}_k точек системы и снова выполняя суммирование, находим:

$$\sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^i) + \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{\Phi}_k) = 0.$$

С учетом свойства внутренних сил имеем

$$\vec{F}^e + \vec{\Phi} = 0, \quad \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^\Phi = 0,$$

где \vec{F}^e — главный вектор внешних сил; $\vec{\Phi}$ — главный вектор сил инерции; \vec{M}_O^e — главный момент внешних сил системы; \vec{M}_O^Φ — главный момент сил инерции.

Принцип доказан.

Полученные уравнения по форме совпадают с условиями равновесия статики. В общем случае они позволяют получить шесть скалярных равенств (равенства нулю сумм проекций сил, включая силы инерции, на каждую из координатных осей и равенства нулю сумм моментов сил относительно координатных осей).

Приведение системы сил инерции твердого тела к простейшему виду

По теореме Пуансо систему сил инерции, приложенных к точкам твердого тела, в общем случае можно заменить силой и парой сил. Сила приложена в центре приведения и равна главному вектору сил инерции, момент пары равен главному моменту сил инерции относительно центра приведения.

Поскольку $\vec{\Phi} = -\vec{F}^e$, $\vec{M}_O^\Phi = -\vec{M}_O^e$, применяя теорему о движении центра масс и теорему об изменении кинетического момента, находим:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_c, \quad \vec{M}_O^\Phi = -\frac{d\vec{K}_O}{dt}.$$

Здесь за центр приведения O принята произвольная неподвижная точка в инерциальной системе отсчета.

Обычно за центр приведения выбирается центр масс механической системы. Тогда с учетом теоремы об изменении кинетического момента в поступательно движущейся с центром масс системе отсчета

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C, \quad \vec{M}_C^\Phi = -\frac{d\vec{K}_C}{dt}.$$

Рассмотрим частные случаи движения твердого тела.

Поступательное движение

Если за центр приведения выбрать центр масс системы, то главный момент всех сил инерции относительно центра масс равен нулю

$$\vec{M}_C^\Phi = -\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k = -\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k \times \vec{a}_C = -M \vec{r}_C \times \vec{a}_C = 0.$$

Система сил инерции приводится к равнодействующей, которая проходит через центр масс, направлена противоположно ускорению центра масс и равна произведению массы тела на ускорение центра масс

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_c.$$

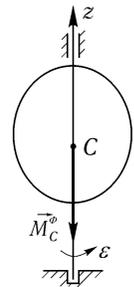
Вращение тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно этой плоскости

Так как центр масс лежит на оси вращения, $\vec{a}_c = 0$ и $\vec{\Phi} = 0$. В этом случае система сил приводится к паре сил, лежащей в плоскости материальной симметрии тела. Вектор момента этой пары равен главному моменту сил инерции относительно оси вращения

$$\vec{M}_C^\Phi = -\frac{dJ_{zC}\vec{\omega}}{dt} = -J_{zC}\vec{\varepsilon}.$$

Таким образом, алгебраический момент пары сил инерции может быть вычислен по формулам:

$$M_{zC}^\Phi = -J_{zC}\varepsilon = -J_{zC}\dot{\omega} = -J_{zC}\ddot{\varphi}.$$



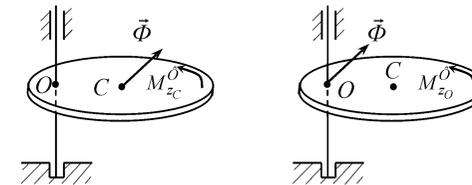
Плоское движение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии

В качестве центра приведения выбираем центр масс, расположенный в плоскости симметрии тела, которая перемещается в координатной плоскости Oxy . Так как плоское движение может быть представлено как сложение поступательного движения с центром масс и вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс, то система сил инерции приводится к силе и к паре, лежащей в плоскости материальной симметрии

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C, \quad M_{zC}^\Phi = -J_{zC}\varepsilon,$$

где J_{zC} — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости материальной симметрии.

Аналогично рассматривается приведение системы сил инерции при вращении тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг оси, не проходящей через центр масс. При этом за центр приведения может выбираться как центр масс, так и неподвижная точка на оси вращения.



Если в качестве центра приведения принимается точка O , лежащая на оси вращения в плоскости симметрии, то главный момент сил инерции

равен

$$M_{zO}^{\Phi} = -J_{zO}\varepsilon,$$

где J_{zO} — момент инерции тела относительно оси вращения.

Определение динамических реакций

При движении несвободного твердого тела реакции связей складываются из статических и добавочных динамических составляющих

$$\vec{R} = \vec{R}_{\text{ст}} + \vec{R}_{\text{дин}},$$

где $\vec{R}_{\text{ст}}$ — главный вектор статических реакций, определяемых уравнениями статики, $\vec{R}_{\text{дин}}$ — главный вектор динамических реакций, обусловленных движением механической системы.

Динамические реакции можно определить с помощью принципа д'Аламбера

$$\vec{F}^e + \vec{F} = 0, \quad \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^{\Phi} = 0, \quad \text{или}$$

$$\vec{F}_{\text{акт}} + \vec{R}_{\text{ст}} + \vec{R}_{\text{дин}} + \vec{F} = 0, \quad \vec{M}_{\text{Оакт}} + \vec{M}_{\text{Ост}} + \vec{M}_{\text{Один}} + \vec{M}_O^{\Phi} = 0.$$

Здесь $\vec{F}_{\text{акт}}$ — главный вектор активных сил; $\vec{M}_{\text{Оакт}}$, $\vec{M}_{\text{Ост}}$, $\vec{M}_{\text{Один}}$ — главные моменты активных сил, статических и динамических реакций соответственно.

Учитывая равенства, которым удовлетворяют статические реакции

$$\vec{F}_{\text{акт}} + \vec{R}_{\text{ст}} = 0,$$

$$\vec{M}_{\text{Оакт}} + \vec{M}_{\text{Ост}} = 0,$$

в проекциях на оси координат получим уравнения для определения динамических реакций опор движущегося тела

$R_{\text{дин}x} + \Phi_x = 0,$	$M_{\text{Один}x} + M_{\text{О}x}^{\Phi} = 0,$
$R_{\text{дин}y} + \Phi_y = 0,$	$M_{\text{Один}y} + M_{\text{О}y}^{\Phi} = 0,$
$R_{\text{дин}z} + \Phi_z = 0,$	$M_{\text{Один}z} + M_{\text{О}z}^{\Phi} = 0.$

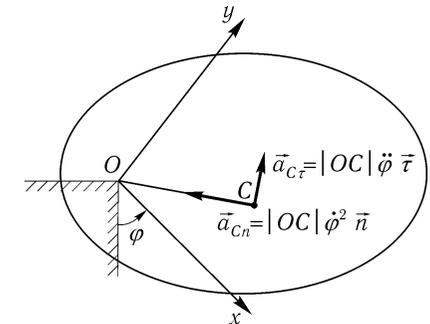
При составлении этих уравнений не нужно учитывать активные силы. Динамические реакции определяются только силами инерции.

При вращении твердого тела массы m вокруг неподвижной оси Oz главный вектор сил инерции равен: $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_{\tau} + \vec{\Phi}_n = -m(\vec{a}_{C\tau} + \vec{a}_{Cn})$. В проекциях на оси координат, жестко связанные с телом,

$$\Phi_x = m y_C \ddot{\varphi} + m x_C \dot{\varphi}^2,$$

$$\Phi_y = -m x_C \ddot{\varphi} + m y_C \dot{\varphi}^2,$$

$$\Phi_z = 0.$$



С учетом выражений для главного момента сил инерции и динамических уравнений вращательного движения твердого тела

$$M_{Ox}^{\Phi} = -M_{Ox}^e = J_{xz}\ddot{\varphi} - J_{yz}\dot{\varphi}^2,$$

$$M_{Oy}^{\Phi} = -M_{Oy}^e = J_{yz}\ddot{\varphi} + J_{xz}\dot{\varphi}^2.$$

Тогда уравнения для определения динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси имеют вид:

$$X_{\text{Адин}} + X_{\text{Вдин}} + m y_C \ddot{\varphi} + m x_C \dot{\varphi}^2 = 0,$$

$$Y_{\text{Адин}} + Y_{\text{Вдин}} - m x_C \ddot{\varphi} + m y_C \dot{\varphi}^2 = 0,$$

$$Z_{\text{Адин}} = 0,$$

$$Y_{\text{Адин}}|z_A| - Y_{\text{Вдин}}|z_B| + J_{xz}\ddot{\varphi} - J_{yz}\dot{\varphi}^2 = 0,$$

$$-X_{\text{Адин}}|z_A| + X_{\text{Вдин}}|z_B| + J_{yz}\ddot{\varphi} + J_{xz}\dot{\varphi}^2 = 0.$$

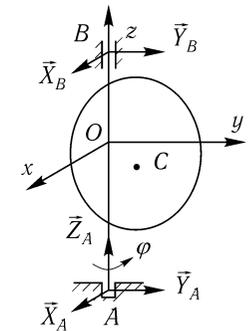
Для того чтобы при вращении тела вокруг неподвижной оси не возникали динамические реакции, необходимо и достаточно, чтобы ось вращения была главной центральной осью инерции. Тогда $x_C = 0$, $y_C = 0$, $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 0$ и динамических реакций не возникает.

Покажем, что ось вращения всегда можно сделать главной центральной осью инерции, добавляя две точечные массы.

Пусть ось вращения не является главной центральной осью инерции вращающегося тела. Добавим к телу массы m_1 и m_2 в точках $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда уравнения для определения динамических реакций примут вид

$$X_{\text{Адин}} + X_{\text{Вдин}} + (m y_C + m_1 y_1 + m_2 y_2) \ddot{\varphi} + (m x_C + m_1 x_1 + m_2 x_2) \dot{\varphi}^2 = 0,$$

$$Y_{\text{Адин}} + Y_{\text{Вдин}} - (m x_C + m_1 x_1 + m_2 x_2) \ddot{\varphi} + (m y_C + m_1 y_1 + m_2 y_2) \dot{\varphi}^2 = 0,$$



$$\begin{aligned}
Z_{\text{Адин}} &= 0, \\
Y_{\text{Адин}}|z_A| - Y_{\text{Вдин}}|z_B| + (J_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2)\ddot{\varphi} - \\
&\quad - (J_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2)\dot{\varphi}^2 = 0, \\
-X_{\text{Адин}}|z_A| + X_{\text{Вдин}}|z_B| + (J_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2)\ddot{\varphi} + \\
&\quad + (J_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2)\dot{\varphi}^2 = 0.
\end{aligned}$$

Динамические реакции обращаются в ноль при выполнении условий:

$$\begin{aligned}
mx_C + m_1x_1 + m_2x_2 &= 0, \\
my_C + m_1y_1 + m_2y_2 &= 0, \\
J_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 &= 0, \\
J_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Давая произвольные значения четырем из величин m_1 , m_2 , x_1 , y_1 , z_1 , x_2 , y_2 , z_2 , остальные можно найти из полученной системы уравнений. Такой метод динамической балансировки широко используется в технике для уравнивания быстровращающихся деталей машин.

Литература:

- [1, § 133–136];
 [3, § 106–111];
 [4, п. 16.1–16.3].

ЛЕКЦИЯ 20

Введение в аналитическую механику

1. Связи и их уравнения.
2. Классификация связей.
3. Виртуальные перемещения. Виртуальная работа силы. Идеальные связи.
4. Принцип виртуальных перемещений.
5. Общее уравнение динамики.

Связи и их уравнения

Тела, ограничивающие свободу перемещения точек данной механической системы, называются **связями**. В аналитической механике связи задаются математически с помощью уравнений или неравенств, в которые входят время, координаты всех или части точек системы и их производные по времени. В частности, для одной точки уравнение связи может иметь вид: $f(x, y, z) = 0$, где $f(x, y, z)$ — заданная функция координат точки.

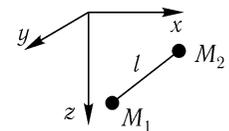
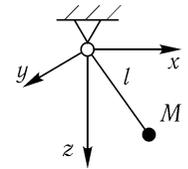
Например, связь в виде идеального стержня, ограничивающего перемещение материальной точки $M(x, y, z)$, записывается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

Другой пример. При свободном движении системы двух материальных точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, соединенных между собой идеальным стержнем, уравнение связи, из условия неизменности расстояния между точками, имеет вид:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2.$$

Положение данной системы определяется пятью независимыми параметрами, в качестве которых могут быть выбраны три декартовы координаты точки M_1 и две декартовы координаты точки M_2 , или три декартовы



координаты точки M_1 и два сферических угла, определяющих положение отрезка M_1M_2 .

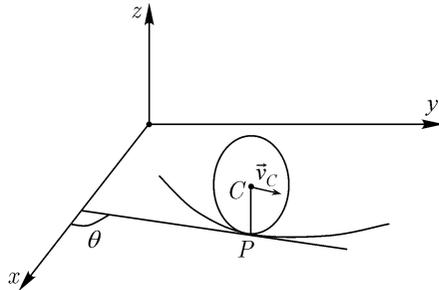
Классификация связей

Связь называется **голономной**, если в уравнение связи входят координаты точек механической системы

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; t) = 0.$$

Выше были рассмотрены примеры голономных связей. Если уравнения связи, кроме координат и иных параметров, определяющих положение системы, содержит их дифференциалы или производные по времени и эти дифференциальные уравнения не могут быть проинтегрированы, то связь называется **неголономной**.

Примером неголономной связи служит горизонтальная плоскость для диска радиуса R , катящегося по ней без скольжения и поворачивающегося при этом вокруг вертикального направления.



В данном случае проекции скорости центра диска на оси координат определяются равенствами

$$\dot{x}_C = \dot{\varphi}R \cos \vartheta, \quad \dot{y}_C = \dot{\varphi}R \sin \vartheta, \quad \dot{z}_C = 0.$$

Последнее уравнение может быть проинтегрировано и дает $z_C = R$. Первые два преобразуются к виду

$$dx_C = d\varphi R \cos \vartheta, \quad dy_C = d\varphi R \sin \vartheta.$$

Эти дифференциальные уравнения могут быть проинтегрированы только в случае, когда $\vartheta = \text{const}$. При этом связь становится голономной.

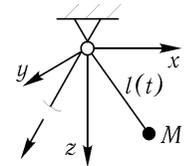
В дальнейшем ограничимся рассмотрением только голономных связей.

Связь называют **удерживающей**, если она выражается математически уравнением, и **неудерживающей**, если она выражается неравенством. Связь называется **стационарной**, если в уравнение связи время явно не входит. Если в уравнение связи время входит явным образом, то связь — **нестационарная**.

Примером нестационарной связи, наложенной на материальную точку, является нить, длина которой изменяется по заданному закону

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2(t).$$

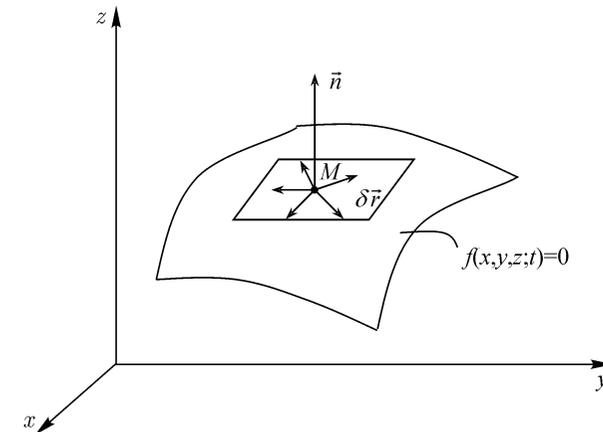
Это голономная, неудерживающая, нестационарная связь.



Виртуальные перемещения. Виртуальная работа силы. Идеальные связи

Виртуальным (возможным) перемещением точки называется такое бесконечно малое (элементарное) перемещение $\delta \vec{r}$, которое допускается в рассматриваемый момент времени наложенными на точку связями.

Проекции вектора виртуального перемещения точки $\delta \vec{r} = \{\delta x, \delta y, \delta z\}$ называются **вариациями** координат.



В случае голономной нестационарной связи уравнение $f(x, y, z; t) = 0$ в фиксированный момент определяет некоторую поверхность в трехмерном

пространстве, на которой находится движущаяся точка. Виртуальные перемещения лежат в касательной плоскости к этой поверхности и вариации координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0,$$

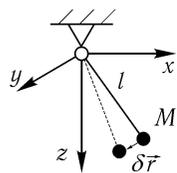
выражающему перпендикулярность вектора нормали к поверхности $\vec{n} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}$ и вектора $\delta \vec{r} = \{\delta x, \delta y, \delta z\}$.

По форме левая часть уравнения связи для вариаций координат совпадает с полным дифференциалом функции трех переменных. Она называется вариацией функции $f(x, y, z; t)$ и обозначается δf . Т. е.

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z.$$

С точностью до величин второго порядка малости координаты точки $M(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ в новом ее положении удовлетворяют уравнению связи

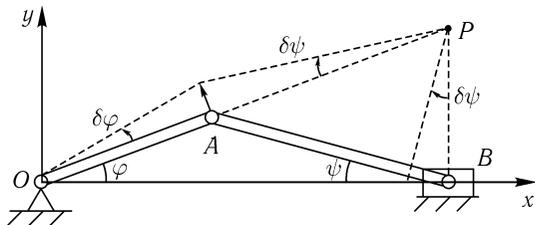
$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z; t) = 0.$$



Если на точку наложена стационарная связь $f(x, y, z) = 0$, то ее уравнение задает поверхность, по которой движется эта точка, и бесконечно малое действительное перемещение $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$ совпадает с одним из виртуальных. Например, для связи в виде стержня и виртуальное перемещение $\delta \vec{r}$ точки M , и ее действительное перемещение $d\vec{r}$ перпендикулярны радиусу сферы, по которой может перемещаться точка.

Если задана неудерживающая связь неравенством $f(x, y, z) \geq 0$, то при нахождении виртуального перемещения она заменяется удерживающей $f(x, y, z) = 0$. Это означает, что при виртуальном перемещении точки связь сохраняется.

Виртуальное перемещение механической системы — совокупность виртуальных перемещений точек этой системы



В частности, в предыдущем примере из уравнения голономной и стационарной связи

$$OA \sin \varphi = AB \sin \psi$$

находим

$$OA \cos \varphi \delta \varphi = AB \cos \psi \delta \psi.$$

Вариации координат середины стержня AB находятся из уравнений связи

$$x_C = OA \cos \varphi + \frac{AB}{2} \cos \psi,$$

$$y_C = AB \sin \psi.$$

Откуда

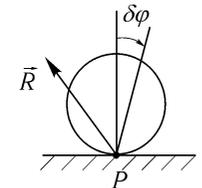
$$\delta x_C = -OA \sin \varphi \delta \varphi - \frac{AB}{2} \sin \psi \delta \psi,$$

$$\delta y_C = AB \cos \psi \delta \psi.$$

Виртуальной работой силы называется работа силы на виртуальном перемещении точки ее приложения $\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$.

Связь называется **идеальной**, если сумма работ реакций этой связи на любом виртуальном перемещении системы равна нулю.

Примером является шероховатая поверхность для катка, катящегося без скольжения, при отсутствии трения качения



$$\delta A = m_P(\vec{R}) \delta \varphi = 0.$$

Принцип виртуальных перемещений

Для равновесия механической системы с идеальными и стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма виртуальных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{акт}} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОСТИ.

Дано: механическая система в равновесии.

$$\text{Доказать: } \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{акт}} = 0.$$

Так как система находится в равновесии, то равнодействующая активных сил \vec{F}_k и равнодействующая сил реакций связей \vec{R}_k , приложенных в k -й точке системы, удовлетворяют условию равновесия статики:

$$\vec{F}_k^{\text{акт}} + \vec{R}_k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Сообщим системе виртуальное перемещение и умножим обе части каждого равенства на виртуальное перемещение k -й точки $\delta \vec{r}_k$. Далее, суммируя по всем точкам системы, получим:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{акт}} \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

Так как связи идеальные, то

$$\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{акт}} \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{акт}} = 0.$$

Необходимость доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОСТАТОЧНОСТИ.

$$\text{Дано: } \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{акт}} = 0.$$

Доказать: механическая система в равновесии.

Предположим, что при заданных условиях система не находится в равновесии, т.е. при действии на систему активных сил хотя бы одна точка получила действительное перемещение $d\vec{r}_k$ и $\vec{F}_k^{\text{акт}} + \vec{R}_k \neq 0$. Так как для стационарных связей действительное перемещение совпадает с одним из возможных перемещений, $d\vec{r}_k = \delta \vec{r}_k \Rightarrow (\vec{F}_k^{\text{акт}} + \vec{R}_k) \cdot \delta \vec{r}_k > 0$ или $\vec{F}_k^{\text{акт}} \cdot \delta \vec{r}_k + \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k > 0$ по крайней мере для одной точки системы, вышедшей из равновесия. Суммируя по всем точкам системы, получаем $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{акт}} \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k > 0$. Так как связи идеальные, то $\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{акт}} \cdot \delta \vec{r}_k > 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{акт}} > 0$, что противоречит условию. Следовательно, система находится в равновесии.

Достаточность доказана.

Принцип возможных перемещений можно применять для определения реакций связей в статически определимых конструкциях. Для этого надо освободить систему от одной из связей и реакцию этой связи считать активной силой. Система, лишенная одной связи, может получить виртуальное перемещение, что и позволяет найти неизвестную реакцию.

Общее уравнение динамики

При движении механической системы с идеальными связями работа всех активных сил и сил инерции на любом виртуальном перемещении системы в каждый фиксированный момент времени равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим движение k -й точки системы

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^{\text{акт}} + \vec{R}_k,$$

или

$$\vec{F}_k^{\text{акт}} - m_k \vec{a}_k + \vec{R}_k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Мысленно зафиксируем время t и дадим системе виртуальное перемещение $\delta \vec{r}_k$, $k = 1, \dots, n$. Умножим скалярно каждое уравнение на $\delta \vec{r}_k$ и сложим их

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{\text{акт}} - m_k \vec{a}_k) \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

По определению идеальных связей последняя сумма равна нулю. Следовательно,

$$\boxed{\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{\text{акт}} - m_k \vec{a}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{\sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{акт}} + \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{ин}} = 0.}$$

Утверждение доказано.

Литература:

- [1, § 137–141];
- [3, § 112–118];
- [4, п. 18.1–18.5, 19.1].

ЛЕКЦИЯ 21

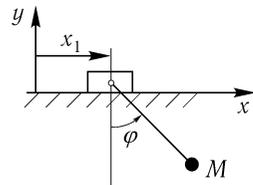
Метод обобщенных координат

1. Обобщенные координаты и скорости.
2. Обобщенные силы и способы их вычисления.
3. Условие равновесия в обобщенных координатах.

Обобщенные координаты и скорости

Обобщенные координаты (q_1, q_2, \dots, q_s) — независимые параметры любой размерности, которые определяют положение механической системы.

Каждому положению механической системы при этом соответствует точка (q_1, q_2, \dots, q_s) в s -мерном пространстве, называемом **пространством конфигураций**.



Для эллиптического маятника, изображенного на рисунке, за обобщенные координаты можно принять координату x_1 и угол φ : $q_1 = x_1, q_2 = \varphi$.

В случае стационарных связей декартовы координаты точки M выражаются следующим образом:

$$x = x_1 + l \sin \varphi, \quad y = -l \cos \varphi.$$

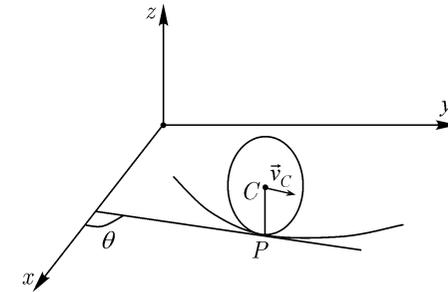
При наличии нестационарных связей, например, при переменной длине нити маятника, $l = l(t)$, $x = x_1 + l(t) \sin \varphi$, $y = -l(t) \cos \varphi$.

В общем случае координаты каждой точки механической системы являются функциями обобщенных координат и времени

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, \dots, q_s; t), \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, \dots, q_s; t), \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, \dots, q_s; t). \end{aligned}$$

Или

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s; t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$



Число степеней свободы механической системы называется число независимых вариаций ее обобщенных координат δq_i . Для механической системы с голономными связями число степеней свободы совпадает с числом обобщенных координат.

В случае неголономных связей число степеней свободы меньше, чем число обобщенных координат. Например, положение диска радиуса R , катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости и поворачивающегося при этом вокруг вертикали, определяется четырьмя обобщенными координатами — x_C, y_C, ϑ и φ (φ — угол поворота при качении). Так как вариации координат связаны соотношениями:

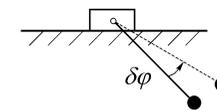
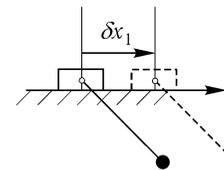
$$\delta x_C = R \delta \varphi \cos \vartheta, \quad \delta y_C = R \delta \varphi \sin \vartheta,$$

то из четырех вариаций обобщенных координат $\delta x_C, \delta y_C, \delta \vartheta$ и $\delta \varphi$ независимыми остаются две. Значит число степеней свободы равно двум.

Для эллиптического маятника, на который наложены голономные связи, число степеней свободы совпадает с числом обобщенных координат. Независимые виртуальные перемещения могут быть изображены, если задать следующие значения вариаций обобщенных координат:

$$\delta x_1 > 0, \quad \delta \varphi = 0;$$

$$\delta x_1 = 0, \quad \delta \varphi > 0.$$



Обобщенными скоростями называются производные обобщенных координат по времени $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$.

Скорости всех точек системы могут быть выражены через обобщенные скорости соотношениями:

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}.$$

В случае стационарных связей

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Обобщенные силы и способы их вычисления

Рассмотрим систему, имеющую s степеней свободы, на которую наложены стационарные и голономные связи.

Для введения понятия обобщенной силы рассмотрим сумму виртуальных работ активных сил, действующих на точки данной механической системы: $\sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{акт}} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k$.

Для систем со стационарными связями радиус-вектор k -й точки — функция обобщенных координат $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s)$. По определению главной части приращения функции многих переменных $\delta \vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \delta q_s$. Подставим данное выражение в формулу для выражения работы активных сил:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{акт}} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^n \left(\vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j,$$

где $Q_j = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$, $j = 1, 2, \dots, s$ — **обобщенные силы** — величины, стоящие при соответствующих вариациях обобщенных координат в формуле для вычисления суммы виртуальных работ активных сил, действующих на точки данной механической системы.

Способы вычисления обобщенных сил.

1. Используя формулу вычисления скалярного произведения, обобщенную силу можно искать в виде

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right).$$

2. Так как связи голономные, то вариации обобщенных координат независимы, и обобщенную силу можно найти, задавая изменение лишь одной координаты, а вариации остальных полагать равными нулю. Тогда, вычисляя виртуальную работу активных сил на изменении этой координаты, находим

$$\delta A_j = Q_j \delta q_j, \quad Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j}.$$

3. Если система консервативная, то обобщенная сила равна частной производной от потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате, взятой со знаком минус. Так как

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}, \quad \text{то}$$

$$Q_j = -\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Условие равновесия в обобщенных координатах

Согласно принципу виртуальных перемещений, условие

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$$

является необходимым и достаточным для равновесия системы с идеальными и стационарными связями. Переходя к обобщенным координатам, находим

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{акт}} = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j \implies Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s = 0.$$

Пусть связи, наложенные на систему, являются голономными. В силу независимости вариаций обобщенных координат равенство нулю возможно только в том случае, когда все коэффициенты при вариациях обобщенных координат равны нулю. Т. е.

Для равновесия механической системы с идеальными, стационарными и голономными связями необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы были равны нулю

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_s = 0.$$

Для консервативных механических систем необходимым и достаточным условием равновесия является

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

Литература:

[1, § 142–144];
[3, § 119–122];
[4, п. 18.6, 18.7].

ЛЕКЦИЯ 22

Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах

1. Тожества Лагранжа.
2. Уравнения Лагранжа второго рода.
3. Уравнения Лагранжа для консервативных механических систем.
4. Уравнение движения машины.

Тожества Лагранжа

Рассмотрим механическую систему с голономными, идеальными и стационарными связями, состоящую из n материальных точек и имеющую s степеней свободы. Обобщенные координаты, задающие положение точек системы, — q_1, q_2, \dots, q_s .

Для стационарных связей радиус-вектор k -й точки — функция обобщенных координат: $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s)$.

Вычисляя скорость этой точки, находим

$$\vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \dot{q}_s.$$

Тогда $\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$ — первое тождество Лагранжа.

С другой стороны:

$$\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_1 \partial q_j} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_2 \partial q_j} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_s \partial q_j} \dot{q}_s,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_s} \dot{q}_s.$$

Сравнивая правые части, находим:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_j}} \text{ — второе тождество Лагранжа.}$$

Уравнения Лагранжа второго рода

Уравнения Лагранжа второго рода — это дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах. Как и раньше, считаем, что связи, наложенные на систему, — голономные, стационарные и идеальные.

Для получения уравнений движения воспользуемся общим уравнением динамики: $\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) \delta \vec{r}_k = 0$.

Для системы со стационарными связями виртуальное перемещение k -й точки выражается через обобщенные координаты соотношением

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Подстановка его в общее уравнение динамики дает:

$$\sum_{k=1}^n \left(\vec{F}_k - m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \right) \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = 0.$$

Поменяем порядок суммирования

$$\sum_{j=1}^s \left(\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0.$$

По определению $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = Q_j$ — обобщенная сила.

Так как связи голономные, то вариации обобщенных координат δq_j независимы. Следовательно, выражения в скобках равны нулю и

$$Q_j - \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (*)$$

Так как $\frac{d\vec{v}_k}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - \vec{v}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right)$, то с учетом тождеств

Лагранжа имеем:

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - \vec{v}_k \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (v_k^2/2)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (v_k^2/2)}{\partial q_j}. \quad (**)$$

Подставляя (**), в равенство (*), внося m_k под знак производной и меняя порядок суммирования и дифференцирования, получаем

$$Q_j - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}}{\partial \dot{q}_j} \right] + \frac{\partial \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}}{\partial q_j} = 0$$

или

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, s}$$

— дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода).

Разность полной производной по времени от частной производной от кинетической энергии по обобщенной скорости и частной производной от кинетической энергии по обобщенной координате равна обобщенной силе.

Если связи, наложенные на систему, неидеальные, то при составлении уравнений движения следует реакции неидеальных связей отнести к активным силам.

Уравнения Лагранжа для консервативных механических систем

Для консервативной системы обобщенные силы определяются через потенциальную энергию системы соотношениями: $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$. Тогда уравнения Лагранжа переписутся в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Введем функцию Лагранжа L соотношением: $L = T - \Pi$. Учитывая, что потенциальная энергия есть функция только обобщенных координат $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$, имеем

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s.}$$

Если в функцию Лагранжа не входят явно k обобщенных координат ($k < s$), то возможно частичное интегрирование дифференциальных уравнений движения механической системы. Соответствующие обобщенные координаты называются **циклическими**. Для них

$$\frac{\partial L(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, q_{k+1}, \dots, q_s)}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Тогда $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$, откуда $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const}$, $j = 1, 2, \dots, k$.

В итоге получаем k циклических интегралов. Примерами таких механических систем являются системы, для которых, в частности, выполняется закон сохранения количества движения.

Уравнение движения машины

Машиной называют совокупность твердых тел (звеньев), соединенных между собой так, что положение и движение любого звена полностью определяется положением и движением одного звена, называемого ведущим.

Составим общее уравнение движения машины, состоящей из ведущего звена и еще n звеньев, пользуясь уравнением Лагранжа второго рода.

При составлении выражения кинетической энергии предположим, что за ведущее звено выбрано вращающееся тело (ведущий кривошип). Обозначим через φ угол поворота ведущего кривошипа, тогда его кинетическая энергия

$$T_0 = \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2,$$

где J_0 — момент инерции ведущего кривошипа относительно оси вращения.

Из определения машины угловая скорость k -го звена $\vec{\omega}_k$ и скорость его центра масс $\vec{v}_C^{(k)}$ определяются угловой скоростью ведущего кривошипа и отношения

$$\frac{\vec{\omega}_k}{\dot{\varphi}} \quad \text{и} \quad \frac{\vec{v}_C^{(k)}}{\dot{\varphi}}$$

— известные функции угла φ .

Кинетическая энергия k -го звена определяется по теореме Кенига

$$T_k = \frac{1}{2} J_C^{(k)} \omega_k^2 + \frac{1}{2} m_k v_C^{(k)2} = \frac{1}{2} \left[J_C^{(k)} \left(\frac{\omega_k}{\dot{\varphi}} \right)^2 + m_k \left(\frac{v_C^{(k)}}{\dot{\varphi}} \right)^2 \right] \dot{\varphi}^2,$$

где $J_C^{(k)}$ — момент инерции k -го звена относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно вектору $\vec{\omega}_k$, m_k — масса k -го звена.

Кинетическая энергия машины определяется суммой

$$T = T_0 + \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} \left\{ J_0 + \sum_{k=1}^n \left[J_C^{(k)} \left(\frac{\omega_k}{\dot{\varphi}} \right)^2 + m_k \left(\frac{v_C^{(k)}}{\dot{\varphi}} \right)^2 \right] \right\} \dot{\varphi}^2.$$

Величина, стоящая в скобках, называется моментом инерции машины, приведенным к оси вращения ведущего звена (обозначается $J_{пр}$). Тогда

$$T = \frac{1}{2} J_{пр}(\varphi) \dot{\varphi}^2.$$

Для вычисления обобщенной силы найдем виртуальную работу сил, действующих на машину. Пусть $\vec{M}_i^{(k)}$ обозначает момент i -й пары сил, приложенной к k -му звену машины ($i = 1, 2, \dots, n_k$), а $\vec{F}_j^{(k)}$ обозначает силу, приложенную в j -й точке k -го звена машины ($j = 1, 2, \dots, n_k$). Тогда

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=1}^{n_i} \vec{M}_i^{(k)} \cdot \vec{\omega}_k + \sum_{j=1}^{n_k} \vec{F}_j^{(k)} \cdot \vec{v}_j^{(k)} \right) \delta t = \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=1}^{n_i} \vec{M}_i^{(k)} \cdot \frac{\vec{\omega}_k}{\dot{\varphi}} + \sum_{j=1}^{n_k} \vec{F}_j^{(k)} \cdot \frac{\vec{v}_j^{(k)}}{\dot{\varphi}} \right) \delta \varphi. \end{aligned}$$

Вектор скорости $\vec{v}_j^{(k)}$ j -й точки k -го звена может быть выражен через $\dot{\varphi}$

и отношение $\frac{\vec{v}_j^{(k)}}{\dot{\varphi}}$ является функцией угла φ .

Обобщенная сила Q — это множитель при вариации обобщенной координаты φ в выражении виртуальной работы. Т. е.

$$Q = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=1}^{n_i} \vec{M}_i^{(k)} \cdot \frac{\vec{\omega}_k}{\dot{\varphi}} + \sum_{j=1}^{n_k} \vec{F}_j^{(k)} \cdot \frac{\vec{v}_j^{(k)}}{\dot{\varphi}} \right).$$

Полученное выражение называется вращающим моментом, приведенным к оси вращения ведущего кривошипа (обозначается $m_{пр}$).

Подставляя найденную кинетическую энергию в уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q,$$

получаем общее уравнение движения машины

$$J_{\text{пр}}(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}J'_{\text{пр}}(\varphi)\dot{\varphi}^2 = m_{\text{пр}}.$$

Здесь дифференцирование приведенного момента инерции осуществляется по обобщенной координате.

Литература:

- [1, § 45];
- [3, § 125–128];
- [4, п. 19.2, 19.3].

ЛЕКЦИЯ 23

Интегральный вариационный принцип

1. Принцип Гамильтона–Остроградского.
2. Принцип Гамильтона–Остроградского для консервативных систем.

Принцип Гамильтона¹–Остроградского²

Рассмотрим движение механической системы с s степенями свободы, на которую наложены голономные, идеальные и стационарные связи. Ее положению в каждый момент движения соответствует точка $(q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t))$ в s -мерном конфигурационном пространстве. На отрезке времени $[0, t_1]$ эта точка описывает некоторую линию, которая называется **траекторией механической системы**. Наряду с действительной траекторией движения механической системы рассмотрим семейство виртуальных (допускаемых наложенными связями) траекторий, по которым движение механической системы из начальной конфигурации в конечную осуществляется за тот же промежуток времени. Соответствующие им координаты точек конфигурационного пространства можно записать функциями

$$q_j = q_j(t, \xi), \quad q_j(t, \xi) \Big|_{\xi=0} = q_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

где $\xi \geq 0$ — переменный параметр.

Виртуальное перемещение механической системы в каждый фиксированный момент времени определим системой равенств

$$\delta q_j = \frac{\partial q_j(t, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\xi, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

¹Гамильтон Уильям Роуан (4.08.1805–2.09.1865) — ирландский математик, член Ирландской АН. Основные работы посвящены математической оптике, механике, вариационному исчислению.

²Остроградский Михаил Васильевич (24.09.1801–1.01.1862) — русский математик и механик, академик Петербургской АН. Работы по аналитической механике, гидромеханике, теории упругости, небесной механике, математической физике.

С точностью до малых второго порядка по $d\xi$ координаты виртуальных траекторий отличаются от координат действительной траектории на величину δq_j

$$q_j(t, \xi) = q_j(t) + \delta q_j.$$

Аналогично можно рассматривать вариацию произвольной функции времени. Такие вариации называют синхронными.

Справедливо утверждение.

Принцип Гамильтона–Остроградского

Действительное движение механической системы отличается от всех возможных ее движений из начальной конфигурации в конечную тем, что для действительного перемещения выполняется равенство

$$\int_0^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0.$$

Здесь $\delta A = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j$ — виртуальная работа сил, вызывающих движение, δT — вариация кинетической энергии.

Поскольку кинетическая энергия механической системы есть функция обобщенных координат и скоростей $T = T(q_1, q_2, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s)$, то ее вариация может быть определена как главная (линейная) часть приращения функции $2s$ переменных

$$\delta T = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j.$$

При этом справедливо

$$\frac{d}{dt}(\delta q_j) = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\xi = \delta \dot{q}_j.$$

Из этого принципа могут быть получены уравнения Лагранжа второго рода, и сам он может быть выведен из этих уравнений. Докажем второе утверждение, ограничиваясь рассмотрением систем с голономными, стационарными и идеальными связями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Умножая каждое из уравнений Лагранжа на соответствующую вариацию обобщенной координаты, и складывая полученные равенства, находим

$$\sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j$$

или

$$\sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j = \delta A.$$

С учетом выражения для вариации кинетической энергии имеем

$$\delta T + \delta A = \sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right).$$

Интегрируя полученное равенство по промежутку времени $[0, t_1]$, находим

$$\int_0^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = \sum_{j=1}^s \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_0^{t_1} = 0.$$

При подстановке пределов интегрирования здесь воспользовались тем, что в начальной и конечной точках виртуальные траектории и действительная траектория совпадают ($\delta q_j(0) = 0$, $\delta q_j(t_1) = 0$).

Утверждение доказано.

Принцип Гамильтона–Остроградского для консервативных систем

Для консервативных систем виртуальная работа выражается через вариацию потенциальной энергии

$$\delta A = - \sum_{j=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \delta q_j = -\delta \Pi$$

и принцип Гамильтона–Остроградского принимает вид

$$\int_0^t \delta(T - \Pi) dt = 0.$$

Введя функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, находим

$$\int_0^t \delta L dt = 0.$$

В силу независимости операций интегрирования и варьирования, их порядок можно менять. Действительно, так как

$$\delta L = L(t, \xi) - L(t) = \left. \frac{\partial L(t, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} d\xi,$$

то

$$\int_0^{t_1} \delta L dt = \int_0^{t_1} \left(\left. \frac{\partial L(t, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} d\xi \right) dt = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_0^{t_1} L(t, \xi) dt \right) \Big|_{\xi=0} d\xi = \delta \int_0^{t_1} L dt.$$

Интеграл $\int_0^{t_1} L dt$ называется **действием** по Гамильтону и обозначается буквой S , а принцип Гамильтона–Остроградского приобретает форму:

Действительное движение консервативной механической системы таково, что действие по Гамильтону имеет стационарное значение

$$\delta S = 0.$$

Условие стационарности действия по Гамильтону эквивалентно тому, что функция L удовлетворяет уравнениям Лагранжа для консервативных систем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Отыскание экстремумов определенных интегралов относится к задачам вариационного исчисления. Простейшей такой задачей является отыскание функции $y = y(x)$ при краевых условиях $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$, доставляющей экстремум интегралу $J = \int_0^{x_1} f(x, y, y') dx$.

Формальная замена переменных в принципе Гаусса–Остроградского для механической системы с одной степенью свободы

$$t \rightarrow x, \quad q \rightarrow y, \quad \dot{q} \rightarrow y', \quad L \rightarrow f, \quad S \rightarrow J$$

дает, что функция $y = y(x)$, доставляющая экстремум этому интегралу ($\delta J = 0$), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{при краевых условиях } y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Это дифференциальное уравнение называется уравнением Эйлера.

ЛЕКЦИЯ 24

Устойчивость равновесия

1. Определение устойчивого положения равновесия.
2. Теорема Лагранжа–Дирихле.
3. Потенциальная энергия в малой окрестности положения равновесия.
4. Условие устойчивости консервативных механических систем.

Определение устойчивого положения равновесия

Как было показано в лекции 21, условие равновесия механической системы в обобщенных координатах имеет вид:

$$Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Для консервативных систем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Эта система уравнений относительно обобщенных координат позволяет найти все положения равновесия консервативной механической системы.

Не все положения равновесия физически реализуемы. Малые возмущения механической системы, находящейся в равновесии, могут привести к потере ее устойчивости. В дальнейшем, для удобства, при исследовании движения механической системы около положения равновесия будем полагать, что отсчет обобщенных координат производится от положения равновесия и потенциальная энергия в положении равновесия равна нулю.

Определение. *Положение равновесия механической системы, имеющей s степеней свободы, устойчиво (по Ляпунову¹), если для любых $\varepsilon_j > 0$,*

¹Ляпунов Александр Михайлович (6.06.1857–3.11.1918) – русский математик и механик, академик Петербургской АН, чл.-кор. Парижской АН, почетный член Петербургского, Харьковского и Казанского университетов, член многих академий наук и научных обществ. Основные работы посвящены теории устойчивости равновесия и движения механических систем, теории фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости и математической физике.

$j = 1, 2, \dots, s$ существуют $\delta_j > 0$, $\tilde{\delta}_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, s$ такие, что при начальных возмущениях $|q_{j0}| \leq \delta_j$ и $|\dot{q}_{j0}| \leq \tilde{\delta}_j$ в дальнейшем движении механической системы для каждой обобщенной координаты выполняется неравенство

$$|q_j(t)| \leq \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

В противном случае положение равновесия называется неустойчивым.

Это определение является частным случаем определения устойчивости движения механической системы по Ляпунову.

Теорема Лагранжа–Дирихле¹

Достаточное условие устойчивости положения равновесия консервативной механической системы дается теоремой Лагранжа–Дирихле, которую приведем без доказательства.

Теорема. Если в положении равновесия консервативной механической системы с идеальными и стационарными связями потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим область D :

$$|q_j| < \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

s -мерного пространства обобщенных координат, определяющих положение механической системы. Значениям

$$q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

соответствует положение равновесия, в котором потенциальная энергия имеет локальный минимум и полагается равной нулю. Область D — это область локального минимума.

Найдем минимальные значения потенциальной энергии системы, когда обобщенным координатам последовательно придаются значения $q_j = \varepsilon_j$, а остальным — произвольные из области локального минимума. Вводя

¹Дирихле Лежен Петер Густав (13.02.1805–5.05.1859) — немецкий математик, член Берлинской АН, чл.-кор. Петербургской АН, иностранный член Парижской АН. Исследования относятся к теории чисел, математическому анализу, математической физике и механике. Дал строгое доказательство теоремы об устойчивости положения равновесия в 1846 году.

соответствующие обозначения, находим

$$\Pi(\varepsilon_1, q_2, \dots, q_s) = P_1,$$

$$\Pi(q_1, \varepsilon_2, \dots, q_s) = P_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, \varepsilon_s) = P_s.$$

Так как в положении равновесия $\Pi = 0$ и имеет место минимум, то

$$P_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Обозначим наименьшее из этих чисел P . Тогда условие того, что точка s -мерного пространства (q_1, q_2, \dots, q_s) находится внутри области локального минимума D пространства конфигураций записывается в виде

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s) < P.$$

Сообщим системе движение из начальной конфигурации

$$(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{s0}) \in D \quad (P - \Pi_0 > 0).$$

При движении консервативной системы с идеальными и стационарными связями выполняется закон сохранения энергии

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0.$$

Из положительности кинетической энергии следует

$$\Pi < T_0 + \Pi_0.$$

Начальные скорости точек механической системы всегда можно подобрать таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$T_0 < P - \Pi_0.$$

Тогда

$$\Pi < P.$$

Это означает, что механическая система совершает такое движение, что $(q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)) \in D$. Откуда, в силу произвольности области D , следует, что положение равновесия устойчиво.

Теорема доказана.

Для механических систем с одной степенью свободы условие минимума потенциальной энергии в положении равновесия $q = q^*$ определяется на основе соответствующих теорем математического анализа о необходимых и достаточных условиях существования экстремума функции одной переменной:

$$\left. \frac{d\Pi(q)}{dq} \right|_{q=q^*} = 0, \quad \left. \frac{d^2\Pi(q)}{dq^2} \right|_{q=q^*} > 0.$$

Потенциальная энергия в малой окрестности положения равновесия

Для исследования устойчивости положения равновесия механической системы с несколькими степенями свободы разложим потенциальную энергию $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$ в ряд в окрестности положения равновесия

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, \dots, q_s) = & \Pi(q_1 = 0, \dots, q_s = 0) + \left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \right|_{q_1=0, \dots, q_s=0} q_1 + \dots + \\ & + \left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} \right|_{q_1=0, \dots, q_s=0} q_s + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} \right|_{q_1=0, \dots, q_s=0} q_1^2 + \right. \\ & \left. + 2 \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \right|_{q_1=0, \dots, q_s=0} q_1 q_2 + \dots + \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_s^2} \right|_{q_1=0, \dots, q_s=0} q_s^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю исходя из сделанного ранее предположения о равенстве нулю потенциальной энергии в положении равновесия. Кроме того, равны нулю коэффициенты в линейных членах разложения из условия равновесия консервативной механической системы в обобщенных координатах. Тогда, с точностью до членов более высокого порядка малости, потенциальная энергия механической системы в окрестности положения равновесия может быть представлена следующей квадратичной формой

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s c_{ij} q_i q_j,$$

где введено обозначение

$$c_{ij} = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_1=0, \dots, q_s=0} \quad \text{— обобщенные коэффициенты жесткости.}$$

Обобщенные коэффициенты жесткости вычисляются в положении равновесия, следовательно, все они постоянные числа, причем: $c_{ij} = c_{ji}$.

Условие устойчивости консервативных механических систем

Так как потенциальная энергия в положении равновесия равна нулю, и в этом положении она имеет минимум, то вблизи положения равновесия $\Pi > 0$, т. е. соответствующая квадратичная форма определено положительна. Математическое условие положительной определенности любой квадратичной формы дается теоремой Сильвестра, доказываемой в курсах линейной алгебры:

Теорема. Для того чтобы квадратичная форма была определено положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы квадратичной формы были положительными.

В случае квадратичной формы для потенциальной энергии:

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix} > 0.$$

В частности, для системы с двумя степенями свободы

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2)$$

и согласно теореме Сильвестра условие устойчивости имеет вид:

$$c_{11} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0.$$

Итак, для исследования устойчивости равновесия консервативной механической системы надо сначала определить обобщенные коэффициенты жесткости, а затем записать неравенства, выражающие соответствующее условие устойчивости.

Литература:

- [1, § 147];
- [3, § 123, 124];
- [4, п. 20.1, 20.2].

ЛЕКЦИЯ 25

Малые колебания механических систем с одной степенью свободы

1. Кинетическая энергия механической системы в малой окрестности устойчивого положения равновесия.
2. Дифференциальные уравнения движения механических систем около устойчивого положения равновесия.
3. Малые колебания механических систем с одной степенью свободы.

Кинетическая энергия механической системы в малой окрестности устойчивого положения равновесия

Запишем выражение кинетической энергии механической системы с s степенями свободы, на которую наложены голономные и стационарные связи

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2.$$

Так как $\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt}$ и $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s)$, то $\vec{v}_k = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j$ и кинетическая энергия является квадратичной формой обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где $a_{ij} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$ — **обобщенные коэффициенты инерции**, которые в общем случае являются функциями обобщенных координат. Эта квадратичная форма всегда определено положительна, так как $T > 0$.

Разложим коэффициенты инерции в степенной ряд в окрестности положения равновесия:

$$a_{ij}(q_1, \dots, q_s) = a_{ij}(q_1 = 0, \dots, q_s = 0) + \left. \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_1} \right|_{q_1=0, \dots, q_s=0} q_1 + \dots$$

и подставим в выражение для кинетической энергии, сохраняя члены не выше второго порядка малости относительно q_j и \dot{q}_j .

Полученное таким образом приближенное выражение кинетической энергии отличается от точного тем, что обобщенные коэффициенты инерции заменяются их значениями в положении равновесия

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_{q_1=0, \dots, q_s=0}.$$

Дифференциальные уравнения движения механических систем около устойчивого положения равновесия

Рассмотрим движение консервативной механической системы с голономными, стационарными и идеальными связями около устойчивого положения равновесия. Для этого составим уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Потенциальную и кинетическую энергии представим квадратичными формами по обобщенным координатам и обобщенным скоростям

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s c_{ij} q_i q_j, \quad c_{ij} = \text{const}, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = \text{const}.$$

Так как эти квадратичные формы определено положительны (первая — из устойчивости положения равновесия; вторая — из определения кинетической энергии), то по теореме Сильвестра главные миноры матриц этих квадратичных форм больше нуля.

Подстановка этих выражений для Π и T в уравнения Лагранжа дает:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + \dots + a_{1s}\ddot{q}_s + c_{11}q_1 + \dots + c_{1s}q_s &= 0, \\ \dots & \\ a_{1s}\ddot{q}_1 + \dots + a_{ss}\ddot{q}_s + c_{1s}q_1 + \dots + c_{ss}q_s &= 0. \end{aligned}$$

Полученная система дифференциальных уравнений описывает движение консервативной механической системы около устойчивого положения равновесия. Воспользуемся этими уравнениями для исследования малых колебаний систем с одной и двумя степенями свободы.

Малые колебания системы с одной степенью свободы

Положение механической системы с одной степенью свободы однозначно определяется заданием одной обобщенной координаты $q_1 = q$. Вводя обозначения: $c_{11} = c$ и $a_{11} = a$, из уравнений движения механической системы около устойчивого положения равновесия получим

$$a\ddot{q} + cq = 0.$$

Так как $c > 0$ и $a > 0$, то

$\ddot{q} + k^2q = 0$ — дифференциальное уравнение свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы,

где $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$ — циклическая частота колебаний.

Решение этого уравнения аналогично рассмотренному в случае прямолинейных колебаний материальной точки

$$q = A \sin(kt + \alpha).$$

Если на точки механической системы помимо потенциальных сил действуют силы сопротивления (**диссипативные силы**) и возмущающие силы, то при составлении уравнений движения необходимо вычислить соответствующие им обобщенные силы. В частном случае, если диссипативная обобщенная сила пропорциональна обобщенной скорости

$$Q^R = -b\dot{q},$$

а обобщенная возмущающая сила периодически изменяется с течением времени

$$Q(t) = H \sin pt,$$

то движение механической системы около устойчивого положения равновесия описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = h \sin pt,$$

где, как и в случае вынужденных колебаний материальной точки в среде с сопротивлением, введены обозначения $2n = b/a$ и $h = H/a$.

(Исследование решения этого дифференциального уравнения было выполнено в лекции 15.)

Литература:

[1, § 148];
[4, п. 20.3].

ЛЕКЦИЯ 26

Малые колебания механических систем с двумя степенями свободы

1. Малые свободные колебания механических систем с двумя степенями свободы. Главные колебания.
2. Вынужденные колебания механических систем с двумя степенями свободы.
3. Понятие о виброзащите. Динамический гаситель колебаний.
4. Дифференциальные уравнения малых колебаний упругих систем.
5. Колебания упругой системы с двумя степенями свободы.
6. Вынужденные колебания упругих систем с двумя степенями свободы.

Малые свободные колебания механических систем с двумя степенями свободы. Главные колебания

Из дифференциальных уравнений движения консервативной механической системы около устойчивого положения равновесия в случае двух степеней свободы имеем:

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0.$$

(Согласно критерию Сильвестра: $c_{11} > 0, c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0; a_{11} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.)

Это система дифференциальных уравнений малых свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы около устойчивого положения равновесия. Ее решение ищется в виде:

$$q_1 = A \sin(kt + \delta), \\ q_2 = B \sin(kt + \delta).$$

Подстановка этого решения в систему дифференциальных уравнений малых колебаний дает

$$(c_{11} - a_{11}k^2)A + (c_{12} - a_{12}k^2)B = 0, \\ (c_{12} - a_{12}k^2)A + (c_{22} - a_{22}k^2)B = 0. \quad (*)$$

Относительно A и B это система однородных алгебраических уравнений. Она имеет нетривиальное решение, когда определитель системы равен нулю

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{12} - a_{12}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \\ (c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0.$$

Это биквадратное уравнение называется **уравнением частот**, оно имеет два положительных корня k_1^2 и k_2^2 , которым соответствуют два решения системы дифференциальных уравнений малых колебаний:

$$q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \delta_1) + A_2 \sin(k_2 t + \delta_2), \\ q_2 = B_1 \sin(k_1 t + \delta_1) + B_2 \sin(k_2 t + \delta_2).$$

Таким образом, каждая обобщенная координата находится как сумма двух колебаний разной частоты, которые называются **главными колебаниями**. При этом, как следует из системы (*), амплитуды главных колебаний связаны между собой следующим образом:

$$\mu_i = \frac{B_i}{A_i} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_i^2}{c_{12} - a_{12}k_i^2}, \quad i = 1, 2,$$

где μ_i — **коэффициенты формы** главных колебаний.

В итоге уравнения движения имеют вид:

$$q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \delta_1) + A_2 \sin(k_2 t + \delta_2), \\ q_2 = \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \delta_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \delta_2).$$

Амплитуды A_1, A_2 и начальные фазы δ_1, δ_2 соответствующих колебаний определяются из начальных условий.

Вынужденные колебания механических систем с двумя степенями свободы

Пусть к механической системе помимо консервативных сил приложена возмущающая сила. Особый интерес представляет случай, когда обобщенная сила, соответствующая одной из обобщенных координат, изменяется с

течением времени по гармоническому закону

$$Q_1(t) = H_1 \sin pt.$$

Дифференциальные уравнения движения механической системы принимают вид:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= H_1 \sin pt, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Общее решение системы линейных неоднородных, в данном случае, дифференциальных уравнений ищем как сумму двух решений: $q_1 = q_1^* + q_1^{**}$, $q_2 = q_2^* + q_2^{**}$, где q_1^* , q_2^* — общее решение системы однородных дифференциальных уравнений, метод получения которого изложен выше; q_1^{**} , q_2^{**} — частное решение системы неоднородных дифференциальных уравнений.

С учетом зависимости возмущающей силы от времени частное решение ищется в виде

$$q_1^{**} = A \sin pt, \quad q_2^{**} = B \sin pt.$$

Подстановка его в систему дифференциальных уравнений дает:

$$\begin{aligned} (c_{11} - a_{11}p^2)A + (c_{12} - a_{12}p^2)B &= H_1, \\ (c_{12} - a_{12}p^2)A + (c_{22} - a_{22}p^2)B &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему по правилу Крамера¹, получим

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta = \Delta(p) &= \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}p^2 & c_{12} - a_{12}p^2 \\ c_{12} - a_{12}p^2 & c_{22} - a_{22}p^2 \end{vmatrix}, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} H_1 & c_{12} - a_{12}p^2 \\ 0 & c_{22} - a_{22}p^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}p^2 & H_1 \\ c_{12} - a_{12}p^2 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$\Delta(p)$ совпадает с левой частью уравнения частот и обращается в ноль при совпадении частоты возмущающей силы с одной из частот собственных колебаний k_1 или k_2 . Коэффициенты A и B при этом обращаются в бесконечность. Таким образом, в случае колебаний системы с двумя степенями свободы существуют две резонансные частоты $p_1 = k_1$ и $p_2 = k_2$.

¹Крамер Габриель (31.07.1704–4.01.1752) — швейцарский математик, член Лондонского королевского общества. Основные направления исследований — геометрия, теория алгебраических уравнений, теория вероятностей. Заложил основы теории определителей.

Общее решение системы дифференциальных уравнений вынужденных колебаний при $p_1 \neq k_1$ и $p_2 \neq k_2$ имеет вид:

$$q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \delta_1) + A_2 \sin(k_2 t + \delta_2) + \frac{\Delta_1}{\Delta} \sin pt,$$

$$q_2 = \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \delta_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \delta_2) + \frac{\Delta_2}{\Delta} \sin pt.$$

Понятие о виброзащите. Динамический гаситель колебаний

Исключение нежелательных колебаний в механических системах называется **виброзащитой (демпфированием)**. Используемые при этом технические устройства называются **виброгасителями (демпферами)**. Рассмотрим принцип работы одного из таких устройств — **динамического гасителя** колебаний. За счет выбора параметров колеблющейся системы можно добиться выполнения условия $A = 0$, т. е. амплитуда вынужденных колебаний, соответствующих первой обобщенной координате, обращается в ноль. Такое явление называется **антирезонансом**. Это имеет место, если $\Delta_1 = 0$, т. е.

$$H_1(c_{22} - a_{22}p^2) = 0 \quad \text{или} \quad p = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}.$$

Принцип работы динамического гасителя основан на использовании явления антирезонанса, когда действие периодически изменяющейся возмущающей обобщенной силы, соответствующей одной координате, нейтрализуется действием потенциальной обобщенной силы, соответствующей другой координате.

В частности, в случае вынужденных колебаний упругой балки, несущей массу, дополнительная масса m на пружине жесткости c будет выполнять роль гасителя колебаний, когда «парциальная» частота собственных ее колебаний будет совпадать с частотой возмущающей силы

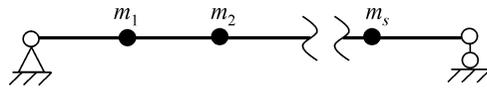
$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

На практике преимущественно применяют демпфирующие устройства с использованием сил вязкого сопротивления.

Дифференциальные уравнения малых колебаний упругих систем

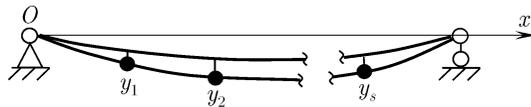
Упругие механические системы в общем случае представляют системы упругих тел, которые изменяют свою форму и размеры под действи-

ем нагрузок и самопроизвольно восстанавливают исходную конфигурацию при прекращении внешнего воздействия. Во многих случаях достаточно приемлемой расчетной схемой такой системы служит безмассовый каркас, с которым связано некоторое число точечных масс. Простейшим примером является, в частности, балочная конструкция.



Балка является одним из основных элементов строительных конструкций, и вопрос исследования ее упругих колебаний имеет самостоятельное прикладное значение. Кроме того, эта схема может быть применена и к анализу изгибных колебаний валов, которые возбуждаются периодически или внезапно приложенными силами. Большая часть повреждений в машинах и в их деталях происходит в результате возникновения в них колебаний. Борьба с нежелательными колебаниями является неотъемлемым условием повышения ресурса машин.

В качестве обобщенных координат для указанной системы выберем отклонения точечных масс от положения равновесия — y_1, y_2, \dots, y_s .



Тогда кинетическая энергия системы запишется в виде

$$T = \sum_{i=1}^s \frac{m_i \dot{y}_i^2}{2}$$

и подстановка ее в уравнения Лагранжа второго рода дает

$$\begin{aligned} c_{11}y_1 + \dots + c_{1s}y_s &= -m_1\ddot{y}_1, \\ \dots & \\ c_{s1}y_1 + \dots + c_{ss}y_s &= -m_s\ddot{y}_s. \end{aligned}$$

Разрешим эту систему относительно обобщенных координат. Это можно сделать, так как на основании теоремы Лагранжа–Дирихле потенциальная энергия в устойчивом положении равновесия имеет минимум и квадратичная форма, которой она представлена, является определено положительной. Следовательно, определитель матрицы обобщенных коэффициентов

жесткости, по критерию Сильвестра, строго больше нуля. В результате

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}(-m_1\ddot{y}_1) + \dots + \delta_{1s}(-m_s\ddot{y}_s), \\ \dots & \\ y_s &= \delta_{s1}(-m_1\ddot{y}_1) + \dots + \delta_{ss}(-m_s\ddot{y}_s), \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что перемещения y_i пропорциональны силам инерции точечных масс. Коэффициенты δ_{ij} называются **коэффициентами влияния** и определяют перемещения в точке с координатой x_i , вызванного единичной силой, приложенной в точке с координатой x_j .

Матрица коэффициентов влияния, как это видно из изложения, является обратной для матрицы обобщенных коэффициентов жесткости, а, следовательно, также является симметричной. Этот результат выражает теорему Максвелла¹ о взаимности перемещений.

Перемещение в i -й точке от единичной силы, приложенной в j -й точке, равно перемещению в j -й точке от единичной силы, приложенной в i -й точке

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}.$$

Таким образом, для составления дифференциальных уравнений малых колебаний упругих систем достаточно вычислить коэффициенты влияния, которые могут быть найдены методами сопротивления материалов.

В частности, коэффициенты влияния при изгибе могут быть вычислены с помощью интеграла Мора²:

$$\delta_{ij} = \int_0^l \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EJ} dx,$$

где $\overline{M}_i, \overline{M}_j$ — изгибающие моменты, вызванные единичными силами $p_i = 1$ и $p_j = 1$, E — модуль Юнга, J — момент инерции сечения балки.

Или по формуле Верещагина³ «перемножения эпюр»:

$$\delta_{ij} = \sum \frac{\Omega_i M_j^*}{EJ},$$

здесь Ω_i — площадь части эпюры \overline{M}_i ; M_j^* — ордината эпюры \overline{M}_j , соответствующая абсциссе центра тяжести Ω_i .

¹ Максвелл Джеймс Клерк (13.06.1831–5.11.1879) — английский физик и механик, создатель классической электродинамики, организатор и первый директор Кавендишской лаборатории. Труды по теории света, оптике, термодинамике, теории упругости. Член Лондонского и Эдинбургского королевских обществ.

² Мор Христиан Отто (8.10.1835–2.10.1918) — немецкий ученый в области строительной механики и сопротивления материалов. Один из основоположников графических методов.

³ Верещагин А. Н., русский инженер. В 1924 году, будучи студентом Московского института инженеров железнодорожного транспорта, предложил правило «перемножения эпюр».

Или с использованием дифференциального уравнения изогнутой оси балки

$$EJy'' = M(x),$$

где $M(x)$ — изгибающий момент в сечении на расстоянии x от левого конца балки.

Колебания упругой системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим подробнее двухмассовую систему балочного типа с двумя степенями свободы. В этом случае

$$y_1 = \delta_{11}(-m_1\ddot{y}_1) + \delta_{12}(-m_2\ddot{y}_2),$$

$$y_2 = \delta_{21}(-m_1\ddot{y}_1) + \delta_{22}(-m_2\ddot{y}_2).$$

Далее считается, что коэффициенты влияния известны. Тогда решение ищется в виде

$$y_1 = A \sin(kt + \alpha), \quad y_2 = B \sin(kt + \alpha).$$

Подстановка его в систему дифференциальных уравнений малых колебаний дает

$$(m_1\delta_{11}k^2 - 1)A + m_2\delta_{12}k^2B = 0,$$

$$m_1\delta_{21}k^2A + (m_2\delta_{22}k^2 - 1)B = 0.$$

Эта система однородных алгебраических уравнений относительно величин A и B имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю

$$\begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}k^2 - 1) & m_2\delta_{12}k^2 \\ m_1\delta_{21}k^2 & (m_2\delta_{22}k^2 - 1) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k^4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_1m_2 - k^2(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) + 1 = 0.$$

Полученное уравнение частот имеет два положительных корня k_1^2 и k_2^2 , которым соответствует два решения:

$$y_1 = A_1 \sin(k_1t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2t + \alpha_2),$$

$$y_2 = B_1 \sin(k_1t + \alpha_1) + B_2 \sin(k_2t + \alpha_2).$$

Решение дифференциальных уравнений малых колебаний упругой системы с двумя степенями свободы находится как сумма двух главных колебаний. При этом амплитуды главных колебаний связаны между собой следующим образом через коэффициенты формы:

$$\mu_i = \frac{B_i}{A_i} = -\frac{m_1\delta_{11}k^2 - 1}{m_2\delta_{12}k^2}.$$

В итоге уравнения движения двух точечных масс на упругой балке имеют вид

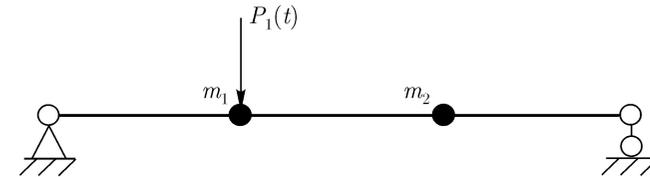
$$y_1 = A_1 \sin(k_1t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2t + \alpha_2),$$

$$y_2 = \mu_1 A_1 \sin(k_1t + \alpha_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2t + \alpha_2).$$

Амплитуды A_1 и A_2 и начальные фазы α_1 и α_2 определяются из начальных условий, путем выбора которых можно добиться, чтобы упругая система совершала либо первое, либо второе главные колебания. В общем случае решение находится как сумма двух независимых главных колебаний.

Вынужденные колебания упругих систем с двумя степенями свободы

Рассмотрим упругую систему балочного типа, несущую две точечные массы, в которой помимо консервативных сил действует некоторая возмущающая сила.



В этом случае, очевидно, помимо сил инерции при составлении уравнений движения необходимо учесть и приложенную к балке возмущающую силу. Тогда с использованием коэффициентов влияния имеем

$$y_1 = \delta_{11}(-m_1\ddot{y}_1) + \delta_{12}(-m_2\ddot{y}_2) + \delta_{11}P_1(t),$$

$$y_2 = \delta_{21}(-m_1\ddot{y}_1) + \delta_{22}(-m_2\ddot{y}_2) + \delta_{21}P_1(t).$$

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила периодически изменяется с течением времени по гармоническому закону

$$P_1(t) = H \sin pt.$$

Как известно, общее решение системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений складывается из двух решений:

$$y_1 = y_1^* + y_1^{**}, \quad y_2 = y_2^* + y_2^{**},$$

где y_1^* и y_2^* — общее решение системы однородных дифференциальных уравнений, метод решения которых изложен выше; y_1^{**} и y_2^{**} — частное решение системы неоднородных дифференциальных уравнений.

С учетом зависимости возмущающей силы от времени частное решение ищется в виде

$$y_1^{**} = C_1 \sin pt, \quad y_2^{**} = C_2 \sin pt.$$

Подстановка его в систему дифференциальных уравнений движения балки позволяет найти коэффициенты C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} (m_1 \delta_{11} p^2 - 1)C_1 + m_2 \delta_{12} p^2 C_2 &= -\delta_{11} H, \\ m_1 \delta_{21} p^2 C_1 + (m_2 \delta_{22} p^2 - 1)C_2 &= -\delta_{21} H. \end{aligned}$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} (m_1 \delta_{11} p^2 - 1) & m_2 \delta_{12} p^2 \\ m_1 \delta_{21} p^2 & (m_2 \delta_{22} p^2 - 1) \end{vmatrix}, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -\delta_{11} H & m_2 \delta_{12} p^2 \\ -\delta_{21} H & (m_2 \delta_{22} p^2 - 1) \end{vmatrix}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} (m_1 \delta_{11} p^2 - 1) & -\delta_{11} H \\ m_1 \delta_{21} p^2 & -\delta_{21} H \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что определитель системы для нахождения коэффициентов C_1 и C_2 обращается в ноль при совпадении частоты возмущающей силы с одной из частот собственных колебаний k_1 или k_2 , так как они определялись из условия $\Delta(k) = 0$. Таким образом, в случае колебаний упругой системы с двумя степенями свободы существуют две резонансные частоты $p_1 = k_1$ и $p_2 = k_2$.

В приложении к изгибным колебаниям валов это означает, что существуют критические значения угловой скорости вращения вала, при которых возможен резонанс. Это происходит, когда имеет место статическая неуравновешенность вала. При этом возникает периодически изменяющаяся возмущающая сила, частота которой совпадает с его угловой скоростью.

Литература:

- [1, § 150];
[4, п. 20.6–20.8, 20.12].

ЛЕКЦИЯ 27

Элементы теории удара

1. Явление удара. Основные допущения при ударе.
2. Основное уравнение теории удара.
3. Общие теоремы динамики при ударе.
4. Коэффициент восстановления при ударе.
5. Удар о неподвижную поверхность.
6. Удар двух тел.
7. Теорема Карно (теорема об изменении кинетической энергии).
8. Удар по вращающемуся телу. Определение импульсов ударных реакций.
9. Центр удара.

Явление удара. Основные допущения при ударе

Взаимодействие тел, при котором за малый промежуток времени скорости точек изменяются на конечную величину, называется **ударом**.

Силы, возникающие при таком взаимодействии, называются **ударными**. Из теоремы об изменении количества движения материальной точки следует, что импульс этих сил за время удара есть конечная величина. Импульс обычных (неударных) сил имеет тот же порядок малости, что и время удара. Этот же порядок малости имеет и перемещение точки за время удара.

В связи с этим, в теории удара принимают следующие основные допущения:

1. Скорости точек изменяются практически мгновенно на конечную величину.
2. Импульсами неударных сил пренебрегают.
3. Точки системы за время удара не перемещаются.

Основное уравнение теории удара

Пусть \vec{v} — скорость точки до удара, \vec{u} — скорость точки после удара. Применяя теорему об изменении количества движения материальной точки, находим:

Изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме ударных импульсов, действующих на точку

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k \quad \text{— основное уравнение теории удара.}$$

Общие теоремы динамики при ударе

Теорема об изменении количества движения при ударе

Теорема. Изменение количества движения механической системы за время удара равно сумме внешних ударных импульсов, действующих на точки системы.

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e.$$

Доказательство.

Разделим ударные силы, действующие на каждую точку механической системы, на внешние и внутренние.

Обозначим \vec{S}_k^e, \vec{S}_k^i — равнодействующие внешних и внутренних ударных импульсов, приложенных к каждой точке.

$$m_k \vec{u}_k - m_k \vec{v}_k = \vec{S}_k^e + \vec{S}_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Проводя суммирование по всем точкам системы, с учетом свойства внутренних сил находим:

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{u}_k - \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e.$$

Теорема доказана.

Следствие. При действии на механическую систему лишь внутренних ударных импульсов количество движения системы не изменяется.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе

Теорема. Изменение кинетического момента механической системы относительно любого неподвижного центра за время удара равно сумме моментов всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно этого же центра.

$$\vec{K}_{O2} - \vec{K}_{O1} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_{O} \left(\vec{S}_k^e \right).$$

Доказательство.

Как и при доказательстве предыдущей теоремы:

$$m_k \vec{u}_k - m_k \vec{v}_k = \vec{S}_k^e + \vec{S}_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Так как положение точки за время удара не изменяется, то

$$\vec{r}_k \times m_k \vec{u}_k - \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \vec{r}_k \times \vec{S}_k^e + \vec{r}_k \times \vec{S}_k^i.$$

Суммируем по всем точкам системы, с учетом свойства внутренних сил находим:

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{u}_k - \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{S}_k^e.$$

Теорема доказана.

Следствие. Внутренние ударные импульсы не влияют на изменение кинетического момента системы.

Теорема об изменении кинетического момента может быть записана и в скалярной форме.

Теорема. Изменение кинетического момента механической системы относительно неподвижной оси за время удара равно сумме моментов всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно той же оси

$$K_{z2} - K_{z1} = \sum_{k=1}^n m_z \left(\vec{S}_k^e \right).$$

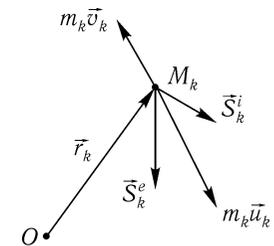
Коэффициент восстановления при ударе

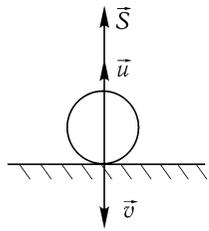
Импульсы ударных сил зависят не только от масс и скоростей, но и от свойств соударяющихся тел.

Рассмотрим падение шара на неподвижную плиту. При этом S — импульс реакции за время удара.

Разделим удар на две фазы:

1. От соприкосновения шара с плоскостью до его полной остановки. Кинетическая энергия шара переходит при этом в потенциальную энергию упругой деформации $T_0 \rightarrow \Pi$, частично теряясь на необратимое изменение его формы, и рассеиваясь в виде тепла.





2. Скорость меняет направление и величину от 0 до u . При этом накопленная потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию $\Pi \rightarrow T_1$ ($T_1 < T_0$).

Величина, равная отношению скорости точки после удара к ее скорости до удара, называется **коэффициентом восстановления** при ударе о неподвижную плиту

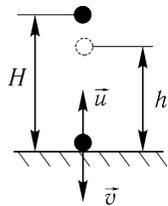
$$k = \frac{u}{v}, \quad 0 < k < 1.$$

Если $k = 1$, то удар абсолютно упругий ($u = v$), если $k = 0$, то удар абсолютно неупругий ($u = 0$). В зависимости от материала соударяющихся тел коэффициент восстановления имеет различные значения.

Материал	k
Дерево о дерево	1/2
Сталь о сталь	5/9
Стекло о стекло	15/16

Коэффициент восстановления при ударе можно определить экспериментально.

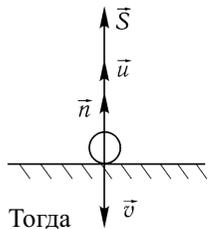
Шар из испытуемого материала падает с высоты H без начальной скорости.



Скорость шара в начале удара $v = \sqrt{2gH}$. В конце удара $u = \sqrt{2gh}$, где h — высота, на которую шар поднимется после удара. Тогда $k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h}{H}}$.

Основными задачами теории удара является определение скоростей точек после удара и величин ударных импульсов. Рассмотрим некоторые примеры.

Удар о неподвижную поверхность



Тогда

Прямой удар о неподвижную поверхность

Дано: m, \vec{v}, k .

Найти: u, S .

Из основного уравнения теории удара в проекции на нормаль $mu_n - mv_n = S$.

$$u_n = u, \quad v_n = -v, \quad k = \frac{|u_n|}{|v_n|}.$$

$$u = kv, \quad S = m(k + 1)v.$$

Ударный импульс достигает максимального значения в случае абсолютно упругого удара и минимального в случае абсолютно неупругого.

Косой удар о гладкую неподвижную поверхность

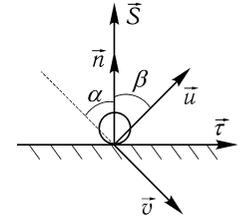
Дано: m, \vec{v}, k .

Найти: u, S .

Из основного уравнения теории удара в проекциях на нормаль и касательную $mu_n - mv_n = S$, $mu_\tau - mv_\tau = 0$. Так как

$$k = \frac{|u_n|}{|v_n|} \quad \text{и} \quad u_n = u \cos \beta, \quad u_\tau = u \sin \beta,$$

$$v_n = -v \cos \alpha, \quad v_\tau = v \sin \alpha.$$

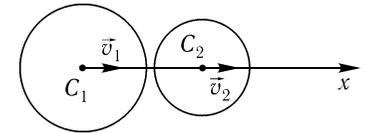


Тогда $u = v \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}$, $S = m(k + 1)v \cos \alpha$.

Кроме того, $k = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$, где α — угол падения, β — угол отражения.

Удар двух тел

Рассмотрим прямой центральный удар двух тел (шаров), движущихся поступательно.



Дано: $m_1, m_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2, k$.

Найти: u_1, u_2, S .

$v_1 > v_2$.

Так как отсутствуют внешние ударные импульсы, для системы двух тел количество движения системы не изменяется

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Кроме того,

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$u_1 = v_1 + (1 + k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1),$$

$$u_2 = v_2 + (1 + k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

Для определения ударного импульса запишем теорему об изменении количества движения за время удара для одного из тел

$$m_1 u_1 - m_1 v_1 = -S.$$

Откуда:

$$S = (1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

Нетрудно убедиться, что при абсолютно упругом ударе ударный импульс в два раза больше, чем при абсолютно неупругом.

Теорема Карно (теорема об изменении кинетической энергии)¹

Рассмотрим прямой центральный неупругий удар двух шаров массы m_1 и m_2 , \vec{v}_1, \vec{v}_2 — скорости тел до удара, $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}$ — скорость тел после удара; импульсы, действующие на систему, — внутренние. В этом случае имеет место теорема Карно.

Теорема. При неупругом ударе механической системы потеря кинетической энергии равна кинетической энергии данной системы, если бы она двигалась с потерянными скоростями

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2} m_1 (v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x} - u_x)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По теореме об изменении количества движения системы

$$(m_1 + m_2) u_x - (m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}) = 0$$

(ось Ox совпадает с направлением движения), т. е.

$$u_x = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

Кинетическая энергия до удара равна $T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2x}^2$, после удара — $T_1 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u_x^2$.

¹Карно Лазар Никола Маргерит (13.05.1753–2.08.1823) — французский математик, механик, военный инженер, государственный деятель. Работы посвящены математическому анализу, геометрии и механике.

Рассмотрим дополнительное соотношение:

$$\begin{aligned} T_0 - T_1 &= T_0 - 2T_1 + T_1, \\ T_0 - T_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2x}^2 - 2 \frac{(m_1 + m_2) u_x (m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x})}{2(m_1 + m_2)} + \\ &+ \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u_x^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x} - u_x)^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В общем случае:

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k} \left[\frac{1}{2} m_1 (v_{1x} - u_{1x})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x} - u_{2x})^2 \right].$$

Удар по вращающемуся телу. Определение импульсов ударных реакций

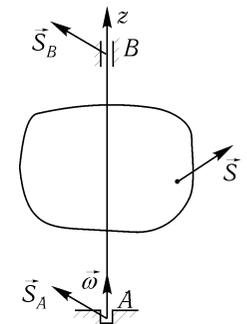
Рассмотрим действие ударного импульса на твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси.

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента $K_{1z} - K_{0z} = m_z(\vec{S})$, или

$$J_z \omega_1 - J_z \omega_0 = m_z(\vec{S}).$$

Откуда

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{m_z(\vec{S})}{J_z}.$$



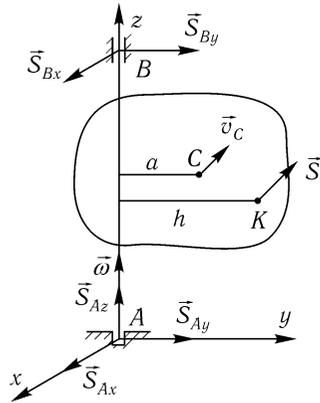
При действии ударного импульса на вращающееся тело угловая скорость изменяется на величину, равную отношению момента этого импульса относительно оси вращения к моменту инерции тела относительно той же оси.

Для определения импульсов ударных реакций в подшипниках введем подвижную систему координат, проведя плоскость Oyz через центр масс, и воспользуемся теоремами об изменении количества движения $\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e$ и об изменении кинетического момента $\vec{K}_{1A} - \vec{K}_{0A} =$

$$= \sum_{k=1}^n \vec{m}_A (\vec{S}_k^e). \text{ При этом } \vec{Q} = m\vec{v}_C, Q_x = -m\omega a,$$

$$Q_y = Q_z = 0; \quad \vec{K}_A = \mathcal{J}\vec{\omega}, \quad K_{Ax} = -J_{xz}\omega, \\ K_{Ay} = -J_{yz}\omega, \quad K_{Az} = J_z\omega.$$

В проекциях на оси координат:



$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}^e,$$

$$Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}^e,$$

$$Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}^e,$$

$$K_{1x} - K_{0x} = \sum_{k=1}^n m_x(\vec{S}_k^e),$$

$$K_{1y} - K_{0y} = \sum_{k=1}^n m_y(\vec{S}_k^e),$$

$$K_{1z} - K_{0z} = m_z(\vec{S}).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -ma(\omega_1 - \omega_0) = S_{Ax} + S_{Bx} + S_x, \\ 0 = S_{Ay} + S_{By} + S_y, \\ 0 = S_{Az} + S_z, \\ -J_{xz}(\omega_1 - \omega_0) = -S_{By}AB + m_x(\vec{S}), \\ -J_{yz}(\omega_1 - \omega_0) = S_{Bx}AB + m_y(\vec{S}), \\ J_z(\omega_1 - \omega_0) = m_z(\vec{S}). \end{array} \right.$$

Эти шесть уравнений позволяют определить импульсы ударных реакций и угловую скорость после удара.

Центр удара

Центр удара — точка вращающегося тела, при действии на которую ударного импульса не возникают ударные реакции.

Предположим, что такая точка существует. Тогда:

$$S_{Ax} = S_{Ay} = S_{Az} = S_{Bx} = S_{By} = 0.$$

Из первых трех уравнений для определения импульсов реакций в подшипниках следует, что приложенный к телу импульс направлен по оси Ox и равен

$$S = ma(\omega_1 - \omega_0).$$

Обозначая расстояние от точки приложения ударного импульса до оси вращения через h , из последнего уравнения находим

$$J_z(\omega_1 - \omega_0) = Sh, \quad \text{откуда} \quad h = \frac{J_z}{ma}.$$

Если выбрать систему координат с началом в точке O на оси вращения и направлением оси Oy таким, чтобы она проходила через точку приложения ударного импульса, то дополнительно должны выполняться условия $J_{xz} = J_{yz} = 0$, т. е. ось Oz — главная ось инерции.

В итоге, для того чтобы при действии ударного импульса на вращающееся тело в подшипниках не возникали ударные реакции, надо, чтобы выполнялись условия:

1. Центр удара лежит в плоскости, проходящей через центр масс и ось вращения на расстоянии $h = \frac{J_z}{ma}$.

2. Ударный импульс направлен перпендикулярно этой плоскости.

3. Ось вращения является главной для точки ее пересечения с плоскостью действия ударного импульса.

В частности, центр удара вращающегося вокруг оси, проходящей через конец, стержня длины l находится на расстоянии $2/3$ от оси вращения.

Литература:

- [1, § 151–157];
- [3, § 96–105];
- [4, п. 17.1–17.8].

Литература

- [1] Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М: Высшая школа, 1995. 416 с.
- [2] Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Ч. 1. М: Высшая школа, 1984. 343 с.
- [3] Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Ч. 2. М: Высшая школа, 1984. 423 с.
- [4] Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. СПб: «Лань», 1998. 736 с.

Предметный указатель

- Абсолютно твердое тело 10
Амплитуда 79
Антирезонанс 157
- Виброгаситель 157
Виброзащита 157
- Гаситель колебаний динамический 157
Гироскоп 111
— астатический 112
— тяжелый 112
— уравновешенный 112
Главный вектор 25
— момент 25
- Движение абсолютное 57
— аperiodическое 80
— вращательное 53
— мгновенно-поступательное 64
— относительное 57
— переносное 57
— плоскопараллельное 61
— поступательное 52
— свободное 70
— сложное 57
— сферическое 66
Декремент 80
— логарифмический 80
Демпфер 157
Демпфирование 157
- Задача статически определяемая 15
- Импульс силы за конечный промежуток времени 89
— элементарный 88
Инварианты статики 35
Инерциальная система отсчета 73
- Кинетический момент 86
— механической системы 87
Колебания вынужденные 81
— главные 155
— затухающие 80
— свободные 78
Количество движения материальной точки 86
— механической системы 86
Конус трения 32
Координаты обобщенные 130
— циклические 138
Коэффициент восстановления 166
— динамичности 82
— затухания 80
— расстройки 82
— трения качения 33
— трения скольжения 32
Коэффициенты жесткости обобщенные 148
— инерции обобщенные 150
— формы 155
- Линия узлов 67
- Мгновенный центр скоростей 63
— ускорений 65

- Механическая система консервативная 91
- Момент количества движения главный 87
- материальной точки относительно центра 86
- Момент силы алгебраический 18
- относительно оси 18
- относительно центра 17
- Моменты инерции осевые 102
- центробежные 102
- Мощность 91
- Оси инерции главные 103
- центральные 103
- Оси естественные 49
- Ось вращения 53
- мгновенная 68
- Пара сил 19
- Перемещение виртуальное 125
- механической системы 126
- возможное 125
- Период 79
- Плечо пары 19
- силы 17
- Положение равновесия механической системы устойчивое 145
- Прецессия 114
- регулярная 114
- Работа силы виртуальная 127
- на конечном перемещении 90
- элементарная 89
- Равнодействующая 10
- Реакции гироскопические 115
- Реакции связей 11
- Резонанс 81
- Связи 11
- Связь 123
- голономная 124
- идеальная 127
- неголономная 124
- нестационарная 125
- неудерживающая 125
- стационарная 125
- удерживающая 125
- Сила 10
- инерции кориолисова 75
- материальной точки 116
- переносная 75
- потенциальная 91
- Силы внешние 84
- внутренние 84
- возмущающие 78
- восстанавливающие 77
- диссипативные 152
- обобщенные 132
- сопротивления 77
- ударные 163
- Система сил 10
- плоская 27
- сходящихся 14
- уравновешенная 10
- эквивалентная 10
- Система механическая 84
- Скорости обобщенные 131
- Скорость абсолютная 57
- алгебраическая 50
- относительная 57
- переносная 58
- точки 47
- угловая 54
- мгновенная 69
- Способ задания движения векторный 45
- естественный 46
- координатный 46
- Тело несвободное 11
- свободное 11

- Тензор инерции 103
- Траектория 46
- Трение качения 33
- скольжения 32
- Трехгранник естественный 50
- Углы Эйлера 66
- Удар 163
- Уравнение частот 155
- Ускорение Кориолиса 59
- абсолютное 57
- касательное 50
- нормальное 50
- относительное 57
- переносное 58
- точки 47
- угловое 54
- Фаза начальная 79
- Ферма 30
- Центр масс 85
- параллельных сил 39
- тяжести 40
- удара 170
- Частота 79
- круговая 79
- циклическая 79
- Эллипсоид инерции 107
- Энергия кинетическая материальной точки 87
- механической системы 87
- Энергия потенциальная консервативной механической системы 92
- материальной точки 92

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

<http://shop.rcd.ru>

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307,
тел.: 332-48-92 (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34)
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135-54-37
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж)
4. Магазины:
Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)
«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)
«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)
Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный,
Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409-93-28)
С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

*Митюшов Евгений Александрович,
Берестова Светлана Александровна*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: СТАТИКА. КИНЕМАТИКА. ДИНАМИКА

Конспект лекций

*Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Ширококов
Компьютерная верстка С. В. Высоцкий
Корректор З. Ю. Соболева*

Подписано в печать 23.05.2005. Формат 60 × 84¹/₁₆.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,23. Уч. изд. л. 10,34.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
<http://rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500-295
