ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
шпаргалка

СОДЕРЖАНИЕ

1a 1. Основные понятия и аксиомы статики

Статика — это раздел теоретической механики, в котором устанавливаются методы преобразования одних систем сил в другие, им эквивалентные, а также условия равновесия различных систем сил, действующих на твердое тело.

Материальная точка — это простейшая модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Механическая система — это любая совокупность материальных точек.

Абсолютно твердое тело — это механическая система, расстояние между точками которой не изменяется при любых взаимодействиях.

Сила — это одна из векторных мер действия одного материального объекта на другой рассматриваемый объект. Сила характеризуется числовым значением, а также точкой приложения и направлением действия. Это векторная величина и обозначается она, например, $\bar{F}$.

Система сил — это совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело.

Система сил, эквивалентная нулю (равновесная система сил), — это такая система сил, действие которой на твердое тело или точку, находящиеся в покое или движущиеся по инерции, не приводит к изменению его состояния.

Существуют следующие аксиомы.

1. **О равновесии системы двух сил.** Для равновесия системы 2-х сил, приложенных к точкам твердого тела, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были

2a 2. Сходящиеся силы на плоскости

Система сходящихся сил — это такая система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке — центре пучка. Пусть задана произвольная система сходящихся сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$, приложенных к твердому телу. **Сложение двух сходящихся сил** графически осуществляется по правилу параллелограмма,

$$\bar{R}_{12} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

По правилу параллелограмма складываем силы $\bar{R}_{12}$ и $\bar{F}_3$, и получаем их равнодействующую

$$\bar{R}_{123} = \bar{R}_{12} + \bar{F}_3 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3;$$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i.$$

Для плоской системы сходящихся сил одну из координатных осей (обычно OZ) выбирают перпендикулярной силам. Таким образом, каждая из сил пучка даст проекцию на эту ось, равную нулю, а значит, будет равна нулю и проекция равнодействующей силы на ось OZ. После этого проецируют векторы векторного равенства на прямоугольные оси координат. Тогда в соответствии с теоремой о проекции замыкающей получится

$$\bar{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{ix}, \quad \bar{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{iy}.$$

3a 3. Равнодействующая сходящихся сил на плоскости. Леммы о нулевых стержнях

Равнодействующая сила при равновесии системы $\bar{R} = 0$ представляет собой замыкающую силового многоугольника, или векторную сумму сил, однако, с другой стороны,

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i.$$

Следовательно, условия равновесия системы сходящихся сил в аналитической форме будут

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{ix} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{iy} = 0.$$

Иными словами, для равновесия системы сходящихся сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекции этих сил на каждую из двух прямоугольных координат осей, лежащих в плоскости, были равны нулю.

Фермы — это конструкции, которые состоят из прямолинейных стержней, соединенных между собой шарнирами и образующих неизменяемую геометрическую фигуру.

Существует определенная зависимость между количеством стержней (n) и количеством шарниров (k). В основном треугольнике имеются 3 стержня и 3 узла. При этом для образования одного узла требуются

4a 4. Теория пар сил, лежащих в одной плоскости. Момент силы относительно точки на плоскости

Система двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, называется **парой сил**. Пара сил, как правило, прилагается к телу ($\bar{F}_1, \bar{F}_2$), которое должно вращаться. Плоскость, в которой расположены пары сил, называется **плоскостью действия пары сил *N***. Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары называется **плечом пары *h***. **Алгебраический момент пары сил** — это взятое со знаком плюс или минус произведение одной из сил пары на плечо пары сил:

$$M = M(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \pm Fd.$$

Алгебраический момент пары сил имеет знак плюс, если пара сил стремится вращать тело против часовой стрелки, и знак минус, если пара сил стремится вращать тело по часовой стрелке. Алгебраический момент пары сил не зависит от переноса сил пары вдоль своих линий действия и может быть равен нулю, если линии действия пары сил совпадают. Произведение модуля силы на плечо силы относительно этой точки

$$M_0(\bar{F}) = \pm Fh$$

называют **алгебраическим моментом пары относительно точки. Плечо пары *h* относительно точки** — это кратчайшее расстояние между этой точкой и линией действия силы. Две пары сил называются

2б По проекциям определяют модуль равнодействующей силы и косинусы углов ее с осями координат по формулам

$$\bar{R} = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{ix})^2 + (\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{iy})^2}$$

и

$$\cos\left(R_x,^\wedge x\right) = R_x / R, \quad \cos\left(R_y,^\wedge y\right) = R_y / R.$$

Следовательно, система n сходящихся сил эквивалентна одной силе $\bar{R}$, которая и является равнодействующей этой системы сил. Процесс последовательного применения правила параллелограмма означает по сути построение **многоугольника из заданных сил**. Этот силовой многоугольник называют **замкнутым**.

Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил. Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая сила равнялась нулю $\bar{R} = 0$.

Теорема о трех силах. Если твердое тело под действием трех сил, две из которых пересекаются в одной точке, находится в равновесии, то линии действия таких трех сил пересекаются в одной точке. Для случая трех сходящихся сил при равновесии силовой треугольник, построенный из трех сил, должен быть замкнутым.

1б равны по модулю и действовали вдоль одной прямой, проходящей через точки их приложения, в противоположных направлениях.

2. **О добавлении системы сил, эквивалентной нулю.** Если на твердое тело действует система сил, то к ней можно добавить систему сил, эквивалентную нулю.

3. **Аксиома параллелограмма сил.** Две силы, действующие в одной точке твердого тела или на одну материальную точку, можно заменить одной равнодействующей силой, равной по модулю и направлению диагонали параллелограмма, построенного на заданных силах:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1^2F_2^2\cos\left(\bar{F}_1,^\wedge \bar{F}_2\right)}.$$

4. **Аксиома о равенстве сил действия и противодействия.** Всякой силе действия есть равная противоположная сила противодействия.

Несвободное твердое тело — это тело, не имеющее возможность совершать в рассматриваемый момент любые перемещения в пространстве.

Аксиома связи: **всякую связь можно отбросить или заменить силой, реакцией связей** или **системой сил**. **Реакция связи** — это сила, с которой связь действует на систему материальных точек или твердое тело. Сила реакции связи направлена в сторону, противоположную направлению перемещения рассматриваемого тела.

4б **эквивалентными**, если их действие на твердое тело одинаково при прочих равных условиях, а также если они имеют одинаковые по модулю и направлению векторные моменты.

Теорема об эквивалентности пары сил. Пару сил, действующую на твердое тело, можно заменить другой парой сил, расположенной в той же плоскости действия и имеющей одинаковый с первой парой алгебраический момент.

Пару сил как жесткую фигуру можно поворачивать и переносить в плоскости ее действия как угодно. У пары сил можно изменять плечо и силы, сохраняя при этом алгебраический момент пары и плоскость действия. Эти операции над парами сил не изменяют их действия на твердое тело.

Теорема о сумме алгебраических моментов пары сил. Пары сил, действующие на твердое тело и расположенные в одной плоскости, можно привести к одной паре сил, алгебраический момент которой равен сумме алгебраических моментов составляющих пар сил:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Пары сил, расположенные в параллельных плоскостях, также складываются, поскольку их предварительно можно перенести в одну плоскость. Если сложение выполнять графически, когда векторные моменты пары сил находятся в одной плоскости, то векторный момент эквивалентной пары сил будет иметь вид замыкающей векторного многоугольника, построенного из векторных моментов заданных пар сил.

3б 2 стержня. Значит, для образования $(k - 3)$ узлов нужно $2(k - 3)$. Общее число стержней:

$$n = 2\,(k - 3) + 3,$$

$$n = 2k - 3.$$

Нулевыми называются стержни, ненагруженные силой, на концах которых находятся точечные шарниры и весом которых можно пренебречь.

Способ вырезания узлов заключается в том, что каждый узел вырезается из фермы и рассматривается отдельно, как находящийся в равновесии. Система сил, действующих на стержень, — это плоская система сходящихся сил, которая находится в равновесии. Построение силовых многоугольников всегда начинают с узла, в котором сходятся 2 стержня. Каждый последующий узел следует выбирать так, чтобы в нем сходилось не более двух стержней с неизвестными усилиями. Если усилия разрезанных стержней направлены по стержням в сторону узла, то их называют **сжимающими**, а если наоборот — **растягивающими**.

Леммы о нулевых стержнях.

1. Если в узле, не нагруженном внешними силами, сходятся три стержня, и которых два направлены вдоль одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю, т. е. он является нулевым.

2. Стержень находится в равновесии под действием двух сил, приложенных в шарнирах, где силы равны по величине и противоположны по направлению, т. е. его реакция также будет направлена по оси стержня.

5а

5. Система сил, произвольно расположенных на плоскости

Приведение силы к заданному центру. Силу можно переносить параллельно самой себе в любую точку твердого тела, добавляя при этом пару сил, векторный момент которой равен векторному моменту переносимой силы относительно новой точки приложения силы.

Теорема Пуансо. Любую произвольную систему сил, действующих на твердое тело, можно в общем случае привести к силе и паре сил.

Главный вектор системы сил — это вектор, который равен векторной сумме этих сил. Главный вектор системы сил изображается вектором, замыкающим силовой многоугольник, построенный на силах:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i .$$

Главный момент системы сил относительно точки тела — это сумма векторных моментов всех сил системы относительно этой точки. Главный момент $\bar{L}_0$ равняется сумме векторных моментов присоединения пар:

$$\bar{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_0(\bar{F}_i).$$

Уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости. Пусть каждая из сил расположена в одной плоскости с осями координат *OX*, *OY*, и потому ее моменты относитель-

6а

6. Условия равновесия сил, приложенных к рычагу. Сцеплениеи трение скольжения

Рычагом называется форма действия плоской системы сил на объект, при которой соблюдаются те же условия равновесия сил, что и для точки, на которую действует сила.

Алгебраический момент относительно точки — это произведение модуля силы на плечо силы относительно этой точки:

$$M_0(\bar{F}) = \pm Fh.$$

Плечо пары *h* относительно точки — это кратчайшее расстояние между этой точкой и линией действия силы. Алгебраический момент относительно точки численно равен удвоенной площади треугольника, построенного на силе.

Векторное условие равновесия: для равновесия системы сил, приложенных к точке, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы сил был равен нулю и главный момент системы сил относительно точки также был равен нулю.

Три условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_0(\bar{F}_i) = 0.$$

В случае опрокидывания на устойчивое положение тела или системы тел действует возбуждающая сила, которая стремится опрокинуть объект. Положение рав-

7а

7. Система сходящихся сил в пространстве. Уравнение равновесия сил

Система сходящихся сил — это такая система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке — центре пучка. Для **аналитического** определения равнодействующей силы выбирают систему прямоугольных осей координат. Проецируя векторы векторного равенства на прямоугольные оси координат, получают

$$\bar{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{ix}, \quad \bar{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{iy}, \quad \bar{R}_z = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{iz}.$$

По проекциям определяют модуль равнодействующей силы и косинусы углов ее с осями координат по формулам:

$$\bar{R} = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{ix})^2 + (\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{iy})^2 + (\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{iz})^2}$$

и

$$\cos\left(R_x, {}^{\wedge} x\right) = R_x / R, \quad \cos\left(R_y, {}^{\wedge} y\right) = R_y / R,$$
$$\cos\left(R_z, {}^{\wedge} z\right) = R_z / R.$$

Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, равнодействующая сила должна обратиться в точку.

8а

8. Теория пары сил в пространстве

Пусть к тердому телу приложена пара сил $(\bar{F}, \bar{F}')$ так, что $\bar{F} = -\bar{F}'$. Момент пары сил — это векторная величина, обозначаемая $\bar{M}$ $(\bar{F}, \bar{F}')$ и определяемая формулой

$$\bar{M}\left(\bar{F}, \bar{F}'\right) = \overline{A'A} \times \bar{F} = \overline{AA'} \times \bar{F}'.$$

Данный вектор, перпендикулярный плоскости действия пары сил, является свободным, иными словами, он может быть перенесен параллельно сам себе и приложен в любой точке тела. Этот вектор направлен в ту сторону, откуда вращение, производимое парой сил, происходит против хода часовой стрелки.

Плечо пары сил *h* — это расстояние между линиями действия сил, т. е.

$$\left|\bar{M}\left(\bar{F}, \bar{F}'\right)\right| = hF.$$

Теорема об эквивалентности пар сил.

1. Пару сил можно переносить, не меняя ее действия на тело, как единое целое в плоскости действия пары сил.
2. Не изменяя действий пары, плоскость действия можно переносить параллельно самой себе.

Доказательство. Пусть дана пара $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ с плечом *AB*. Если перенести плечо *AB* в положение A_1B_1 и к точкам A_1 и B_1 приложить направленные в противоположные стороны силы $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$ и $\bar{F}_5$, $\bar{F}_6$, равные по

6б новесия q_0 называется **устойчивым**, если в каждой паре сколь угодно малых положительных фиксированных чисел *e* для моментов времени $t > t_0$ выполняется неравенство:

$$|\, q(t) - q(t_0) \,| < e.$$

Потенциальная энергия тела будет иметь минимум или равняться нулю, т. е.

$$П = 1/2 \sum C_i q_i = 0,$$

где C_i — коэффициент устойчивости.

Приближенные законы, препятствующие качению.

1. Наибольший момент пары сил, препятствующий качению, не зависит от радиуса катка.

2. Предельное значение момента пропорционально нормальному давлению, а значит, и равной ему нормальной реакции, т. е. $M_{max} = \delta N$. Коэффициент трения качения δ при покое называется коэффициентом трения второго рода.

3. Этот коэффициент устойчивости (**сцепления**) зависит от материала катка, плоскости и физического состояния поверхности.

При движении или стремлении двигать одно тело по поверхности другого в касательной плоскости поверхности соприкосновения возникает **сила трения**. Если поверхности абсолютно гладкие, то реакция поверхности связи направлена по нормали к общей касательной в точке соприкосновения.

5б но этих осей равны нулю. Значит, условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\bar{F}_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_y(\bar{F}_i) = 0$$

будут тождествами.

Сложение параллельных сил на плоскости. Пусть заданы две параллельные силы $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$, они направлены в одну (или разные) стороны. Если $\bar{F}_1 \neq -\bar{F}_2$, т. е. они не образуют пару сил, то они приводятся к равнодействующей с некоторым центром приведения *O*. Положение точки *O* можно найти, подсчитав относительно нее момент равнодействующей, он равен нулю в каждом из приведенных случаев:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i,$$

$$M_0(\bar{R}) = F_1 \times O_1O - F_2 \times OO_2,$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{OO_2}{O_1O}$$

следует, что система двух параллельных сил, не образующих пару, имеет равнодействующую, параллельную этим силам.

8б напряжению силам пары $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ и параллельные им, то

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \approx (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5, \bar{F}_6).$$

Сложив силы $\bar{F}_2$, и $\bar{F}_4$, получим равнодействующую, равную $2\bar{F}$, которая будет приложена в середине параллелограмма и направлена вверх. Если сложить силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_5$, можно получить их равнодействующую, равную $2\bar{F}'$ и направленную вниз. Тогда $\bar{F}_1$, $\bar{F}_5$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_4 \approx 0$, поэтому система

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5, \bar{F}_6) \approx (\bar{F}_3, \bar{F}_6)$$

и пара $(\bar{F}_3, \bar{F}_6)$ эквивалентна паре $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$.

Значит, плоскость пары можно переносить параллельно ей самой, не изменяя при этом оказываемого на тело действия.

Сложение пар в пространстве. Пусть на твердое тело действует система пар сил:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_1'),\ (\bar{F}_2, \bar{F}_2'),\ \ldots\ (\bar{F}_n, \bar{F}_n').$$

Момент *k*-ой пары сил обозначим через

$$\bar{M}(\bar{F}_k, \bar{F}_k'), \text{ при } k = \overline{1,\ n}.$$

Данную систему пар сил можно заменить одной парой сил, такой, $(\bar{F}, \bar{F}')$, тогда момент $\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}')$ равен геометрической сумме моментов данных пар сил.

7б **Проецирование силы на оси координат.**

Пусть дана сила *F*, тогда ее проекции на прямоугольные оси координат вычисляются по формулам:

$$F_x = \bar{F}i = F\cos(\bar{F},^\wedge x),$$
$$F_y = \bar{F}j = F\cos(\bar{F},^\wedge y),$$
$$F_z = \bar{F}k = F\cos(\bar{F},^\wedge z).$$

где *i*, *j*, *к* — единичные векторы, направленные по осям координат.

Косинусы углов силы с осями координат удовлетворяют условию:

$$\cos^2(\bar{F},^\wedge x) + \cos^2(\bar{F},^\wedge y) + \cos^2(\bar{F},^\wedge z) = 1.$$

Из трех углов независимыми будут только два. При проецировании силы на прямоугольные оси координат лучше использовать два угла. Для этого силу нужно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие. При этом одна из них параллельна какой-либо оси координат, например *OZ*, а другая находится в координатной плоскости двух других осей, в нашем случае — координатной плоскости *OXY*. Тогда получается

$$F_x = F\sin\alpha\cos\beta,\quad F_y = F\sin\alpha\cos\beta,\quad F_z = F\cos\alpha$$

Условие равновесия системы сходящихся сил: для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая сила равнялась нулю $\bar{R} = 0$.

9а

9. Главные моменты системы сил

Момент силы $\bar{F}$ относительно некоторого выбранного центра O — это векторная величина $\bar{M}_0(\bar{F})$, определяемая формулой

$$\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F},$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор точки A, причем $\bar{r} = \overline{OA}$. Тогда

$$|\bar{M}_0(\bar{F})| = hF,\ F = |F|,$$

где h — кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы, называемое плечом силы.

Вектор

$$\bar{M}_0(\bar{F}) \perp \bar{r}, \bar{F}$$

и направлен в ту сторону, откуда вращение производимой силой осуществляется против часовой стрелки. Сила измеряется в [Н], а момент силы — в [Н·м].

Пусть в точке O будет начало некоторой прямоугольной декартовой системы координат XYZ. Спроектируем векторную формулу на координатные оси, получим:

$$\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{M}_{0x}(\bar{F})\bar{i} + \bar{M}_{0y}(\bar{F})\bar{j} + \bar{M}_{0\bar{k}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

10а

10. Приведение пространственной системы сил к главному вектору и к главному моменту

Лемма о параллельном переносе сил. Пусть к абсолютно твердому телу в точке A приложена сила $\bar{F}_A$. Состояние твердого тела не изменится, если эту силу перенести параллельно самой себе в любую другую точку тела B и приложить к телу пару сил, момент которой равен:

$$\bar{M}(\bar{F}', \bar{F}_A) = \overline{BA} \times \bar{F}_A,$$

где

$$\bar{F}' = -\bar{F}_A,\ \bar{F}_B = \bar{F}_A.$$

Доказательство очевидно, так как

$$\bar{F}_B, (\bar{F}', \bar{F}_A) \approx \bar{F}_B, \bar{F}', \bar{F}_A,$$

а две силы $\bar{F}_B$ и $\bar{F}'$ взаимно уравновешиваются.

Приведение пространственной системы сил к главному вектору и к главному моменту. Пусть на абсолютно твердое тело действует произвольная пространственная система сил ($\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$). Эта система сил может быть заменена одной силой $\bar{F}$ и парой сил, момент которой $\bar{M}_0$, причем сила $\bar{F}$ — главный вектор пространственной системы сил

$$\bar{F} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k.$$

11а

11. Условия равновесия пространственных систем сил. Сложение параллельных сил в пространстве. Центр тяжести тела

Для равновесия пространственных систем сил ($\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$), приложенных к абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) $\bar{F} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k = 0;$

2) $\bar{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \bar{F}_k = 0,$

которые говорят, что для любого центра приведения главный вектор и главный момент пространственных систем сил должны быть равны нулю.

Если ввести координатные оси с началом в центре приведения и спроектировать предыдущие векторные равенства на эти оси, то получатся скалярные условия равновесия пространственной системы сил:

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\quad F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\quad F_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0,$$

$$r_k \bar{F}_k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_k & y_k & z_k \\ F_{kx} & F_{ky} & F_{kz} \end{vmatrix}.$$

12а

12. Вспомогательные теоремы для определения положения центра тяжести

Теорема 1. Площадь поверхности, полученной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости, но не пересекающей, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описанной ее центром тяжести.

Теорема 2. Объем тела вращения, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры и ее не пересекающей, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести площади фигуры.

Метод группировки. При нахождении центра тяжести тела легче определить центры тяжести отдельных его частей, на которые можно разбить тело. Пусть тело разбили на несколько частей и определили центр тяжести каждой такой части тела, тогда будут иметь место равенства:

$$\bar{r}_1 = \frac{(\sum P_i r_i)_1}{(\sum P_i)_1},\ \bar{r}_2 = \frac{(\sum P_i r_i)_2}{(\sum P_i)_2} \text{ и т. д.}$$

Если сгруппировать слагаемые, то получится:

$$\bar{r}_0 = \frac{P_1\bar{r}_1 + P_2\bar{r}_2 + \ldots}{\sum P_i}.$$

Метод отрицательных масс является частным случаем метода разбиения и применяется к телам, имеющим разрывы.

10б Момент $\bar{M}_0$ — главный момент пространственной системы сил, равный

$$\bar{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times \bar{F}_k,$$

т. е. момент равен геометрической сумме моментов всех сил системы относительно выбранного центра приведения.

Доказательство этого утверждения основывается на лемме о параллельном переносе сил. Все силы исходной системы переносят параллельно самим себе в выбранную точку приведения O, тогда получится система исходящих сил. Данная система может быть заменена равнодействующей $\bar{F}$, приложенной в точке O. Чтобы состояние тела не изменилось при выполненном переносе сил, необходимо к телу приложить n пар сил, моменты которых относительно центра O определяются соотношениями:

$$\bar{M}_0 \left(\bar{F}\right)_k = \bar{r}_k \times \bar{F}_k, \; k = \overline{1, n}.$$

Главный момент $\bar{M}_0$ этой результирующей пары обычно изображают приложенным в центре O, хотя он является свободным вектором и может переноситься параллельно самому себе.

Теорема Вариньона. Для системы сходящихся сил момент равнодействующей силы относительно выбранного центра равен геометрической сумме моментов всех сил системы.

9б

$$\begin{cases} M_{0x}\left(\bar{F}\right) = yF_z - zF_y \\ M_{0y}\left(\bar{F}\right) = zF_x - xF_z, \\ M_{0z}\left(\bar{F}\right) = xF_y - yF_z \end{cases}$$

где x, y, z — координаты точки приложения силы.

Момент силы относительно оси OZ — это проекция вектора момента силы относительно некоторого центра, взятого на этой оси, на эту же ось, т. е.

$$M_{0z}\left(\bar{F}\right) = \left(\bar{z} \times \bar{F}\right)_z —$$

моменты силы $\bar{F}$ относительно координатных осей X, Y, Z.

Главным моментом системы сил относительно выбранного центра O будет называться вектор, равный геометрической сумме моментов всех сил системы относительно выбранного центра:

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_0\left(F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i.$$

Если все силы системы приложены в одной точке, то все $\bar{r}_i = \bar{r}$, тогда

$$\bar{M} = \bar{r} + \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{z} \times \bar{F}.$$

12б Используя метод разбиения и свойства центров тяжести симметричных однородных тел, можно найти центр тяжести сложных тел, разбивая на такие части, центры которых легче определяются.

Пример. Можно рассматривать отверстие как площадь с отрицательной массой. Фигура имеет ось симметрии, значит, будем определять только одну координату x, взяв начало координат в центре большого круга, тогда получится:

$$x_0 = \frac{\pi R^2 \times O - \pi r^2 \times c}{\pi (R^2 - r^2)} = -\frac{r^2 \times c}{R^2 - r^2}.$$

Метод веревочного многоугольника. Пусть задана некоторая сила $\bar{F}$. Возьмем произвольный полюс O, не лежащий на линии действия силы $\bar{F}$, и соединим его с концами силы $\bar{F}$. Тогда можно рассматривать силу $\bar{F}$ как равнодействующую двух сил, приложенных в той же точке, в которой будет приложена сила $\bar{F}$. Возьмем нить ACB так, что AC и CB будут соответственно параллельны заданным силам. Закрепим концы A и B неподвижно, а к точке C приложим ту же силу $\bar{F}$. Тогда эта сила может быть представлена как равнодействующая заданных сил, приложенных к точке C. Первой фигурой будет план заданных сил, а второй — веревочный многоугольник.

11б Тогда

$$M_{ox} = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k F_{kx} - z_k F_{ky}\right) = 0,$$

$$M_{oy} = \sum_{k=1}^{n} \left(z_k F_{kz} - x_k F_{kz}\right) = 0,$$

$$M_{oz} = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k F_{ky} - y_k F_{kx}\right) = 0.$$

Следовательно, для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на координатные оси были равны нулю и чтобы сумма моментов всех сил системы относительно координатных осей тоже была равна нулю.

Если рассматривать условия равновесия несвободного твердого тела, находящегося под действием сил ($\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$), то связи, наложенные на тело, мысленно отбрасываются, а к телу прикладываются реакции связей ($\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$, ..., $\bar{R}_l$), после чего условия равновесия записываются для системы сил, объединяющей активные силы и реакции связей:

$$(\bar{R}_1, \bar{R}_2, ..., \bar{R}_l), (\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n).$$

13a

13. Центр тяжести некоторых линий, плоских фигур и тел

Пусть имеется дуга $\overline{AB}$ окружности R. Радиус OC будет осью симметрии, значит, центр тяжести будет лежать на оси x.

$$x_0 = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi d\varphi}{2R\alpha} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha},$$

где $\left(\frac{R\sin\alpha}{\alpha}, 0\right)$ — координаты центра тяжести дуги.

Центр тяжести площади кругового сектора. Сосредоточивая массы элементарных секторов в их центрах тяжести, сведем нахождение центра тяжести площади кругового сектора к нахождению центра тяжести дуги окружности радиуса $2/3R$ с центральным углом 2α.

Для дуги радиуса r имеем:

$$x_0 = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

В этом случае $r = 2/3R$, значит, абсцисса центра тяжести площади кругового сектора будет равна:

$$x_0 = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Центр тяжести тетраэдра. Разделим тетраэдр на элементарные пластинки плоскостями, параллельны-

14a

14. Основные понятия кинематики

Движущаяся точка описывает в пространстве некоторую линию, которая называется **траекторией** точки. В зависимости от траектории движения точки бывают прямолинейными и криволинейными.

Естественный способ движения точки применяется в том случае, когда траектория точки заранее известна. При движении точки M расстояние s от неподвижной точки O меняется с течением времени, $s = f(t)$. Если в начальный момент времени t_0 точка занимала положение M_0, а в момент времени t занимает положение M, то пройденный ею путь за промежуток времени $[0, t]$ при движении точки в одном направлении можно записать:

$$\sigma = |M_0 M| = |OM - OM_0| = |s - s_0|.$$

Изменение дуговой координаты равно $ds = f'(t)dt$.

Приращение пути:

$$d\sigma = |ds| = |f'(t)|dt.$$

Путь, пройденный точкой за некоторый промежуток времени,

$$\sigma_{0t} = \int_0^t |f'(t)|dt.$$

Векторный способ задания движения точки. Положение точки в пространстве определяется зада-

15a

15. Скорость точки

Скорость — это векторная величина, которая характеризует быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета.

Векторный способ задания движения. Положение движущейся точки в каждый момент времени определяется радиус-вектором $\vec{r}$, который является функцией времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Допустим, в момент времени t точка занимает положение M, определяемое радиус-вектором $\vec{r}$, а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ — положение M_1, определяемое радиус-вектором $\vec{r}_1$, причем O — центр отсчета. Из треугольника OMM_1 следует:

$$\overline{OM_1} = \overline{OM} + \overline{MM_1},$$
$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r},\ \vec{v}_{cp} = \Delta\vec{r}/\Delta t.$$

Вектор точки в момент времени t:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r}/\Delta t,\quad \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r}/\Delta t = d\vec{r}/dt.$$

Таким образом,

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt,$$

а это значит, что вектор скорости точки в данный момент равен производной от радиус-вектора точки во времени.

16a

16. Ускорение точки

Ускорение точки характеризует быстроту изменения модуля и направления скорости точки. Пусть в момент времени t точка занимает положение M и имеет скорость $\vec{v}$, а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ она занимает положение M_1 и имеет скорость $\vec{v}_1$, $\vec{v} = \vec{v} + \Delta\vec{v}$. Разделив приращение вектора $\Delta\vec{v}$ на промежуток времени Δt, можем получить вектор среднего ускорения точки за этот промежуток:

$$\vec{a}_{cp} = \Delta\vec{v}/\Delta t,\ \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{v}/\Delta t.$$

$$\vec{v} = \vec{v}(t) \text{ и } \vec{v} = d\vec{r}/dt, \text{ то } \vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2.$$

Проекции ускорения точки на неподвижные оси декартовых координат равны вторым производным от соответствующих координат точки по времени или первым производным по времени от проекции скорости на соответствующие оси.

Естественные координатные оси. Проведем в точке M кривой AB соприкасающуюся плоскость, нормальную плоскость, перпендикулярную касательной, и спрямляющую плоскость, перпендикулярную соприкасающейся и нормальной плоскостям, образующую с этими плоскостями естественный трехгранник. Естественные координатные оси — это три взаимно перпендикулярные оси: **касательная**, направленная в сторону возрастания дуговой координаты; **главная нормаль**, направленная в сторону вогнутости кривой; **бинормаль**, направленная по отношению к касательной и главной нормали.

14б нием радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из некоторого неподвижного центра O в данную точку M. Чтобы определить движение точки, необходимо знать, как изменяется с течением времени радиус-вектор $\vec{r}$, должна быть задана вектор-функция $\vec{r}$ аргумента t: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Траектория точки — это геометрическое место концов радиус-вектора $\vec{r}$ движущейся точки.

Координатный способ задания движения точки. Положение точки M в системе отсчета $Oxyz$ определяется декартовыми координатами точки x, y, z. При движении точки M ее координаты со временем меняются: $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$. Это **уравнения движения точки в декартовых координатах**. Уравнения движения, определяющие координаты точки в любой момент времени, можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Например, уравнения движения точки M имеют вид $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$. Решив 1-е уравнение, получаем

$$t = \varphi(x),$$

после чего можно вычислить уравнение траектории точки в координатной форме:

$$y = f_2[\varphi(x)];\ z = f_3[\varphi(x)].$$

Пусть движение точки M в плоскости задано уравнениями $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; тогда, исключив параметр t, получим уравнение точки в координатной форме:

$$y = f_2[\varphi(x)].$$

16б Определим проекции ускорения точки на естественные координатные оси:

$$\vec{v} = \vec{\tau}\, ds/dt,$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{ds}{dt} + \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt} + \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

$$\vec{a} = \vec{n}v^2/\rho + \vec{\tau}\,d^2s/dt^2.$$

Ускорение точки равно геометрической сумме двух векторов, один из которых направлен по главной нормали и называется нормальным ускорением, а другой направлен по касательной и называется касательным ускорением точки. Проекция ускорения точки на главную нормаль равна квадрату модуля скорости точки, деленному на радиус кривизны траектории в соответствующей точке:

$$a_n = v^2/R.$$

Проекция ускорения точки на касательную равна второй производной от дуговой координаты точки по времени или первой производной от алгебраической величины скорости точки по времени:

$$a_\tau = d^2s/dt^2 = d\vec{v}/dt.$$

13б ми основанию ACB. Центры тяжести этих пластинок будут лежать на прямой SF, где F — центр тяжести площади основания, который лежит на пересечении медиан, т. е.

$$EF = \frac{1}{3}EC.$$

Теперь проделаем то же самое по отношению к грани ASB:

$$EK = \frac{1}{3}ES.$$

Тогда $\Delta KOF \approx \Delta OSC$, значит, из подобия:

$$\frac{FO}{OS} = \frac{KF}{SC},\ \text{но}\ \frac{KF}{SC} = \frac{EK}{ES} = \frac{EF}{EC} = \frac{1}{3},$$

значит, $FO = \frac{1}{3}OS = \frac{1}{4}SF.$

Окончательно будет:

$$FO = \frac{1}{4}SF,\ SO = \frac{3}{4}SF.$$

Центр тяжести объема пирамиды лежит на прямой, соединяющей центр тяжести площади ее основания с вершиной на расстоянии 1/4 длины этой прямой.

15б **Естественный способ задания движения.** Пусть известны траектория AB, начало и направление отсчета дуговой координаты, а также уравнение движения точки $s = f(t)$.

Из произвольного центра O проведем в точку M радиус-вектор $\vec{r}$ и определим скорость в момент времени t:

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt.$$

Вектор $d\vec{r}/ds$ направлен по касательной к кривой в сторону увеличения дуговой координаты.

Вектор $d\vec{r}/ds$ — от этого направления $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = d\vec{r}/ds.$$

Вектор скорости:

$$\vec{v} = \vec{\tau}\, ds/dt.$$

Значит,

$$v = |\vec{v}| = \left|{ds}/{dt}\right|\ —$$

модуль скорости равен абсолютному значению производной от дуговой координаты точки по времени.

17а **17. Классификация движений точки по ускорениям ее движения**

Случай 1.

$$\vec{a}_n = 0,\ \vec{a}_\tau = 0.$$

Если в течение некоторого промежутка времени нормальное и касательное ускорения точки равны нулю, то в течение этого промежутка не изменяются ни направление, ни модуль скорости. Это означает, что точка движется равномерно прямолинейно и ее ускорение $\vec{a} = 0$.

Случай 2.

$$\vec{a}_n \neq 0,\ \vec{a}_\tau = 0.$$

Если в течение некоторого промежутка времени нормальное ускорение не равно нулю и касательное ускорение равно нулю, то происходит изменение направления скорости без изменения ее модуля. Это означает, что точка движется равномерно криволинейно и модуль ее ускорения

$$a = a_n = v^2/R.$$

$$a_\tau = |dv/dt| = 0$$

в определенный момент времени, то точка не движется равномерно, а в этот момент времени модуль ее

18а **18. Движение. Путь. Скорость и касательное ускорение точки**

Путь, пройденный точкой за некоторый промежуток времени, — это сумма абсолютных значений элементарных перемещений точки за данный промежуток времени. Линия этого графика поднимается вверх независимо от направления движения точки и только при остановках точки превращается в прямую, которая параллельна оси времени t. На графике пути расстояния, пройденные точкой в промежуток времени $[t_1,\ t_2]$, суммируются с путем $\sigma_1 = s_1$, пройденным к моменту времени t_1. Путь, пройденный точкой к моменту времени t_2: $\sigma_2 = 2s_1$. Алгебраическая величина средней скорости движущейся точки за промежуток времени $[t_1,\ t_2]$ — это отношение приращения дуговой координаты к промежутку времени:

$$v_{ср} = (s_2 - s_1)/(t_2 - t_1),$$
$$(s_2 - s_1)/(t_2 - t_1) = \mathrm{tg}\alpha_1.$$

Следовательно,

$$v_{ср} = \mathrm{tg}\alpha_1,$$

т. е. средняя скорость точки за этот промежуток времени равна тангенсу угла наклона секущей графика движения к оси времени t. Алгебраическая величина скорости точки в некоторый момент времени t:

$$v = ds/dt = \mathrm{tg}\alpha.$$

19а **19. Простейшие движения твердого тела**

Существует 5 видов движения твердого тела:
1) поступательное;
2) вращательное;
3) плоское или плоскопараллельное;
4) сферическое;
5) общий случай движения твердого тела.

Поступательное — это такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во все время движения тела параллельной своему начальному положению.

Теорема. Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.

Скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ называются **скоростью** и **ускорением поступательного движения твердого тела**.

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки, принадлежащие некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными. Эта прямая называется **осью вращения тела**. Зададимся направлением оси вращения z, проведем через эту ось две полуплоскости: неподвижную полуплоскость P и подвижную полуплоскость Q, связанную с твердым телом и вращающуюся вместе с ним. Двугранный угол φ между этими полуплоскостями, отсчитываемый от неподвижной полуплоскости P к подвижной полуплоскости Q, называется **углом поворота тела**. При вращении тела угол поворота φ изменяется в зависимости от времени: $\varphi = f(t)$ — уравнение вращательного движения тела.

20а **20. Векторные выражения вращательной скорости, вращательного и центростремительного ускорений**

Отложим вектор угловой скорости тела ϖ от любой точки оси вращения, направляя его по оси так, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть вращение часовой стрелки. Модуль данного вектора равен абсолютному значению угловой скорости:

$$\varpi = |d\varphi/dt|.$$

Псевдовекторы — это векторы, направления которых не зависят от принятой в каждом конкретном случае системы координат. При сложении псевдовекторов действительны правила параллелограмма и многоугольника. Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ характеризует изменение вектора угловой скорости ϖ в зависимости от времени,

$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\varpi}/dt.$$

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора ϖ при ускоренном вращении и противоположно ему при замедленном. Вращательное ускорение точки твердого тела, которое вращается вокруг неподвижной оси, равно векторному произведению вектора углового ускорения тела на радиус-вектор этой точки относительно любой точки оси вращения:

$$\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}.$$

18б Следовательно, для определения скорости точки в любой момент времени следует провести касательную к графику движения в соответствующей точке A и определить угол α наклона этой касательной к оси t. Тангенс угла α равен алгебраической величине скорости точки в этот момент времени. График скорости показывает зависимость алгебраического значения скорости точки v от времени t. По графику скорости определяется алгебраическая величина касательного ускорения точки:

$$a_\tau = dv/dt = \mathrm{tg}\beta.$$

Для определения касательного ускорения точки проводят касательную к графику скорости в соответствующей точке B и находят угол β наклона этой касательной к оси t. Тангенс угла β обуславливает алгебраическое значение касательного ускорения точки в этот момент. График касательного ускорения изображает зависимость алгебраической величины касательного ускорения α_x от времени. Если движение точки неравномерно криволинейное, то для построения графиков нормального и полного ускорений точки числовые значения α_n и α для различных моментов времени определяют с помощью расчета по соответствующим формулам, пользуясь значениями v и α_x, определенными по соответствующим графикам.

17б скорости имеет максимум, минимум или наименьшую быстроту монотонного изменения.

Случай 3.

$$\vec{a}_n = 0,\ \vec{a}_\tau \neq 0.$$

Если в течение некоторого промежутка времени нормальное ускорение точки равно нулю и касательное ускорение не равно нулю, то не изменяется направление скорости, а изменяется ее модуль, т. е. точка движется по прямой неравномерно.

$$a = a_\tau = \left|d^2s/dt^2\right|,$$

при этом, если направления векторов $\vec{v}$ и $\vec{a} = \vec{a}_x$ совпадают, то движение точки ускоренное. Если направления векторов $\vec{v}$ и $\vec{a} = \vec{a}_x$ противоположны, то движение точки замедленное.

$$a_n = v^2/R = 0$$

в некоторый момент времени, то точка не движется прямолинейно, а проходит точку перегиба траектории $R = \infty$ или модуль ее скорости обращается в нуль.

20б Центростремительное ускорение точки твердого тела, которое вращается вокруг неподвижной оси, равно векторному произведению вектора угловой скорости тела на вращательную скорость этой точки:

$$\vec{a}_\varpi = \vec{\varpi} \times \vec{v}.$$

Передаточные механизмы служат для передачи вращения от одного вала, который называется **ведущим**, к другому, называемому **ведомым**. Если оси ведущего и ведомого валов параллельны или пересекаются, то вращение можно передать с помощью фрикционной или зубчатой передачи. Во фрикционной передаче вращение передается вследствие действия силы сцепления на поверхности соприкасающихся колес, в зубчатой передаче — от зацепления зубьев. Вращательная скорость $\vec{v}$ в точке соприкасания колес относится к точкам обоих колес:

$$v = r_1\varpi_1 = r_2\varpi_2.$$

Тогда

$$\varpi_1/\varpi_2 = r_2/r_1,$$

т. е. угловые скорости колес обратно пропорциональны радиусам колес. Отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого колеса называется **передаточным числом**: $i = \varpi_1/\varpi_2$.

19б Величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота φ с течением времени, называется **угловой скоростью тела**.

Числовая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени, называется **угловым ускорением тела**.

Пусть дана окружность, представляющая собой траекторию произвольной точки M тела. При этом R — расстояние точки от оси вращения, равное радиусу этой окружности. Если OC — радиус, лежащий в неподвижной полуплоскости P, а NC — радиус, лежащий в подвижной полуплоскости Q и вращающийся вместе с ней, то

$$\angle OCN = \varphi = f(t).$$

Угол $NCM = \alpha$ при вращении его сторон NC и MC вместе с телом не изменяется, т. е. $\alpha = \mathrm{const}$. Положение точки M можно определить дуговой координатой s, отсчитанной от неподвижной точки O в направлении отсчета угла поворота φ. Тогда

$$s = \cup OM = R(\varphi + \alpha),$$

где углы φ и α выражены в радианах. Модуль скорости точки M:

$$v = \left|ds/dt\right| = R\left|d\varphi/dt\right| = R\varpi.$$

21a 21. Плоское движение твердого тела

Плоское или **плоскопараллельное движение твердого тела** — это такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

Пусть дана система точек тела, расположенных на одном перпендикуляре к неподвижной плоскости Q, точка C_1 движется в плоскости Q_1, а точка C_2 — в плоскости Q_2. Обе эти плоскости параллельны неподвижной плоскости Q. При движении тела отрезок C_1C_2 остается перпендикулярным плоскости Q, т. е. остается параллельным своему начальному положению, следовательно, траектории A_1B_1, A_2B_2, AB точек тела C_1, C_2, C тождественны и параллельны, а их скорости и ускорения равны: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$, $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$. Значит, движение каждой точки плоской фигуры в неподвижной плоскости Q определяет движение всех точек твердого тела, расположенных на перпендикуляре к плоскости Q, восстановленном в этой точке. Движение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как движение прямолинейного отрезка в этой плоскости.

Зависимость между скоростями точек плоской фигуры устанавливается по следующей теореме: скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса.

Пусть точка O — полюс, а скорость в этой точке равна $\vec{v}_0$. Для нахождения скорости любой точки плоской фигуры, к примеру точки A, нужно провести из неподвижной плоскости O_1 в точки O и A радиус-векторы $\vec{R}_0$ и $\vec{R}_A$. Кроме того, проведем радиус-вектор $\vec{r}_{0A}$ из

22a 22. План скоростей. Мгновенный центр скоростей

Пусть известны скорости точек A, B, C и D плоской фигуры. Откладываем из произвольной точки O по направлению скоростей точек A, B, C и D отрезки Oa, Ob, Oc, Od, равные скоростям этих точек. Затем соединим точки a, b, c и d отрезками прямых. Такое построение называется **планом скоростей**. Отрезки $\vec{Oa}$, $\vec{Ob}$, $\vec{Oc}$, $\vec{Od}$, — лучи, а точки a, b, c, d — вершины плана скоростей. В треугольнике aOb:

$$\vec{Ob} = \vec{Oa} + \vec{ab},\ \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB},$$

тогда

$$\vec{ab} = \vec{v}_{AB},$$

$$\vec{bc} = \vec{v}_{BC},\ \vec{cd} = \vec{v}_{CD}.$$

Каждый из отрезков, соединяющих вершины плана скоростей, геометрически равен вращательной скорости соответствующей точки фигуры вокруг другой точки как вокруг полюса, следовательно, $ab = AB \times \varpi$ и $ab \perp AB$, $bc = BC$ и $bc \perp BC$, $cd = CD$ и $cd \perp CD$. Таким образом, многоугольник $abcd$ подобен многоугольнику $ABCD$ и повернут относительно последнего на 90° в сторону вращения движущейся плоской фигуры. Пусть известны скорость некоторой точки O плоской фигуры $\vec{v}_0$ и угловая скорость фигуры ϖ в некоторый момент времени. Точка O является полюсом, тогда ско-

23a 23. Уравнения неподвижной и подвижной центроиды

Теорема Шаля: плоскую фигуру можно переместить из одного положения в любое другое положение на плоскости одним поворотом некоторого неподвижного центра.

Пусть дан отрезок, который соединяет точки A и B плоской фигуры. Он занимает на плоскости в два различных момента времени положения AB и A_1B_1. Из середин отрезков AA_1 и BB_1 проведем перпендикуляры к отрезкам и продолжим их до пересечения в некоторой точке C. Докажем, что данная точка неподвижной плоскости есть центр поворота для данного конечного перемещения плоской фигуры. Если соединить точку C с концами отрезков AB и A_1B_1, получатся треугольники ACB и A_1CB_1. Тогда эти треугольники равны согласно равенству трех их сторон: $A_1B_1 = AB$, $A_1C = AC$, $B_1C = BC$.

Каждым двум положениям плоской фигуры на плоскости соответствует собственный центр поворота. Предельным положением центра поворота при стремлении времени перемещения плоской фигуры Δt к нулю является точка неподвижной плоскости, с которой в данный момент времени совпадает мгновенный центр скоростей плоской фигуры. Модуль скорости v точки A:

$$v = C^{*}A \times \varpi,$$

где точка C^* — мгновенный центр вращения фигуры.

На неподвижной плоскости имеются положения A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... отрезка AB, который определяет положение плоской фигуры в моменты времени t,

24a 24. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры и ее следствия. Положение мгновенного центра ускорений

Ускорение точек плоской фигуры определяется следующей **теоремой**: ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения этой точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса.

В каждый момент времени существует точка плоской фигуры, ускорение которой в этот момент равно нулю. В определенный момент времени ускорение некоторой точки O плоской фигуры равно $\vec{a}_0$, фигура вращается ускоренно в направлении, противоположном направлению вращения часовой стрелки, а модули угловой скорости и углового ускорения плоской фигуры равны ϖ и ε. Угол α = arctg ε/ϖ^2, причем ε — модуль вектора ε. Если tg $\alpha = \varepsilon/\varpi^2 > 0$, то соответствующий этому тангенсу угол находится в пределах от 0 до 90°. Затем нужно отложить угол α от ускорения $\vec{a}_0$ по направлению углового коэффициента ε. В данном случае это нужно сделать в сторону, обратную вращению часовой стрелки, значит, отложим отрезок на проведенной полупрямой:

$$OQ = a_0 \Big/ \sqrt{\varepsilon^2 + \varpi^4}.$$

Если точка O — полюс, то ускорение построенной точки Q:

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_O + \vec{a}_{OQ}.$$

22б рость любой точки фигуры равна геометрической сумме скорости полюса $\vec{v}_0$ и вращательной скорости вокруг этого полюса. Проведем в точке O перпендикуляр к направлению скорости $\vec{v}_0$ так, чтобы направление поворота скорости $\vec{v}_0$ к этому перпендикуляру совпадало с направлением вращения фигуры. Затем найдем конкретную точку P, вращательная скорость которой равна по модулю скорости полюса $\vec{v}_0$ или $\vec{v}_{0P} = \vec{v}_0$. Направления данных скоростей противоположны, т. е. $\vec{v}_{0P} = -\vec{v}_0$. Скорость точки P

$$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{v}_{0P} = 0.$$

Следовательно, точка P в рассматриваемый момент времени является **мгновенным центром скоростей**. Для определения положения точки P нужно вычислить вращательную скорость точки P вокруг полюса O и приравнять ее к скорости полюса:

$$v_{0P} = OP \times \varpi = v_0,\ \ OP = v_0 / \varpi.$$

Таким образом, мгновенный центр скоростей плоской фигуры находится на перпендикуляре к направлению скорости полюса на расстоянии от полюса $\vec{v}_0/\varpi$. Скорость любой плоской фигуры в каждый момент времени имеет модуль, который равен произведению угловой скорости фигуры на длину отрезка, соединяющего точку с мгновенным центром скоростей, и направлена перпендикулярно этому отрезку в сторону вращения фигуры.

21б полюса O в точку A. За все время движения между радиус-векторами сохраняется следующая зависимость:

$$\vec{R}_A = \vec{R}_0 + \vec{r}_{0A},$$

где модуль $\vec{r}_{0A}$ = const. Тогда скорость точки A:

$$\vec{v} = d\vec{R}_A / dt = \vec{v}_0 \ —$$

скорость полюса O. При движении плоской фигуры модуль радиус-вектора $\vec{r}_{0A}$ остается неизменным, а направление его при повороте фигуры изменяется. Следовательно:

$$d\vec{r}_{0A} / dt = \vec{v}_{0A},\ \ v_{0A} = OA \times \varpi.$$

После подстановки получим

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \varpi \times \vec{r}_{0A}.$$

Следствие 1. Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, алгебраически равны.

Следствие 2. Концы скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками отрезка.

24б Ускорение точки Q во вращательном движении вокруг полюса O состоит из центростремительного ускорения и вращательного. Причем вращательное направлено по отношению к полюсу в сторону, соответствующую направлению углового ускорения $\vec{\varepsilon}$:

$$a_{OQ} = \sqrt{\left(a^{\varepsilon}_{OQ}\right)^2 + \left(a^{\varpi}_{OQ}\right)^2} = OQ\sqrt{\varepsilon^2 + \varpi^4} =$$
$$= a_O\sqrt{\varepsilon^2 + \varpi^4} \times \sqrt{\varepsilon^2 + \varpi^4} = a_O.$$

Ускорение $\vec{a}_{OQ}$ образует с отрезком угол β, причем

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{a^{\varepsilon}_{OQ}}{a^{\varpi}_{OQ}} = OQ\,\frac{\varepsilon a^2}{OQ} = \frac{\varepsilon}{\varpi^2} = \mathrm{tg}\alpha.$$

Углы α и β лежат в пределах от 0 до 90°, а значит, $\beta = \alpha$. Таким образом, ускорения $\vec{a}_{0Q}$ и $\vec{a}_0$ равны по абсолютной величине, но противоположны по направлению: $\vec{a}_{0Q} = -\vec{a}_0$, $\vec{a}_Q = 0$. Точка Q, ускорение которой в определенный момент времени равно нулю, называется **мгновенным центром ускорений**. При этом модули ускорений точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра ускорений, а векторы ускорений составляют с отрезками, соединяющими данные точки с мгновенным центром ускорений, один и тот же угол:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\beta / \varpi^2.$$

23б $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, $t + 3\Delta t$, ... Предельные положения центров поворота C_1, C_2, C_3, ... — это мгновенные центры вращения плоской фигуры, поэтому в пределе ломаная линия $C_1C_2C_3C_4$... преобразуется в кривую, которая называется **неподвижной центроидой**. Линия $C_1'C_2'C_3'C_4'$ обращается в кривую, которая является геометрическим местом точек мгновенных центров скоростей на движущейся фигуре. Она называется **подвижной центроидой**.

Теорема Пуансо о качении подвижной центроиды по неподвижной. При действительном движении плоской фигуры подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной центроиде.

Уравнения неподвижной центроиды в параметрической форме в неподвижной системе координат имеют вид:

$$\xi_P = \xi_0 - \frac{1}{\varpi}\frac{d\eta_0}{dt},$$
$$\eta_P = \eta_0 + \frac{1}{\varpi}\frac{d\xi_0}{dt}.$$

Уравнения подвижной центроиды в параметрической форме в подвижной системе осей имеют вид:

$$x_P = \frac{1}{\varpi}\left(\frac{d\xi_0}{dt}\sin\varphi - \frac{d\eta_0}{dt}\cos\varphi\right),$$
$$y_P = \frac{1}{\varpi}\left(\frac{d\xi_0}{dt}\cos\varphi + \frac{d\eta_0}{dt}\sin\varphi\right).$$

25а

25. Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев плоского механизма

Пусть нужно найти ускорение ползунка B кривошипно-шатунного механизма и угловое ускорение шатуна AB этого механизма, если известно, что кривошип OA вращается равномерно с угловой скоростью ω в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки.

Следует использовать следующее:

1) модуль и направление ускорения w_A пальца кривошипа А $w_A = w_A^{ц} = OA \times \omega^2$;
2) прямую, по которой направлено ускорение ползунка B;
3) угловую скорость w_{AB} шатуна AB, которую легко определить по плану скоростей или применением мгновенного центра скоростей.

Зная скорость пальца A кривошипа v_A, модуль которой равен $v_A = OA \times \omega$, можно определить скорость v_B ползунка B по плану скоростей или при помощи мгновенного центра скоростей. Затем вычисляют модуль угловой скорости шатуна AB:

$$w_{AB} = ab / AB$$

или

$$w_{AB} = v_A / (P_{AB}A) = OA \times \omega / (P_{AB}A).$$

Приняв точку A шатуна за полюс, можно вычислить ускорение точки B по формуле:

$$w_B = w_A + w_{AB}^{ц} + w_{AB}^{B}.$$

26а

26. Сферическое движение твердого тела

При движении твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, все остальные точки тела движутся по сферическим поверхностям, центры которых совпадают с неподвижной точкой. Такое движение называют **сферическим движением твердого тела**.

Воспользуемся двумя системами осей координат: неподвижной системой $OXYZ$ с началом в неподвижной точке O и подвижной системой $O\xi\eta\zeta$, неизменно связанной с твердым телом, с началом в той же неподвижной точке O; здесь OJ — линия пересечения неподвижной плоскости XOY и подвижной плоскости $\xi O\eta$, называемая линией узлов. Пусть

$$\angle(x, J) = \psi,\ \angle(z, \zeta) = \theta,\ \angle(J, \xi) = \varphi.$$

Углы φ, ψ, θ будут положительными, если при наблюдении навстречу осям z, J, ζ, перпендикулярным плоскостям этих углов, можно видеть эти углы, отложенные от осей x, z, J в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки.

$$\psi = f_1(t),\ \theta = f_2(t),\ \varphi = f_3(t).$$

Их называют уравнениями сферического движения твердого тела.

Теорема Эйлера-Даламбера. Твердое тело, которое имеет одну неподвижную точку, можно переместить из одного положения в любое другое поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку.

27а

27. Ускорения точек твердого тела при сферическом движении

Для определения ускорения какой-либо точки при сферическом движении используется формула $v = \omega \times r$. Тогда

$$w = dv / dt = d\omega / dt \times r + \omega dr / dt,$$

однако

$$d\omega / dt = \varepsilon, \text{ а } dr / dt = v = \omega \times r.$$

Подставляя эти значения, получим:

$$w = \varepsilon \times r + \omega \times v$$
$$\text{или } w = \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r),$$

где $\varepsilon \times r = w_E^{B}$ — вращательное ускорение точки;

$\omega \times v = \omega_\Omega^{ос}$ — центростремительное ускорение точки.

Это обусловливает теорему Ривальса об ускорении точки тела, совершающего сферическое движение: ускорение любой точки твердого тела при сферическом движении определяется как геометрическая сумма ее вращательного и осестремительного ускорений. Вектор $w_E^{B} = \varepsilon \times r$ имеет направление, перпендикулярное плоскости, проходящей через вектор углового ускорения ε. Радиус-вектор точки r направлен в ту сторону, откуда поворот вектора ε к вектору r на наименьший угол виден происходящим против движения часовой стрелки.

28а

28. Теорема о скоростях точек свободного твердого тела и ее следствия. Теорема об ускорениях точек свободного твердого тела

Рассмотрим случай движения свободного твердого тела, которое имеет 6 степеней свободы. При этом треугольник можно переместить поступательным перемещением вместе с какой-либо точкой и поворотом относительно оси, которая проходит через эту точку. Любое движение свободного тела можно заменить совокупностью поступательных движений вместе с какой-либо точкой тела и вращений вокруг этой точки, совершаемых за то же время, что и истинное движение. Другим словами движение тела можно составить из поступательного движения и сферического относительно системы координат. Для относительного сферического движения: $\overline{\omega}$ — угловая скорость, $\overline{\varepsilon}$ — угловое ускорение. Эти величины не зависят от выбора точки тела.

Пусть O_aXYZ — неподвижная система координат, O — произвольно выбранный полюс. При этом система координат $OXYZ$ получается из O_aXYZ поступательным перемещением, которое определяется вектором R_0. Пусть P — некоторая точка тела, ρ и r — вектор OP, заданный своими компонентами в системах координат.

Теорема. Существует единственный вектор ω, называемый угловой скоростью тела, с помощью которого скорость v точки P тела может быть представлена в виде:

$$v = v_O + \omega \times r,$$

где v_O — скорость полюса O; при этом вектор ω от выбора полюса не зависит.

26б Проведем сферическую поверхность с центром в неподвижной точке O и отметим положения двух точек тела A_1 и B_1 на этой поверхности, которые после перемещения тела займут положения A_2 и B_2 на той же поверхности.

Затем проведем через эти точки дуги больших кругов A_1B_1 и A_2B_2, тогда положение тела в некоторый момент t_1 определится точками A_1 и B_1, т. е. дугой A_1B_1, а его положение в момент t_2 — той же дугой в новом положении A_2B_2. После этого проведем дуги больших кругов A_1A_2 и B_1B_2. Разделим эти дуги точками D и E пополам и проведем из этих точек дуги больших кругов, перпендикулярные дугам A_1A_2 и B_1B_2, продолжив их до пересечения в точке C. Затем соединим точку C поверхности с ее центром O и покажем, что тело можно переместить из первого положения во второе поворотом вокруг этой прямой. Соединим точку C с точками A_1, B_1, A_2, B_2 дугами больших кругов A_1C, B_1C, A_2C, B_2C. Получившиеся сферические треугольники A_1CA_2 и B_1CB_2 равны по равенству трех сторон $A_1C = A_2C$ и $B_1C = B_2C$, как стороны равнобедренных сферических треугольников A_1CA_2 и B_1CB_2, а $A_1B_1 = A_2B_2$, как два положения одной и той же дуги. Из равенства треугольников вытекает $\angle A_2CB_2 = \angle A_1CB_1$. При этом угол сферического треугольника определяется углом между касательными, проведенными в вершине угла к дугам, образующим этот угол. Прибавляя к обеим частям равенства $\angle A_1CB_2$, получим $\angle A_1CA_2 = \angle B_1CB_2 = \alpha$. Это означает, что сферический отрезок A_1B_1 можно переместить в положение A_2B_2 поворотом вокруг неподвижной оси OC.

25б Центростремительное ускорение точки B в ее вращательном движении вокруг полюса A направлено по оси шатуна от точки B к точке A, а его модуль равен:

$$w_{AB}{}^{ц} = OA \times \omega^2{}_{AB} = AB(ab / AB)^2 = (ab)^2 / AB.$$

Отложив в точке B ускорение полюса w_A и приложив к его концу центростремительное ускорение точки B во вращательном движении вокруг полюса A, направленное параллельно BA от B к A, проводят из конца $w_{AB}{}^{ц}$ прямую, перпендикулярную BA, т. е. прямую, параллельную вращательному ускорению $w_{AB}{}^{B}$.

Точка пересечения этой прямой с прямой, по которой направлено ускорение ползунка B, определит недостающую вершину многоугольника ускорений, благодаря чему можно будет найти графически модули ускорений w_B и $w_{AB}{}^{B}$.

Так как $w_{AB}{}^{B} = AB \times \varepsilon_{AB}$, то, определив $w_{AB}{}^{B}$, найдем модуль углового ускорения звена AB.

Отложив найденное ускорение $w_{AB}{}^{B}$ из точки B, можно установить, что его направление по отношению к полюсу A укажет направление углового ускорения шатуна ε_{AB}. Если направления ε_{AB} и w_{AB} противоположны, то шатун в данный момент вращается замедленно.

Когда кривошип и шатун находятся на одной прямой, то мгновенный центр скоростей шатуна P_{AB} совпадает с точкой B, план скоростей шатуна AB получает вид отрезка прямой, поскольку направления ускорений w_A и $w_{AB}{}^{ц}$ совпадают.

28б **Следствие 1.** В каждый момент времени проекции скоростей любых 2-х точек твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой.

Следствие 2. Скорости 3-х точек твердого тела, не лежащих на одной прямой, полностью определяют скорость любой точки тела.

Следствие 3. Если векторы скоростей 3-х точек твердого тела, не лежащих на одной прямой, в некоторый момент времени равны, то тело совершает мгновенно поступательное движение.

Следствие 4. Если в данный момент времени скорости 2-х точек тела равны нулю, то тело либо находится в мгновенном покое, либо совершает мгновенное вращение вокруг прямой, проходящей через эти точки.

Следствие 5. Если скорость некоторой точки тела в данный момент времени равна нулю, то тело находится либо в мгновенном покое, либо в мгновенном вращении вокруг оси, проходящей через эту точку.

Следствие 6. Мгновенное движение твердого тела в самом общем случае разлагается на два движения: поступательное со скоростью, равной скорости произвольного полюса, и вращательное вокруг оси, проходящей через этот полюс.

Теорема. Ускорение точки твердого тела в общем случае его движения складывается из трех составляющих:

1) поступательного ускорения;
2) вращательного ускорения вокруг полюса;
3) осестремительного ускорения.

27б Модуль вращательного ускорения:

$$W_E^B = \varepsilon r \sin(\varepsilon, r) = h_E \varepsilon,$$

где $h_E = MK_1$ — расстояние от точки M до оси углового ускорения $_E$.

Вектор центростремительного ускорения

$$\omega_\Omega{}^{oc} = \omega \times v$$

имеет направление, перпендикулярное векторам угловой скорости ω и линейной скорости точки v.

Модуль осестремительного ускорения:

$$\omega_\Omega{}^{oc} = wv \sin(w, v) = wv = h_\Omega \varepsilon,$$

где $h_\Omega = MK_2$ — расстояние от точки M до мгновенной оси Ω.

Модуль ускорения:

$$\mathrm{w} = \sqrt{(w_E^B)^2 + (w_\Omega^{oc})^2 + 2w_E^B w_\Omega^{oc} \cos(w_E^B, w_\Omega^{oc})} =$$
$$= \sqrt{\varepsilon^2 h_E^2 + h_\Omega^2 \omega^4 + 2h_E h_\Omega \varepsilon \omega^2 \cos(w_E^B, w_\Omega^{oc})}.$$

Из этого выражения можно получить формулу ускорения точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$w = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

где $R = h_E = h_\Omega$.

29а

29. Составное движение точки

Движение точки М относительно неподвижной системы координат называется **абсолютным**, а по отношению к подвижной системе координат — **относительным**. Скорости и ускорения точки, рассматриваемые по отношению к указанным системам, соответственно называются **абсолютными** и **относительными**. Движение подвижной системы координат $OXYZ$ по отношению к неподвижной системе отсчета $A\xi\eta\zeta$ является для движущейся точки переносным движением. Соответственно скорости и ускорения называются **переносными**. Движение подвижной системы координат можно охарактеризовать скоростью ее поступательного движения v_0, например вместе с точкой M, и вектором угловой скорости w ее вращения вокруг M.

Теорема о сложении скоростей. Абсолютная скорость v_a точки при сложном движении равна векторной сумме относительной v_r и переносной v_e скоростей. Пусть положение точки M в подвижной системе координат определяется радиус-вектором ρ, в неподвижной — радиус-вектором r, а положение начала подвижной системы координат относительно неподвижной — радиус-вектором r_0, тогда $r = r_0 + \rho$. Продифференцировав это выражение, получим:

$$dr/dt = dr_0/dt + w_e \times \rho + d'\rho/dt,$$

где e — переносное движение. На основании определения абсолютной, относительной и переносной скоростей имеем:

$$v_a = dr/dt,\ v_r = d'\rho/dt,\ v_e = v_0 + w_e \times \rho.$$

30а

30. Основные понятия динамики. Основные законы механики

Положение точки в пространстве относительно какой-либо системы отсчета обуславливается тремя независимыми параметрами или координатами точки. В классической механике время универсально и не связано с пространством и движением материальных точек.

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается механическое движение материальной точки, системы материальных точек и абсолютно твердого тела с учетом сил, которые действуют на эти движущиеся объекты. Сила в динамике характеризуется ускорением, которое она вызывает.

Первая задача динамики. По заданному механическому движению тела определяют силы, под действием которых совершается это движение.

Вторая задача динамики. По заданным силам, приложенным к телу, и начальным условиям определяют движение, которое они вызывают.

В основе динамики лежат законы Ньютона и Галилея. Системы координат, в которых справедливы законы Ньютона, называются **инерциальными (галилеевыми)**.

Закон инерции (закон Галилея). Изолированная материальная точка движется равномерно и прямолинейно или находится в покое до тех пор, пока действие других тел на эту материальную точку не изменит ее состояние.

Изолированной называется материальная точка, взаимодействием которой с окружающими телами пренебрегают. **Свойством инертности** называется свой-

31а

31. Свободное падение тела без учета сопротивления воздуха. Движение тела, брошенного под углом к горизонту без учета сопротивления воздуха

Свободное падение тела без учета сопротивления воздуха. Материальную точку массой m бросили вертикально вверх с поверхности Земли со скоростью v_0. Она движется под действием силы тяжести по закону тяготения Ньютона. Требуется найти зависимость скорости точки от ее расстояния до центра Земли, не учитывая сопротивления воздуха.

Решение. Направим ось OX по прямолинейной траектории точки и выберем начало координат в центре Земли. В соответствии с законом Ньютона для силы тяготения имеем: $F = k/x^2$.

В данном случае k удобнее выразить из условия, что на поверхности Земли сила тяготения F равна силе тяжести $P = mg$, при $x = R$ получим:

$$mg = k/R^2;\ k = mgR^2,$$

где g — ускорение силы тяжести у поверхности Земли; R — радиус Земли.

Подставляя полученное значение k в выражение для силы тяготения, придем к следующей формуле:

$$F = mgR^2/x^2.$$

Получили дифференциальное уравнение:

$$md^2x/dt^2 = -\,mgR^2/x^2,$$

32а

32. Движение падающего тела с учетом сопротивления воздуха

Пример. Точка массой m падает вертикально вниз без начальной скорости под действием силы тяжести. При этом она испытывает силу сопротивления воздуха R:

$$R = kmv^2,$$

где k — постоянная положительная величина.

Решение. Направим ось OX вертикально вниз, положив за начало координат положение точки в момент начала движения. В этот же момент примем $t = 0$. В произвольный момент времени прикладываем к точке действующие на нее силы P и R и составляем дифференциальное уравнение ее движения. Имеем:

$$md^2x/dt^2 = mg - kmv.$$

При этом скорость можно определить зависимостью:

$$md^2x/dt^2 = mvdv/dx.$$

Последняя подстановка позволяет исключить из дифференциального уравнения время при определении скорости.

$$dv/dt = k(g/k - v^2).$$

Разделяя переменные и интегрируя обе части, получаем:

$$\int_0^v \frac{dv}{g/k - v^2} = k\int_0^t dt.$$

30б ство изолированной материальной точки сохранять состояние прямолинейного движения.

Основной закон динамики (второй закон Ньютона). Скорость изменения количества движения материальной точки равна силе, которая действует на эту точку. Также справедливо, что ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление.

$$d(mv)/dt = F,$$

где mv — количество движения материальной точки; m — масса точки.

Массой материальной точки называется физическая величина, являющаяся мерой ее инертных и гравитационных свойств.

Закон равенства действия и противодействия (третий закон Ньютона). Силы взаимодействия двух материальных точек или двух тел (действие и противодействие) равны по величине, направлены в противоположные стороны и имеют общую линию действия:

$$F_1 = -F_2.$$

Закон независимости действия сил (принцип суперпозиции). Ускорение материальной точки, которое возникает при одновременном действии на нее нескольких сил, равно векторной сумме ускорений, сообщаемых точке отдельными силами.

29б **Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса).** Абсолютное ускорение точки при составном движении равно векторной сумме относительного, переносного ускорений и ускорения Кориолиса:

$$a = dv/dt = d/dt(v_0 + w_e \times \rho + v_r).$$

Поскольку $dv_0/dt = a_0$, $dw/dt = \varepsilon$, то получим для абсолютного ускорения:

$$a = a_0 + \varepsilon \times r + w \times (w \times r) + a_r + 2(w \times v_r).$$

В этой формуле первые три слагаемых составляют ускорение точки свободного твердого тела в общем случае его движения вместе с подвижной системой координат, $\varepsilon \times r$ и $w \times (w \times r)$ — вращательное и осестремительное ускорения точки. Это уравнение примет вид:

$$a = a_e + a_r + a_k,$$

где a_k — ускорение Кориолиса, $a_k = 2(w \times v_r)$.

При поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений.

32б При $t = 0$ и $v = 0$

$$\int_0^v \left[\frac{d\left(\sqrt{g/k}-v\right)}{\sqrt{g/k}-v} + \frac{d\left(\sqrt{g/k}+v\right)}{\sqrt{g/k}+v}\right] = 2\sqrt{g/k}k\int_0^t dt,$$

или $\ln((g/k)^{1/2} - v)/((g/k)^{1/2} + v))) - \ln 1 = -2(g/k)^{1/2}t$.

Потенцируя и решая относительно v, получаем:

$$v = \sqrt{g/k}\,\frac{1-e^{-2\sqrt{g/kt}}}{1+e^{-2\sqrt{g/kt}}} = \sqrt{g/k}\,\frac{e^{\sqrt{g/kt}} - e^{\sqrt{g/kt}}}{e^{\sqrt{g/kt}} + e^{\sqrt{g/kt}}} = \\ = \sqrt{g/k}th\left(\sqrt{g/kt}\right)$$

Переходя в уравнении к пределу при $t \to \infty$, получаем:

$$v_{\text{пр}} = v_{t=0} = \sqrt{g/k}\ \lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-2\sqrt{g/kt}}}{1+e^{-2\sqrt{g/kt}}} = \sqrt{g/k}.$$

Закон движения точки

$$dx/dt = \sqrt{g/k}th\left(\sqrt{g/kt}\right).$$

$$\int_0^x dx = \sqrt{g/k}\int_0^t th\left(\sqrt{g/kt}\right).$$

31б

$$\int_{v_0}^{v} v dv = -gR^2\int_R^x dx/x^2,$$

$$v = (v_0^2 + 2gR^2(1/x - 1/R))^{1/2}.$$

Движение тела, брошенного под углом к горизонту без учета сопротивления воздуха. Пусть в точке M в начальный момент времени t тело находится в начале координат и имеет скорость v_0, лежащую в плоскости OXZ и направленную под углом $\angle\alpha$ к горизонту. При этом начальные условия $t_0 = 0$, тогда:

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1,\ y = C_2,\ z = -gt + C_3, \\ x = C_1 t + C_4,\ y = C_2 t + C_3,\ z = -\dfrac{gt^2}{2} + C_3 t + C_6. \end{cases}$$

$$C_1 = v_0\cos\alpha,\ C_2 = 0,\ C_3 = v_0\sin\alpha,\ C_4 = C_5 = C_6 = 0.$$

Закон движения точки:

$$x = tv_0\cos\alpha,$$
$$y = 0,$$
$$z = tv_0\sin\alpha - gt^2/2.$$

Таким образом, траекторией движения точки M является плоская кривая, лежащая в плоскости OXZ.

33a 33. Колебательное движение точки. Свободные колебания

Пусть точка M движется прямолинейно под действием одной только **восстанавливающей силы** F, направленной к неподвижному центру O и пропорциональной расстоянию от этого центра. Проекция силы F на ось OX: $F_x = -cx$.

Будем искать закон движения точки M. Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось OX, тогда получим: $mx'' = F_x$ или $mx'' = cx$. Разделим обе части равенства на m и введем обозначение $cm = k^2$, тогда приведем уравнение к виду:

$$x'' + k^2x = 0,$$

которое представляет собой **дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления**. Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка находят в виде $x = e^{nt}$.

Колебания, совершаемые точкой по этому закону, называются **гармоническими колебаниями**.

Пусть точка B движется равномерно по окружности радиуса A из положения B_0, определяемого углом $\angle DOB_0 = \alpha$. Обозначим постоянную угловую скорость вращения радиуса OB через k. Тогда в произвольный момент времени t угол $\varphi = \angle DOB = \alpha + kt$, а проекция M точки B на диаметр, перпендикулярный DE, движется по закону $x = A\sin(kt + \alpha)$, где $x = OM_x$. Другими словами, она совершает гармонические колебания. Амплитуда колебаний — величина A, равная наибольшему отклонению точки M от центра колебаний O. Величина $\varphi = \alpha + kt$ называется фазой колебаний, она в отличие

34a 34. Затухающие колебания материальной точки, апериодическое движение точки. Явление биений. Явление резонанса

Пусть на материальную точку M с массой m, кроме восстанавливающей силы F, проекция которой на ось OX равна cx, действует также сила сопротивления R, проекция которой на ту же ось равна ax. Разделим обе части этого уравнения на m и получим:

$$k^2 + 2hx + x = 0,$$

линейное однородное дифференциальное уравнение. Ему соответствует характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm (h^2 + k^2)^{1/2}.$$

Движение точки M, описываемое таким уравнением, не будет периодическим, поскольку не существует такой постоянной, прибавляя которую к аргументу t, получили бы равенство $x(t + T) = x(t)$, справедливое при любых значениях t. Однако движение точки M имеет **колебательный характер**. Коэффициент h, характеризующий быстроту затухания колебаний во времени, называется **коэффициентом затухания**. Он определяется отношением коэффициента сопротивления к величине удвоенной массы колеблющейся материальной точки.

35a 35. Математический маятник и его малые колебания

Математический маятник — тяжелая материальная точка, которая двигается либо по вертикальной окружности (плоский математический маятник), либо по сфере (сферический маятник).

Будем рассматривать движение плоского математического маятника по окружности радиуса l с центром в точке O. Определим положение точки M (маятника) углом отклонения φ радиуса OM от вертикали. Направляя касательную $M\tau$ в сторону положительного отсчета угла φ, можно составить естественное уравнение движения, которое образуется из уравнения движения $mw = F + N$, где F — действующая на точку активная сила, а N — реакция связи.

Проекции на ось τ даст нам одно из естественных уравнений движения точки по заданной неподвижной гладкой кривой:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau \text{ или } m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau;$$

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\sin\varphi,\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi;$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2\sin\varphi,\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega\sin\varphi = 0.$$

В начальный момент маятник отклонен от вертикали на угол φ и опущен без начальной скорости, тогда на-

36a 36. Динамика относительного движения материальной точки

Пусть есть инерциальная система отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ и материальная точка массой m, на которую действуют приложенные силы F и N, где F — равнодействующая заданных активных сил; N — равнодействующая сил реакций связей.

Если ввести другую, неинерциальную, систему отсчета $OXYZ$, которая в общем случае может двигаться относительно инерциальной как свободное твердое тело, то по теореме сложения ускорений имеем:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_к,$$

где a_i — соответственно переносное, относительное и кориолисово ускорения.

После преобразований получим:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e + \overline{\Phi_к},$$

где $\Phi_e = -ma_e$, $\Phi_к = -ma_к$ — соответственно переносная и кориолисова силы инерции.

Динамическая теорема Кориолиса. Материальная точка движется относительно неинерциальной системы отсчета так же, как и относительно инерциальной, только к приложенным активным силам и реакциям связей следует добавить переносную и кориолисову силы инерции.

Если координаты движущейся точки относительно подвижной системы координат $OXYZ$ в момент време-

34б **Условный период затухающих колебаний (апериодический)** — это промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки M через положение статического равновесия в фиксированном направлении.

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + h^2}} = \frac{2\pi}{k^*},\ k^* = \sqrt{k^2 + h^2}.$$

Вынужденными называются колебания материальной точки, если на точку, кроме восстанавливающей силы F, действует некоторая изменяющаяся во времени возмущающая сила Q.

$$\ddot{x} + k^2 x = H \sin(\omega t + \sigma)$$

неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Колебание точки M состоит из следующих трех типов:

1) свободных колебаний, которые зависят от начальных условий и имеют частоту собственных колебаний k;
2) вынужденных колебаний, которые имеют частоту собственных колебаний k;
3) вынужденных колебаний, которые имеют частоту ω возмущающей силы Q и амплитуду. При частоте возмущающей силы, близкой к частоте собственных колебаний точки, возникает явление, называемое **биением**; при совпадении указанных частот наступает явление **резонанса**.

33б от координаты x определяет не только положение точки в данный момент времени, но и направление ее последующего движения. Например, из положения M при фазе, равной φ, точка движется вправо, а при фазе $(\pi - \varphi)$ — влево. Фазы, отличающиеся на 2π, считаются одинаковыми. Величина k, совпадающая с угловой скоростью вращения радиуса OB, называется **круговой частотой колебаний**. Промежуток времени T, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется **периодом колебаний**. По истечении периода фаза изменяется на 2π. Таким образом, $kT = 2\pi$, тогда период $T = 2\pi/k$. Величина ν, обратная периоду и определяющая число колебаний, совершаемых за 1 сек, называется **частотой колебаний**: $\nu = 1/T$.

Свойства свободных колебаний:

1) амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных (или краевых) условий;
2) частота k, а следовательно, и период T колебаний, от начальных (или краевых) условий не зависят и являются неизменными характеристиками данной колеблющейся системы.

Рассмотренные колебания называются **линейными**, поскольку они описываются линейными дифференциальными уравнениями. Период этих колебаний не зависит от начальных (или краевых) условий, а, значит, и от амплитуды. Колебания, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, называют **нелинейными**, они не обладают такими свойствами.

36б ни t есть x, y, z, то в проекциях на подвижные оси координат уравнение примет форму:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x + \Phi_{ex} + \Phi_{кx} \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y + \Phi_{ey} + \Phi_{кy} \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z + \Phi_{ez} + \Phi_{кz} \end{aligned}\right\}.$$

Относительное движение по инерции. Если материальная точка движется относительно подвижной системы отсчета прямолинейно и равномерно, то такое движение называют **относительным движением по инерции**. При этом относительная скорость v_r постоянна по модулю и направлению, а значит, относительное ускорение $a = 0$.

Относительный покой. При покое материальной точки относительно подвижной системы отсчета ее относительные скорость, ускорение и ускорение Кориолиса равны нулю. При абсолютном движении по инерции или абсолютном равновесии относительно инерциальной системы отсчета имеем для сил одно и то же условие $F + N = 0$.

Инерциальные системы отсчета.

$$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}),$$

где a_0 — ускорение точки, принятой за полюс;
ω — угловая скорость вращения подвижной системы координат вокруг выбранного полюса;
ε — угловое ускорение этого вращения;
r — радиус-вектор движущейся точки относительно выбранного полюса.

35б чальные условия будут: при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$. Энергия:

$$\frac{mv^2}{2} + V(x, y, z) = h,$$

где V — потенциальная энергия;
h — постоянная интегрирования.

Тогда при этих условиях в любой момент времени угол $\varphi \le \varphi_0$. Значение постоянной h определяется по начальным данным. Допустим, что угол φ_0 мал ($\varphi_0 \le 1$), тогда угол φ будет также мал и можно приближенно допустить, что $\sin\varphi \approx \varphi$. При этом уравнение примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t = a \sin(\omega t + \varepsilon),$$

где A и B, или a и ε, — суть постоянные интегрирования.

Период T колебания маятника равен

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right).$$

37а 37. Система материальных точек

Система материальных точек — это совокупность материальных точек, положения и движения которых взаимосвязаны. Бывают **свободные** и **несвободные** системы. Если на движение точек системы не наложены заранее заданные ограничения, не зависящие от закона движения, то система называется **свободной**. **Несвободной** называется такая система материальных точек, на движение которых наложены связи. Бывают **геометрические** и **кинематические** системы. **Геометрические** связи накладывают ограничения на координаты точек системы, а **кинематические** — на скорости точек системы. Условия, ограничивающие свободу движения материальных точек системы, выражаются некоторыми уравнениями — **уравнениями связей**. Если на систему материальных точек одновременно наложены геометрические и кинематические связи, то общее число связей будет равно:

$$k = k_1 + k_2,$$

где k_1 — число геометрических связей;
k_2 — число кинематических связей.

Связи, уравнения которых могут быть проинтегрированы, называются **голономными**. Связи, в дифференциальные уравнения которых явно входят скорости таким образом, что для этих уравнений не существует интегрирующего множителя, называются **неголономными** или **неинтегрируемыми**. Различают связи **неудерживающие** и **удерживающие**. Связь называется **удерживающей**, если она ограничивает движение как в данном направлении, так и в противоположном. Такая связь выражается уравнениями.

38а 38. Твердое тело. Моменты инерции твердого тела

Твердое тело — тело, имеющее равенство нулю главного вектора и главного момента поверхностных сил.

Момент инерции твердого тела — интеграл, распространенный по всей массе:

$$I_x = \int_m r^2 dm.$$

Абсолютно твердое тело — это тело, состоящее из системы материальных точек, непрерывно заполняющих некоторую часть пространства так, что расстояние между любыми двумя его точками остается неизменным.

Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей. Существует зависимость между моментами инерции системы относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс. Имеются две системы прямоугольных, взаимно параллельных осей координат $OXYZ$ и $CX'Y'Z'$. Начало системы координат $CX'Y'Z'$ находится в центре масс системы. Из определения момента инерции относительно оси имеем:

$$J_{Oz} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2),$$

$$J_{Oz'} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k'^2 + y_k'^2),$$

39а 39. Центробежные моменты инерции

Различаются моменты инерции **осевые**, или **аксиальные, полярные, планарные** и **центробежные**. Центробежные моменты инерции тела

$$I_{xy} = \int_m xydm,\ I_{xz} = \int_m xzdm,\ I_{yz} = \int_m yzdm.$$

Центробежные моменты инерции зависят от направления координатных осей и от выбора начала координат. Центробежные моменты инерции могут равняться нулю и иметь любой знак (плюс или минус). Если центробежные моменты инерции равны нулю, то оси называют **главными осями инерции тела в данной точке**. Если эта точка находится в центре масс, то оси являются **главными** и **центральными осями инерции**.

Эллипсоид инерции. Выберем точку N, расположенную от начала координат на расстоянии

$$ON = d = 1/(I_и).$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dxy - 2Eyz - 2Fzx = 1.$$

Это **эллипсоид инерции**, его оси симметрии OX', OY', OZ' — главные оси инерции в точке O. Если начало координат находится в центре инерции системы (тела), то эллипсоид инерции называется центральным, его оси симметрии — **главными центральными осями инерции**, а соответствующие моменты инерции — **главными центральными моментами инерции**.

40а 40. Теорема о движении центра масс механической системы. Дифференциальные уравнения движения механической системы

По теореме об изменении количества движения системы:

$$\frac{dQ}{dt} = \sum F_k^e,$$

однако количество движения системы можно вычислить по формуле: $Q = Mv_c$, где v_c — скорость центра масс; M — масса системы.

Теорема о движении центра масс формулируется так: центр масс системы движется так же, как и материальная точка, масса которой равна массе всей системы, если на точку действуют все внешние силы, приложенные к рассматриваемой механической системе. Проецируя на прямоугольные декартовы оси координат, получаем дифференциальные уравнения движения центра масс:

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2x_c}{dt^2} = \sum F_{kx}^e; \\ M\dfrac{d^2y_c}{dt^2} = \sum F_{ky}^e; \\ M\dfrac{d^2z_c}{dt^2} = \sum F_{kz}^e, \end{cases}$$

где x_c, y_c, z_c — координаты центра масс.

38б где $m_к$ — масса точки *Мк*, а $x_к$, $y_к$, $z_к$ и $x'_к$, $y'_к$, $z'_к$ — координаты этой точки относительно систем координат *OXYZ* и *CX′Y′Z′* соответственно.

Если x_c, y_c, z_c — координаты центра масс относительно системы координат *OXYZ*, то для взаимно параллельных осей координаты одной и той же точки *Мк* связаны соотношениями параллельного переноса $x_к = x'_к + x_c$; $y_к = y'_к + y_c$; $z_к = z'_к + z_c$. Подставим эти значения координат в выражение момента инерции; после преобразований получим:

$$J_{Oz} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2) + 2x \sum_{k=1}^{N} m_k x'_k + $$
$$+ 2y_C \sum_{k=1}^{N} m_k y'_k + (x_C^2 + y_C^2) \sum_{k=1}^{N} m_k$$

$$\text{и } J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2.$$

Центр масс находится в начале этой системы координат.

Величина $x^2 + y^2 = d^2$, где d — расстояние между осями *OZ* и *OZ′*.

Мы получили связь моментов инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс.

Теорема Штейнера или Гюйгенса—Штейнера. Момент инерции системы относительно какой-либо оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы системы на квадрат расстояния между этими осями.

37б Связь называется **неудерживающей**, если она ограничивает движение в данном направлении, но не ограничивает в противоположном. Различают также связи **стационарные** и **нестационарные**. Если в уравнение связи время явно не входит, то связь называется **стационарной**, в противном же случае связь называется **нестационарной**. **Внутренними** называются силы взаимодействия между материальными точками одной и той же системы и обозначаются *Ff*. **Внешними** называются силы взаимодействия между материальными точками данной системы и другими физическими телами, не входящими в систему. **Массой системы,** которая состоит из n материальных точек, называется сумма масс точек системы

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Центр масс системы материальных точек — это центр параллельных сил $F_i = m_i w$, сообщающих движение точкам системы с одинаковым ускорением или поступательное движение неизменяемой системе. Координаты центра масс:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m},\ z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m},$$

где m_i — масса i-й точки системы.

40б 1. Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, т. е.

$$\bar{F}_k^e = 0,$$

то из уравнения следует, что ускорение центра масс a_c равно нулю, а значит, скорость центра масс v_c является постоянной по модулю и направлению, т. е. центр масс движется прямолинейно и равномерно по инерции или находится в покое. Если, в частности, в начальный момент он находится в покое, то он покоится в течение всего времени, пока главный вектор внешних сил равен нулю.

2. Если проекция, например на ось *OX* главного вектора внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\bar{F}_{kx}^e = 0,$$

то проекция ускорения x_c центра масс на эту ось равна нулю, а значит, проекция скорости центра масс является постоянной величиной, т. е. $v_{cx} = x_c$ = const. Пусть даны внешние и внутренние силы, действующие на систему, состоящую из N точек. Если к каждой точке системы приложить равнодействующую силу внешних сил $\bar{F}^e{}_k$, равнодействующую силу всех внутренних сил $\bar{F}^i{}_k$, то для любой k-ой точки системы можно составить дифференциальное уравнение движения:

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i .$$

39б Если в качестве координатных осей взять главные оси инерции, то уравнение эллипсоида примет вид:

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 = 1.$$

Главные моменты инерции системы (тела) соответственно равны A', B', C', а центробежные моменты инерции равны нулю:

$$I_{x'} = A',\ I_{y'} = B',\ I_{z'} = C',$$

$$I_{y'z'} = I_{z'x'} = I_{x'y'} = 0.$$

Каждой точке *O* системы (тела) соответствует определенный эллипсоид инерции. Если оси координат являются главными осями инерции, то

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix}.$$

Для определения момента инерции относительно какой-либо оси, проходящей через любую точку, для рассматриваемого тела необходимо иметь:

$$I + I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma.$$

41а

41. Импульс силы и его проекции на координатные оси

Действие силы F на материальную точку в течение времени dt можно охарактеризовать элементарным импульсом силы Fdt. Полный импульс силы F за время t, или импульс силы S, равен

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F}dt.$$

Проекции импульса силы на прямоугольные оси координат выражаются формулами:

$$S_x = \int_0^t F_x dt,\ S_y = \int_0^t F_y dt,\ S_z = \int_0^t F_z dt.$$

Количество движения материальной точки q — это вектор, равный произведению массы точки m на ее скорость v, т. е. $q = mv$; в физике его часто называют импульсом материальной точки.

Теорема об изменении количества движения точки. Дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием силы F можно представить в следующей векторной форме:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}.$$

Так как масса точки m принята постоянной, то ее можно внести под знак производной.

42а

42. Понятие о теле переменной массы

Имеем точку переменной массы M. Применяя закон сохранения количества движения за промежуток времени от t до $t + dt$, имеем:

$$Qt = Qt + dt.$$

Учитываем только взаимодействие точки переменной массы с отделившейся от нее частицей массы $d'M$ за время dt и пренебрегаем действием на точку и эту частицу ранее отделившихся частиц. Получаем $Q_t = Mv$, так как в момент t имеется одна точка массой M, движущаяся со скоростью v относительно системы координат OXYZ. В момент $t + dt$ имеются точка массой $M - d'M$, скорость которой $v + dv_2$, и отделившаяся частица массой $d'M$, скорость которой u относительно той же системы координат OXYZ.

$$Q_{t+dt} = (M - d'M)(v + dv_2) + ud'M.$$

$$dv = (F/M)dt + (u - v)dM/M.$$

После умножения обеих частей этого уравнения на массу точки M и деления на dt получаем следующее дифференциальное уравнение движения точки переменной массы в векторной форме: $Mdv/dt = F + (u - v)dM/dt$. Выражение называют **дифференциальным уравнением Мещерского** (получено впервые в 1897 г.).

Дифференциальные уравнения движения точки переменной массы имеют такой же вид, как и для точки постоянной массы, только кроме приложенных к точке сил действует дополнительно реактив-

43а

43. Моменты количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси

Моментом количества движения точки относительно центра O называется величина, равная векторному произведению радиуса-вектора r материальной точки, проведенного из этого центра, на количество ее движения:

$$k_0 = r \times q = r \times x\ mv.$$

Соотношение между моментом количества движения (кинетическим моментом) и моментом силы устанавливается на основании теоремы об изменении момента количества движения.

Теорема. Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно неподвижного центра O (или оси) равняется моменту M_O силы F, приложенной к точке, относительно того же центра O (или оси).

Законы сохранения момента количества движения материальной точки.

1. Если момент силы относительно неподвижного центра равен нулю, то момент количества движения точки сохраняется постоянным.

2. Если момент силы относительно некоторой оси равен нулю, то момент количества движения точки относительно оси будет постоянным. При движении материальной точки под действием центральной силы ее радиус-вектор r описывает площадь, которая изменяется пропорционально площади (центральной называется сила, линия действия которой проходит через некоторый неподвижный центр O).

44а

44. Работа. Теоремы о работе силы

Для характеристики действия силы на материальную точку на протяжении некоторого пути вводится мера этого действия, называемая работой силы. Работа A силы F, имеющей постоянную величину и направление на прямолинейном направлении u, определяется как скалярное произведение векторов силы и перемещения $A = Fu$.

Из вышеприведенного определения следует, что работа является мерой действия силы, которая является причиной движения. Еще одной мерой движения является кинетическая энергия, определяемая формулой $T = 1/2mv^2$, где через m и v обозначены соответственно масса и величина скорости.

Пусть материальная точка M, находящаяся под действием силы F, совершает элементарное перемещение dr. Тогда элементарной работой силы на этом перемещении называется скалярное произведение силы на перемещение, т. е. величина $d'A = Fdr$. Здесь символ d' употребляется с целью отличить его от d, так как работа вообще не является полным дифференциалом какой-нибудь функции координат.

Работа силы на конечном пути M_1M_2 определяется как сумма элементарных работ на отдельных бесконечно малых перемещениях, т. е. интегралом

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} Fdr.$$

Так как работа силы на конечном пути выражается интегралом, то из геометрических соображений ее можно представить как площадь под графиком кривой M_1M_2. Интеграл работы определяет циркуляцию век-

42б **ная сила, обусловленная изменением массы точки**.

Первая задача Циолковского. Пусть точка переменной массы или ракета движется прямолинейно в так называемом, по терминологии Циолковского, свободном пространстве под действием только одной реактивной силы. Считаем, что относительная скорость v_r отделения частиц постоянна и направлена в сторону, противоположную скорости v движения точки переменной массы. Тогда, проецируясь на ось OX, направленную по скорости движения точки, дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки переменной массы принимает вид:

$$Mdv/dt = -dMv_r/dt.$$

Разделяя переменные и беря интегралы от обеих частей, имеем

$$\frac{1}{v_r}\int_{v0}^{v} dv = -\int_{M0}^{M}\frac{dM}{M},$$

где v_0 — начальная скорость, направленная по реактивной силе;

M_0 — начальная масса точки.

Выполняя интегрирование, получаем $v = v_0 + v_r ln(M/M_0)$. Вводя число Циолковского $Z = -m/M_p$, получаем формулу Циолковского: $v = v_0 + v_r ln(1 + Z)$. Из формулы Циолковского следует, что **скорость в конце горения не зависит от закона горения, т. е. закона изменения массы**.

41б Тогда

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}.$$

Первая производная по времени от количества движения точки равна действующей на точку силе.

Если обе части умножить на t, то получим другую форму этой же теоремы — теорему импульсов в дифференциальной форме:

$$d(m\bar{v}) = \bar{F}dt,$$

т. е. дифференциал от количества движения точки равен элементарному импульсу силы, действующей на точку.

Интегрируя обе части в пределах от нуля до t, имеем $mv - mv_0 = S$, где v — скорость точки в момент t; v_0 — скорость при $t = 0$; S — импульс силы за время t.

Это выражение часто называют теоремой импульсов в конечной (или интегральной) форме: изменение количества движения точки за какой-либо промежуток времени равно импульсу силы за тот же промежуток времени. В проекциях на координатные оси эту теорему можно представить в следующем виде:

$$mv_x - mv_{Ox} = S_x;\ mv_y - mv_{Oy} = S_y;\ mv_z - mv_{Oz} = S_z.$$

44б тора силы F по дуге M_1M_2, т. е. работа силы на криволинейном пути равна циркуляции силы по этому пути.

Отметим некоторые свойства, непосредственно следующие из определения работы как скалярного произведения силы и перемещения:

1) работа силы F, имеющей проекции F_x, F_y, F_z на оси $OXYZ$, на перемещении u с проекциями u_x, u_y, u_z на те же оси равна:

$$A = F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z;$$

2) работа равнодействующей нескольких сил, приложенных к движущейся точке, равна сумме работ слагаемых сил на общем для них перемещении точки приложения сил. Если к точке, совершающей перемещение u, приложены силы F_1, F_2, F_3, ... с равнодействующей R, то работа равнодействующей равна:

$$A = Ru = (F_1 + F_2 + F_3 + \ldots)u = \\ = F_1u + F_2u + F_3u + \ldots = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots;$$

3) работа силы на совокупности последовательных перемещений равна работе силы на результирующем перемещении. Доказательство аналогично предыдущему.

43б **Кинетическим моментом K_O** материальной точки, или **главным моментом** количества движения точек системы относительно центра, называется векторная сумма моментов количеств движения точек системы относительно того же центра:

$$\vec{K}_0 = \sum_{i=1}\vec{k}_{0i} = \sum_{i=1}\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i.$$

где k_{Oi} — момент количества движения i-й точки системы;

$m_i v_i$ — количество движения i-й точки;

r_i — радиус-вектор, соединяющий неподвижный центр O с i-й точкой системы.

Проектируя вектор на координатные оси x, y, z, найдем выражение для определения кинетических моментов относительно координатных осей в виде:

$$K_x = \sum m_i(y_i z_i - z_i y_i),$$
$$K_y = \sum m_i(z_i x_i - x_i z_i),$$
$$K_z = \sum m_i(x_i y_i - y_i x_i),$$

где x_i, y_i, z_i — координаты i-й точки системы;

m_i — момент количества движения относительно оси вращения:

$$K_x = \omega\int r^2 dm,$$

где интегрирование распространено на массу всего тела.

45a

45. Работа сил тяжести, упругости, тяготения

Вычислим работу силы тяжести отдельной материальной точки. Пусть точка M веса G переместилась по некоторой траектории L из точки M_1 в точку M_2. Элементарная работа на перемещении dr будет равна

$$dA = Gxdx + Gydy + Gzdz,$$

но при выбранном направлении осей $Gx = 0$, $Gy = 0$, $Gz = -G$. Полная работа силы тяжести на конечном участке траектории M_1M_2 будет равна

$$A = G(z_1 - z_2).$$

Работа силы тяжести материальной точки равна произведению веса на разность высот начального и конечного положений точки, причем она положительна, если конечное положение ниже начального, и отрицательна, если наоборот.

Работа силы тяжести не зависит от формы траектории, по которой точка переместилась из начального положения в конечное. Это свойство силы тяжести оказывается характерным для широкого класса других сил, которые именуются потенциальными или консервативными. Отметим также, что работа силы тяжести выражается полным дифференциалом некоторой функции координат и именно поэтому не зависит от формы траектории.

Рассмотрим работу силы упругой пружины, коэффициент жесткости обозначим через c. Вычислим, какую работу произведут упругие силы при растяжении конца пружины на длину f из нерастянутого состояния.

46a

46. Применение теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки

Пусть силы F_1, F_2, F_3, ..., F_n приложены к твердому телу в точках M_1, M_2, M_3, ... M_n; выбирая произвольную точку тела O за полюс и обозначая радиус-вектор i-й точки тела за $OM_i = r_i'$ получим $dr_i = dr_0 + \theta x r_i'$, т. е. элементарное перемещение dr_i точки M_i равно геометрической сумме перемещения полюса dr_0 и перемещения поворота $\theta x r_i'$ вокруг полюса (θ — бесконечно малый вектор поворота). Элементарная работа силы F_i будет:

$$d'A_i = F_i dr_i = F_i dr_0 + F_i(\theta x r_i').$$

Второе слагаемое согласно свойству скалярно-векторного произведения может быть написано в виде:

$$F_i(\theta x r_i') = \theta(r_i' x F_i) = \theta \operatorname{mom}_O F_i.$$

Проекция момента силы относительно точки на какую-либо ось, проходящую через точку, равна моменту силы относительно этой оси, то предыдущее выражение представляет собой произведение бесконечно малого угла поворота $d\varphi$ на момент силы относительно оси L, параллельной мгновенной оси поворота и проходящей через полюс O. Находим $d'A_i = F_i dr_0 + \operatorname{mom} L\, F_i d\varphi$.

Элементарная работа всех сил будет:

$$d'A = dr_0 \sum F_i + \theta \sum \operatorname{mom}_O F_i = dr_0 \sum F_i + d\varphi \sum \operatorname{mom}_L F_i.$$

47a

47. Кинетическая энергия твердого тела

В случае поступательного движения твердого тела, обозначая скорость через v, одинаковую для всех точек тела, найдем:

$$T = 1/2 \sum m_i v_i^2 = 1/2 v^2 \sum \tau_i = 1/2 M v^2,$$

где M — масса тела.

В случае вращения тела вокруг неподвижной оси OZ, обозначая угловую скорость через ω и расстояние элементарной массы τ_i от оси вращения через h_i, имеем $v_i = \omega h_i$, и выражение для кинетической энергии будет:

$$T = 1/2 \sum \tau_i (\omega h_i)^2 = 1/2 J_x \omega^2.$$

$$T = 1/2 M v^2 + 1/2 J_z^{(C)} \omega^2,$$

где $J_z^{(C)}$ — момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через центр инерции.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки легко распространяется на случай системы материальных точек: $dT_i = d'A_i$ — суммируя эти уравнения для всех точек, включенных в систему, и зная, что кинетическая энергия системы есть сумма кинетических энергий всех ее точек, получим:

$$dT = d \sum m_i v_i^2 / 2 = \sum d'A_i.$$

48a

48. Силовое поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Потенциальная энергия

Силовое поле, силы которого не зависят от времени, называется **стационарным**. **Силовым полем** называется физическое пространство, удовлетворяющее условию, при котором на точки механической системы, находящейся в этом пространстве, действуют силы, зависящие от положения этих точек или от положения точек и времени (но не от их скоростей). Примерами силового поля могут служить поле силы тяжести, электростатическое поле, поле силы упругости. Стационарное силовое поле называют потенциальным в том случае, если существует такая функция, которая однозначно зависит от координат точек системы, через которую проекции силы на координатные оси в каждой точке поля выражаются следующим образом:

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i},\ Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i},\ Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Если силовое поле является потенциальным, элементарная работа сил в этом поле численно равняется полному дифференциалу силовой функции. Работа сил, которые действуют на точки механической системы в потенциальном поле, равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях системы и не зависит от формы траектории точек этой системы. Работа сил, которые действуют на точки системы в потенциальном поле на всяком замкнутом перемещении (на перемещении, при котором началь-

46б Кинетической энергией системы материальных точек называется сумма кинетических энергий всех входящих в систему точек:

$$T = 1/2\sum m_i v_i^{\,2}.$$

Кинетическая энергия согласно этому определению является существенно положительной величиной, обращающейся в ноль лишь в том случае, когда скорости всех входящих в систему точек обращаются в нуль, т. е. в случае покоя системы.

Теорема. Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре инерции и движущейся со скоростью центра инерции, и кинетической энергии системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе отсчета с началом в центре инерции:

$$T = 1/2Mv_C^{\,2} + T'.$$

M — масса всей системы, v_C — скорость центра ее инерции; кинетическая энергия системы в ее относительном движении равна:

$$T = 1/2\sum m_i v_i^{\,2},$$

где величина $v_i(r)$ — величина скорости массы m_i по отношению к системе, поступательно движущейся с центром инерции.

45б При удлинении пружины на f проекция силы упругости на ось x равна $(-cx)$, получим

$$dA = Fxdx = -\,cxdx = d(-\,cx^2/2).$$

Полная работа сил упругости при удлинении пружины на f будет равна $A = -\,cf^2/2$. Работа упругой силы оказалась пропорциональной квадрату перемещения. Как и в случае силы тяжести, работа сил упругости не зависит от траектории, а только от начального и конечного положений точки.

Теорема об изменении кинетической энергии связывает изменение кинетической энергии с работой сил, вызывающих это изменение. Для вывода этой теоремы умножим обе части основного дифференциального уравнения динамики точки скалярно на элементарное приращение точки dr, получим $(mdv/dt)dr = Fdr$. Замечая, что $dr = vdt$, получим соотношение интересующей нас теоремы $dT = d'A$: приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном участке пути равно элементарной работе приложенных к точке сил на этом участке пути.

48б ные и конечные положения для всех точек совмещены), равна нулю, так как в рассматриваемом случае можно записать $U_2 = U_1$. Потенциальная энергия системы в любом данном ее положении равна сумме работ сил потенциального поля, приложенных к ее точкам на перемещении системы из данного положения в нулевое. Рассматриваемая сумма работ зависит только от того, из какого положения система перемещается в выбранное нулевое положение; потенциальная энергия зависит только от положения системы. Работа сил поля, которые приложены к точкам системы, на ее перемещении из первого положения в нулевое равна потенциальной энергии системы в первом положении. Аналогично работа сил поля на перемещении системы из второго положения в нулевое равна потенциальной энергии системы во втором положении. Работа сил, приложенных к точкам механической системы, на любом ее перемещении равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положениях системы.

Проекции на координатные оси силы, действующей в потенциальном поле на каждую точку M_i механической системы, равны взятым со знаком минус частным производным от потенциальной энергии системы по соответствующим координатам этой точки. В выражение потенциальной энергии можно добавить любую дополнительную постоянную величину, в результате от этого частные производные от потенциальной энергии не изменятся.

47б

$$\sum d'A_i$$

представляет сумму элементарных работ сил, действующих на рассматриваемом элементарном перемещении на каждую точку системы.

$$\sum d'A_i$$

сумма двух слагаемых: элементарной работы внешних — обозначим ее через $d'A$, и элементарной работы $d'A'$ внутренних сил.

$$dT = d'A + d'A',$$

т. е. приращение кинетической энергии системы материальных точек на элементарном перемещении равно сумме элементарных работ внешних и внутренних сил, действовавших на этом участке пути.

Интегрируя между пределами, соответствующими двум положениям системы — начальному 1 и конечному 2, — и обозначая через T_1 и T_2 кинетические энергии в этих положениях, получим теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме:

$$T_2 - T_1 = \int_1^2 d'A + \int_1^2 d'A' = d'A_{1,2} + d'A'_{1,2}.$$

49a

49. Закон сохранения механической энергии

При движении механической системы под действием сил, имеющих потенциал, изменения кинетической энергии системы определяются по формулам:

$$T_1 + П_1 = T_2 + П_2,\ T + П = \text{const}.$$

Сумму кинетической и потенциальной энергий системы называют полной механической энергией системы. При движении механической системы в стационарном потенциальном поле полная механическая энергия системы при движении остается неизменной. Расход механической энергии движущейся механической системы обычно означает превращение ее в теплоту, электричество, звук или свет, а приток механической энергии связан с обратным процессом превращения различных видов энергии в механическую энергию. Если на материальную точку действует центральная сила *P*, то момент количества движения этой точки L_0 относительно центра силы *O* является постоянным и точка движется в плоскости *I*, которая перпендикулярна L_0, L_0 является постоянной величиной или L_0 = const.

$$L_0 = \vec{r} \times \overrightarrow{mv} = m\left(r \times d\vec{r}\,/dt\right) = \text{const}.$$

Рассмотрим векторное произведение: $r \times d\vec{r}$. Площадь треугольника *OMM'*, который построен на векто-

50a

50. Динамика поступательного и вращательного движения твердого тела

При поступательном движении твердого тела все его точки движутся так же, как и его центр масс. Дифференциальные уравнения движения центра масс тела являются дифференциальными уравнениями поступательного движения твердого тела. Запишем в виде формулы:

$$m\ddot{x}_c = \sum X_i^E = X^E,$$
$$m\ddot{y}_c = \sum Y_i^E = Y^E,$$
$$m\ddot{z}_c = \sum Z_i^E = Z^E,$$

где *m* — масса тела;
x_c, y_c, z_c — координаты центра масс тела.

Заметим, что по дифференциальным уравнениям поступательного движения можно решать два основных типа задач на поступательное движение твердого тела:
1) по заданному движению твердого тела определять главный вектор приложенных к нему внешних сил;
2) по заданным внешним силам, действующим на тело, и начальным условиям движения находить кинематические уравнения движения тела, если известно, что оно движется поступательно.

Изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения отдельной материальной точки, которая имеет массу данного тела. Введем в рассмотрение твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси *Z* с угловой скоростью ω.

51a

51. Физический маятник и его малые колебания

Физическим маятником называется твердое тело, которое имеет неподвижную горизонтальную ось вращения, не проходящую через его центр тяжести, и находящееся под действием только силы тяжести. **Ось вращения физического маятника** называется осью привеса маятника. Примем ось привеса маятника за ось *X*. Координатную плоскость *YOZ* проведем через центр тяжести *C* маятника и совместим эту плоскость с плоскостью чертежа.

На маятник, который отклонен от положения покоя, действуют внешние силы: сила тяжести *G* и составляющие реакции цилиндрического шарнира Y_0 и Z_0. Трением в шарнире в рассматриваемом случае можно пренебречь. Реактивные силы не имеют моментов относительно оси привеса. При повороте маятника на угол φ в положительном направлении или, другими словами, против вращения часовой стрелки, сила *G* стремится вращать плоскость *ZOY* по вращению часовой стрелки и противоположно. Следовательно, знак момента силы *G* относительно оси *X* противоположен знаку угла поворота маятника φ и знаку $\sin\varphi$.

Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси для маятника можно записать в виде следующего выражения:

$$J_x\ddot{\varphi} = -Gd\sin\varphi,$$

где J_x — момент инерции маятника относительно оси привеса;
G — вес маятника;

52a

52. Динамика плоского движения твердого тела

При плоскопараллельном движении точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Положение тела будет определятся положением центром масс *C*, т. е. радиус-вектором *rc* и углом φ между осями *CX'* и *CX''*.

Кинетический момент определяется равенством

$$G_0 = \sum (mv \times mv\text{v}v),$$

так как $rv = rc + r'v$, где r' — радиус-вектор любой точки системы по отношению к осям *CX'Y'*, то

$$G_0 = \sum\left[(rc + r'v) \times mv(drc/dt + dr'v/dt)\right].$$

$$G_0 = rc \times Mvc + \sum (r'v \times mv\text{v}'v),$$

где $\text{v}v$ и $\text{v}'v$ — скорости центра масс по отношению к осям *OXY* и *CX'Y'* соответственно.

Кинетический момент системы относительно какого-нибудь неподвижного центра равен моменту относительно этого центра количества движения центра масс в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, сложенному с кинетическим моментом системы относительно центра масс в ее движении по отношению к подвижной системе отсчета, перемещающейся вместе с центром масс поступательно.

50б Требуется определить кинетический момент этого тела относительно оси его вращения. Момент количества движения точки M_i тела относительно оси Z:

$$L_{iz} = m_i r_i^2 \omega.$$

Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно неподвижной оси его вращения равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость тела. Уравнение

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_{iz}^E$$

представляет собой дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Проведем сравнительную характеристику уравнения с дифференциальным уравнением поступательного прямолинейного движения твердого тела:

$$m x_c = \sum X_i^E.$$

Момент инерции является характеристикой инертности тела при вращательном движении. Если вращение тела происходит в одном направлении, то это направление считают положительным. В этом случае моменты движущих сил положительны, моменты сил сопротивления отрицательны, а главный момент внешних сил может иметь тот или другой знак.

49б рах $\vec{r}$ и $d\vec{r}$, равна половине модуля этого векторного произведения:

$$dF = 1/2\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right|.$$

Площадь треугольника OMM' представляет собой площадь, описанную радиус-вектором $\vec{r}$ движущейся точки в течение некоторого промежутка времени dt. Чтобы охарактеризовать быстроту изменения этой площади с течением времени, введем новую величину, численно равную dF/dt, называемую **секторной скоростью**: $dF/dt = C = \text{const}$.Теперь мы можем определить с точностью до величины первого порядка малости площадь треугольника OMM' как площадь кругового сектора:

$$dF = 1/2 r^2 d\varphi.$$
$$dF/dt = \text{const}.$$

Из выше полученных равенств имеем:

$$F = Ct + F_0.$$

Такая зависимость называется законом площадей, который формулируется так: при движении точки под действием центральной силы площадь, описываемая радиус-вектором точки, изменяется пропорционально времени. Чтобы получить дифференциальное уравнение траектории материальной точки, движущейся под действием центральной силы, воспользуемся полярными координатами в плоскости I. Сделаем дополнительные построения: проведем полярную ось x через центр силы O и начальное положение точки M_0. В результате начальные значения координат будут $OM_0 = r_0$ и $\varphi_0 = 0$.

52б По теореме о движении центра масс имеем:

$$Md^2rc / dt^2 = \sum F_i.$$

Теорема моментов относительно центра масс дает уравнение:

$$Jcd^2\varphi / dt^2 = \sum \text{mom} c F_i.$$

Применим теорему моментов относительно оси OZ основной неподвижной системы:

$$G_{oz} = M(xc(dyc/dt) - yc(dxc/dt)) + Jcd\varphi/dt.$$

В результате теорема моментов дает:

$$d/dt[M(xc(dyc/dt) - c(dxc/dt)) + Jcd\varphi/dt] = \\ = \sum (xiFiy - yiFix).$$

Свободное твердое тело может совершать плоскопараллельное движение только по отношению к плоскости OXY; при этом необходимо, чтобы для действующих на тело внешних сил выполнялось условие

$$\sum F_i = 0, \ \sum \text{mom} x' F_i = 0, \ \sum \text{mom}\, y' F_i = 0,$$

а начальные скорости всех точек должны быть равны нулю или параллельны плоскости OXY.

51б d — расстояние от центра тяжести маятника до оси привеса.

Уравнение такого вида

$$\ddot{\varphi} + \left(Gd / J_x\right)\sin\varphi = 0$$

представляет собой дифференциальное уравнение качаний физического маятника. Рассматриваемое уравнение отличается от дифференциального уравнения качаний математического маятника только значением постоянного коэффициента при $\sin\varphi$. Требуется определить длину математического маятника, период качаний которого равен периоду качаний данного физического маятника. Формула следующего вида

$$l = J_x g\left(Gd\right) = J_x / \left(md\right)$$

определяет приведенную длину физического маятника, т. е. длину такого математического маятника, период качаний которого равен периоду качаний данного физического маятника. Следующим шагом, отложив по прямой OC отрезок $OO_1 = l$, получим точку O_1, называемую **центром качания маятника**. **Ось, проходящую через центр качания параллельно оси привеса, будем называть осью качаний маятника.** Для этого воспользуемся формулой для установления особых свойств оси привеса и оси качаний физического маятника. В связи с этим предположим, что маятник качается вокруг оси привеса OX.

53а

53. Понятие о гироскопе

Гироскопом (или волчком) обычно называют быстро вращающееся вокруг оси симметрии однородное тело вращения, ось которого может изменять свое положение в пространстве.

Всякое движение свободного твердого тела можно рассматривать как совокупность двух движений: поступательного и движения (вращательного) около неподвижной точки (теорема Шаля). Твердое тело с одной неподвижной точкой имеет 3 степени свободы. Классическими параметрами являются три эйлеровых угла: φ, ψ, θ. Если они заданы для данного момента, то задано и положение тела. Если же φ, ψ, θ известны в функции времени t, то известно будет положение тела в каждый момент времени, а следовательно, будет известно движение твердого тела.

Рассмотрим с кинематической точки зрения одно из движений твердого тела с неподвижной точкой O, так называемую **регулярную прецессию**, т. е. такое сложное движение тела, когда тело вращается с постоянной по численной величине угловой скоростью ω_1 вокруг оси Z, связанной с телом, а эта ось поворачивается с постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг другой неподвижной оси ζ, составляя с неподвижной осью ζ один и тот же угол. Ось Z называют осью собственного вращения, а ось ζ — осью прецессии.

Прецессия называется прямой, если угол между угловой скоростью собственного вращения ω_1 и угловой скоростью прецессии ω_2 острый, и обратной, если угол между ω_1 и ω_2 тупой.

54а

54. Теория удара

Сущность явления удара заключается в том, что при ударе происходит конечное приращение скорости за весьма малый промежуток времени. Обозначая среднее значение ударной силы F в интервале τ через F^*, получим (по теореме о среднем значении) $mv - mv_0 = F^*\tau$. Поскольку приращение количества движения остается величиной конечной, то удобней оперировать не с ударными силами, а с их импульсами S, так что

$$S = \int F dt.$$

Следовательно, $mv - mv_0 = S$, причем время удара τ считается величиной бесконечно малой. Также перемещение точки за время удара будет бесконечно мало.

Обозначим приращение количества движения $mv - mv_0$, которое может быть названо «приобретенным количеством движения», через Δmv; тогда $\Delta mv = S$.

Результат можно сформулировать так: количество движения, приобретенное во время удара, равно ударному импульсу. Это соотношение, эквивалентное уравнению Ньютона, является основным уравнением теории удара.

$$\sum \Delta(m v v) = \sum S v_{вн} \text{ или } \Delta Q \equiv \Delta \sum m v \mathbf{v} v,$$

где Q — количество движения системы.

Количество движения, приобретенное системой за время удара, равно сумме всех внешних ударных импульсов, приложенных к системе.

55а

55. Потеря кинетической энергии при ударе двух тел

Изменение за время удара кинетического момента системы, взятого относительно некоторого центра, равно сумме моментов, взятых относительно того же центра, всех внешних ударных импульсов.

Докажем теорему Карно, позволяющую определить изменение кинетической энергии в тех случаях, когда система испытывает удар благодаря тому, что на нее мгновенно накладывается или мгновенно снимается абсолютно неупругая идеальная связь. Это значит, что связь, наложенная во время удара, будет продолжать существовать и после удара, а связь, снятая во время удара, будет отсутствовать и после удара. В обоих случаях каждой точке системы с массой mv будет справедлива формула:

$$m v v' v - m v \mathbf{v} v = S v,$$

где vv и $v'v$ — скорости соответствующей точки в начале и в конце удара;

Sv — ударный импульс реакций, приложенных к этой же точке.

Найдем изменение кинетической энергии для каждого случая.

1. Связи мгновенно **налагаются**.

Умножая обе части равенства на $v'v$ и произведя суммирование по индексу v (1, 2, ... n) для всех точек системы, получим:

$$\sum m v v'^2 v - \sum m v v' v \mathbf{v} v = 0,$$

поскольку $\sum v' v S v = 0,$

56а

56. Общее уравнение динамики. Принцип возможных перемещений в случае движения системы. Примеры применения общего уравнения динамики

Уравнение Даламбера—Лагранжа в обобщенных координатах:

$$\sum \Big(Q_i - \big(d/dt\,(\partial T\,(\partial q_i/\partial t)) - \partial T/\partial q_i\big)\Big).$$

В этом уравнении все вариации обобщенных координат δq_i произвольны, а потому, полагая все, кроме одной, равными нулю, получим, что выражение во внешних скобках равно нулю.

$$\big(d/dt\,(\partial T/(\partial q_i/\partial t)) - \partial T/\partial q_i\big) = Q_i,$$
$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Эта система есть система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат.

Составим, пользуясь уравнениями Лагранжа, дифференциальное уравнение движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Z. В данном случае тело имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ ($q_1 = \varphi$). Тогда уравнение Лагранжа примет вид:

$$\big(d/dt\,(\partial T/(\partial\varphi/\partial t)) - \partial T/\partial\varphi\big) = Q_1.$$

54б Рассмотрим точку массы m, на которую наложены связи, когда она движется со скоростью v и встречает на своем пути неподвижную поверхность. Благодаря мгновенному наложению связи точка испытывает удар и мгновенно изменяет свою скорость. Обозначим скорость точки в конце удара через v'. Получим:

$$mv' - mv = S,$$

где S — ударный импульс ударных реакций связей.

Разложим скорости v и v' по направлениям нормали и касательной к поверхности в точке удара A. Тогда

$$v = vn + v\tau, \; v' = v'n + v'\tau.$$

Будем предполагать связь идеальной. Есть три возможных случая:

1) $v' = 0$. Этот случай называют **абсолютно неупругим ударом** точки о связь, и саму связь называют абсолютно неупругой;
2) $v' = -v$. Этот случай называют **абсолютно упругим ударом**, а связь абсолютно упругой;
3) $v' = -kv$, где $0 < k < 1$ (коэффициент упругости). Этот случай называют **несовершенно упругим ударом**.

Ударный импульс можно найти только для одного из тел (т. к. $S_1 = -S_2$).

53б Так как скорость точки твердого тела есть $v = rx\omega$, то кинетический момент G_0 твердого тела относительно неподвижной точки O будет:

$$G = \sum\left[r_i x m_i\left(\omega x r_i\right)\right] = \omega\sum m_i r_i^2 - \sum m_i r_i\left(r_i\omega\right).$$

Спроектируем обе части этого равенства на подвижные оси. Проекция на ось X будет:

$$G_x = p\sum m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) - q\sum m_i x_i y_i - r\sum m_i x_i z_i,$$

где p, q, r — проекции угловой скорости на оси подвижной системы координат.

Вводя компоненты симметричного тензора инерции относительно неподвижной точки и повторяя вывод для осей Y и Z, получим окончательно:

$$Gx = pJ_{xx} - qJ_{xy} - rJ_{xz},$$
$$Gy = -pJ_{yx} + qJ_{yy} - rJ_{yz},$$
$$Gz = -pJ_{zx} - qJ_{zy} + rJ_{zz}.$$

Формулы показывают, что проекции G являются линейными функциями проекций ω, коэффициентами которых являются компоненты тензора инерции.

56б Кинетическая энергия тела

$$T = 1/2Jz\left(d\varphi/dt\right)^2$$
$$\text{и} \; \left(\partial T/\left(\partial\varphi/\partial t\right)\right) = Jzd\varphi/dt, \; \partial T/\partial\varphi = 0.$$

Сообщая телу виртуальное перемещение — поворот на угол $\delta\varphi$,

$$\delta A = \left(\sum \mathrm{mom}zF_i\right)\delta\varphi = Mz\delta\varphi.$$

Подставляя найденные величины, получим:

$$Jz\left(d^2\varphi/dt^2\right) = Mz.$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Принцип виртуальных перемещений можно сформулировать так: положение равновесия системы отличается от смежных положений, совместимых со связями, тем, что только для положения равновесия сумма элементарных работ активных сил, действующих на систему, для всяких виртуальных перемещений равна нулю.

$$\sum F_i\delta r_i = 0.$$

Принцип Даламбера—Лагранжа: во всякий момент времени истинное движение отличается от кинематически возможного тем, что только для истинного движения сумма элементарных работ сил активных и сил инерции при всяких виртуальных перемещениях системы равна нулю.

55б перемещение точек согласно во время удара, и связи — идеальные. Изменение кинетической энергии за время удара будет:

$$T' - T \equiv 1/2\sum m\upsilon v'^2\upsilon - 1/2\sum m\upsilon v^2\upsilon.$$

Приведя подобные члены, найдем:

$$T' - T = 1/2\sum m\upsilon\left(v\upsilon - v'\upsilon\right)^2.$$

Так как правая часть в равенстве отрицательна, то T' после удара меньше, чем до удара T. В результате находим

$$T' - T = 1/2\sum m\upsilon\left(v\upsilon - v'\upsilon\right)^2,$$

т. е. **кинетическая энергия, потерянная системой при мгновенном наложении на нее абсолютно неупругих связей, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее точки двигались с потерянными скоростями**.

2. **Мгновенное снятие связей**. В этом случае умножим обе части равенства скалярно не на вектор $v'\upsilon$, а на вектор $v\upsilon$.

Проведя в этом случае те же рассуждения, что и раньше, получим следующее выражение для изменения кинетической энергии системы при ударе:

$$T' - T = 1/2\sum m\upsilon\left(v\upsilon - v'\upsilon\right)^2.$$

Кинетическая энергия, приобретенная системой при внезапном снятии связей, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее точки двигались с потерянными скоростями.

Щербакова Ю. В.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

шпаргалка

Завредакцией: *Рагулина А. Ю.*
Выпускающий редактор: *Елистратова М. В.*

ООО «Издательство «Эксмо»
127299, Москва, ул. Клары Цеткин, д. 18/5. Тел.: 411-68-86, 956-39-21
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru

Формат 60×90 1/16.