

1. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Предполагается, что исследуемые плоские системы состоят из конечного числа прямолинейных элементов (стержней) постоянной жесткости, соединенных между собой в узлах жестко или шарнирно.

Нагрузка (осадка опор, температурные воздействия, распределенная или сосредоточенная) общего вида сводится к узловой. Число возможных перемещений z_i (линейных и угловых) узлов системы или степень ее кинематической неопределимости назовем числом степеней свободы системы. Очевидно, что она совпадает с числом возможных внешних узловых сосредоточенных воздействий.

1.1. Анализ расчетной схемы

На расчетной схеме рассчитываемой системы укажем положительные направления возможных перемещений (линейных и угловых) пронумерованных узлов. В результате получим, так называемую [2], " $P - z$ " диаграмму.

При этом следует иметь в виду, что число возможных линейных смещений шарнирного узла плоской шарнирно-стержневой системы равно двум (в пространстве трем). Что касается жесткого узла рамной системы, то число его возможных перемещений зависит от того, учитываются или нет продольные деформации стержней при расчете рамы. В общем случае число возможных перемещений жесткого узла в плоскости равно трем: угловое и два линейных смещения (в пространстве - шести: три угловых и три линейных перемещения). Обычно при расчете изгибаемых стержневых систем методом перемещений принимается предположение о неизменности длины стержня при изгибной его деформации. В этом случае возможными перемещениями узлов рамы считаются углы поворота жестких узлов и линейные смещения всех узлов системы, численно равные числу степеней свободы шарнирного аналога схемы, полученной из заданной врезанием шарниров во все жесткие узлы, включая и опорные.

На рис. 1.1 представлены примеры « $P - z$ » диафрагм для шарнирно-стержневой (а) и рамных (б, в) систем.

Число возможных линейных перемещений всех узлов фермы равно:

$$2 \cdot Y - C_{оп} = 2 \cdot 4 - 3 = 5.$$

Горизонтальное перемещение узла B и оба перемещения узла A невозможны, т.к. там находятся внешние связи.

В раме считается, что длина стержней при изгибе не изменяется, следовательно, число возможных линейных перемещений всех ее узлов равно единице. Число возможных угловых перемещений рамы равно двум.

Для рамы с наклонными стойками число возможных угловых перемещений жестких углов равно двум, а число возможных линейных смещений всех ее узлов равно единице. В качестве последнего может быть рассмотрено линейное перемещение любого из узлов по любому

направлению, кроме направления осей наклонных стержней (например, возможное перемещение z_2 одного из жестких узлов B по нормали к наклонной стойке AB).

$$[P - z]$$

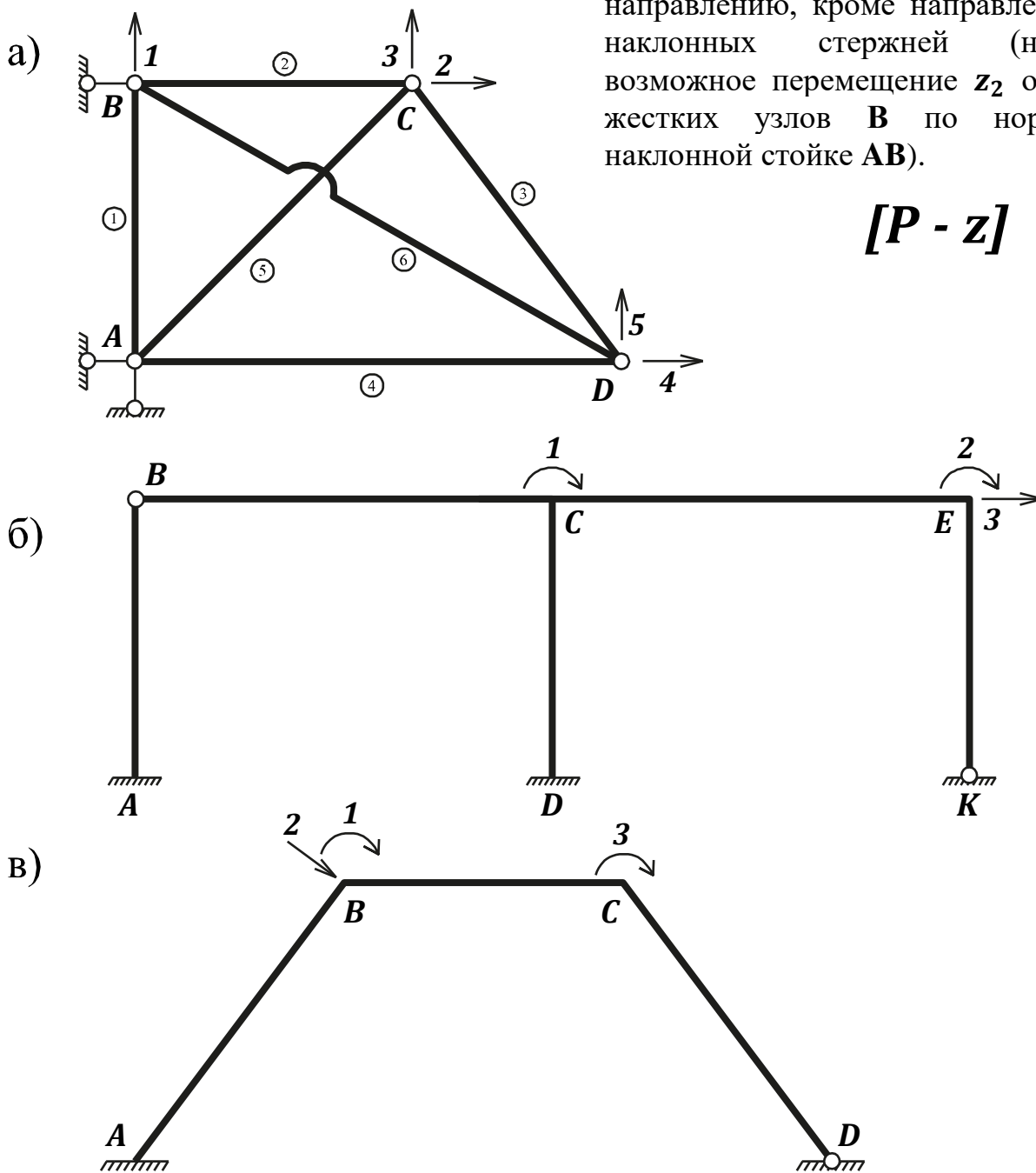


Рис. 1.1

Это направление следует выбирать, согласуясь с направлением внешней нагрузки. Так, указанное на диаграмме « $P - z$ » направление будет удобным при расчете на нагрузку, нормальную к AB .

Под действием внешних узловых нагрузок система деформируется и в ее элементах возникают внутренние усилия. Обозначим деформации элементов через e_i а соответствующие им внутренние усилия через S_i .

В шарнирно-стержневых системах при узловой нагрузке возникают только продольные усилия (рис. 1.2).

За положительное принимается растягивающее усилие, направленное от узла. Соответствующей этому усилию деформацией является удлинение стержня.

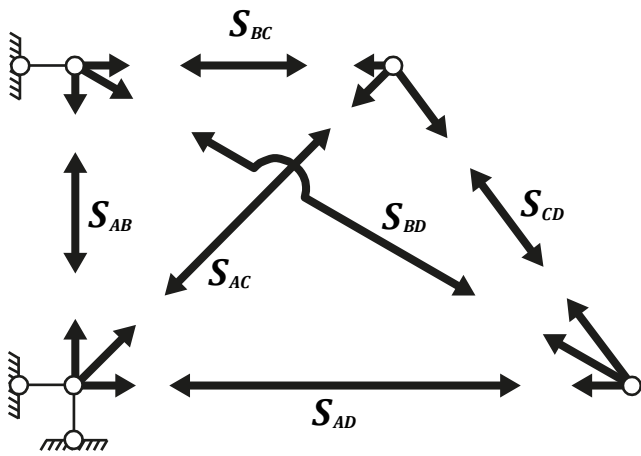


Рис. 1.2

В системах, работающих на изгиб (балки, рамы) при узловой нагрузке изгибающие моменты изменяются вдоль стержня по линейному закону. По этой причине в качестве искомых внутренних усилий могут быть рассмотрены изгибающие моменты по концам каждого стержня (в шарнире момент равен нулю).

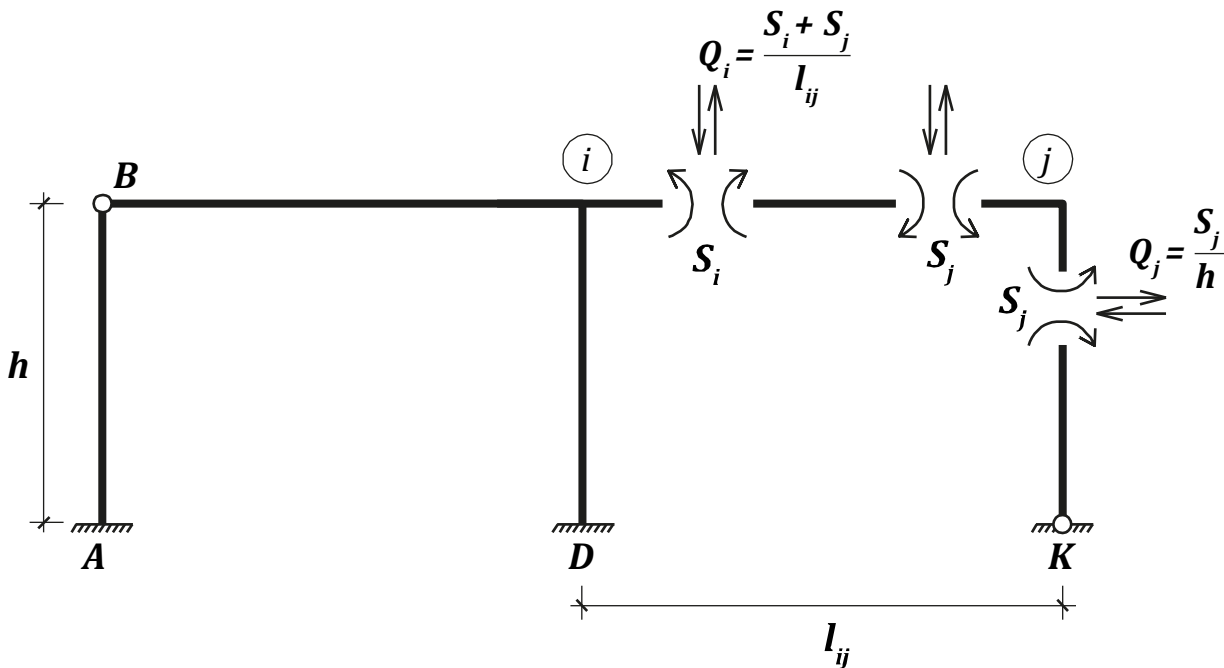


Рис. 1.3

Правило знаков для усилий. Внутренний момент считается положительным, если он вращает стержень относительно противоположного конца по часовой стрелке. Следовательно, узел под действием положительного момента вращается против часовой стрелки (рис. 1.3).

При принятом для моментов правиле знаков, поперечная (перерезывающая) сила в каждом стержне ij остается постоянной и определяется по формуле:

$$Q_i = -\frac{S_i + S_j}{l_{ij}}. \quad (1.1)$$

Знак минус показывает, что она вращает стержень относительно противоположного конца против часовой стрелки.

Что касается продольных сил, то использование предположения о неизменности длины изгибаемых элементов позволяет их не учитывать при составлении исходных матриц. Их можно определить по окончательной эпюре поперечных сил Q вырезая соответствующие узлы.

Под деформациями e_i , концевых сечений стержня будем понимать соответствующие изгибающим моментам S , углы поворота.

Правило знаков для деформаций. За положительное направление e_i ; принимается поворот по часовой стрелке прямой, соединяющей концы изогнутого стержня с касательной к изогнутой оси в точке i .

При линейных смещениях узлов ввиду малости деформаций можно принять, что $e_i = \text{tg } \alpha_i = \frac{z_i}{l_{ij}}$. На рис. 1.4 изображены деформации концевых сечений изгибаемых балок, вызванные линейными и угловыми смещениями узлов.

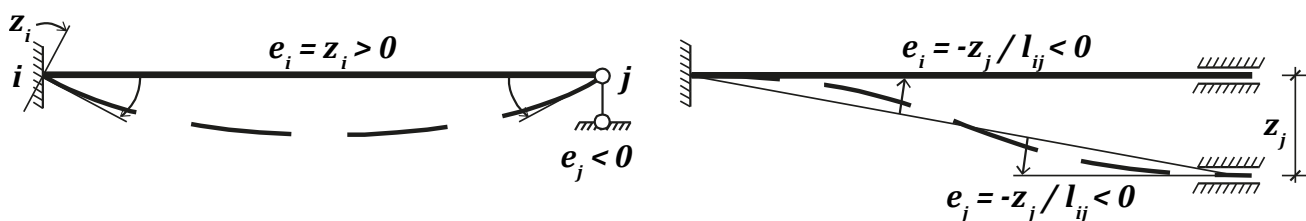


Рис. 1.4

Если на расчетной схеме исследуемой системы пронумерованы все стержни, а также изображены искомые внутренние усилия и соответствующие деформации, то получим, так называемую [2], диаграмму " $S - e$ ".

На рис. 1.5 изображены диаграммы " $S - e$ " для шарнирно-стержневой (рис. 1.5а) и рамных (рис. 1.5б,в) систем, на которых указаны положительные направления усилий и деформаций.

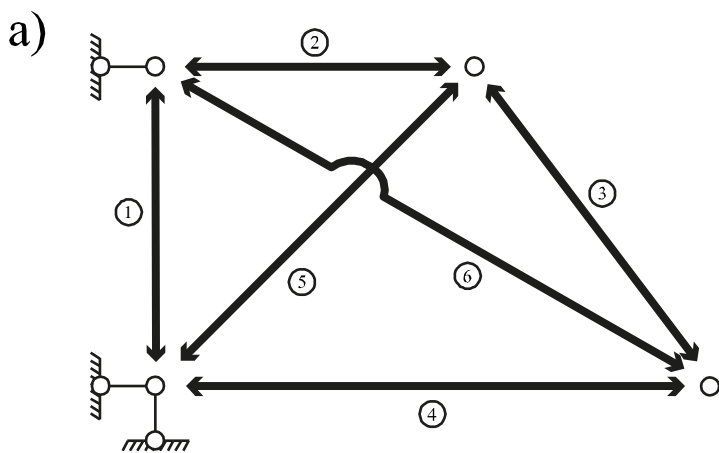


Рис. 1.5а

Здесь каждая стрелка относится не к узлу, а к стержню. Следует отметить, что при нумерации сечений в рамках концы одного стержня должны иметь последовательные номера, что в дальнейшем упростит составление элементной матрицы внутренней жесткости всей системы, которая при этом будет квазидиагональной.

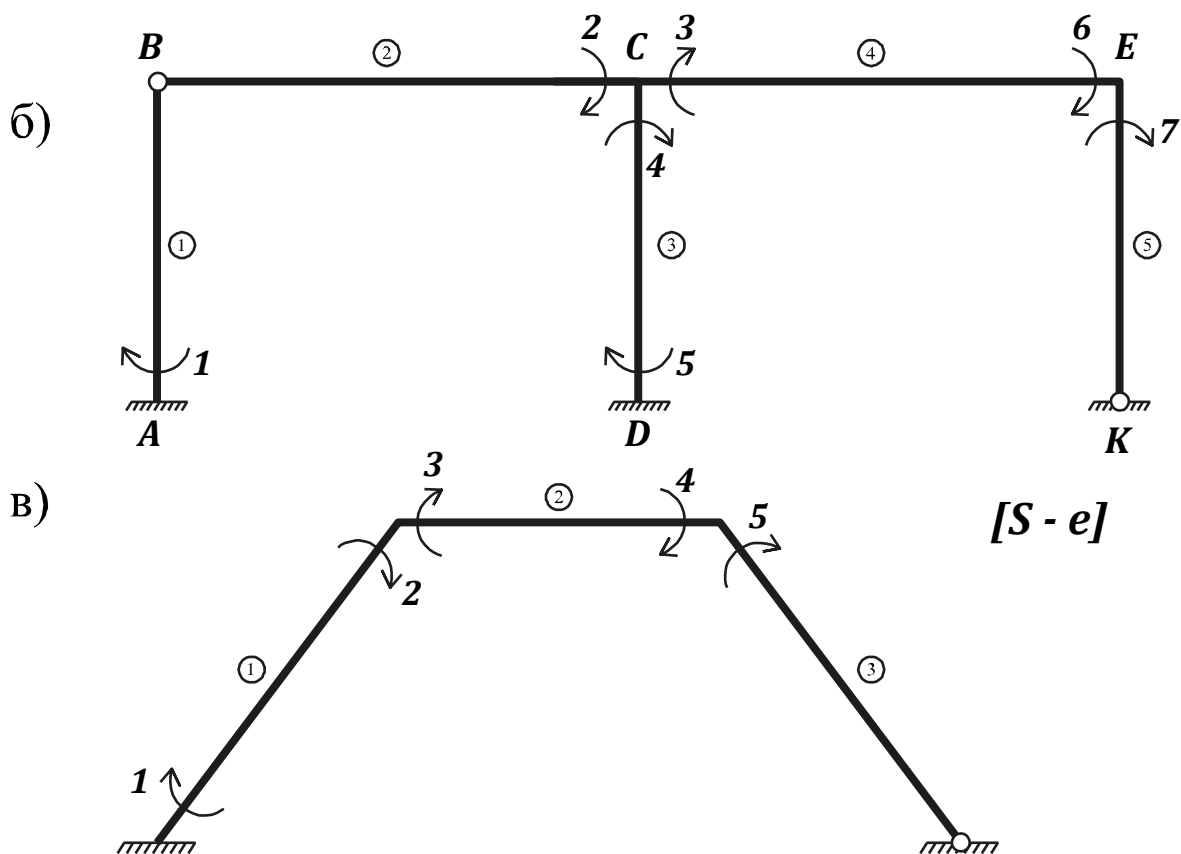


Рис. 1.5

1.2. Приведение нагрузки общего вида к эквивалентной узловой. Формирование матрицы внешних воздействий.

После выбора расчетной схемы необходимо заменить все внешние воздействия эквивалентными силами и моментами, приложенными в узлах в направлениях их возможных перемещений (степеней свободы). Для этого добавим и вычтем в узлах заданной системы силы, равные опорным реакциям, возникающим в нагруженных стержнях с закрепленными от всех возможных перемещений узлами (в основной системе метода перемещений), и сгруппируем их с заданной нагрузкой в виде двух следующих состояний:

-первое воздействие или состояние - самоуравновешенная нагрузка, состоящая из заданных на стержне воздействий и реакций от него в наложенных на узлы связях;

-второе воздействие или состояние - узловые силы и моменты (узловая эквивалентная нагрузка), равные по величине и направленные противоположно опорным реакциям, возникающим от заданных воздействий в связях, наложенных на узлы системы, в направлениях их возможных перемещений.

Для определения усилий в элементах системы от первого воздействия могут быть использованы таблицы для расчета статически неопределимых однопролетных балок, применяемые в классическом методе перемещений (табл.

4.2[1]). Это связано с тем, что самоуравновешенная нагрузка первого состояния вызовет усилия лишь в самом загруженном стержне, не передаваясь далее его узлов.

Расчетные усилия во всех элементах определяются на основании принципа независимости действия сил суммированием усилий S , полученных в результате расчета на действие узловой эквивалентной нагрузки из второго состояния и усилий S_0 от самоуравновешенной нагрузки из первого состояния:

$$S_{\text{ок}} = S_0 + S \quad (1.2)$$

На рис. 1.6 дан пример приведения внеузловой нагрузки на раму к эквивалентной узловой. При этом, в качестве внешних воздействий рассмотрены все возможные их виды: силовая нагрузка, в том числе сосредоточенный момент, приложенный возле шарнира; смещение опор (средняя заделка) и изменение температуры (правая стойка).

На рис. 1.6в,е,и показаны эпюры моментов и опорные реакции для основной системы метода перемещений — I состояние, полученное с помощью таблиц для расчета однопролетных статически неопределимых балок от действия соответственно сил, изменения температуры и смещения опор. На рис. 1.6г,ж,к показаны узловые силы, равные и противоположно направленные опорным реакциям от всех указанных воздействий — II состояние системы - узловая нагрузка, эквивалентная каждому из заданных воздействий в отдельности. На рис. 1.6л приведена суммарная узловая эквивалентная нагрузка от всех трех воздействий, приложенных одновременно. При этом силы, действующие в направлениях имеющих у системы опорных связей не указаны, т.к. очевидно, что они не будут вызывать никаких внутренних усилий в стержнях рамы. Также не указаны вертикальные силы в верхних узлах, которые действуют вдоль закрепленных нижними опорами стержней и вызывают в них лишь продольные усилия.

а)

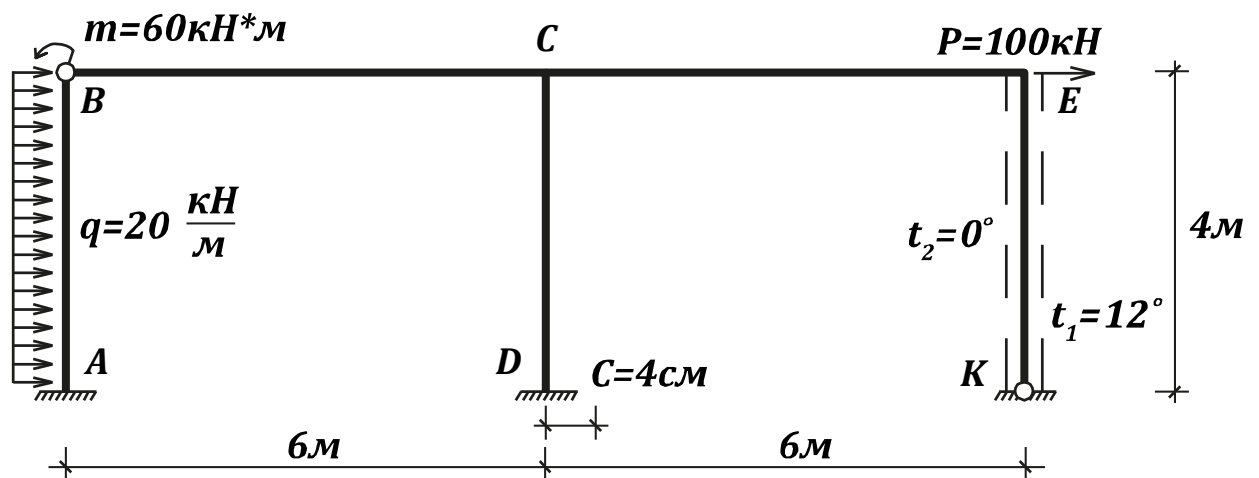
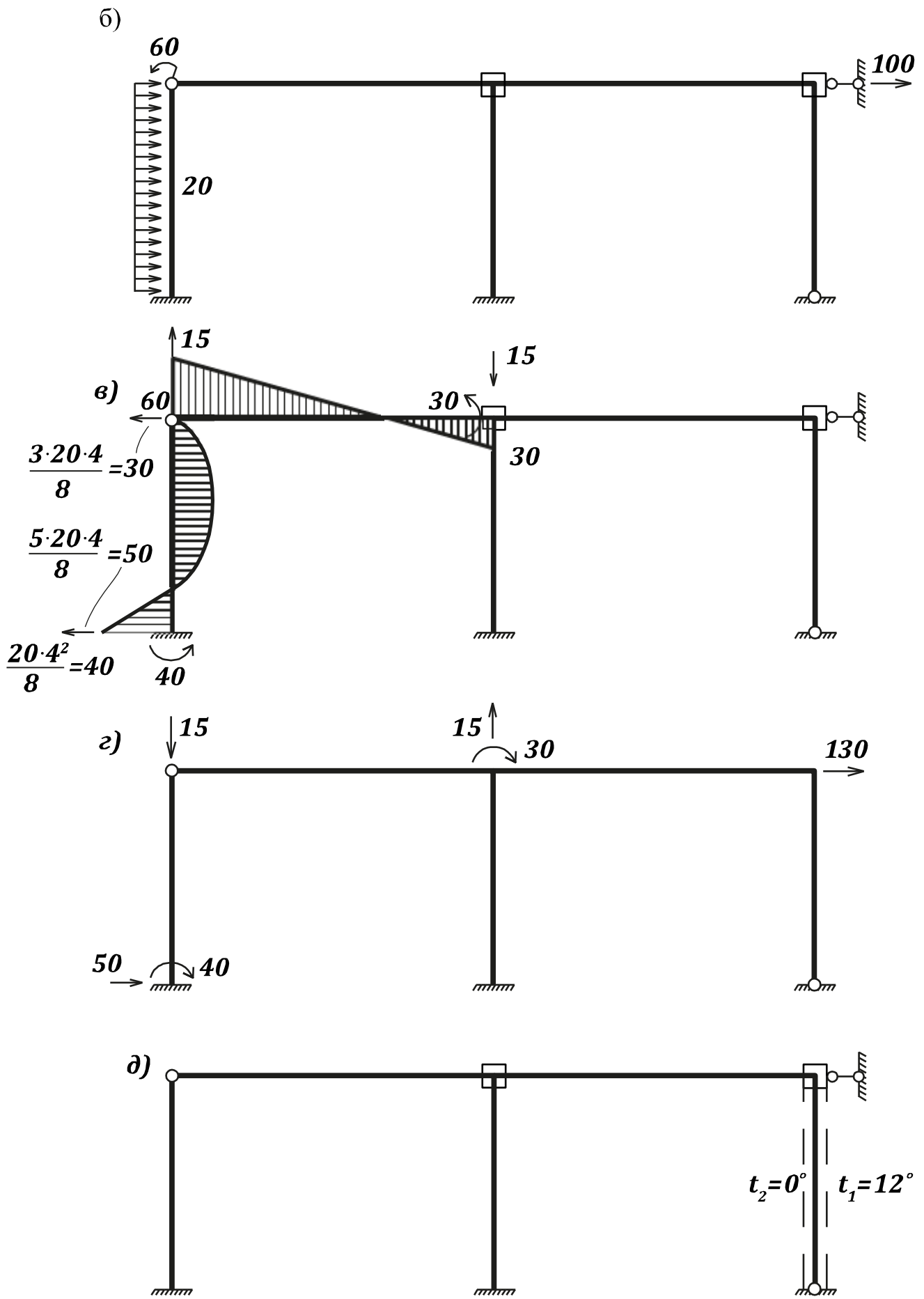
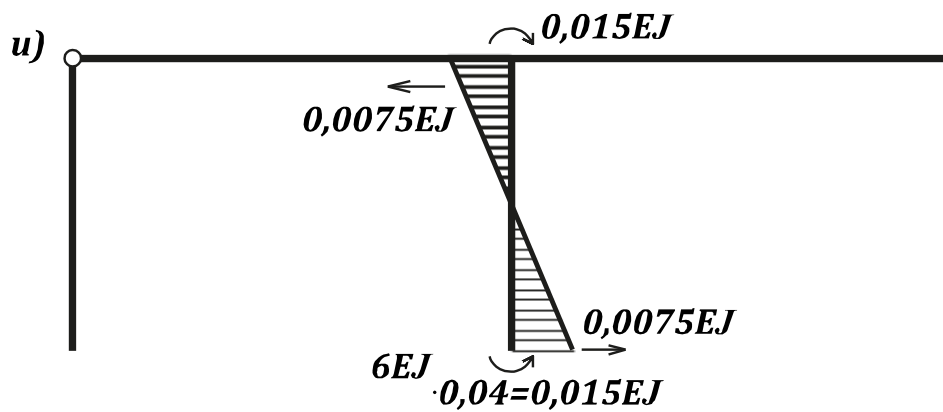
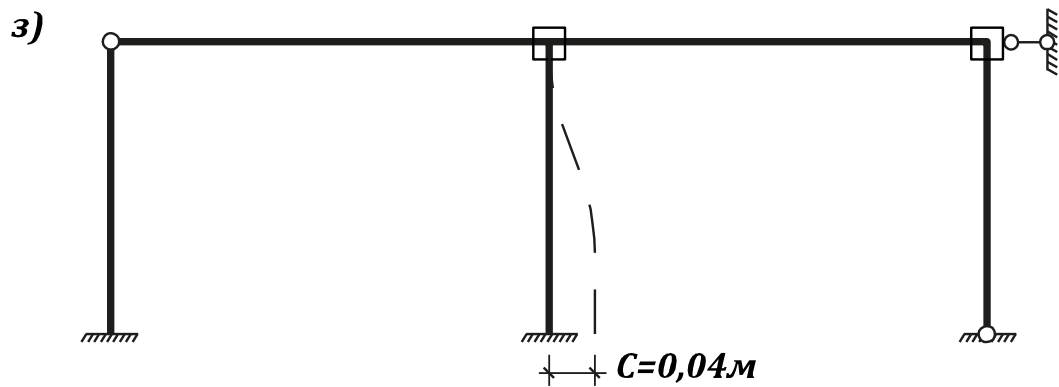
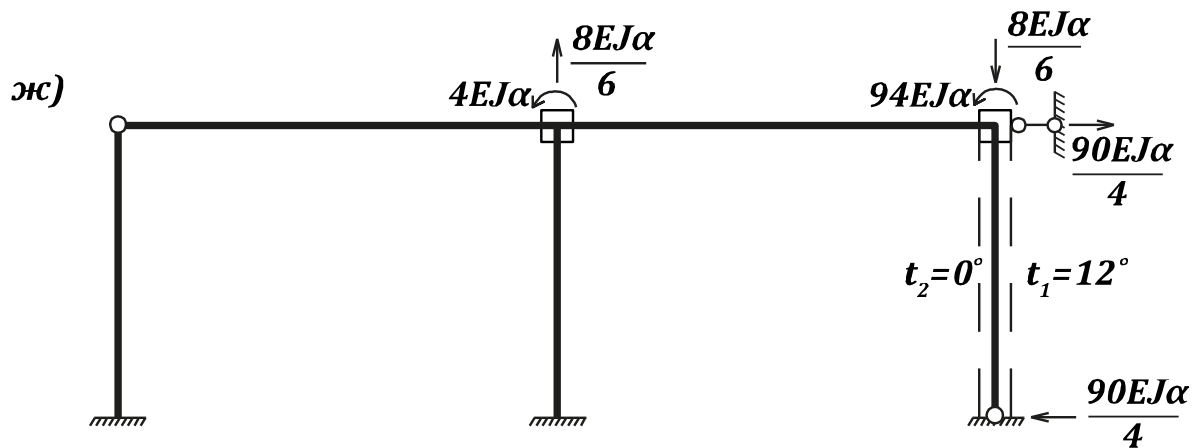
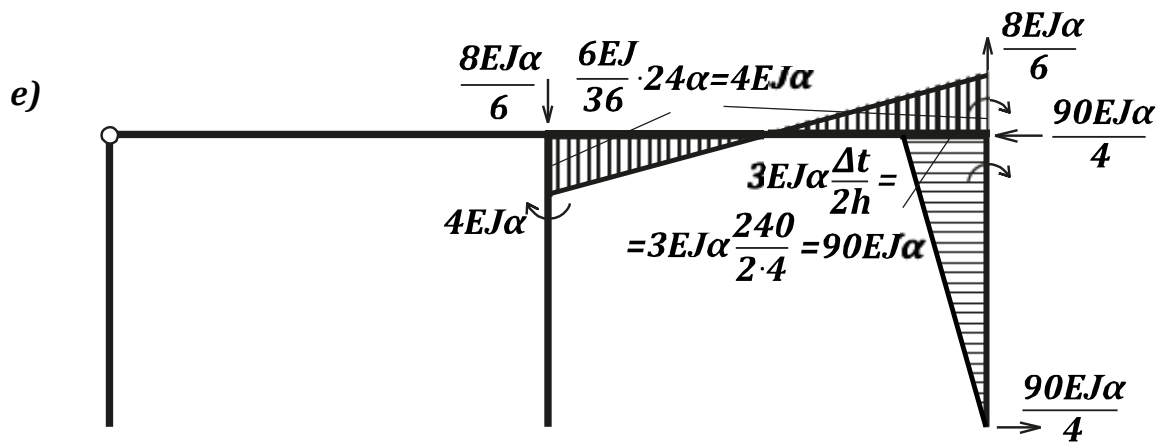


Рис. 1.6

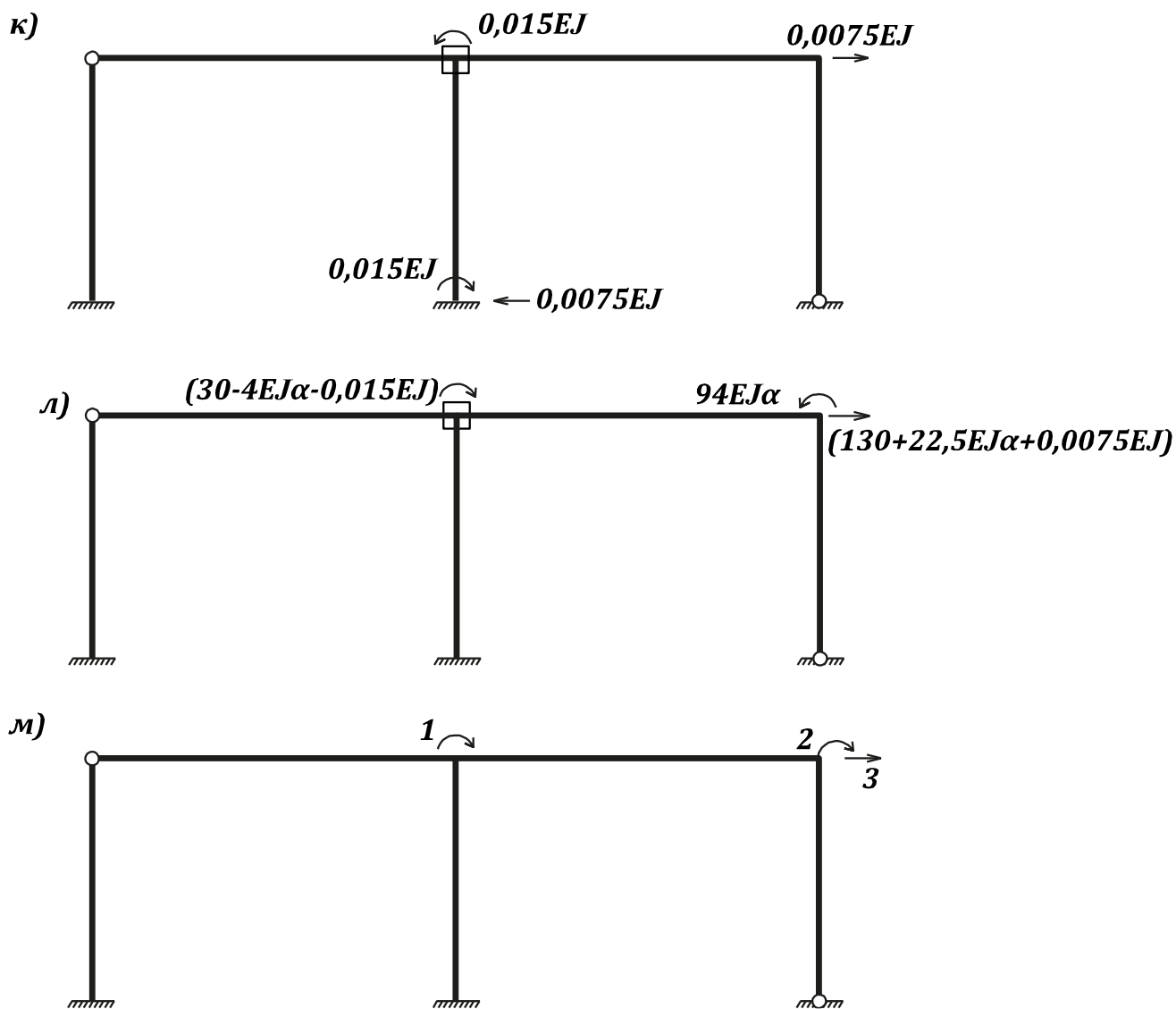


Продолжение Рис. 1.6



Продолжение Рис. 1.6

16



Продолжение Рис. 1.6

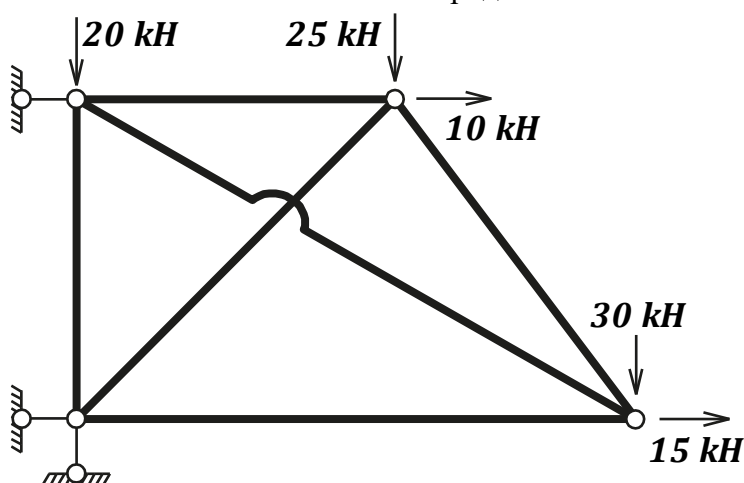


Рис. 1.7

Теперь может быть сформирована матрица внешних сил P . При расчете на одно нагружение эта матрица имеет один столбец, т.е. является вектором, элементами которой являются заданные узловые силы, записанные в последовательности, соответствующей нумерации сил P_i на диаграмме « $P - z$ ». При этом, если направления заданной узловой нагрузки совпадают с выбранными на

на диаграмме « $P - z$ », то соответствующие элементы вектора положительны, в противном случае — отрицательны. ожено внешней нагрузки по направлению возможного перемещения, соответствующий элемент вектора P равен нулю.

Например, для фермы с нагрузкой, показанной на рис. 1.7, в соответствии с диаграммой « $P - z$ » (см.рис.1.1а) вектор внешних сил имеет вид:

$$P = [-20; 10; -25; 15; -30]^T. \quad (1.3)$$

Для удобства он записан в виде строки, которую надо транспонировать.

Вектор внешних сил для рамы, приведенной на рис. 1.6а, при расчете одновременно на все указанные воздействия (P, t, C) в соответствии с диаграммой « $P - z$ » (см.рис.1.6м) и узловыми эквивалентными силами (рис. 1.6л) запишется в виде

$$P = [(30 - 4EJ\alpha - 0.015EJ); (-94EJ\alpha); (130 + 22.5EJ\alpha + 0.0075EJ)]^T, \quad (1.4)$$

где последний элемент представляет собой равнодействующую всех горизонтальных сил, действующих в узлах.

Если конструкция рассчитывается на несколько вариантов загрузки в отдельности, то матрица внешних сил P содержит число столбцов, равное числу загрузок. Так при расчете рамы (см.рис.1.6а) отдельно на три воздействия (P, t, C) в соответствии с узловыми эквивалентными силами от каждого из воздействий (см.рис.1.6г,ж,к) матрица P запишется так:

$$P = \begin{bmatrix} 30 & -4EJ\alpha & -0.015EJ \\ 0 & -94EJ\alpha & 0 \\ 130 & 22.5EJ\alpha & 0.0075EJ \end{bmatrix}$$

\uparrow
« P »

\uparrow
« t »

\uparrow
« C »

Покажем построение вектора внешних сил для рам с наклонными стойками (рис. 1.8).

После приведения внешней нагрузки к узловой (рис. 1.8в), сразу можем записать первый элемент вектора внешних сил $P_1 = -125/3$ кН-м. Знак "минус" показывает, что направление внешнего момента противоположно положительному направлению силы P на диаграмме « $P - z$ ». Этот же результат можно получить иным путем.

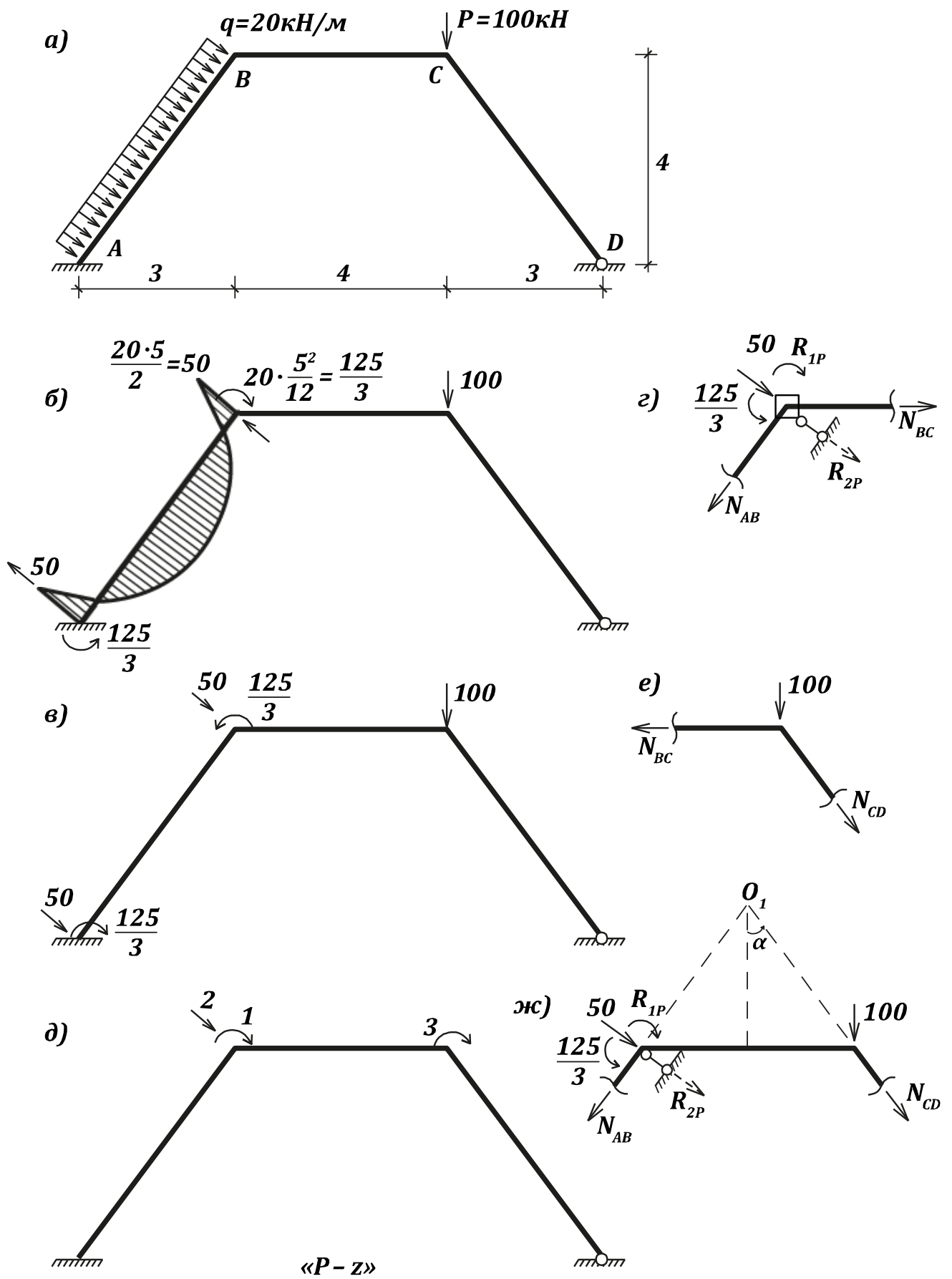


Рис. 1.8

Вырежем жесткий узел вместе с наложенными на него фиктивными связями (рис. 1.8г) и рассмотрим его равновесие под действием внешних и внутренних сил. При этом за положительные направления реакций в фиктивных связях следует принять соответствующие направления \mathbf{z}_i ; на « $\mathbf{P} - \mathbf{z}$ » диаграмме (рис. 1.8д). Записав уравнение моментов относительно узла находим реактивный момент $R_{IP} = 125/3$. Откуда $P_I = -R_{IP} = -125/3$. Реакцию R_{2P} , а следовательно, и силу P_2 мы не сможем определить из равновесия этого узла до тех пор, пока не будет определено одно из продольных усилий или N_{AB} или N_{BC} . Усилие N можно найти из равновесия узла, изображенного на рис. 1.8е.

Это можно делать и по-другому. Для нахождения R_{2P} можем рассмотреть равновесие всей верхней части рамы (рис. 1.8ж)

$$\sum M_{O_1} = \frac{125}{3} - R_{IP} + (R_{2P} + 50) \cdot \frac{10}{3} - 100 \cdot 2 = 0,$$

откуда $R_{2P} = 10$ кН и $P_2 = -R_{2P} = -10$ кН.

Окончательно вектор внешних сил для данной рамы запишется в виде:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{125}{3} \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[-\frac{125}{3}; -10; 0 \right]^T.$$

Далее перейдем непосредственно к расчету плоских стержневых систем матричным методом перемещений. Для получения основных расчетных формул метода рассмотрим основные зависимости, связывающие между собой внешние и внутренние силы, деформации и перемещения, а также усилия и деформации.

1.3. Связь между внешними и внутренними силами

Рассмотрим статическую сторону задачи, устанавливающую связь между внешними узловыми нагрузками \mathbf{P} и внутренними усилиями \mathbf{S} . При этом, внешние узловые силы выражаются через внутренние, а это оказывается возможным как для статически определимых, так и неопределимых систем. Для этого необходимо записать уравнения статического равновесия каждого узла или части системы под действием положительных (в соответствии с диаграммами « $\mathbf{P} - \mathbf{z}$ » и « $\mathbf{S} - \mathbf{e}$ ») внутренних и внешних сил.

Матрица коэффициентов уравнений статического равновесия, выражающих внешние узловые силы \mathbf{P} через внутренние \mathbf{S} , называется статической матрицей \mathbf{A} .

Она имеет размер $(m \times n)$, где m соответствует числу строк матрицы A и указывает число возможных внешних узловых сил или перемещений — число степеней свободы системы, а n - число неизвестных внутренних усилий S (число столбцов матрицы A).

По статической матрице A можно проводить кинематический анализ рассчитываемой стержневой системы. Так, если в матрице A число строк больше числа столбцов ($m > n$), т.е. число уравнений превышает число неизвестных, то соответствующая система является **изменяемой**. Если для какой-то системы статическая матрица A - квадратная ($m = n$), то система **статически определима**. При этом она **не является мгновенно изменяемой** если определитель матрицы отличен от нуля. Наконец, если число столбцов матрицы A превышает число строк ($m < n$) и ранг матрицы при этом равен числу строк, то соответствующая система является **статически неопределимой и неизменяемой**. Степень статической неопределимости равна $n - m$.

Рассмотрим примеры составления статических матриц для шарнирно-стержневых и рамных систем. Сформируем статическую матрицу для описанной ранее фермы. Вырежем последовательно узлы шарнирно-стержневой системы, изображенной на рис. 1.1а и запишем уравнения равновесия узлов, спроектировав все положительные внешние и внутренние силы, действующие в каждом узле, на оси x и y (рис. 1.9)

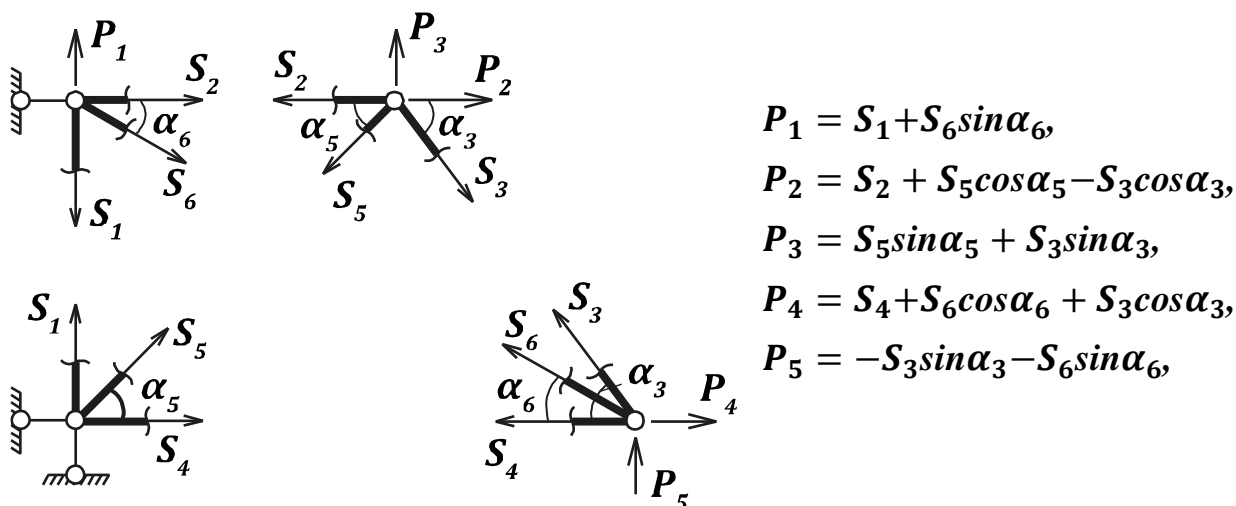


Рис. 1.9

или в матричной форме: $P=A \cdot S$, где $P_{(5 \times 1)} = [P_1; P_2; P_3; P_4; P_5]^T$ вектор внешних сил; $S_{(6 \times 1)} = [S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6]^T$ вектор внутренних усилий.

$$A_{(5 \times 6)} =$$

$P \backslash S$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	$\sin \alpha_6$
2	0	1	$-\cos \alpha_3$	0	$\cos \alpha_5$	0
3	0	0	$\sin \alpha_3$	0	$\sin \alpha_5$	0
4	0	0	$\cos \alpha_3$	1	0	$\cos \alpha_6$
5	0	0	$-\sin \alpha_3$	0	0	$-\sin \alpha_6$

Это и есть статическая матрица. Каждая строка под номером «к» матрицы A представляет собой коэффициенты (направляющие косинусы), на которые умножаются внутренние усилия для получения внешней силы P_k .

Аналогично построим статическую матрицу для рамы, приведенной на рис. 1.1б. Рассмотрим равновесие всех жестких узлов рамы и верхней ее части под действием положительных внешних и внутренних сил (рис. 1.10) или в матричной форме: $P = A \times S$, где $[P_1, P_2, P_3]$ - вектор внешних сил; $S_{(7 \times 1)} = [S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6; S_7]^T$ - вектор внутренних усилий;

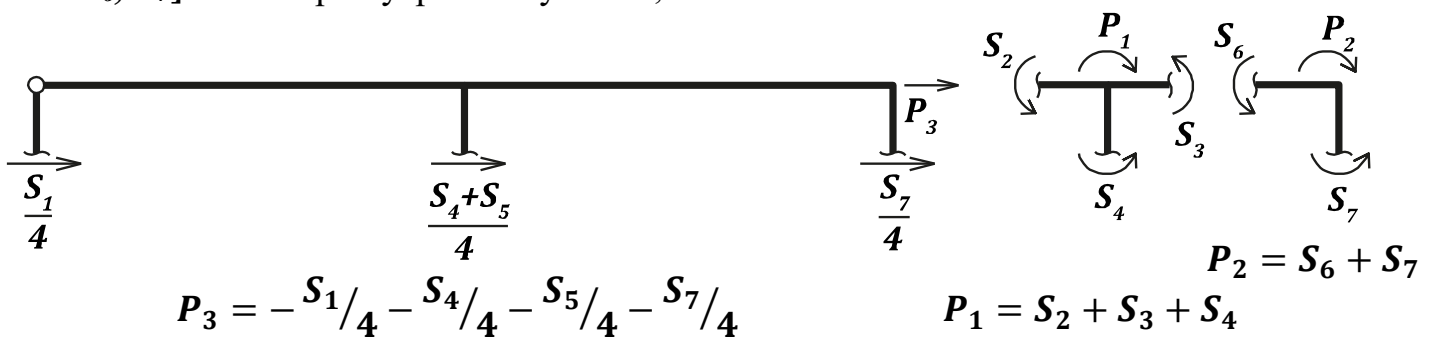


Рис. 1.10

$$A_{(3 \times 7)} =$$

$P \backslash S$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	1
3	$-1/4$	0	0	$-1/4$	$-1/4$	0	$-1/4$

Это статическая матрица для рамы, приведенной на рис. 1.5б.

Построим статическую матрицу для рамы с наклонными стойками, изображенной на рис. 1.1в.

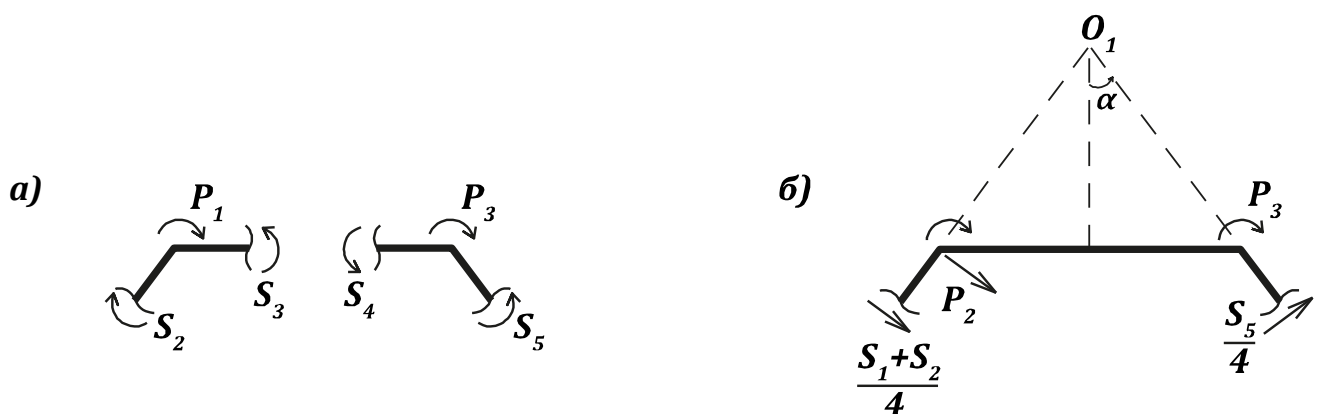


Рис. 1.11

Из равновесия жестких узлов (рис. 1.11а) находим:

$$P_1 = S_2 + S_3, P_3 = S_4 + S_5.$$

Приравняв нулю сумму моментов внешних и внутренних сил, приложенных к верхней части рамы (см. рис. 1.11б), относительно точки пересечения наклонных стержней O_1 , получим:

$$\frac{S_1 + S_2}{4} \cdot \frac{10}{3} + P_2 \cdot \frac{10}{3} - P_1 - P_3 + \frac{S_5}{4} \cdot \frac{10}{3} = 0,$$

откуда $P_2 = \frac{1}{4}S_1 + \frac{1}{20}S_2 + \frac{3}{10}S_3 + \frac{3}{10}S_4 + \frac{11}{20}S_5.$

Следовательно, статическая матрица имеет вид:

$$A_{(3 \times 5)} = \begin{array}{c|ccccc} \begin{array}{c} P \\ S \end{array} \backslash S & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1/4 & 1/20 & 3/20 & 3/20 & 11/20 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Во всех трех рассмотренных при-мерах число строк в статических матрицах меньше числа столбцов. Следовательно, все системы явля-ются статически неопределимыми

(ферма — один раз, ортогональ-ная рама — четыре раза и рама с наклонными стойками — дважды). При этом, поскольку матрицы A не содержат нулевых строк (их ранг равен числу строк) все системы геометрически неизменяемы.

1.4. Связь между деформациями и перемещениями. Матрица деформаций

Рассмотрим геометрическую сторону задачи, устанавливающую соотношения между деформациями элементов и перемещениями узлов системы, другими словами, запишем уравнения неразрывности деформаций. Для этого определим деформации e_i в каждом стержне от действия каждого из узловых перемещений z_k . При этом, задав какое-либо перемещение z_k считаем, что все остальные перемещения узлов равны нулю, т.е. на них наложены фиктивные связи, препятствующие этим перемещениям.

Определим для примера деформации всех шести стержней фермы, приведенной на рис. 1.1а, задавая по очереди все пять возможных перемещений узлов.

На рис. 1.12 показаны деформации стержней, вызванные всеми возможными перемещениями z_i (деформации не указанных здесь стержней от этих перемещений равны нулю). Положительные направления деформаций и перемещений показаны на диаграммах « $S - e$ » и « $P - z$ ».

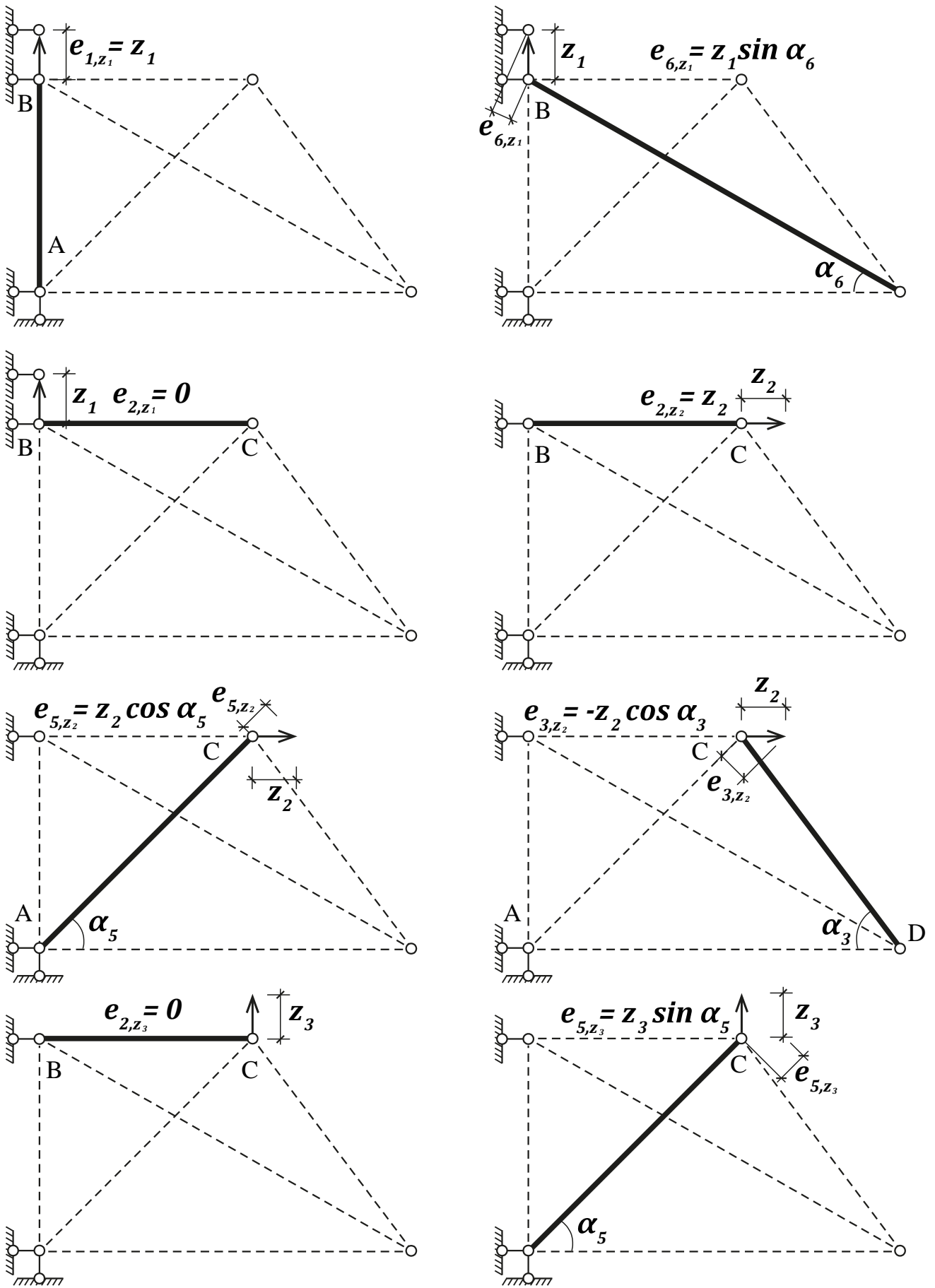
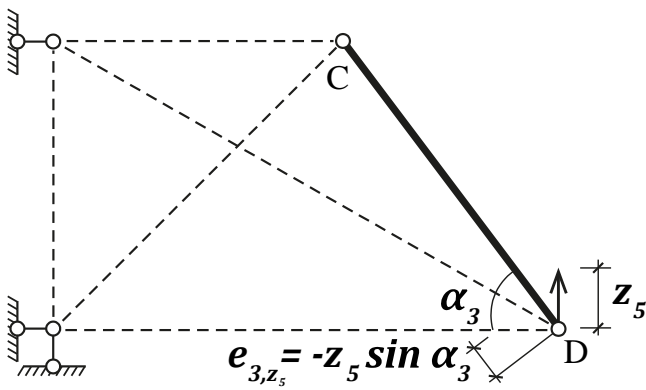
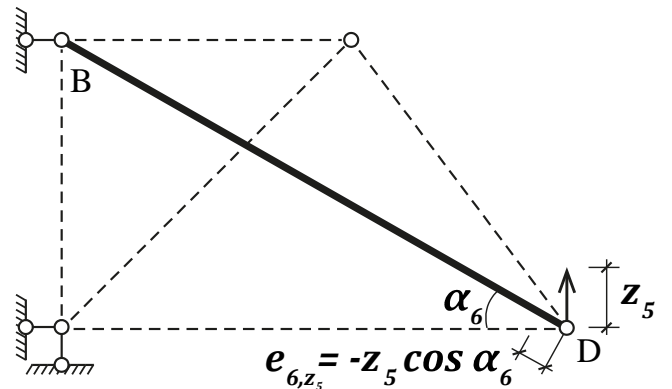
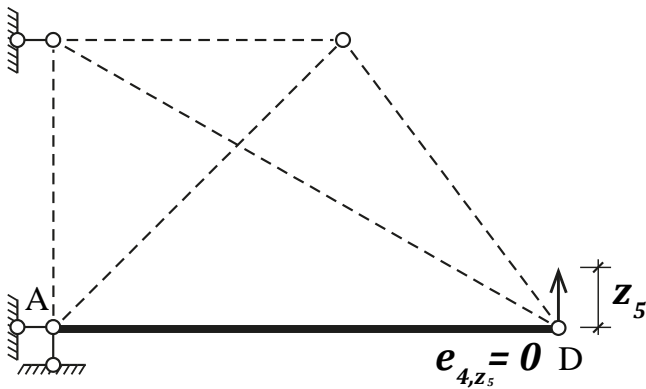
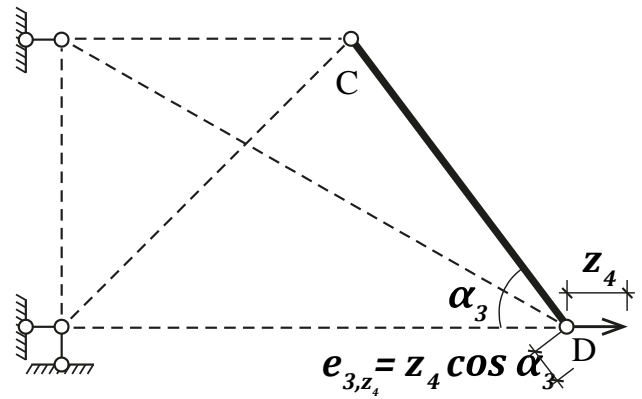
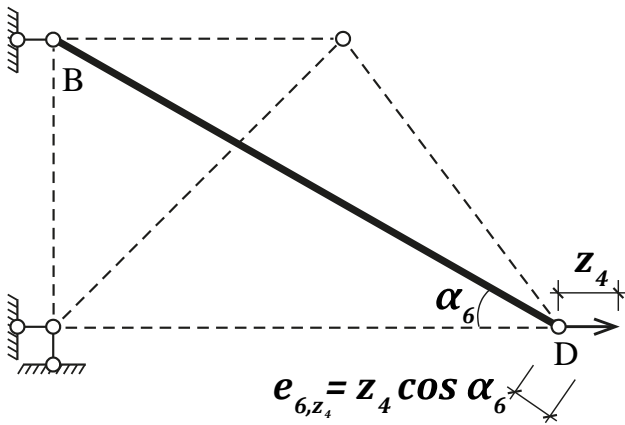
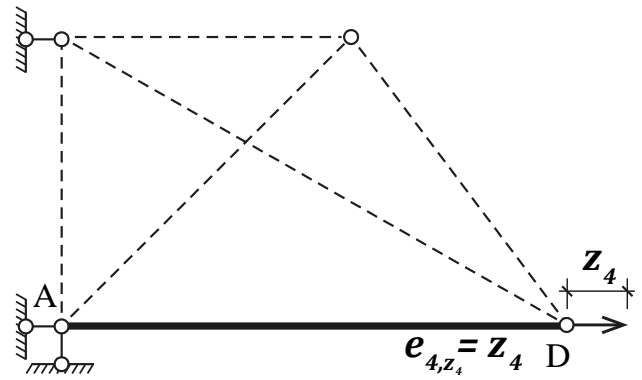
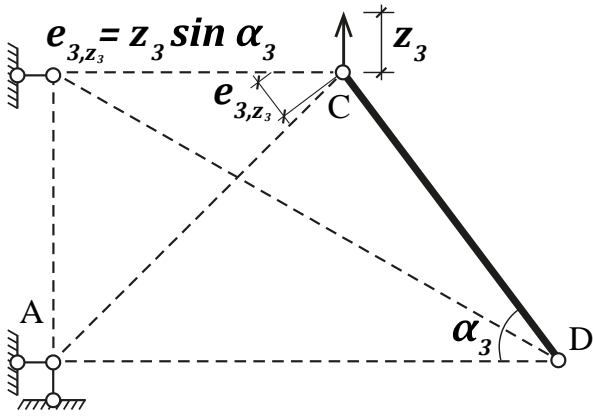


Рис. 1.12



Продолжение Рис. 1.12

$$\begin{aligned}
e_1 &= e_{1,z_1} + e_{1,z_2} + e_{1,z_3} + e_{1,z_4} + e_{1,z_5} = z_1, & e_2 &= e_{2,z_1} + e_{2,z_2} + e_{2,z_3} + e_{2,z_4} + e_{2,z_5} = z_2, \\
e_3 &= e_{3,z_1} + e_{3,z_2} + e_{3,z_3} + e_{3,z_4} + e_{3,z_5} = -z_2 \cdot \cos \alpha_3 + z_3 \sin \alpha_3 + z_4 \cos \alpha_3 - z_5 \sin \alpha_3, \\
e_4 &= e_{4,z_1} + e_{4,z_2} + e_{4,z_3} + e_{4,z_4} + e_{4,z_5} = z_4, \\
e_5 &= e_{5,z_1} + e_{5,z_2} + e_{5,z_3} + e_{5,z_4} + e_{5,z_5} = z_2 \cdot \cos \alpha_5 + z_3 \sin \alpha_5, \\
e_6 &= e_{6,z_1} + e_{6,z_2} + e_{6,z_3} + e_{6,z_4} + e_{6,z_5} = z_1 \cdot \sin \alpha_6 + z_4 \cos \alpha_6 - z_5 \sin \alpha_6
\end{aligned}$$

или в матричной форме $e = B \cdot z$, где $e_{(6 \times 1)} = [e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6]^T$ — вектор деформации элементов формы; $z_{(5 \times 1)} = [z_1; z_2; z_3; z_4; z_5]^T$ — вектор перемещений узлов фермы,

$$B_{(6 \times 5)} = \begin{array}{c|ccccc}
e \backslash z & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & -\cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
5 & 0 & \cos \alpha_5 & \sin \alpha_5 & 0 & 0 \\
6 & \sin \alpha_6 & 0 & 0 & \cos \alpha_6 & -\sin \alpha_6
\end{array}$$

Это деформационная матрица или матрица деформаций для фермы, изображенной на рис. 1.13а.

Матрица коэффициентов уравнений неразрывности деформаций, выражающих деформации e_i , элементов стержневой системы через перемещения z_k ее узлов, называется деформационной матрицей или матрицей деформаций. Она обозначается B и имеет размер $m \times n$,

где m — число строк матрицы B — показывает число неизвестных внутренних усилий S_i , которое равно числу деформаций элементов e_i , а n — число столбцов матрицы B — показывает число узловых перемещений z_k .

Покажем, каким образом может быть получена деформационная матрица для рамы, приведенной на рис. 1.1б.

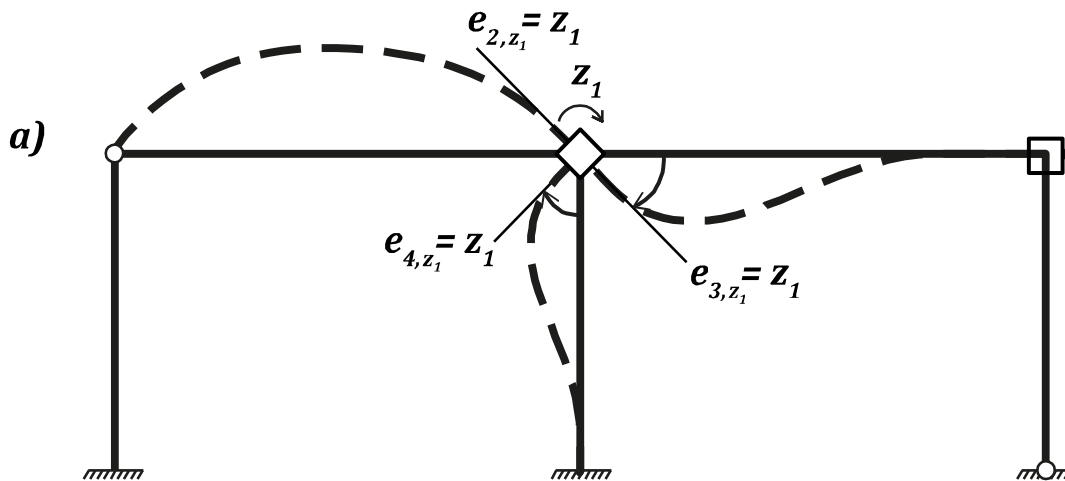
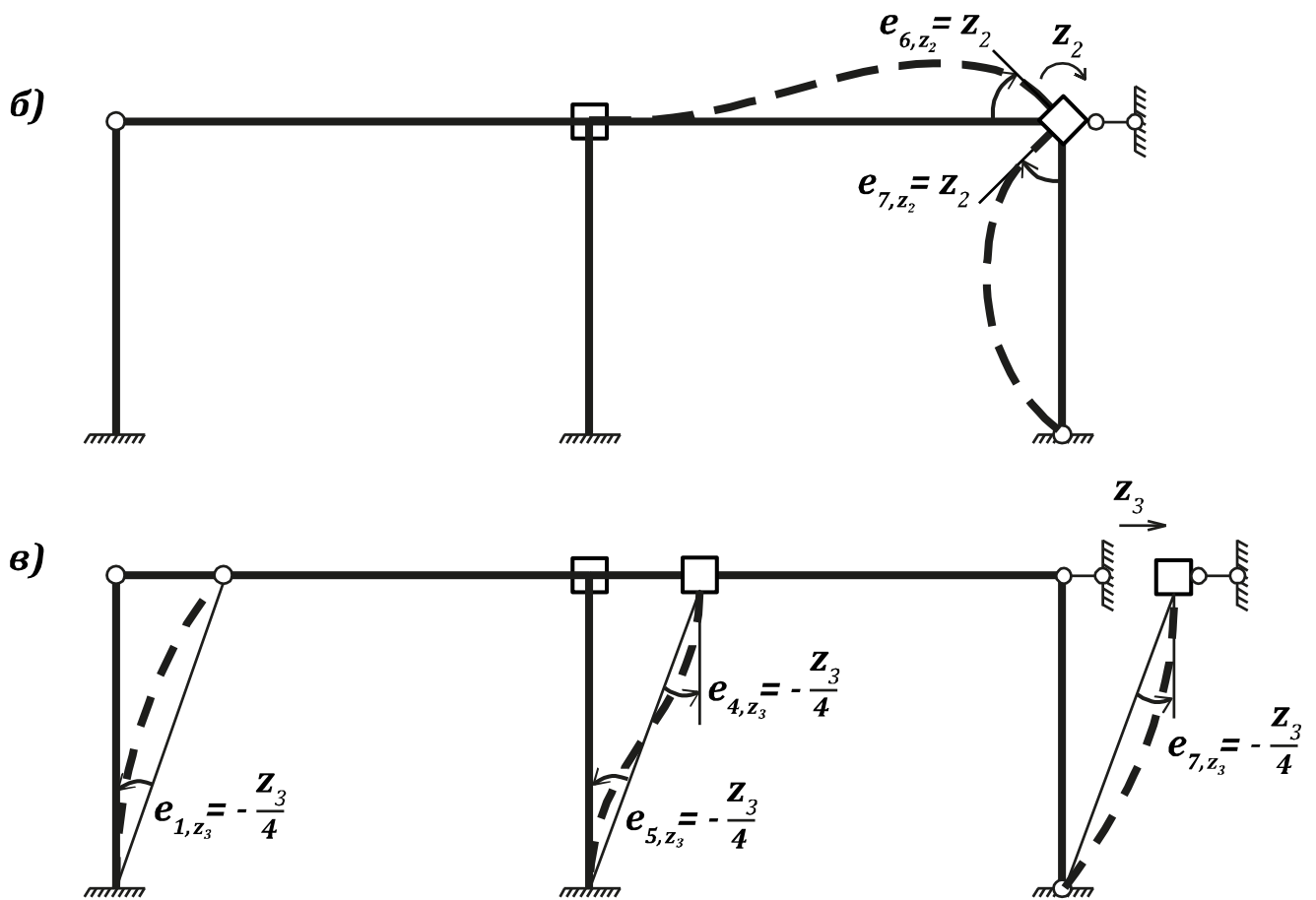


Рис. 1.13



Продолжени Рис. 1.13

Положительные направления перемещений и деформаций указаны на диаграммах « $P - z$ » и « $S - e$ ».

На рис. 1.13 приведены изогнутые оси стержней и показаны угловые деформации e_i их концевых сечений, вызванные последовательно каждым перемещением z_k узлов.

В результате суммирования деформаций от всех перемещений получим:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \sum_{i=1}^3 e_{1,z_i} = -\frac{z_3}{4}, e_2 = \sum_{i=1}^3 e_{2,z_i} = z_1, e_3 = \sum_{i=1}^3 e_{3,z_i} = z_1, e_4 = \sum_{i=1}^3 e_{4,z_i} = \\
 &= z_1 - \frac{z_3}{4}, e_5 = \sum_{i=1}^3 e_{5,z_i} = -\frac{z_3}{4}, e_6 = \sum_{i=1}^3 e_{6,z_i} = z_2, e_7 = \sum_{i=1}^3 e_{7,z_i} = z_2 - \frac{z_3}{4},
 \end{aligned}$$

или в матричной форме $e = B \cdot z$, где $e_{(7 \times 1)} = [e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6; e_7]^T$ – вектор деформации элементов ферм; $z_{(3 \times 1)} = [z_1; z_2; z_3]^T$ — вектор перемещений узлов фермы.

Деформационная матрица для рамы, изображенной на рис.1.1б:

$$B_{(7 \times 3)} = \begin{array}{c|ccc} & z & 1 & 2 & 3 \\ \hline e & & & & \\ \hline 1 & & 0 & 0 & -1/4 \\ \hline 2 & & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & & 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & & 1 & 0 & -1/4 \\ \hline 5 & & 0 & 0 & -1/4 \\ \hline 6 & & 0 & 1 & 0 \\ \hline 7 & & 0 & 1 & -1/4 \\ \hline \end{array}$$

1.5. Принцип двойственности статических и геометрических уравнений

Сравнив деформационные матрицы B для фермы и рамы со статическими матрицами A тех же систем, заметим, что они являются транспонированными одна по отношению к другой, т.е.

$$B = A^T \text{ или } A = B^T. \quad (1.3)$$

Это является следствием принципа возможных перемещений Лагранжа, в соответствии с которым для системы, находящейся в равновесии, суммарная работа всех внешних и внутренних сил на любом возможном перемещении равно нулю:

$$\delta V + \delta T = 0. \quad (1.4)$$

Доказательство этого принципа очевидно, если система находится в равновесии, то равнодействующая всех сил равна нулю, следовательно, и ее работы также равна нулю.

Вычислим возможную работу внешних сил P на возможных перемещениях δz (она положительна, т.к. силы и перемещения совпадают по направлению):

$$\delta V = P^T \delta z = (AS)^T \delta z = S^T A^T \delta z, \quad (1.5)$$

а также работу внутренних сил на возможных деформациях $\delta e = \delta(Bz) = B\delta z$ (она отрицательна, т.к. направления внутренних сил и деформации противоположны внутренним силам препятствуют деформациям):

$$\delta T = -S^T \delta e = -S^T B \delta z \quad (1.6)$$

После подстановки выражений (1.5) и (1.6.) в (1.4) получим соотношения (1.3), которые носят общий характер и в теории упругости называются **принципом двойственности статических и геометрических уравнений**.

В соответствии с этим принципом, уравнения неразрывности деформаций для любой упругой системы могут быть получены автоматически из уравнений равновесия простой заменой строк столбцами матрицы коэффициентов уравнений равновесия и наоборот.

Так, для рамы с наклонными стойками (рис.6.1в), транспонируя статическую матрицу A , получим деформационную матрицу B :

$$A_{(3 \times 5)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/20 & 3/10 & 3/10 & 11/20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{(5 \times 3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 0 \\ 1 & 1/20 & 0 \\ 1 & 3/10 & 0 \\ 0 & 3/10 & 1 \\ 0 & 11/20 & 1 \end{bmatrix}$$

На практике обычно сначала строят матрицу, получения которой осуществляется более просто (как правило, это статическая матрица A), вторая же получается транспонированием на основании принципа двойственности.

1.6. Физические соотношения. Матрица податливости и жесткости элемента. Элементная матрица внутренней жесткости стержневой системы.

Физические соотношения устанавливают связь между деформациями и внутренними усилиями.

Для элементов шарнирно-стержневых систем на основании закона Гука можно записать соотношение между деформациями элемента e_n и внутренними усилиями S_n :

$$e_n = \frac{S_n l_n}{E_n A_n}, \quad (1.7)$$

где $E_n \cdot A_n$ — продольная жесткость n -го стержня, l_n — его длина. Если обозначить:

$$\frac{l_n}{E_n A_n} = b_n, \quad (1.8)$$

то выражение (1.7) переписется в виде:

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{b}_n \cdot \mathbf{S}_n, \quad (1.9)$$

здесь \mathbf{b}_n – в общем случае матрица податливости n -го элемента, показывающая деформацию \mathbf{e}_n при действии единичного внутреннего усилия $\mathbf{S}_n = \mathbf{1}$.

Если решить уравнение (1.9) относительно \mathbf{S}_n , умножив его правую и левую часть слева на \mathbf{b}_n^{-1} , получим соотношение, выражающее внутреннее усилие в элементе через его деформацию:

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{b}_n^{-1} \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{e}_n. \quad (1.10)$$

Здесь $\mathbf{k}_n = \mathbf{b}_n^{-1}$ – матрица жесткости (или матрица внутренней жесткости) n -го элемента, показывающая, чему равно внутреннее усилие в элементе при единичной деформации.

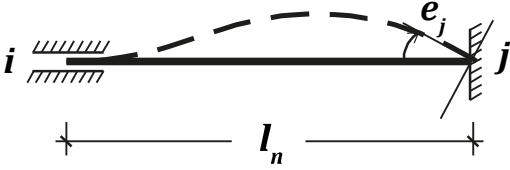
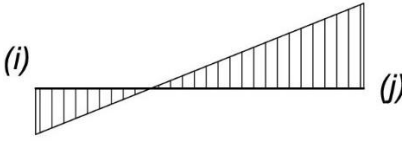
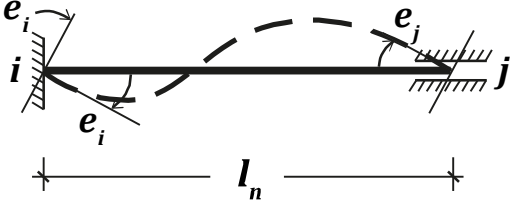
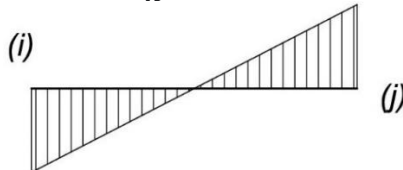
Для элементов шарнирно-стержневых (ферм) очевидно:

$$k_n = \frac{E_n \cdot A_n}{l_n}. \quad (1.11)$$

Для рамных систем матрицы жесткости могут быть легко получены с помощью таблицы единичных эпюр метода перемещений (см. табл. 4.2[1]). В таблице 1.1 представлены матричные формы записи матрицы жесткости для n -го элемента при соответствующих единичных деформациях.

Таблица 1.1

Деформированное состояние	Соответствующая эпюра моментов	Матрица жесткости n -го элемента
	<p style="text-align: right;">$S_j = 0$</p> <p style="text-align: left;">$S_i = 3 \frac{E_n J_n}{l_n} \cdot e_i$</p>	$k_n = \frac{E_n J_n}{l_n} [3]$
	<p style="text-align: right;">$S_j = 2 \frac{E_n J_n}{l_n} \cdot e_i$</p> <p style="text-align: left;">$S_i = 4 \frac{E_n J_n}{l_n} \cdot e_i$</p>	$k_n = \frac{E_n J_n}{l_n} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Деформированное состояние	Соответствующая эпюра моментов	Матрица жесткости n -го элемента
	$S_j = 4 \frac{E_n J_n}{l_n} \cdot e_j$  $S_i = 2 \frac{E_n J_n}{l_n} \cdot e_j$	$k_n = \frac{E_n J_n}{l_n} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
	$S_j = \frac{E_n J_n}{l_n} \cdot (2e_i + 4e_j)$  $S_i = \frac{E_n J_n}{l_n} \cdot (4e_i + 2e_j)$	$k_n = \frac{E_n J_n}{l_n} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Выражение для опорных моментов по эпюрам, представленным в таблице 1.1 в матричной форме имеют вид:

$$S_n = k_n \cdot e_n,$$

где $S_n = [S_i, S_j]$ – вектор внутренних усилий n -го элемента; $e_n = [e_i, e_j]^T$ – вектор его деформаций; k_n – матрица внутренней жесткости n -го элемента.

Для системы состоящей из m элементов, связь между усилиями и деформациями в матричной форме запишется в виде

$$S = k \cdot e,$$

где $S = [S_1 ; S_2, \dots S_m]^T$ – вектор внутренних усилий системы;

$e = [e_1 ; e_2, \dots e_m]^T$ – вектор деформаций системы, k – элементная матрица жесткости системы или матрица внутренней жесткости элементов системы.

Если концы каждого элемента системы на диаграмме $S - e$ обозначены последовательными номерами n и $n + 1$, то матрица k всей системы является квазидиагональной – элементами, расположенными на ее главной диагонали, являются матрицы внутренней жесткости k_n , элементов, а все остальные элементы равны нулю:

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_m \end{bmatrix}$$

Запишем для примера матрицы внутренней жесткости для различных систем. Так, для фермы, показанной на рис. 1.1а, при условии, что все стержни имеют постоянную жесткость $EА$, матрица k в соответствии с диаграммой $S - e$ (рис. 1.5а) имеет вид:

$$k = EA \cdot \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{65} \end{bmatrix}$$

Для рамы, показанной на рис. 1.1б, в соответствии с диаграммой $S - e$ (рис. 1.5б) при постоянной жесткости EJ всех стержней, поэлементная матрица жесткости запишется в виде:

$$k = EJ \cdot \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Для рамы с наклонными стойками при постоянной жесткости элементов EJ в соответствии с диаграммой $S - e$ (рис. 1.5в) поэлементная матрица жесткости запишется в следующем виде:

$$k = EJ \cdot \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

1.7. Основные расчетные формулы матричного метода перемещений. Матрица внешней жесткости стержневой системы

Запишем в матричной форме все три основные группы уравнений, отражающих три стороны задачи расчета упругих систем: статическую, геометрическую и физическую, полученные в предыдущих разделах:

$$1) \text{ уравнения равновесия.} \quad \mathbf{P} = \mathbf{AS}, \quad (1.12)$$

$$2) \text{ уравнения неразрывности деформаций} \quad \mathbf{e} = \mathbf{Bz} = \mathbf{A}^T \mathbf{z}, \quad (1.13)$$

$$3) \text{ обобщенный закон Гука} \quad \mathbf{S} = \mathbf{ke}. \quad (1.14)$$

На основании этих зависимостей легко могут быть получены формулы, выражающие внутренние усилия \mathbf{S} через внешние узловые нагрузки \mathbf{P} . При этом предварительно определяются перемещения \mathbf{z} узлов системы.

Для этого подставим (1.13) в (1.14), в результате получим

$$\mathbf{S} = \mathbf{kA}^T \mathbf{z}. \quad (1.15)$$

Нетрудно заметить, что произведение двух матриц \mathbf{kA}^T есть не что иное, как матрица единичных эпюр обычного метода перемещений (элементами ее i -го столбца являются усилия \mathbf{S}_j от $\mathbf{z}_i = \mathbf{1}$). После подстановки (1.15) в (1.12) получаем систему разрешающих уравнений относительно перемещений

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{z} \quad (1.16)$$

Если обозначить квадратичную матрицу $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}^T$ через \mathbf{K}

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{K}, \quad (1.17)$$

то уравнение (1.16) переписуется в виде:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Kz}. \quad (1.18)$$

Матрица \mathbf{K} называется матрицей внешней жесткости или матрицей жесткости всей конструкции в целом. Она выражает внешние узловые силы через узловые перемещения. Это матрица всегда квадратная, а следовательно, может иметь обратную \mathbf{K}^{-1} . Это возможно всегда для систем геометрически неизменяемых, у которых матрица \mathbf{K} всегда неособенная. Далее решим систему разрешающих уравнений (1.18), для чего умножаем левую и правую части слева на \mathbf{K}^{-1}

$$\mathbf{z} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{P} = [\mathbf{AkA}^T]^{-1} \cdot \mathbf{P} \quad (1.19)$$

или обозначив $\mathbf{f} = \mathbf{K}^{-1} = [\mathbf{AkA}^T]^{-1}$, получим: (1.20)

$$\mathbf{z} = \mathbf{fP}, \quad (1.21)$$

где f – матрица внешней податливости или матрица податливости конструкции в целом; она выражает узловые перемещения системы через внешние узловые силы. Нетрудно показать, что матрицы K и f всегда симметричны, т.е.

$$K = f^T, f = K^T. \quad (1.22)$$

Симметрия матрицы K является следствием теоремы о взаимности реакций, а симметрия матрицы f – следствием теоремы о взаимности перемещений.

Следует отметить, что неособенность матрицы жесткости неизменяемой системы может быть использована для проверки стержневых систем на геометрическую изменяемость. Так, если для какой-либо системы построена матрица внешней жесткости K и $|K| \neq 0$, то исходная система – неизменяемая. Если же $|K| = 0$, то она изменяема.

На основании соотношений (1.19) или (1.21) мы можем найти неизвестные перемещения узлов системы по трем матрицам: статической матрице A , матрице внутренней жесткости системы k и вектору внешних сил P , получение которых, как было показано, не представляет особых трудностей.

Для нахождения внутренних усилий S необходимо найденные перемещения подставить z в соотношение (1.15):

$$S = kA^T z = kA^T \cdot fP = kA^T [AkA^T]^{-1} P. \quad (1.23)$$

При расчете на внеузловую нагрузку для определения расчетных усилий к полученному результату (1.23) необходимо добавить усилия S_0 из первого состояния:

$$S_{ок} = S + S_0 = kA^T z + S_0 \quad (1.24)$$

При расчете этим методом на n вариантов загрузки все расчетные формулы остаются без изменений, только P и S будут уже не векторами, а матрицами, содержащими по n столбцов.

Следует отметить, что получение обратной матрицы K требует большего числа вычислений, чем прямое решение системы уравнений. Доказано, что имеет смысл обращать матрицу лишь при большом числе вариантов загрузок: когда отношение числа вариантов загрузки n к порядку системы уравнений m превышает 0.6 , т.е. $(n/m) > 0.6$.

Так, для рамы (рис. 1.1б) с тремя степенями свободы ($m = 3$) целесообразно получить обратную матрицу K^{-1} , т.к. $(n/m) = 1 > 0.6$, а при расчете на все воздействия одновременно ($n = 1$) лучше просто решить систему уравнений, так как $(n/m) = 0.33 < 0.6$.

1.9. Примеры расчета

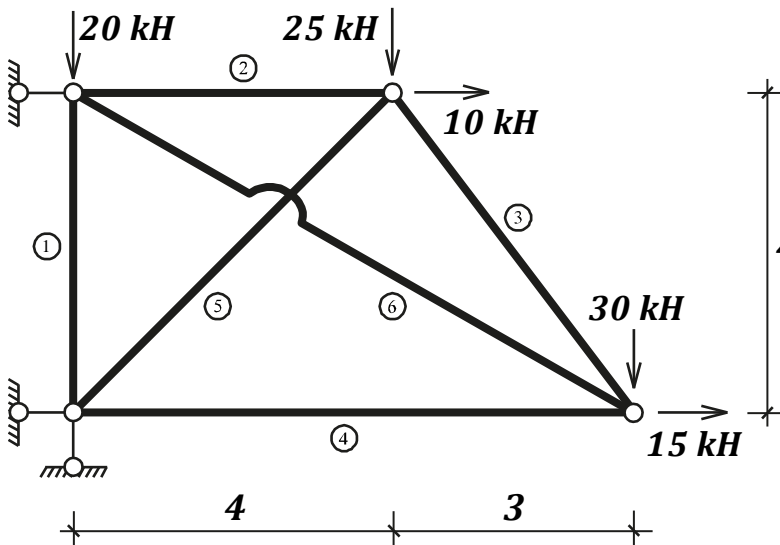


Рис. 1.14

Пример 1. Рассчитаем матричным методом перемещений шарнирно-стержневую систему (рис. 1.14).

Диаграммы « $P - z$ » и « $S - e$ » изображены соответственно на рис. 1.1а и 1.5а.

Все необходимые для расчета этой фермы исходные матрицы были уже получены нами ранее:

1. Вектор внешних сил:

$$P = [-20; 10; -25; 15; -30]^T$$

2. Статическая матрица, после подстановки в нее геометрии фермы:

$$\cos \alpha_5 = \frac{4}{\sqrt{32}} = 0.707, \sin \alpha_5 = 0.707, \sin \alpha_6 = \frac{4}{8.06} = 0.496$$

$$\cos \alpha_6 = \frac{7}{8.06} = 0.868, \cos \alpha_3 = \frac{3}{5} = 0.6, \sin \alpha_3 = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.496 \\ 0 & 1 & -0.6 & 0 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 1 & 0 & 0.868 \\ 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & -0.496 \end{bmatrix}$$

3. Элементная матрица внутренней жесткости фермы:

$$k = EA \cdot \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.143 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.177 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.124 \end{bmatrix}$$

По этим трем матрицам может быть получено окончательное решение задачи.

Найдем сначала матрицу единичных усилий kA^T :

$$kA^T = EA \cdot \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.12 & 0.16 & 0.12 & -0.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0.143 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0.062 & 0 & 0 & 0.108 & -0.062 \end{bmatrix}$$

После чего вычислим матрицу внешней жесткости K фермы:

$$K = AkA^T = EA \cdot \begin{bmatrix} 0.281 & 0 & 0 & 0.053 & -0.031 \\ 0 & 0.41 & 0.008 & -0.072 & 0.096 \\ 0 & 0.008 & 0.216 & 0.096 & -0.128 \\ 0.053 & -0.072 & 0.096 & 0.308 & -0.149 \\ -0.031 & 0.096 & -0.128 & -0.149 & 0.159 \end{bmatrix}$$

Решив систему уравнений $K \cdot z = P$, получим вектор перемещений

$$z = \frac{1}{EA} = [-151.184; 226.053; -648.38; -174.845; -1043.26]^T.$$

Для нахождения вектора усилий в стержнях фермы необходимо матрицу kA^T умножить на вектор z :

$$S = kA^T \cdot Z = EA \cdot \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.12 & 0.16 & 0.12 & -0.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0.143 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0.062 & 0 & 0 & 0.108 & -0.062 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} -151.184 \\ 226.053 \\ -648.38 \\ -174.845 \\ -1043.26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37.796 \\ 56.513 \\ 15.073 \\ -25.003 \\ -52.85 \\ 36.047 \end{bmatrix}.$$

Для проверки полученного решения умножаем вектор S слева на статическую матрицу A . В результате получим:

$$A \cdot S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.496 \\ 0 & 1 & -0.6 & 0 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 1 & 0 & 0.868 \\ 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & -0.496 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -37.796 \\ 56.513 \\ 15.073 \\ -25.003 \\ -52.85 \\ 36.047 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19.917 \\ 10.105 \\ -25.306 \\ 15.33 \\ -29.93 \end{bmatrix},$$

а должны были получить вектор внешних сил $P = [-20; 10; -25; 15; -30]$. При сравнении нетрудно установить, что погрешность расчета не более 2%.

Пример 2. Рассчитаем матричным методом перемещений на три вида загрузения (P, t, c) раму, изображенную на рис. 1.15.

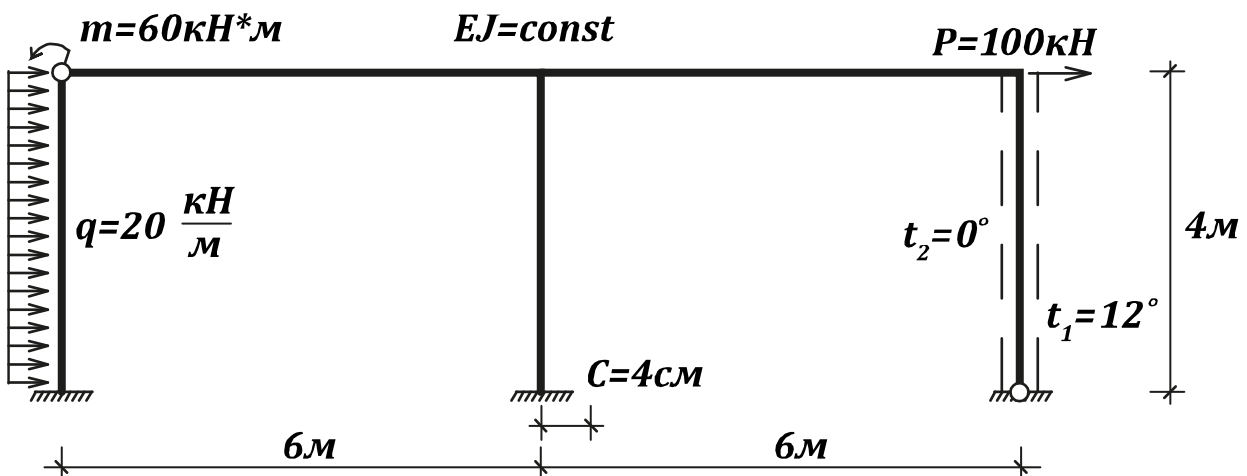


Рис. 1.15

Выпишем, необходимые для решения, матрицы, полученные в предыдущих параграфах.

1. Матрица внешних воздействий:

$$P = \begin{bmatrix} 30 & -4EJ\alpha & -0.015EJ \\ 0 & -94EJ\alpha & 0 \\ 130 & 22.5EJ\alpha & 0.0075EJ \end{bmatrix}$$

2. Статическая матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0 & -0.25 & -0.25 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}$$

3. Матрица внутренней жесткости

$$k = EJ \cdot \begin{bmatrix} 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.667 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix}$$

Умножив k справа на A^T , получим матрицу единичных усилий kA^T :

$$kA^T = EJ \cdot \begin{bmatrix} 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.667 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.25 \end{bmatrix} = EJ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.188 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & -0.125 \\ 1.5 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0.333 & -0.167 \\ 0 & 0.677 & -0.083 \\ 0 & 0.75 & -0.188 \end{bmatrix}$$

Вычислим теперь матрицу внешней жесткости « K » всей системы, представляющую собой матрицу коэффициентов r_{ik} при неизвестных z_i ; системы канонических уравнений метода перемещений:

$$K = AkA^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -0.25 & 0 & 1 & -0.25 & -0.25 & 0 & -0.25 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot EJ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.188 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & -0.125 \\ 1.5 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0.333 & -0.167 \\ 0 & 0.677 & -0.083 \\ 0 & 0.75 & -0.188 \end{bmatrix} = EJ \begin{bmatrix} 3.5 & 0 & -0.375 \\ 0 & 1.417 & -0.271 \\ -0.375 & -0.271 & 0.198 \end{bmatrix}$$

Для получения решения задачи от трех воздействий можно трижды решить систему уравнений или построив обратную матрицу « K » умножить ее справа на матрицу « P ». При этом получим матрицу перемещений z .

$$z = K^{-1} \cdot P = \frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} 143.189 & -3.033E J\alpha & 0.002E J \\ 240.069 & -58.89E J\alpha & 0.011E J \\ 1256.43 & 38.976E J\alpha & 0.056E J \end{bmatrix}$$

Умножив матрицу kA^T справа на матрицу z , получим матрицу внутренних усилий S от узловой эквивалентной нагрузки. Элементами ее столбцов являются изгибающие моменты в семи сечениях (см. диаграмму « $S - e$ », показанную на рис. 1.5б), соответственно от силового воздействия, изменения температуры и осадки опор.

$$S = kA^T \cdot z = EJ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.188 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & -0.125 \\ 1.5 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0.333 & -0.167 \\ 0 & 0.677 & -0.083 \\ 0 & 0.75 & -0.188 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} 143.189 & -3.033E J\alpha & 0.002E J \\ 240.069 & -58.89E J\alpha & 0.011E J \\ 1256.43 & 38.976E J\alpha & 0.056E J \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -235.581 & -7.308E J\alpha & -0.01E J \\ 71.595 & 1.517E J\alpha & 0.001E J \\ 57.73 & -0.322E J\alpha & -0.004E J \\ -99.324 & -5.194E J\alpha & -0.012E J \\ -129.567 & -26.11E J\alpha & 0.006E J \\ 55.528 & -42.524E J\alpha & 0.002E J \\ -55.528 & -51.476E J\alpha & -0.002E J \end{bmatrix}$$

Для проверки полученного решения умножим вектор S слева на статическую матрицу A и результат сравним матрицей P .

Из сравнения видно, что наибольшая погрешность не превышает долей процента.

$$A \cdot S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -0.25 & 0 & 1 & -0.25 & -0.25 & 0 & -0.25 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} -235.581 & -7.308E J\alpha & -0.01E J \\ 71.595 & 1.517E J\alpha & 0.001E J \\ 57.73 & -0.322E J\alpha & -0.004E J \\ -99.324 & -5.194E J\alpha & -0.012E J \\ -129.567 & -26.11E J\alpha & 0.006E J \\ 55.528 & -42.524E J\alpha & 0.002E J \\ -55.528 & -51.476E J\alpha & -0.002E J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 4E J\alpha & -0.15E J \\ 0 & -94E J\alpha & 0 \\ 130 & 22.522E J\alpha & 0.007E J \end{bmatrix}$$

Для получения расчетных усилий $S_{ок}$ полученному результату S необходимо добавить матрицу усилий S_o , от внеузловой нагрузки (из первого состояния).

$$S_o = \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \\ 0 & 4EJ\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0.015EJ \\ 0 & 0 & 0.015EJ \\ 0 & 4EJ\alpha & 0 \\ 0 & 90EJ\alpha & 0 \end{bmatrix} \quad S_{ок} = S + S_o = \begin{bmatrix} -275.581 & -7.308EJ\alpha & -0.01EJ \\ 41.595 & 1.517EJ\alpha & 0.001EJ \\ 57.73 & -3.678EJ\alpha & -0.004EJ \\ -99.324 & -5.194EJ\alpha & 0.003EJ \\ -129.567 & -26.11EJ\alpha & 0.009EJ \\ 55.528 & -38.524EJ\alpha & 0.002EJ \\ -55.528 & 38.524EJ\alpha & -0.002EJ \end{bmatrix}$$

На рис. 1.16 показаны окончательные эпюры моментов, построенные в соответствии с матрицей $S_{ок}$. При построении эпюры $M_{ок}^P$ (см.рис.1.17а) от силового воздействия по первому столбцу матрицы $S_{ок}$ на загруженных стержнях к прямолинейным эпюрам от узловых моментов следует добавить грузовые эпюры моментов от внешней нагрузки, приложенной к этим стержням, построенные в предположении шарнирного опирания их концов (для статически определимой балки - см.рис.1.17)

Окончательные эпюры должны быть подвергнуты статической и кинематической проверке. По эпюрам моментов традиционным образом могут быть построены эпюры поперечных и продольных сил.

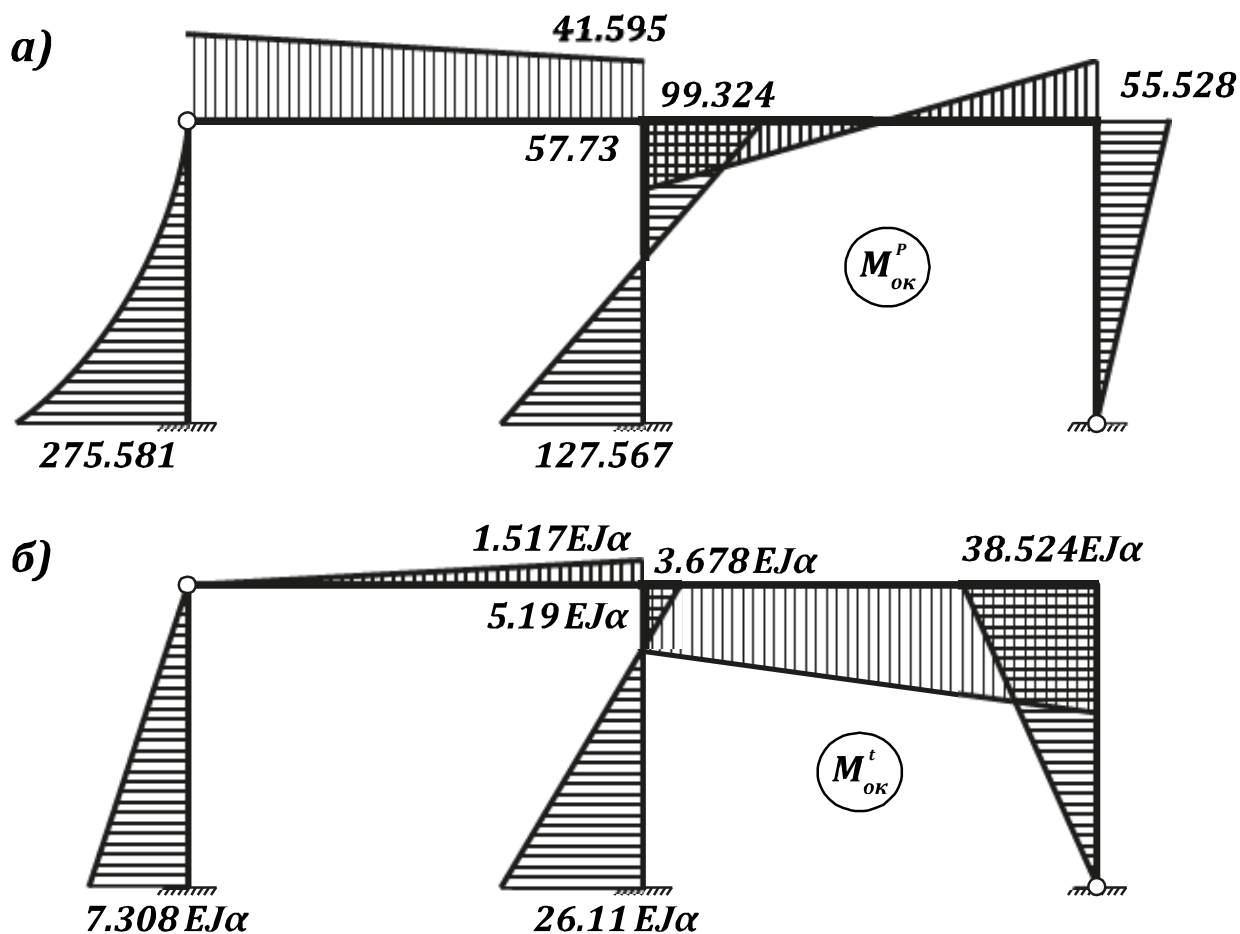
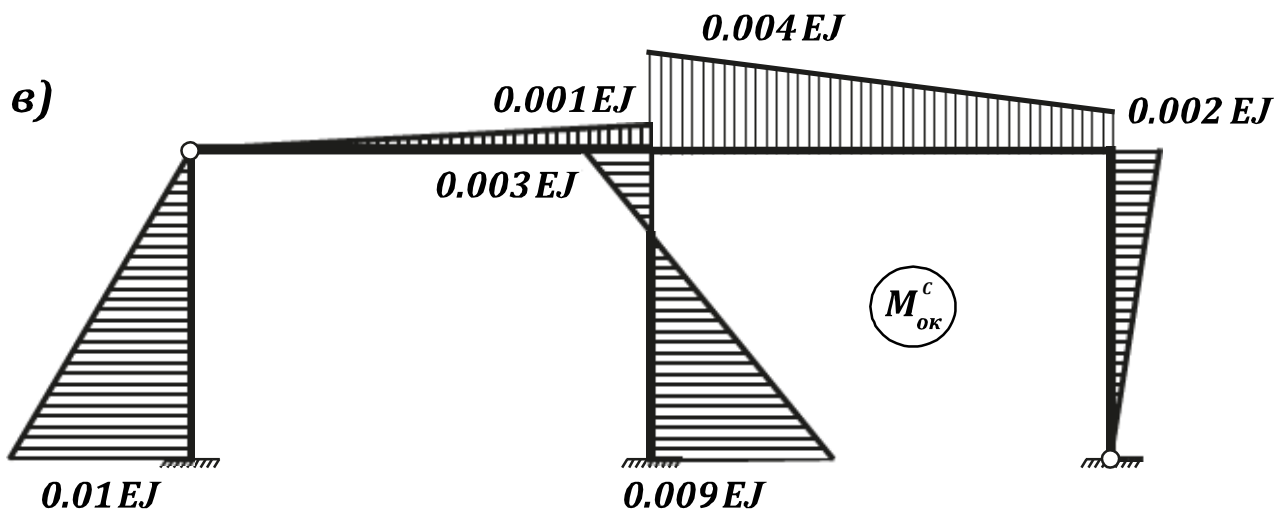


Рис. 1.16



Продолжение Рис. 1.16

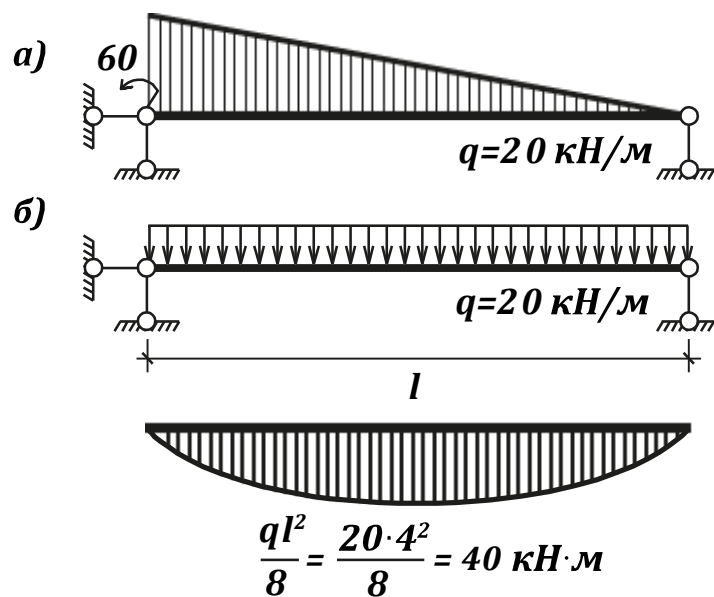


Рис. 1.17

Пример 3.

Применим матричный метод перемещений к расчету рамы с наклонными стойками (рис. 1.18).

Выпишем необходимые для расчета матрицы, полученные в предыдущих параграфах:

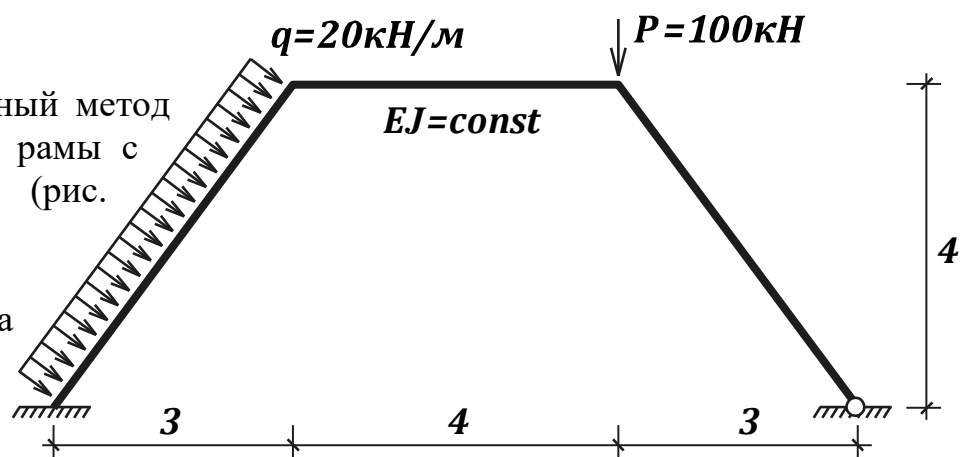


Рис. 1.18

1. Матрица внешних воздействий:

$$P = \left[\frac{125}{3}; -10; 0 \right]^T.$$

2. Статическая матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.05 & 0.3 & 0.3 & 0.55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Матрица внутренней жесткости:

$$k = EJ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Умножив k справа на A^T , получим матрицу kA^T :

$$K = AkA^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.05 & 0.3 & 0.3 & 0.55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4 & -0.18 & 0 \\ 0.8 & -0.06 & 0 \\ 1 & 0.45 & 0.5 \\ 0.5 & 0.45 & 1 \\ 0 & 0.33 & 0.6 \end{bmatrix} =$$

$$= EJ \begin{bmatrix} 1.8 & 0.39 & 0.5 \\ 0.39 & 0.4935 & 0.78 \\ 0.5 & 0.78 & 1.6 \end{bmatrix}$$

Далее получим матрицу внешней жесткости « K » всей системы:

$$k \cdot A^T = EJ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -0.25 & 0 \\ 1 & 0.05 & 0 \\ 1 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0.55 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= EJ \begin{bmatrix} 0.4 & -0.18 & 0 \\ 0.8 & -0.06 & 0 \\ 1 & 0.45 & 0.5 \\ 0.5 & 0.45 & 1 \\ 0 & 0.33 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Решив систему уравнений $K \cdot z = P$ получим вектор перемещений:

$$z = \frac{1}{EJ} [-19.763; -62.779; 36.781]$$

Для нахождения вектора внутренних усилий необходимо матрицу kA^T умножить справа на вектор z :

$$S = kA^T \cdot z = EJ \begin{bmatrix} 0.4 & -0.18 & 0 \\ 0.8 & -0.06 & 0 \\ 1 & 0.45 & 0.5 \\ 0.5 & 0.45 & 1 \\ 0 & 0.33 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} -19.763 \\ -62.779 \\ 36.781 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.395 \\ -12.044 \\ -29.623 \\ -1.351 \\ 1.351 \end{bmatrix}.$$

Для проверки полученного решения умножим вектор S слева на статическую матрицу A . В результате получим:

$$A \cdot S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.05 & 0.3 & 0.3 & 0.55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3.395 \\ -12.044 \\ -29.623 \\ -1.351 \\ 1.351 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41.667 \\ -10 \\ -4.05 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

А должны были и получили $P = [41.667; -10; 0]^T$.

Для получения расчетных усилий $S_{ок}$, к полученному результату S необходимо добавить матрицу усилий S_o , от внеузловой нагрузки:

$$S_o = \left[-\frac{125}{3}; \frac{125}{3}; 0; 0; 0 \right]^T$$

$$S_{ок} = S + S_o = \begin{bmatrix} 3.395 \\ -12.044 \\ -29.623 \\ -1.351 \\ 1.351 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -41.667 \\ 41.667 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38.272 \\ 29.623 \\ -29.623 \\ -1.351 \\ 1.351 \end{bmatrix}$$

На рис. 1.19 показана окончательная эпюра моментов, построенная по логике, поясненной на предыдущем примере.

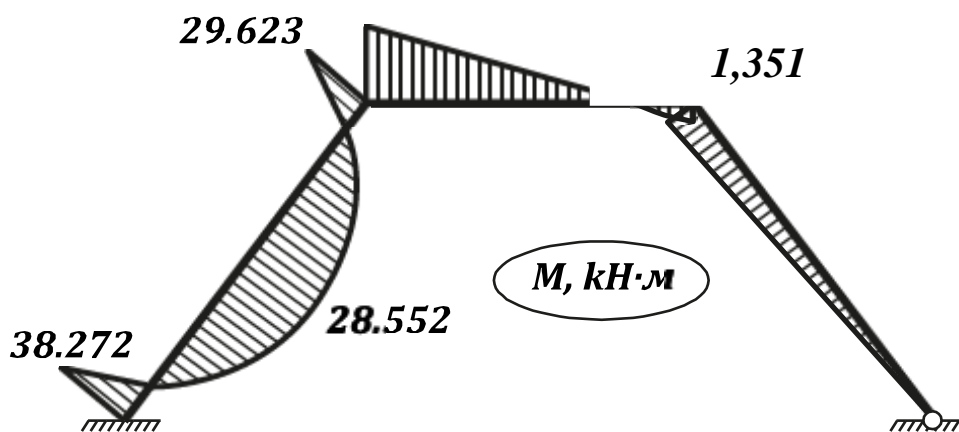


Рис. 1.19

2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

2.1. Сущность метода конечных элементов

Метод конечных элементов - численный метод решения дифференциальных уравнений, описывающих физические и инженерные задачи, в частности, задачи расчета сооружений.

Название этого метода в некоторой мере предопределяет его сущность, так как при его использовании конструкция тем или иным путем разбивается на отдельные элементы достаточной конфигурации, напряженно-деформированное состояние которых предварительно подробно исследуется и может считаться известным. При этом для каждого элемента выполняются все три группы уравнений: статические уравнения равновесия, геометрические уравнения неразрывности деформаций или перемещений и физические, например, закон Гука. Другими словами построена матрица внешней жесткости K_m или податливости K_m^{-1} .

Так как стержневые системы могут быть разбиты на элементы в виде прямолинейных или криволинейных (для расчета арок) стержней с различными условиями их закрепления по концам. Вид элемента характеризуется *локальными* степенями свободы концевых сечений элементов. Например, для плоских систем такими элементами являются стержни, показанные на рисунке 2.1. Здесь (рис. 2.1а) приведен ферменный элемент, имеющий четыре степени свободы в соответствии с числом наложенных на него связей, там же (рис. 2.1б и в) представлены балочный или рамный элементы. Первый из них, жестко защемленный по концам, имеет шесть степеней свободы, второй элемент с комбинированными условиями закрепления концов обладает пятью степенями свободы.



Рис. 2.1 Элементы плоских стержневых систем

Тонкостенные пространственные системы, состоящие из пластин и оболочек, разбиваются на треугольные, прямоугольные или какой-либо другой формы элементы, работающие на изгиб поперечный или в своей плоскости, в зависимости от того, какая задача решается.

На рис. 2.2а приведены примеры простых элементов для решения плоской задачи теории упругости с узлами в угловых точках: треугольные и четырехугольные элементы, имеющие шесть и восемь степеней свободы соответственно. На рис. 2.2б показаны улучшенные элементы для решения той же задачи с узлами по границам и в углах элементов соответственно с двенадцатью и шестнадцатью степенями свободы.

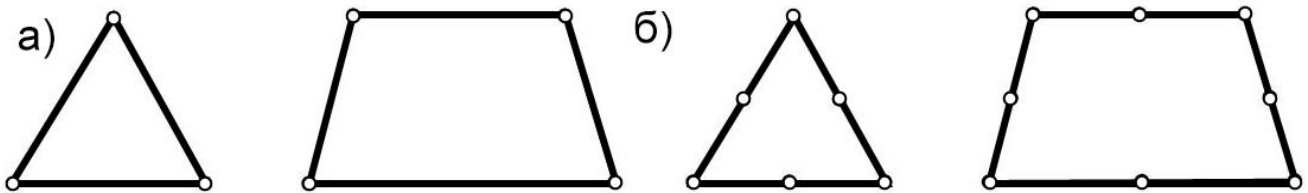


Рис. 2.2 Элементы плоских стержневых систем

Массивные конструкции могут быть разбиты на элементы в виде тетраэдров, параллелепипедов или каких-либо иных форм, из которых, как из кирпичиков, может быть собрана конструкция.

На рис. 2.3а приведен пример таких элементов с двенадцатью, а на рис. 2.3б с двадцатью четырьмя степенями свободы.

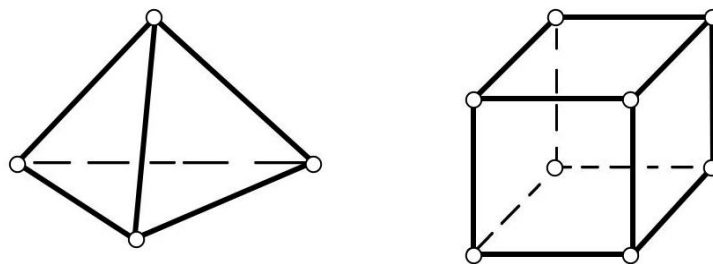


Рис. 2.3 Элементы для расчета пространственных массовых систем

Все конечные элементы соединяются друг с другом в узлах. При этом в каждом узле, а следовательно для всей системы в целом, удовлетворяются условия равновесия и неразрывности перемещений.

Все внешние силы считаются приложенными в узлах по направлению их возможных перемещений - *глобальных степеней свободы*. Внеузловая нагрузка предварительно приводится к эквивалентной узловой.

Для всех узлов рассматриваемой системы вычисляются перемещения и внутренние усилия.

Такой подход является единственным как для стержневых систем, так и для континуальных систем (пластинок, оболочек, массивов). Поэтому метод конечных элементов (МКЭ) позволяет рассчитывать все реальные конструкции, в которых сочетаются указанные элементы.

Поскольку для стержневых систем полученная совокупность элементов в точности отражает исходную расчетную схему, МКЭ является точным методом расчета этих систем (естественно, в пределах точности гипотез, положенных в основу расчета этих систем).

Иное дело, когда рассматриваются континуальные системы. При рассмотрении самих конечных элементов (при определении их напряженно-деформированного состояния через узловые перемещения или усилия) этих систем, а также при составлении соответствующих условий неразрывности для совокупности элементов не представляется возможным получить точные соотношения, в связи с чем МКЭ приобретает вариационный смысл, т.е. является приближенным.

Для уточнения расчета можно брать улучшенные элементы с большим числом узловых точек, либо уменьшать размеры элементов, что приводит к увеличению их числа и, следовательно, к увеличению числа точек (узлов) для которых определяются перемещения и усилия.

При реализации МКЭ наиболее широкое распространение получили идеи метода перемещений, когда за неизвестные расчета принимаются перемещения узлов, хотя имеются работы, где используются идеи методов сил и смешанного. Предпочтение методу перемещений отдано в основном по двум причинам: во-первых, при построении вспомогательного напряженного состояния из многоэлементной конструкции легче получить кинематически определимую систему, нежели статически определимую. Во-вторых, при расчете методом перемещений матрица коэффициентов при неизвестных разрешающей системы уравнений – матрица внешней жесткости K совокупности элементов – составляется достаточно просто из матриц внешней жесткости отдельных элементов; часто она получается ленточной и ее построение может быть поручено машине.

МКЭ появился в начале 50-х годов, когда сотрудники Калифорнийского университета Турнер, Клафф, Мартин и Топ впервые применили метод расчета континуальных систем, разбив их на отдельные элементы, дав приближенное описание жесткостных свойств этих элементов и, наконец, составив ансамбль элементов, приводящих к решению поставленной задачи в перемещениях. Публикации этих авторов 1956 года стимулировала многочисленные исследования, в результате чего появилось множество работ, посвященных решению различных задач строительной механики этим методом. Важнейший теоретический вклад в развитие метода был сделан в 1963 г. Р. Меллошем,

который показал, что МКЭ по существу является вариацией хорошо известного метода Рунца. Дальнейшими исследованиями было установлено, что МКЭ, связанный с процедурой минимизации некоторого функционала, с успехом может быть применен к решению других инженерных задач, например, таких как задачи теплопроводности, гидродинамики, динамики горения плазмы и многих других. Из работ отечественных ученых следует отметить в первую очередь труды А. Ф. Смирнова, А.В. Александрова, Н.Н. Шапошникова, Б.Я. Лащеникова, А.П. Филина, Л.А. Розина, внесших значительный вклад в развитие МКЭ применительно к расчету строительных конструкций, а также в создание русской школы МКЭ. В настоящее время этот метод получил широчайшее распространение.

Поскольку применение МКЭ для решения практических задач приводит к операциям с большим числом элементов, а следовательно, с системам линейных алгебраических уравнений высокого порядка, использование компьютеров, при этом, является необходимым.

2.2. Построение матрицы жесткости стандартных стержневых элементов в глобальной системе координат

Основным этапом расчета МКЭ является получение, так называемой [2], матрицы внешней жесткости или **матрицы жесткости стандартного элемента**. Существует несколько подходов к построению этих матриц. При расчете стержневых систем мы рассмотрим один из них (точный), основанный на использовании формулы, полученной в предыдущей главе при рассмотрении матричного метода перемещений расчета стержневых систем:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}^T \quad (2.1)$$

Чтобы построить матрицу жесткости того или иного элемента предварительно должна быть получена его статическая матрица \mathbf{A} и записана матрица внутренней жесткости. Для этого необходимо привести диаграммы и « $\mathbf{P} - \mathbf{z}$ » « $\mathbf{S} - \mathbf{e}$ » стандартных элементов, на которых указываются местные или локальные степени свободы элементов, возможные перемещения их концевых сечений и соответствующие им возможные узловые нагрузки, а также неизвестные внутренние усилия и соответствующие им деформации.

Очевидно, в плоских системах шарнирный узел имеет две степени свободы (два линейных перемещения), жесткий обладает тремя степенями свободы (поворот и два линейных перемещения). Следовательно, ферменный элемент, шарнирно опертой по концам имеет четыре локальные степени свободы, изгибаемые же элементы балок и рам имеет шесть степеней свободы при жестком защемлении концов стержня и пять степеней свободы при одном шарнирном

конце. В дальнейшем будем называть эти элементы соответственно балочный защемленный и балочный комбинированный.

В ферменных элементах возникают только продольные усилия. Соответствующими им деформациями являются продольные деформации удлинения или укорочения элемента. В изгибаемых элементах при узловой нагрузке в общем случае неизвестными внутренними усилиями являются продольные усилия и моменты в защемленных сечениях. Перерезывающие силы могут быть выражены через концевые моменты. Деформациями соответствующими искомым усилиям в балочных элементах являются продольные деформации и повороты сечений в защемлениях.

При расчете несвободных рам (не имеющих линейных смещений узлов), также неразрезных балок можно ограничиться рассмотрением только угловых деформаций и соответствующих им изгибающих моментов. Продольные усилия при этом могут быть определены по эпюре перерезывающих сил Q , как это делалось в матричном методе перемещений.

Ограничимся рассмотрением трех основных элементов, показанных на рис. 2.1, необходимых для расчета плоских стержневых систем с прямолинейными или ломанными стержнями: двух балочных элементов для расчета несвободных рам и неразрезных балок, также ферменного элемента.

В табл. 2.1 приведены диаграммы « $P - z$ » и « $S - e$ » для всех указанных элементов в единой глобальной системе координат $xу$. При этом считаем, что стержень ij , длиной l , с жесткостями при растяжении-сжатии и изгибе соответственно EA , EJ произвольно ориентирован в плоскости $xу$.

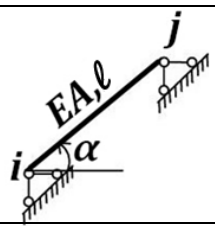
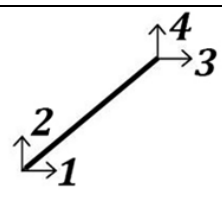
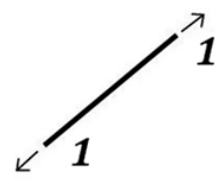

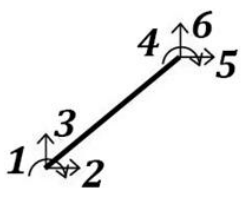
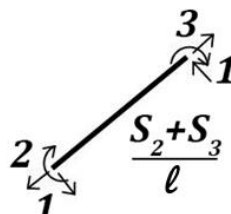

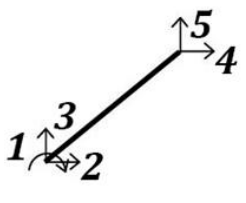
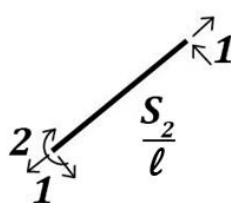
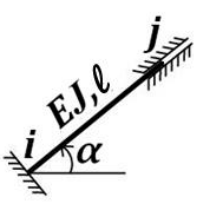
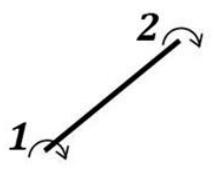
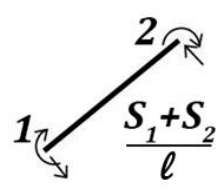
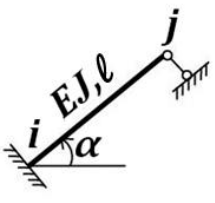
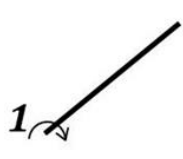
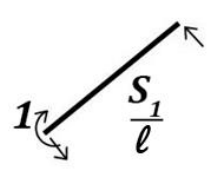
Если координаты узлов начала стержня i и его конца j обозначить соответственно через x_i y_i x_j y_j , то геометрические характеристики могут быть определены по формулам:

$$\Delta x = x_j - x_i, \Delta y = y_j - y_i, l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \sin \alpha = \frac{\Delta y}{l}, \cos \alpha = \frac{\Delta x}{l} \quad (2.2)$$

Условимся в дальнейшем для балочного комбинированного элемента с одним шарнирным концом располагать начало элемента i в защемленном конце. Для остальных элементов любое из двух концевых сечений может быть принято за начальное i , оно только обязательно должно быть указано на схеме всей системы, например, стрелкой, направленной из начала в конец элемента.

Теперь можно приступить к построению матриц внешней жесткости K^m стандартных элементов.

Таблица 2.1

№ п/п	Типы стержневых элементов	Диаграмма « $P - z$ »	Диаграмма « $S - e$ »
1			
2			
3			
4			
5			

Следует отметить, что в существующих программах, реализующих МКЭ для расчета стержневых систем, вычисление компонентов этих матриц, а также матриц единичных усилий, необходимых для определения внутренних усилий S в элементах, поручают машине, задавая ей лишь тип элемента, его жесткостные характеристики и координаты узлов.

Мы же получим их в явном виде с целью продемонстрировать ход решения задачи МКЭ на конкретных небольших примерах, расчет которых выполним вручную.

Для ферменного элемента (см.табл.2.1, строка 1), рассмотрев равновесие узлов i и j (рис. 2.4) получим связь между внешними и внутренними силами:

$$P_1 = -S_1 \cdot \cos \alpha; P_2 = -S_1 \cdot \sin \alpha; P_3 = S_1 \cdot \cos \alpha; P_4 = S_1 \cdot \sin \alpha. \quad (2.3)$$

После чего можем записать статическую матрицу ферменного элемента:

$$A = [-\cos \alpha; -\sin \alpha; \cos \alpha; \sin \alpha]^T. \quad (2.4)$$

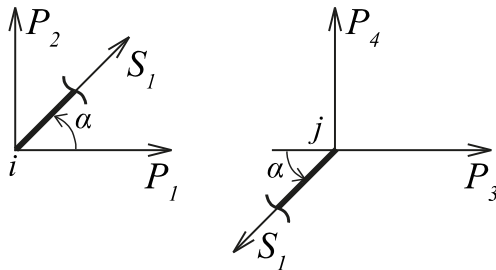


Рис. 2.4

Матрица внутренней жесткости k , выражающая внутренние усилия ферменного элемента через его деформации, имеет вид:

$$k = \frac{EA}{l} [1] \quad (2.5)$$

Для сокращения записей введем обозначения:

$$s = \sin \alpha, \quad c = \cos \alpha, \quad f = \frac{EA}{l} \quad (2.6)$$

Умножив матрицу k справа на A , получим матрицу единичных усилий:

$$kA^T = f [-c, -s, c, s] \quad (2.7)$$

Наконец, по формуле (2.1) могут быть вычислены компоненты K_{ij} , матрицы жесткости K^m ферменного элемента. Эта матрица — квадратная, четвертого порядка, симметричная относительно главной диагонали ($K_{ij} = K_{ji}$), что является следствием теоремы взаимности реакций:

$$K_{(4 \times 4)}^m = AkA^T = [K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & & K_{33} & K_{34} \\ \text{симметрично} & & & K_{44} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Если ввести обозначения (с учетом обозначений 2.6):

$$g_1 = f \cdot c^2; g_2 = f \cdot sc; g_3 = f \cdot s^2, \quad (2.9)$$

то элементы матрицы жесткости K^m ферменного элемента m определяются по формулам:

$$K_{11} = K_{33} = K_{13} = g_1; K_{22} = K_{44} = -K_{24} = g_3; K_{12} = K_{34} = -K_{14} = -K_{23} = g_2 \quad (2.10)$$

Для балочного заземленного элемента (см. табл. 2.1, строка 2), рассмотрев равновесие узлов i и j получим связь между внешними и внутренними усилиями:

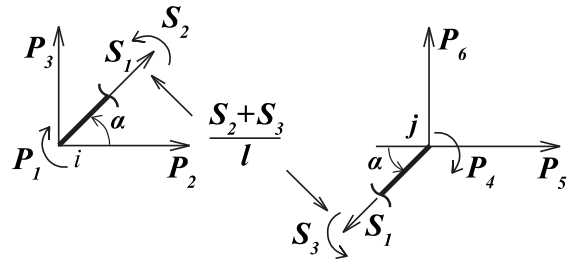


Рис. 2.5

Узел i ;

$$\sum M_i = 0, P_1 = S_2,$$

$$\sum X = 0, P_2 = -S_1 \cos \alpha + \frac{S_2 + S_3}{l} \sin \alpha = -S_1 c + S_2 \frac{s}{l} + S_3 \frac{s}{l},$$

$$\sum Y = 0, P_3 = -S_1 \sin \alpha - \frac{S_2 + S_3}{l} \cos \alpha = -S_1 s - S_2 \frac{c}{l} - S_3 \frac{c}{l}$$

Узел j ;

$$\sum M_j = 0, P_4 = S_3,$$

$$\sum X = 0, P_5 = S_1 \cos \alpha - \frac{S_2 + S_3}{l} \sin \alpha = S_1 c - S_2 \frac{s}{l} - S_3 \frac{s}{l},$$

$$\sum Y = 0, P_6 = S_1 \sin \alpha + \frac{S_2 + S_3}{l} \cos \alpha = S_1 s + S_2 \frac{c}{l} + S_3 \frac{c}{l}$$

В соответствии с уравнениями равновесия статическая матрица A размером 6×3 запишется:

$$A = \begin{array}{c|ccc} & \mathbf{S} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{P} & & & & \\ \hline \mathbf{1} & & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{2} & & \mathbf{-c} & \mathbf{s/l} & \mathbf{s/l} \\ \hline \mathbf{3} & & \mathbf{-s} & \mathbf{-c/l} & \mathbf{-s/l} \\ \hline \mathbf{4} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{5} & & \mathbf{c} & \mathbf{-s/l} & \mathbf{-s/l} \\ \hline \mathbf{6} & & \mathbf{s} & \mathbf{c/l} & \mathbf{c/l} \\ \hline \end{array} \quad (2.11)$$

Матрица внутренней жесткости рассматриваемого элемента, устанавливающая связь между внутренними усилиями и деформациями, имеет вид:

$$k = \begin{array}{c|ccc} & \begin{array}{c} e \\ \hline s \end{array} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 2 & & 0 & 4\frac{EJ}{l} & 2\frac{EJ}{l} \\ 3 & & 0 & 2\frac{EJ}{l} & 4\frac{EJ}{l} \end{array} \quad (2.12)$$

или, если обозначить погонную жесткость при изгибе стержня EJ/l через i , можно записать:

$$k = \begin{array}{c|ccc} & \begin{array}{c} e \\ \hline s \end{array} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & f & 0 & 0 \\ 2 & & 0 & 4i & 2i \\ 3 & & 0 & 2i & 4i \end{array} \quad (2.13)$$

Перемножив матрицы k и A^T получим матрицу единичных усилий kA^T балочного защемленного элемента, компонентами j -го столбца которой являются усилия S_i , от $z_j = 1$:

$$kA^T = \begin{array}{c|cccccc} & \begin{array}{c} z \\ \hline s \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & & 0 & -fc & -fs & 0 & fc & fs \\ 2 & & 4i & \frac{6i}{l}s & -\frac{6i}{l}c & 2i & -\frac{6i}{l}s & \frac{6i}{l}c \\ 3 & & 2i & \frac{6i}{l}s & -\frac{6i}{l}c & 4i & -\frac{6i}{l}s & \frac{6i}{l}c \end{array} \quad (2.14)$$

Перемножив матрицы (2.11) и (2.14), получим матрицу жесткости рассматриваемого элемента m , которая является квадратной, шестого порядка, симметричной относительно главной диагонали ($K_{ij} = K_{ji}$)

$$K_{(6 \times 6)}^m = AkA^T = [K_{ij}]. \quad (2.15)$$

Элементы этой матрицы определяются следующими формулами:

$$K_{11} = K_{44} = g_1; K_{12} = K_{24} = -K_{15} = -K_{45} = g_2; K_{14} = g_4; K_{16} = K_{46} = -K_{13} = -K_{34} = g_3; K_{22} = K_{55} = -K_{25} = g_5; K_{26} = K_{35} = -K_{23} = -K_{56} = g_6; K_{33} = K_{66} = -K_{36} = g_7; \quad (2.16)$$

где использованы сокращения:

$$g_1 = 4i; g_2 = \frac{6i}{l}s; g_3 = \frac{6i}{l} = 4i; g_4 = \frac{6i}{l}s; g_5 = \frac{6i}{l}c; g_6 = 2i; g_7 = \frac{12i}{l^2}s^2 + fc^2 \quad (2.17)$$

$$g_6 = \left(\frac{12i}{s^2} - f\right)sc; g_7 = \frac{12i}{s^2}c^2 + fs^2; s = \sin \alpha; c = \cos \alpha.$$

Аналогично могут быть получены матрицы жесткости для балочного комбинированного элемента и элементов для расчета несвободных рам. Приведем их окончательные выражения. Для балочного комбинированного элемента (табл. 2.1, строка 3) матрица единичных усилий имеет вид:

	<i>z</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	
<i>kA^T</i>	<i>S</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	
<i>1</i>	<i>0</i>	<i>-fc</i>	<i>-fs</i>	<i>fc</i>	<i>fs</i>		
<i>2</i>	<i>3i</i>	$\frac{3i}{l}s$	$-\frac{3i}{l}c$	$-\frac{3i}{l}s$	$-\frac{3i}{l}c$, (2.18)

компоненты же матрицы жесткости $K^m = AkA^T = [K_{ij}]$ которая в этом случае является матрицей пятого порядка, определяются формулами:

$$K_{11} = g_1; K_{12} = -K_{14} = g_2; K_{15} = -K_{13} = g_3; K_{22} = K_{44} = -K_{24} = g_4; K_{23} = K_{45} = -K_{25} = -K_{34} = g_5; K_{33} = K_{55} = -K_{35} = g_6, \quad (2.19)$$

где использованы сокращения:

$$g_1 = 3i; g_2 = \frac{3i}{l}s; g_3 = \frac{3i}{l}c; g_4 = fc^2 + \frac{3i}{l^2}s^2; g_5 = \left(f - \frac{3i}{l^2}\right)sc; g_6 = fs^2 + \frac{3i}{l^2}c^2. \quad (2.20)$$

Для нерастяжимого балочного защемленного элемента (табл. 2.1, строка 4) имеем следующие матрицы:

<i>A</i>	<i>S</i>	<i>1</i>	<i>2</i>		<i>kA^T</i>	<i>z</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	
	<i>P</i>	<i>1</i>	<i>0</i>			<i>S</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	
<i>1</i>	<i>1</i>	<i>0</i>			<i>1</i>	<i>4i</i>	<i>2i</i>		
<i>2</i>	<i>0</i>	<i>1</i>			<i>2</i>	<i>2i</i>	<i>4i</i>		, (2.21)

$$K_{(2 \times 2)}^m = AkA^T = \begin{array}{c|cc} & z & \\ \hline P & & \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 4i & 2i \\ \hline & 2 & 4i \end{array} \cdot \quad (2.22)$$

Для нерастяжимого балочного комбинированного элемента (табл. 2.1, строка 5):

$$A = [1], kA^T = \begin{array}{c|c} & z \\ \hline S & 1 \\ \hline 1 & 3i \end{array} \cdot \quad (2.23)$$

$$K_{(1 \times 1)}^m = AkA^T = \begin{array}{c|c} & z \\ \hline S & 1 \\ \hline 1 & 3i \end{array} \cdot \quad (2.24)$$

Матрица жесткости элемента m любого типа, имеющего $(l + n)$ локальных степеней свободы, где l и n - число степеней свободы элемента в узлах i и j соответственно, может быть записана в виде блочной размером $(l + n) \times (l + n)$:

$$K^m = \begin{array}{|c|c|} \hline [K_{ii}^m]_{(l \times l)} & [K_{ij}^m]_{(l \times n)} \\ \hline [K_{ji}^m = K_{ji}^{mT}]_{(n \times l)} & [K_{jj}^m]_{(n \times n)} \\ \hline \end{array} \cdot \quad (2.25)$$

Здесь $[K_{ij}^m]_{(l \times n)}$ — прямоугольная матрица реакций, возникающих в l связях узла i от единичных перемещений n связей узла j элемента m . Размер матрицы $l \times n$, где l — число строк, а n — число столбцов матрицы.

Следует отметить, что можно было бы ограничиться рассмотрением лишь одного общего элемента с шестью местными степенями свободы для расчета плоских стержневых систем и с двенадцатью степенями свободы для — пространственных. Однако при этом резко возрастает число глобальных степеней свободы, в результате чего существенно усложняется расчет.

2.3. Формирование матрицы внешней жесткости всей системы

Матрица внешней жесткости K всей системы или матрица жесткости совокупности элементов, устанавливающая связь между возможными перемещениями z узлов всей системы (глобальные степени свободы) и внешними силами:

$$P = K \cdot z, \quad (2.26)$$

является ничем иным, как матрицей коэффициентов канонических уравнений метода перемещений. Последние, в свою очередь, являются уравнениями равновесия узлов совокупности элементов, для которых выполняются уравнения неразрывности перемещений, т.е. перемещения в произвольном направлении каждого элемента, входящего в узел, являются одинаковыми и равными перемещению узла в том же направлении. Эта матрица может быть получена суммированием компонентов матриц жесткости K^m всех элементов системы по формуле

$$K = \sum_{m=1}^{\text{кол. элем.}} K^m \quad (2.27)$$

Для системы с n глобальными степенями свободы она является квадратной n —го порядка, симметричной относительно главной диагонали.

Вклад каждого элемента в общую матрицу жесткости определяется тем, какие степени свободы (местные для элемента глобальные для системы) совпадают. Элементу m с пятью местными степенями свободы 1...5 (рис. 2.6б) соответствуют три глобальные степени свободы всей системы I, II, III (они обозначены на рис. 2.6а римскими цифрами для того, чтобы можно было легко отличить от локальных, обозначенных арабскими цифрами; в дальнейшем и те, и другие обозначаются арабскими цифрами), причем 1 совпадает с I; 4 с II; 5 с III. Этот элемент даст отличный от нуля вклад в следующие компоненты общей матрицы жесткости совокупности элементов (индексы определяются глобальными степенями свободы системы): $K_{12} = K_{21}$, $K_{13} = K_{31}$, K_{22} , $K_{23} = K_{32}$, K_{33} .

Величина вклада будет равна следующим компонентам K_{ij}^m матрицы жесткости элемента m (индексы определяются локальными степенями свободы элемента, соответствующими глобальным степеням свободы системы):

$$K_{11} = K_{11}^m ; K_{12} = K_{14}^m ; K_{13} = K_{15}^m ; K_{22} = K_{44}^m ; K_{23} = K_{45}^m ; K_{33} = K_{55}^m ;$$

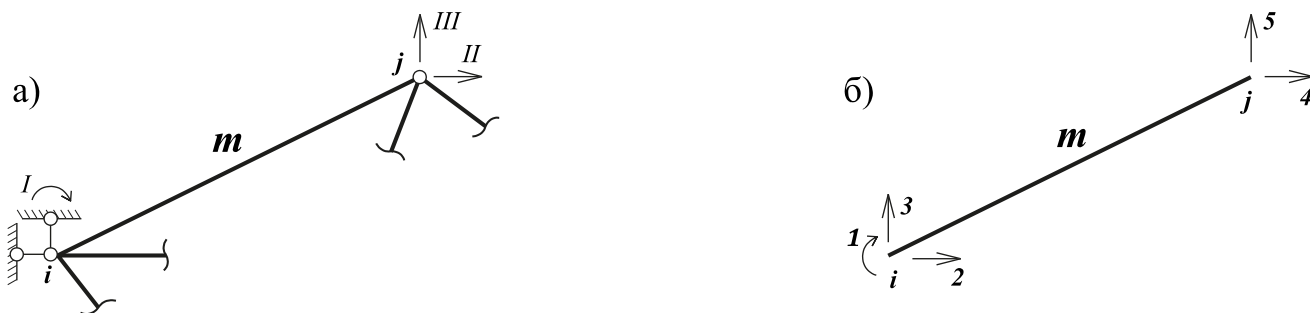


Рис. 2.6. Степени свободы.

Для большей наглядности выпишем все местные и глобальные степени свободы элемента m в две строки одну под другой:

Таблица 2.2.

Степени свободы:	Местные (локальные)	1	2	3	4	5
	Общие (глобальные)	I			II	III

Номера общих степеней свободы определяют индексы компонентов глобальной матрицы жесткости системы, в которые будут давать вклад компоненты матрицы жесткости элемента t с индексами местных степеней свободы, соответствующих глобальным (1, 4, 5).

Определив вклад каждого элемента все компоненты глобальной матрицы жесткости системы, находим последние суммированием всех вкладов по формуле (2.27).

Процедура формирования общей матрицы жесткости системы будет более ясной после рассмотрения примеров расчета различных стержневых систем. Необходимо еще раз подчеркнуть, что в существующих программах, реализующих МКЭ для расчета стержневых систем, формирование этой матрицы, так же, как и матриц жесткости отдельных элементов, поручают машине.

Рассмотрим теперь дальнейший ход расчета стержневых систем МКЭ.

2.4. Определение перемещений и усилий в элементах системы

После построения общей матрицы внешней жесткости всей системы можно вычислить перемещения \mathbf{z} узлов совокупности элементов, для чего необходимо решить систему уравнений (2.26):

$$\mathbf{z} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} \quad (2.28)$$

Напомним, что для этого не обязательно строить обратную матрицу K^{-1} .

Зная перемещения узлов системы \mathbf{z} , в силу выполнения условий неразрывности перемещений, и соответствующие перемещения концов элементов по направлениям их местных степеней свободы в общей системе координат, можно вычислить усилия \mathbf{S} для каждого элемента в отдельности по формуле:

$$\mathbf{S}^m = \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{z}^m. \quad (2.29)$$

где \mathbf{S}^m — вектор искомых внутренних усилий в элементе, число членов которого зависит от типа элемента (один для ферменного элемента, три или два — для балочного и т.д.);

\mathbf{kA}^T — матрица единичных усилий, известная для каждого элемента (она получалась автоматически при построении матрицы жесткости \mathbf{K}^m элемента);

\mathbf{z}^m — вектор перемещений элемента, число членов которого равно числу локальных степеней свободы элемента, при этом отличными от нуля будут лишь компоненты, соответствующие местным степеням свободы, совпадающим с глобальными. Так для стержня, показанного на рис. 2.6, вектор перемещений имеет вид:

$$\mathbf{z}^m = (\mathbf{z}_1; \mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3) \quad (2.30)$$

Его легко записать в соответствии с таблицей 2.2.

Для получения расчетных усилий $\mathbf{S}_{ок}$ в стержнях при внеузловой внешней нагрузке к найденным усилиям \mathbf{S} от узловой эквивалентной нагрузки необходимо добавить усилия \mathbf{S}_o , от внеузловых воздействий (из первого состояния системы):

$$\mathbf{S}_{ок} = \mathbf{S} + \mathbf{S}_o \quad (2.31)$$

Для проверки полученного результата (так как расчет производился методом перемещений) достаточно рассмотреть статическое равновесие узлов системы, либо любой ее части. Также можно использовать и кинематическую проверку, вычисляя перемещение какой-либо точки системы, которое известно заранее (перемещение любого узла по направлению имеющейся здесь внешней связи, очевидно, равно нулю).

При этом, вычисляя перемещение с помощью формулы Мора, в последней необходимо удерживать члены с усилиями, которые определяются в результате расчета МКЭ: моменты и продольные усилия в балочных элементах, продольные усилия в ферменных элементах и только изгибающие моменты в балочных неразтяжимых элементах несвободных рам.

В заключение отметим, что если в заданной системе имеются наклонные опорные стержни, направление которых не совпадает с направлениями глобальных степеней свободы (не является ни горизонтальным, ни вертикальным), то этот стержень можно включить в расчет как ферменный элемент единичной длины, модуль упругости которого E или площадь поперечного сечения A принимаются на два порядка выше соответствующих максимальных величин во всех элементах системы.

Если имеются упругие опоры с заданными коэффициентами жесткости r_j , то при расчете МКЭ их можно заменить ферменными элементами единичной длины ($l = 1$) с единичной площадью поперечного сечения ($A = 1$) и модулем упругости $E = r_j$ либо с площадью поперечного сечения $A = r_j$, и единичным модулем упругости ($E = 1$).

Проиллюстрируем ход расчета стержневых систем методом конечных элементов на примерах.

2.5. Примеры расчета стержневых систем МКЭ

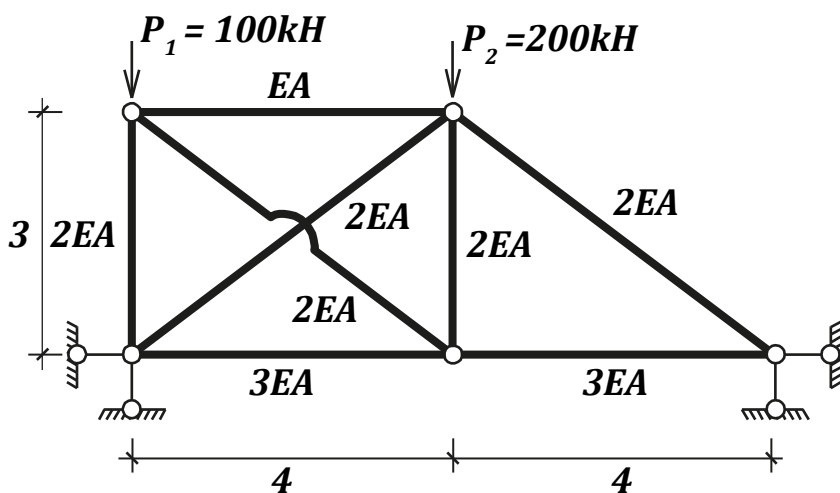


Рис. 2.7

Пример 1.

МКЭ определить усилия во всех стержнях фермы, показанной на рис. 2.7.

Выберем сначала глобальную систему координат и пронумеруем все узлы и стержни фермы (рис. 2.8).

Далее определим геометрические жесткостные характеристики элементов, результаты сведем в таблицу 2.3.

При этом $\Delta x = x_j - x_i$, $\Delta y = y_j - y_i$,

$$l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \sin \alpha = \frac{\Delta y}{l}, \cos \alpha = \frac{\Delta x}{l}.$$

Таблица 2.3

№ элемента	Узлы i/j	x	y	Δx	Δy	l	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	Продольная жесткость	Погонная жесткость	Проведенная погонная жесткость
1	1	0	0	0	3	3	1	0	$2EA$	$\frac{2}{3}EA$	$\frac{5}{3}f_0$
	2	0	3								
2	2	0	3	4	0	4	0	1	EA	$\frac{1}{4}EA$	$\frac{5}{8}f_0$
	3	4	3								
3	3	4	3	4	-3	5	-0.6	0.8	$2EA$	$\frac{2}{5}EA$	f_0
	4	8	0								
4	4	8	0	-4	0	4	0	-1	$3EA$	$\frac{3}{4}EA$	$\frac{15}{8}f_0$
	5	4	0								
5	1	0	0	4	0	4	0	1	$3EA$	$\frac{3}{4}EA$	$\frac{15}{8}f_0$
	5	4	0								
6	2	0	3	4	-3	5	-0.6	0.8	$2EA$	$\frac{2}{5}EA$	f_0
	5	4	0								
7	1	0	0	4	3	5	0.6	0.8	$2EA$	$\frac{2}{5}EA$	f_0
	3	4	3								
8	3	4	3	0	-3	3	-1	0	$2EA$	$\frac{2}{5}EA$	$\frac{5}{3}f_0$
	5	4	0								

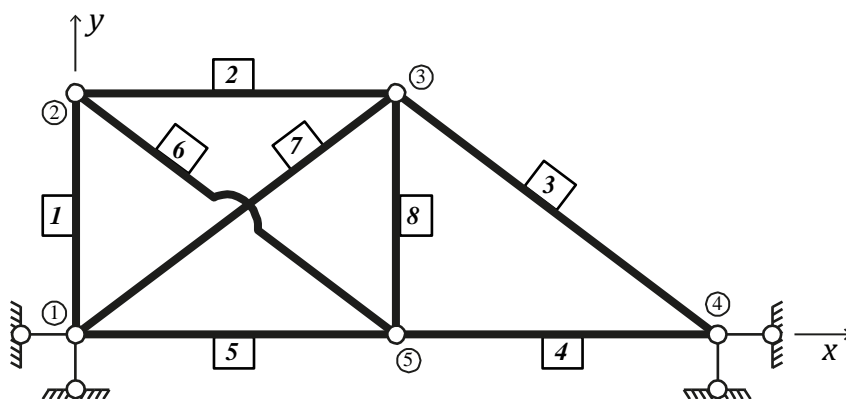


Рис. 2.8

Строим диаграмму $P - z$ системы (рис. 2.9), нумеруя глобальные степени свободы, соответствующие ненулевым перемещениям узлов фермы.

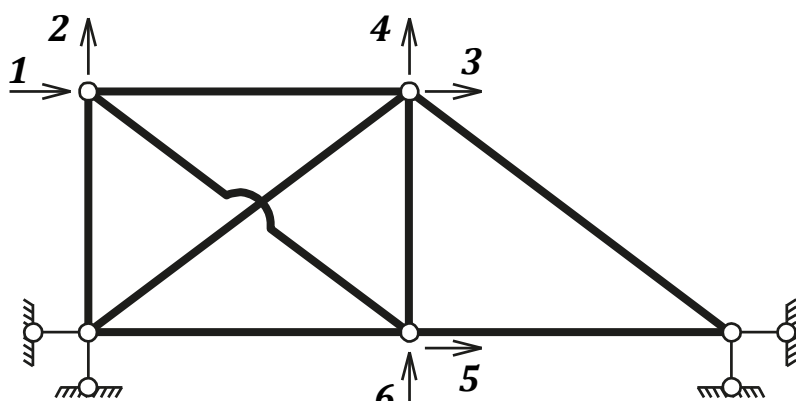


Рис. 2.9

Вектор внешних сил запишем в виде: $P = [0; -100; 0; -200; 0; 0].^T$ В случае нагрузок по направлению не совпадающих с глобальными степенями свободы (по диаграмме $P - z$) их следует разложить на составляющие.

Построение матрицы жесткости всей системы будем вести в табличной форме (табл. 2.4), в которой сначала для каждого элемента указываем локальные (в соответствии с первой строкой табл. 2.1) и глобальные (в соответствии с рис. 2.9) степени свободы. При этом, если перемещение какого-либо конца элемента невозможно (имеется опорный стержень), то соответствующая глобальная степень свободы отсутствует.

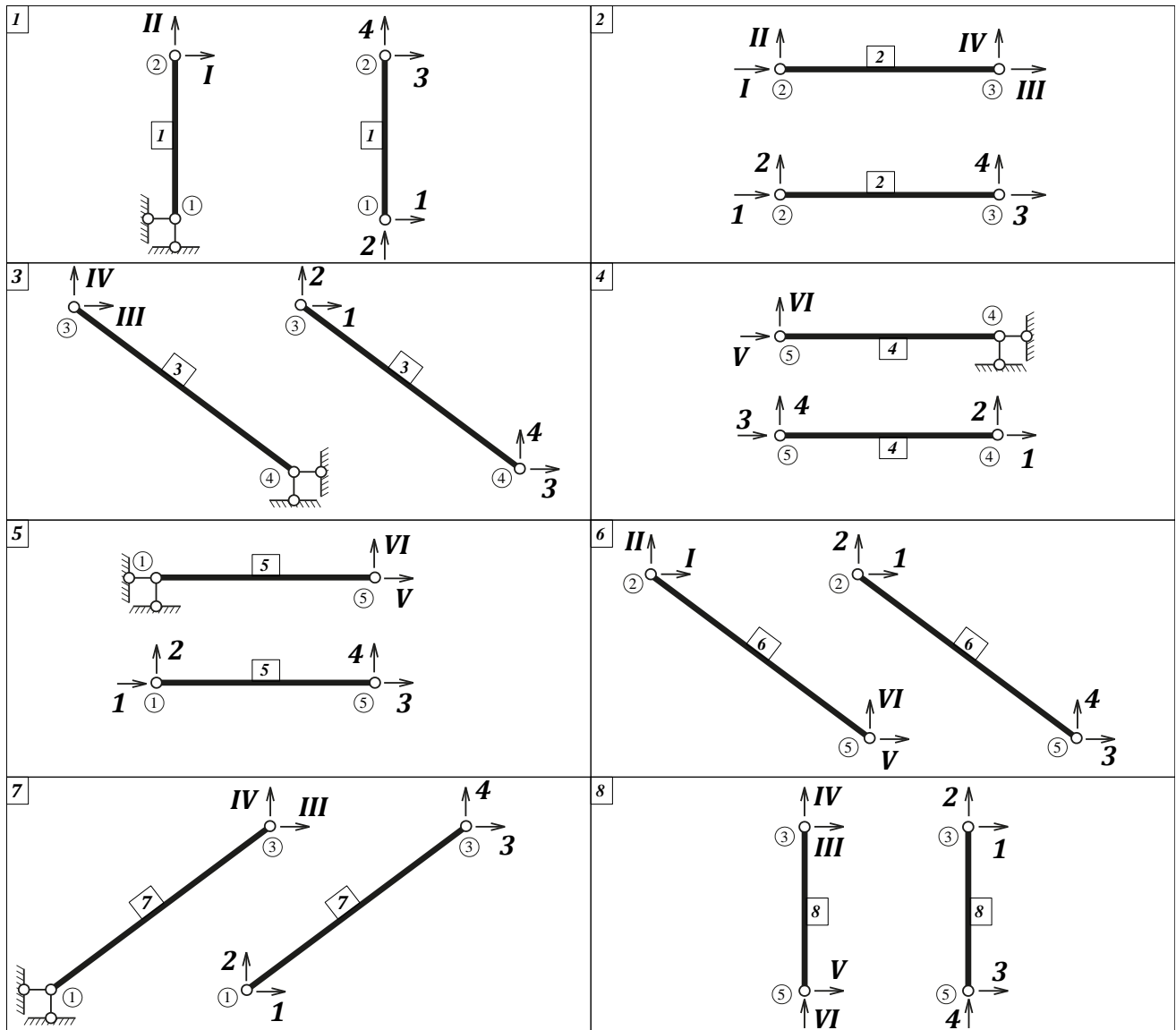


Рис. 2.10

$$g_1 = fc^2; g_2 = fsc; g_3 = fs^2; K_{11} = K_{33}^m = -K_{13}^m = g_1; K_{22} = K_{44}^m = -K_{24}^m = g_3; K_{12} = K_{34}^m = -K_{14}^m = -K_{23}^m = q_2$$

$$K_{(4 \times 4)}^m = AkA^T = [K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{11}^m & K_{12}^m & K_{13}^m & K_{14}^m \\ K_{22}^m & K_{23}^m & K_{24}^m & \\ \text{симметрично} & K_{33}^m & K_{34}^m & \\ & & K_{44}^m & \end{bmatrix}$$

Так для первого, седьмого элементов начальное сечение, соответствующее первым двум локальным степеням свободы стержней, не может перемещаться (имеется два опорных стержня), поэтому глобальные степени свободы в начале этих стержней отсутствуют. Конец первого элемента может перемещаться по горизонтали и вертикали. Третьей (горизонтальной) степени свободы соответствует первая глобальная (по диаграмме $P - z$) степень свободы системы, а четвертой локальной вторая глобальная. Конец седьмого элемента также может перемещаться по горизонтали и вертикали. Третьей локальной степени свободы стержня соответствует третья глобальная, а четвертой локальной - четвертая глобальная. Аналогично заполняются соответствующие графы табл. 2.4 для остальных элементов.

После этого в таблице указываются все компоненты глобальной матрицы жесткости системы K , которая подлежат определению. Под ними против каждого элемента записываем соответствующий вклад каждого элемента. Так, первый элемент, связанный лишь с двумя глобальными степенями свободы 1 и 2, соответствующими третьей и четвертой локальным степеням свободы стержня, даст вклад в компоненты $K_{11}, K_{12} = K_{21}, K_{22}$. При этом, вклад в K_{11} равен компоненту $K_{33}^{(1)}$ первого элемента, в $K_{12} \rightarrow K_{34}^{(1)}$ и в $K_{22} \rightarrow K_{44}^{(1)}$. Вторым элементом, имеющим четыре глобальные степени свободы, совпадающие с четырьмя локальными, даст вклад в компоненты $K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{14}, K_{22}, K_{23}, K_{24}, K_{33}, K_{34}, K_{44}$. При этом вклад в K_{11} равен компоненту $K_{11}^{(2)}$ второго элемента, в $K_{12} \rightarrow K_{12}^{(2)}$, в $K_{13} \rightarrow K_{13}^{(2)}$, в $K_{14} \rightarrow K_{14}^{(2)}$, в $K_{22} \rightarrow K_{22}^{(2)}$, в $K_{23} \rightarrow K_{23}^{(2)}$, в $K_{24} \rightarrow K_{24}^{(2)}$, в $K_{33} \rightarrow K_{33}^{(2)}$, в $K_{34} \rightarrow K_{34}^{(2)}$, и в $K_{44} \rightarrow K_{44}^{(2)}$.

Третий элемент, связанный лишь с двумя глобальными степенями свободы 3 и 4, соответствующими первой и второй локальным степеням свободы стержня, даст вклад в компоненты $K_{33} \rightarrow K_{11}^{(3)}$, $K_{34} \rightarrow K_{12}^{(3)}$ и $K_{44} \rightarrow K_{22}^{(3)}$. Аналогично заполняются соответствующие графы табл. 2.4 для остальных элементов.

Далее пользуясь формулами (2.10) находим компоненты матрицы жесткости всех элементов, а по формулам (2.9) вычисляем эти компоненты (последние три столбца таблицы). Просуммировав вклады этих элементов, находим компоненты глобальной матрицы жесткости:

$$K_{11} = K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} + K_{11}^{(6)} = 1.265f_0 ; K_{12} = K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} + K_{12}^{(6)} = -0.48f_0 ; K_{13} = K_{13}^{(2)} = -0.625f_0 ; K_{14} = K_{14}^{(2)} = 0 ; K_{15} = K_{13}^{(6)} = -0.64f_0 \text{ и т.д.}$$

Таблица 2.4

№ элем.	Степени свободы				K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}	K_{16}	K_{22}	K_{23}	K_{24}	K_{25}	K_{26}
	Локальные/глобальные														
1	1	2	3	4	$K_{33}^{(1)} = g_1 = 0$	$K_{34}^{(1)} = g_2 = 0$					$K_{44}^{(1)} = g_3 = 1,67f_0$				
			1	2											
2	1	2	3	4	$K_{11}^{(2)} = g_1 = 0,625f_0$	$K_{12}^{(2)} = g_2 = 0$	$K_{13}^{(2)} = -g_1 = -0,625f_0$	$K_{14}^{(2)} = -g_2 = 0$			$K_{27}^{(2)} = g_3 = 0$	$K_{23}^{(2)} = -g_2 = 0$	$K_{24}^{(2)} = -g_3 = 0$		
	1	2	3	4											
3	1	2	3	4											
	3	4													
4	1	2	3	4											
			5	6											
5	1	2	3	4											
			5	6											
6	1	2	3	4	$K_{11}^{(6)} = g_1 = 0,64f_0$	$K_{12}^{(6)} = g_2 = -0,48f_0$			$K_{13}^{(6)} = -g_1 = -0,64f_0$	$K_{14}^{(6)} = -g_2 = 0,48f_0$	$K_{22}^{(6)} = g_3 = 0,36f_0$			$K_{23}^{(6)} = -g_2 = 0,48f_0$	$K_{24}^{(6)} = -g_3 = -0,36f_0$
	1	2	5	6											
7	1	2	3	4											
			3	4											
8	1	2	3	4											
	3	4	5	6											
$K_{ij} = \sum_m K_{ij}^m$					1,265f ₀	-0,48f ₀	-0,625f ₀	0	-0,64f ₀	0,48f ₀	2,03f ₀	0	0	0,48f ₀	-0,36f ₀

Продолжение таблицы 2.4

№ элем.	K_{33}	K_{34}	K_{35}	K_{36}	K_{44}	K_{45}	K_{46}	K_{55}	K_{56}	K_{66}	$g_1 = fc^2$	$g_2 = fc_s$	$g_3 = fs^2$
1											0	0	$1.67f_0$
2	$K_{33}^{(2)} =$ $= g_1 =$ $= 0,625f_0$	$K_{34}^{(2)} =$ $g_2 = 0$			$K_{44}^{(1)} =$ $= g_3 =$ $= 0$						$0.625f_0$	0	0
3	$K_{11}^{(3)} =$ $= g_1 =$ $= 0,64f_0$	$K_{12}^{(3)} =$ $= g_2 =$ $= -0,48f_0$			$K_{22}^{(3)} =$ $= g_3 =$ $= 0,36f_0$						$0.64f_0$	$-0.48f_0$	$0.36f_0$
4								$K_{33}^{(4)} =$ $= g_1 =$ $= 1,875f_0$	$K_{34}^{(4)} =$ $g_2 = 0$	$K_{44}^{(4)} =$ $= g_3 =$ $= 0$	$1.875f_0$	0	0
5								$K_{33}^{(5)} =$ $= g_1 =$ $= 1,875f_0$	$K_{34}^{(5)} =$ $g_2 = 0$	$K_{44}^{(5)} =$ $g_3 = 0$	$1.875f_0$	0	0
6								$K_{33}^{(6)} =$ $= g_1 =$ $= 0,64f_0$	$K_{34}^{(6)} =$ $= g_2 =$ $= -0,48f_0$	$K_{44}^{(6)} =$ $= g_3 =$ $= 0,36f_0$	$0.64f_0$	$-0.48f_0$	$0.36f_0$
7	$K_{33}^{(7)} =$ $= g_1 =$ $= 0,64f_0$	$K_{34}^{(7)} =$ $= g_2 =$ $= 0,48f_0$			$K_{44}^{(7)} =$ $= g_3 =$ $= 0,36f_0$						$0.64f_0$	$0.48f_0$	$0.36f_0$
8	$K_{11}^{(8)} =$ $g_1 = 0$	$K_{12}^{(8)} =$ $g_2 = 0$	$K_{13}^{(8)} =$ $-g_1 =$ $= 0$	$K_{14}^{(8)} =$ $-g_2 =$ $= 0$	$K_{22}^{(8)} =$ $= g_3 =$ $= 1,67f_0$	$K_{23}^{(8)} =$ $-g_2 =$ $= 0$	$K_{24}^{(8)} =$ $= -g_3 =$ $= -1,67f_0$	$K_{33}^{(8)} =$ $= g_1 =$ $= 0$	$K_{34}^{(8)} =$ $= g_2 =$ $= 0$	$K_{44}^{(8)} =$ $= g_3 =$ $= 1,67f_0$	0	0	$1.67f_0$
$K_{ij} = \sum_m K_{ij}^m$	$1.905f_0$	0	0	0	$2.39f_0$	0	$-1.67f_0$	$4.39f_0$	$-0.48f_0$	$2.03f_0$	—	—	—

Разрешающая система уравнений имеет вид:

$$f_0 \begin{bmatrix} 1.265 & -0.48 & -0.625 & 0 & -0.64 & 0.48 \\ -0.48 & 2.03 & 0 & 0 & 0.48 & -0.36 \\ -0.625 & 0 & 1.905 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.39 & 0 & -1.67 \\ -0.64 & 0.48 & 0 & 0 & 4.39 & -0.48 \\ 0.48 & -0.36 & 0 & -1.67 & -0.48 & 2.03 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \\ -200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ее решение:

$$z_1 = \frac{68.69007}{f_0}; z_2 = \frac{-72.83513}{f_0}; z_3 = \frac{22.53611}{f_0}; z_4 = \frac{-247.7295}{f_0}; z_5 = \frac{-7.69233}{f_0};$$

$$z_6 = \frac{-234.7746}{f_0}.$$

Зная перемещения узлов фермы z , можно вычислить усилия в ее стержнях отдельно для каждого элемента по формуле (2.33), в которых матрица единичных усилий kA^T определяется выражением (2.7): $kA^T = f[-\cos\alpha, -\sin\alpha; \cos\alpha, \sin\alpha]^T$, а вектор z^m для каждого элемента « m » составляется в соответствии с локальными степенями свободы с помощью табл. 2.4 и имеет вид:

$$z^{(1)} = [0; 0; \frac{68.69}{f_0}; -\frac{72.835}{f_0}]^T; \quad z^{(2)} = [\frac{68.69}{f_0}; -\frac{72.835}{f_0}; \frac{22.536}{f_0}; -\frac{247.37}{f_0}]^T;$$

$$z^{(3)} = [\frac{22.536}{f_0}; -\frac{247.73}{f_0}; 0; 0]^T; \quad z^{(4)} = [0; 0; -\frac{7.692}{f_0}; -\frac{234.775}{f_0}]^T;$$

$$z^{(5)} = [0; 0; -\frac{7.692}{f_0}; -\frac{234.775}{f_0}]^T; \quad z^{(6)} = [\frac{68.69}{f_0}; -\frac{72.835}{f_0}; \frac{-7.692}{f_0}; -\frac{234.775}{f_0}]^T;$$

$$z^{(7)} = [0; 0; \frac{22.536}{f_0}; -\frac{247.73}{f_0}]^T; \quad z^{(8)} = [\frac{22.536}{f_0}; -\frac{247.73}{f_0}; \frac{-7.692}{f_0}; -\frac{234.775}{f_0}]^T.$$

Подставив в формулу (2.33) данные первого элемента, получим:

$$S^{(1)} = \frac{5}{3} f_0 [0; -1; 0; 1] \cdot [0; 0; \frac{68.69}{f_0}; -\frac{72.835}{f_0}]^T = -121.391 \text{ кН}.$$

Аналогично могут быть найдены усилия в остальных стержнях формы

$$S^{(2)} = \frac{5}{8} f_0 [-1; 0; 1; 0] \cdot [\frac{68.69}{f_0}; -\frac{72.835}{f_0}; \frac{22.536}{f_0}; -\frac{247.73}{f_0}]^T = -28.848 \text{ кН},$$

$$S^{(3)} = f_0 [-0.8; 0.6; 0.8; -0.6] \cdot [\frac{22.536}{f_0}; -\frac{247.73}{f_0}; 0; 0]^T = -166.667 \text{ кН},$$

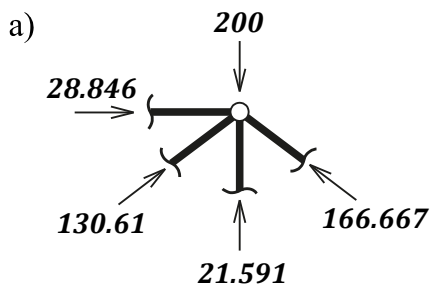
$$S^{(4)} = \frac{15}{8} f_0 = [1; 0; -1; 0] \cdot [0; 0; -\frac{7.692}{f_0}; -\frac{234.775}{f_0}]^T = 14.422 \text{ кН},$$

$$S^{(5)} = \frac{15}{8} f_0 [-1; 0; 1; 0] \cdot \left[0; 0; -\frac{7.692}{f_0}; -\frac{234.775}{f_0} \right]^T = -14.422 \text{кН},$$

$$S^{(6)} = f_0 [-0,8; 0,6; 0,8; -0,6] \cdot \left[\frac{68.69}{f_0}; -\frac{72.835}{f_0}; \frac{7.692}{f_0}; -\frac{234.775}{f_0} \right]^T = 36.059 \text{кН},$$

$$S^{(7)} = f_0 [-0,8; -0,6; 0,8; 0,6] \cdot \left[0; 0; \frac{22.536}{f_0}; -\frac{247.73}{f_0} \right]^T = -130.61 \text{кН},$$

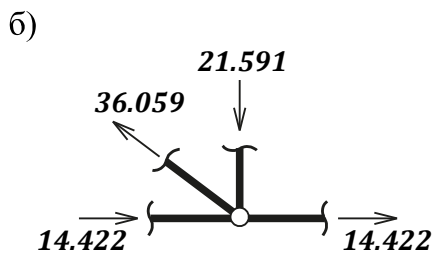
$$S^{(8)} = \frac{5}{8} f_0 = [0; 1; 0; -1] \cdot \left[\frac{22.536}{f_0}; -\frac{247.73}{f_0}; -\frac{7.692}{f_0}; -\frac{234.775}{f_0} \right]^T = -21.591 \text{кН}.$$



Для проверки полученных результатов рассмотрим равновесие узлов фермы (рис 2.11)

$$\Sigma x_i = 28.846 + 130.61 \cdot 0.8 - 166.667 \cdot 0.8 = -0.001 \approx 0;$$

$$\Sigma y_i = 200 + 21.591 + 130.61 \cdot 0.6 + 166.667 \cdot 0.6 = -0.043.$$



$$\Sigma x_i = 14.422 + 14.422 - 36.059 \cdot 0.8 = -0.003,;$$

$$\Sigma y_i = -21.591 + 36.059 \cdot 0.6 = 0.044.$$

Далее необходимо провести кинематическую проверку.

Рис. 2.12

Пример 2. Рассчитать МКЭ раму, приведенную на рис. 2.13 и построить эпюры внутренних усилий.

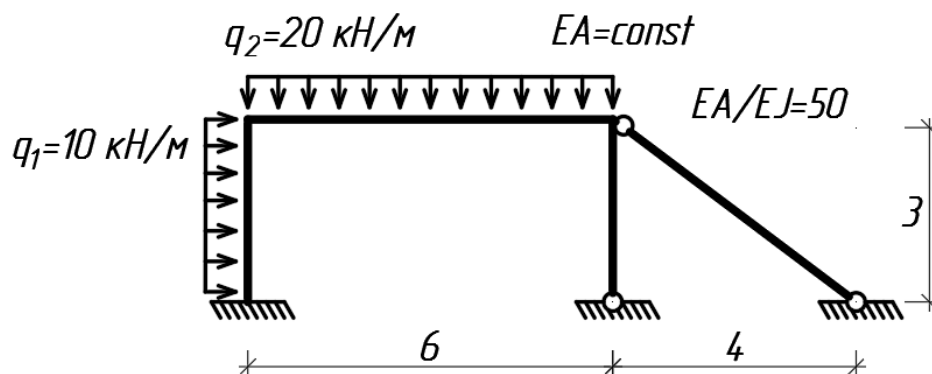


Рис. 2.13 Исходная схема

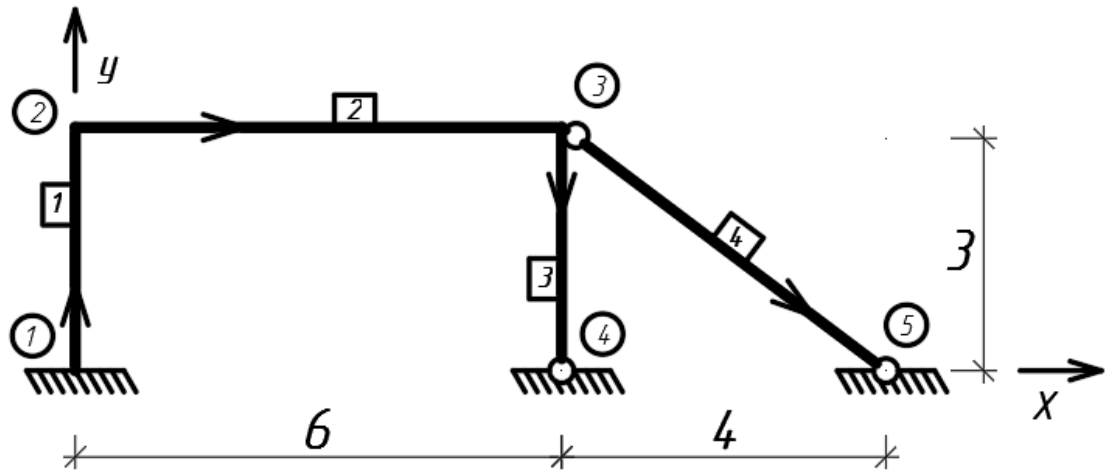


Рис. 2.14 Расчетная схема МКЭ

Пронумеруем все узлы и элементы системы (рис. 2.14). Здесь же стрелками укажем направления от начала элемента к его концу.

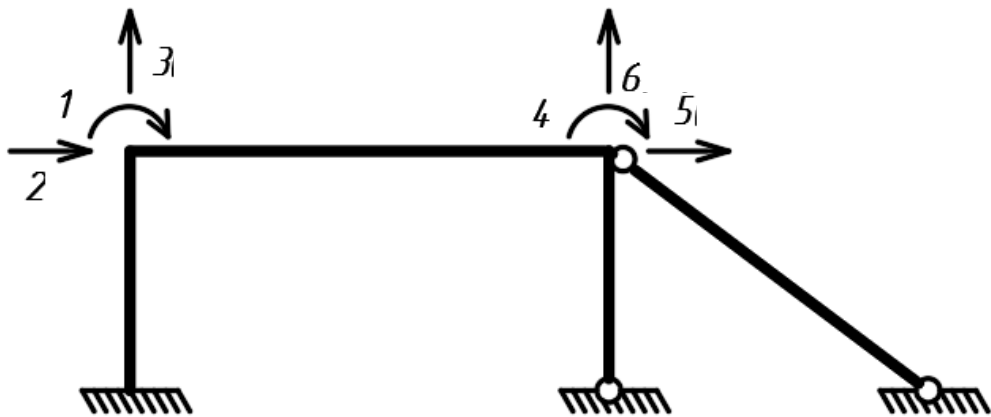


Рис. 2.15 « $P - z$ » диаграмма

На рис. 2.15 приведена диаграмма $P - z$, на которой указаны глобальные степени свободы системы - положительные направления всех возможных перемещений узлов и соответствующие им возможные внешние силы.

В заданной системе встречаются все три типа плоских стержневых элементов один ферменный – четвертый стержень, два балочных защемленных – первый и второй, один балочный комбинированный – третий (рис. 2.16).

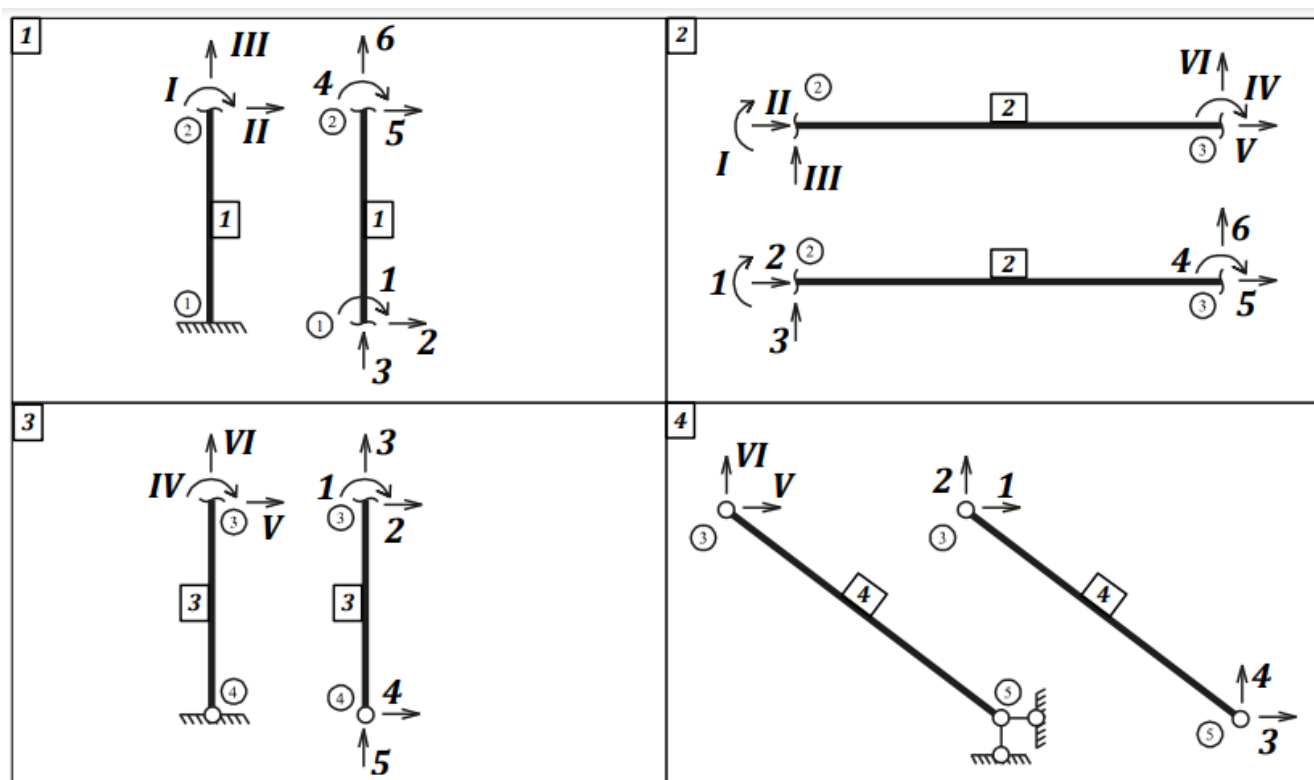


Рис. 2.16 Соответствие локальных степеней свободы глобальным.

Балочный комбинированный конечный элемент $K_{(5 \times 5)}^m$:

$$K_{11} = g_1; K_{12} = -K_{14} = g_2; K_{15} = -K_{13} = g_3; K_{22} = K_{44} = -K_{24} = g_4;$$

$$K_{23} = K_{45} = -K_{25} = -K_{34} = g_5; K_{33} = K_{55} = -K_{35} = g_6;$$

$$g_1 = 3i; g_2 = \frac{3i}{l} s; g_3 = \frac{3i}{l} c; g_4 = fc^2 + \frac{3i}{l^2} s^2; g_5 = (f - \frac{3i}{l^2}) sc; g_6 = fs^2 + \frac{3i}{l^2} c^2.$$

Балочный защемленный конечный элемент $K_{(6 \times 6)}^m$:

$$K_{11} = K_{44} = g_1; K_{12} = K_{24} = -K_{15} = -K_{45} = g_2; K_{14} = g_4; K_{16} = K_{46} = -K_{13} = -K_{34} = g_3;$$

$$K_{22} = K_{55} = -K_{25} = g_5; K_{26} = K_{35} = -K_{23} = -K_{56} = g_6; K_{33} = K_{66} = -K_{36} = g_7.$$

$$g_1 = 4i; g_2 = \frac{6i}{l} s; g_3 = \frac{6i}{l} c; g_4 = 2i; g_5 = \frac{12i}{l^2} s^2 + fc^2; g_6 = (\frac{12i}{l^2} - f) sc;$$

$$g_7 = \frac{12i}{l^2} c + fs^2.$$

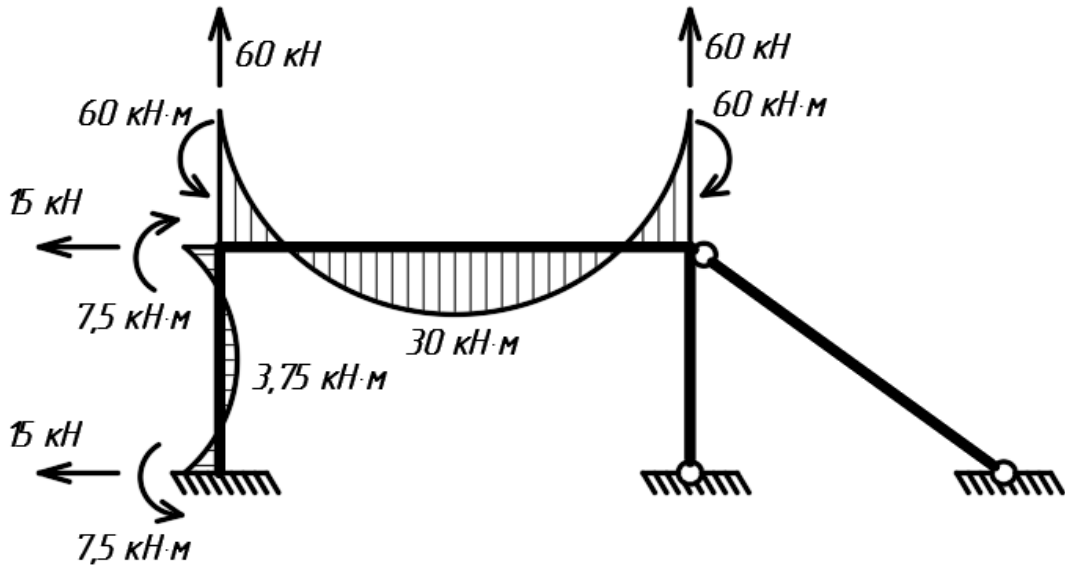
Ферменный конечный элемент $K_{(5 \times 5)}^m$:

$$g_1 = fc^2; g_2 = fsc; g_3 = fs^2. K_{11} = K_{33} = -K_{13} = g_1; K_{22} = K_{44} = -K_{24} = g_3;$$

$$K_{12} = K_{34} = -K_{14} = -K_{23} = g_2.$$

Приведем заданную нагрузку к узловой так, как это было показано в предыдущей главе.

a)



б)

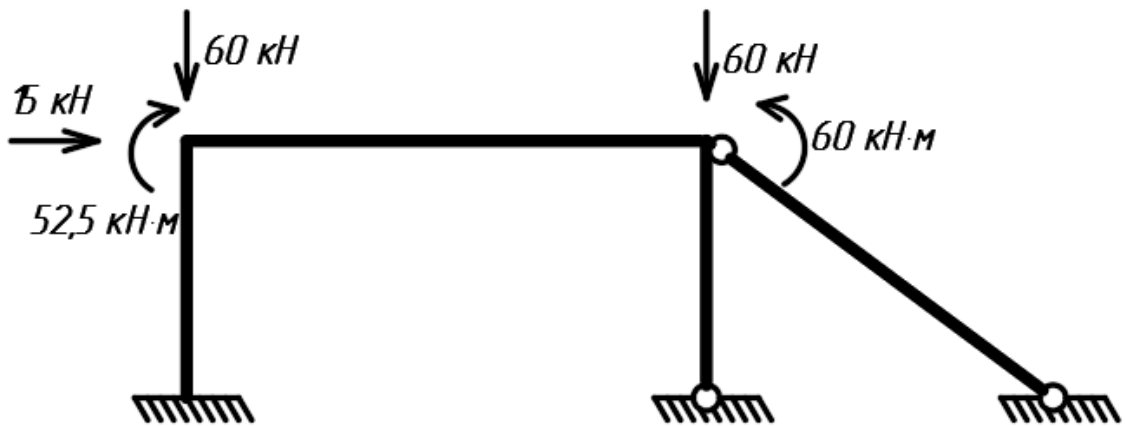


Рис. 2.17

На рис. 2.17а показаны эпюры моментов от заданной внеузловой нагрузки в статически неопределимых однопролетных балках, составляющих основную систему метода перемещений – I состояние, а на рис. 2.17б показана эквивалентная узловая нагрузка, равная и противоположно направленная опорным реакциям из первого состояния - II состояние системы. С помощью « $P - z$ » диаграммы и рис. 2.17б запишем вектор внешней нагрузки:

$$P = [52,5; 15; -60; -60, 0, -60] T.$$

Таблица 2.5

x	y	Δx	Δy	l	$\sin a$ (s)	$\cos a$ (c)	i	f	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
0	0	0	3	3	1	0	$\frac{EJ}{3} = i_0$	$\frac{EA}{3} = \frac{50EJ}{3} = 50i_0$	$4i = 4i_0$	$\frac{6i}{l} \cdot s = \frac{6i_0}{3} \cdot 1 = 2i_0$	$\frac{6i}{l} \cdot c = 0$	$2i = 2i_0$	$\frac{12i}{l^2} s^2 + fc^2 = \frac{12i_0}{9} \cdot 1 = \frac{4}{3} i_0$	$sc \left(\frac{12i}{l^2} - f \right) = 0$	$\frac{12i}{l^2} c^2 + fs^2 = fs^2 = 50i_0$
0	3														
0	3	6	0	6	0	1	$\frac{2EJ}{6} = \frac{EJ}{3} = i_0$	$50i_0$	$4i = 4i_0$	$\frac{6i}{l} \cdot s = 0$	$\frac{6i}{l} \cdot c = \frac{6i}{l} \cdot 1 = i_0$	$2i = 2i_0$	$\frac{12i}{l^2} s^2 + fc^2 = 50i_0$	$sc \left(\frac{12i}{l^2} - f \right) = 0$	$\frac{12i}{l^2} c^2 + fs^2 = \frac{12i_0}{36} = \frac{i_0}{3}$
6	3														
6	3	0	-3	3	-1	0	$\frac{EJ}{3} = i_0$	$50i_0$	$3i = 3i_0$	$\frac{3i}{l} \cdot s = -\frac{3i_0}{3} \cdot 1 = -i_0$	$\frac{3i}{l} \cdot c = 0$	$fc^2 + \frac{3i}{l^2} \cdot s^2 = \frac{3i_0}{9} = \frac{i_0}{3}$	$\left(f - \frac{3i}{l^2} \right) sc = 0$	$fs^2 + \frac{3i}{l^2} \cdot c^2 = 50i_0$,
6	0														
6	3	4	-3	5	-0,6	0,8	,	$\frac{EA}{5} = \frac{50EJ}{5} = 30i_0$	$fc^2 = 30i_0 \cdot 0,64 = 19,2i_0$	$psc = -30i_0 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = -14,4i_0$	$fs^2 = 10,8i_0$,	,	,	,
10	0														

Таблица 2.6

№ эл.	Степени свободы локальные / глобальные						K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}	K_{16}
	1	2	3	4	5	6						
1	1	2	3	4	5	6	$K_{44}^{(1)} = g_1 = 4i_0$	$K_{45}^{(1)} = -g_2 =$ $= -2i_0$	$K_{46}^{(1)} = g_3 = 0$			
	0	0	0	1	2	3						
2	1	2	3	4	5	6	$K_{11}^{(2)} = g_1 = 4i_0$	$K_{12}^{(2)} = g_2 = 0$	$K_{13}^{(2)} = -g_3 =$ $= -i_0$	$K_{14}^{(2)} = g_4 = i_0$	$K_{15}^{(2)} = -g_2 = 0$	$K_{16}^{(2)} = g_3 = i_0$
	1	2	3	4	5	6						
3	1	2	3	4	5	0						
	4	5	6	0	0	0						
4	1	2	0	3	4	0						
	5	6	0	0	0	0						
$K_{ij} = \sum_m K_{ij}^m$	-	-	-	-	-	-	$8i_0$	$-2i_0$	$-i_0$	$2i_0$	0	i_0

№ эл.	K_{22}	K_{23}	K_{24}	K_{25}	K_{26}	K_{33}	K_{34}	K_{35}
1	$K_{55}^{(1)} = g_5 = \frac{4}{3}i_0$	$K_{56}^{(1)} = -g_6 = 0$				$K_{66}^{(1)} = g_7 = 50i_0$		
2	$K_{22}^{(2)} = g_5 = 50i_0$	$K_{23}^{(2)} = -g_6 = 0$	$K_{24}^{(2)} = g_2 = 0$	$K_{25}^{(2)} = -g_5 = -50i_0$	$K_{26}^{(2)} = g_6 = 0$	$K_{33}^{(2)} = g_7 = \frac{i_0}{3}$	$K_{34}^{(2)} = -g_3 = -i_0$	$K_{35}^{(2)} = g_6 = 0$
3								
4								
$K_{ij} = \sum_m K_{ij}^m$	$51.33i_0$	0	0	$-50i_0$	0	$50.33i_0$	$-i_0$	0

№ эл.	K_{36}	K_{44}	K_{45}	K_{46}	K_{55}	K_{56}	K_{66}
1							
2	$K_{36}^{(2)} = -g_7 = -\frac{i_0}{3}$	$K_{44}^{(2)} = g_1 = 4i_0$	$K_{45}^{(2)} = -g_2 = 0$	$K_{46}^{(2)} = g_3 = i_0$	$K_{55}^{(2)} = g_5 = 50i_0$	$K_{56}^{(2)} = -g_6 = 0$	$K_{66}^{(2)} = g_7 = \frac{i_0}{3}$
3		$K_{11}^{(3)} = g_1 = 3i_0$	$K_{12}^{(3)} = g_2 = -i_0$	$K_{13}^{(3)} = -g_3 = 0$	$K_{22}^{(3)} = g_4 = \frac{i_0}{3}$	$K_{23}^{(3)} = -g_5 = 0$	$K_{33}^{(3)} = g_6 = 50i_0$
4					$K_{11}^{(4)} = g_1 = 19.2i_0$	$K_{12}^{(4)} = g_2 = -14.4i_0$	$K_{22}^{(4)} = g_3 = 10.8i_0$
$K_{ij} = \sum_m K_{ij}^m$	$-0.33i_0$	$7i_0$	$-i_0$	i_0	$69.53i_0$	$-14.4i_0$	$61.13i_0$

Далее приступим к формированию матрицы жесткости всей системы, считая матрицы жесткости типовых элементов известными - выражения (2.8...2.10); (2.15...2.17) и (2.19...2.20). Для этого предварительно составим таблицу, в которой приведем геометрические и жесткостные характеристики элементов (табл. 2.5). Здесь же вычислим значения g_i всех элементов, которые понадобятся в дальнейшем для определения компонентов $K_{ij}^{(m)}$.

При этом, используем формулы (2.17) для первого и второго элемента, (2.20) - для третьего и (2.9) - для четвертого. Затем определим вклад каждого элемента в компоненты матрицы жесткости системы и сами эти компоненты - аналогично тому, как делали это в предыдущем примере. Вычисления сведем в таблицу 2.6. Отметим, что локальные степени свободы элементов в общей системе координат приведены в табл. 2.1.

Далее используем систему разрешающих уравнений $\mathbf{K} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{P}$.

$$K = i_0 \cdot \begin{bmatrix} 8 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 51,33 & 0 & 0 & -50 & 0 \\ 2 & 0 & 51,33 & -1 & 0 & -0,33 \\ 2 & 0 & -1 & 7 & -1 & 1 \\ 0 & -50 & 0 & -1 & 69,53 & -14,4 \\ 1 & 0 & -0,33 & -1 & -14,4 & 61,13 \end{bmatrix} ;$$

$$P = \begin{bmatrix} 52,16 \\ 15 \\ -60 \\ -60 \\ 0 \\ -60 \end{bmatrix} ; \quad Z = K^{-1} \cdot P = \begin{bmatrix} 9,263 \\ 1,126 \\ -1,231 \\ -11,308 \\ 0,471 \\ -0,85 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{i_0} .$$

Матрицы единичных усилий $(kA^T)^{(m)}$ для первых двух элементов определяются выражениями (2.14), для третьего элемента – (2.18), а для четвертого (2.7).

Подставив в них данные из табл. 2.5 получим:

$$S^{(1)} = kA^T \cdot z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -50 & 0 & 0 & 50 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9,623 \\ 1,126 \\ -1,231 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -61,55 \\ 16,994 \\ 36,24 \end{bmatrix};$$

$$S^{(2)} = kA^T \cdot z_2 = \begin{bmatrix} 0 & -50 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9,623 \\ 1,126 \\ -1,231 \\ -11,308 \\ 0,471 \\ -0,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32,75 \\ 16,257 \\ -25,605 \end{bmatrix};$$

$$S^{(3)} = kA^{tT} \cdot z_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 & -50 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11,308 \\ 0,471 \\ -0,85 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42,5 \\ -34,39 \end{bmatrix};$$

$$S^{(4)} = kA^{m(4)} \cdot z_4 = 30i_a \cdot \frac{1}{i_0} \cdot \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 & 0,8 & -0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,471 \\ -0,85 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -26,604 \text{ кН.}$$

а)

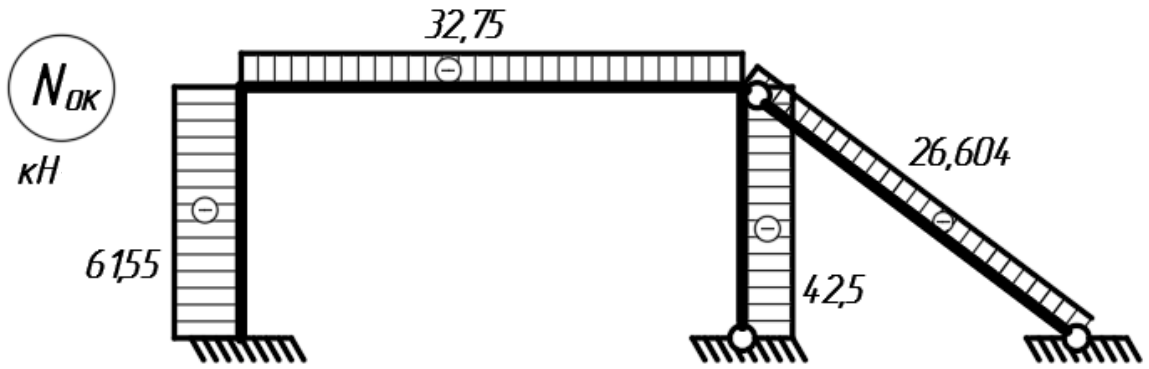


Рис. 2.18а Эпюры внутренних усилий от узловой нагрузки

б)

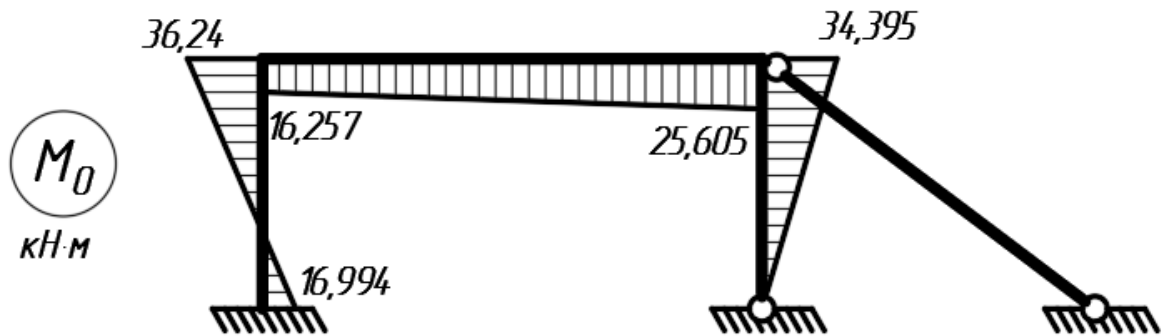


Рис. 2.18б Эпюры внутренних усилий от узловой нагрузки

Эпюра продольных сил (рис. 2.18а) является окончательной, а для получения окончательной эпюры моментов к эпюре моментов от действия узловой эквивалентной нагрузки (рис. 2.18б) необходимо добавить эпюру моментов от внеузловой нагрузки (рис. 2.17а). На рис. 2.19а показана окончательная эпюра моментов от заданной нагрузки, а на рис. 2.19б приведена окончательная эпюра поперечных сил, построенная с использованием дифференциальной зависимости.

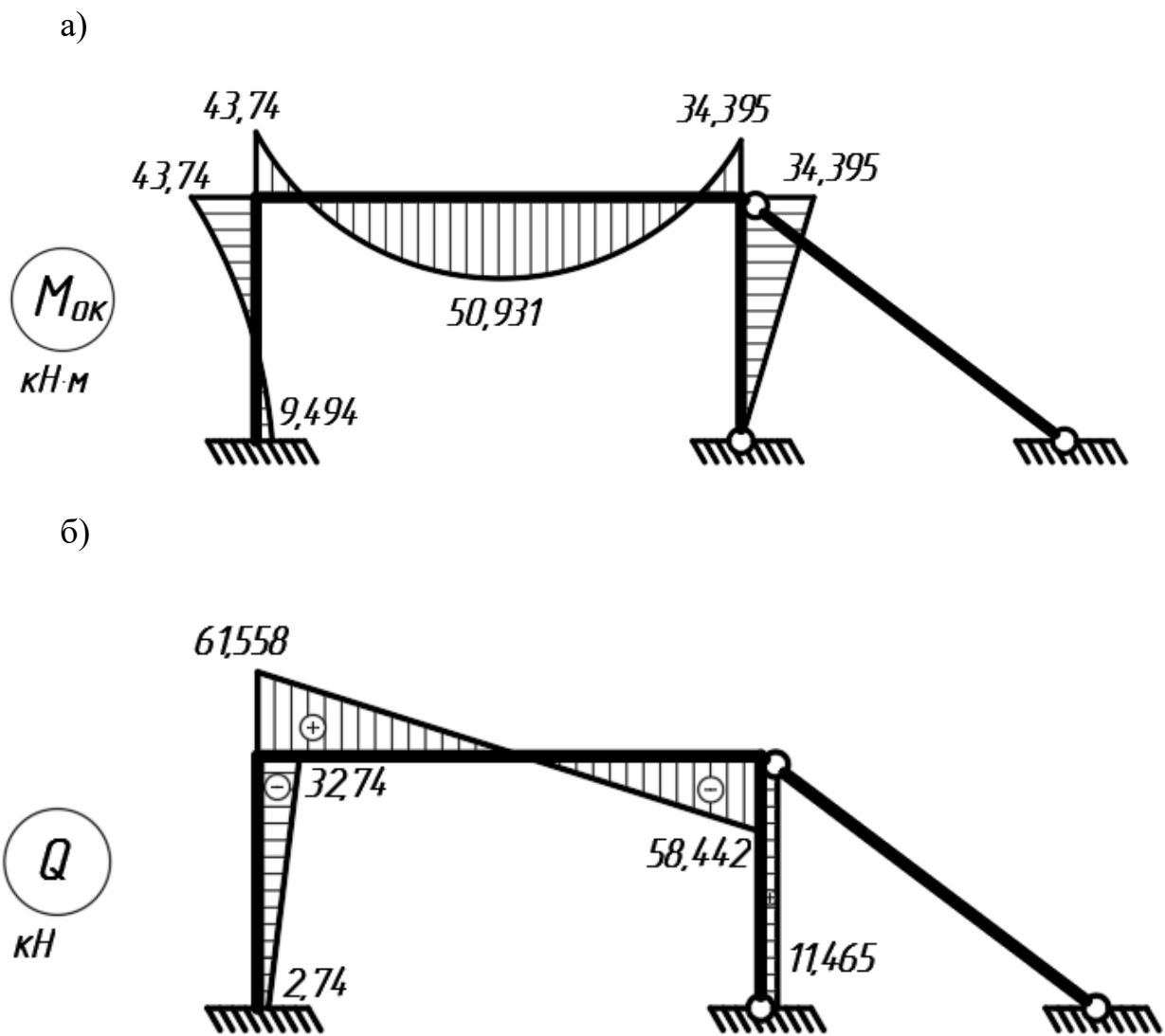


Рис. 2.19 Окончательные эпюры внутренних усилий

Эпюра продольных сил не меняет своей формы при переходе от узловой нагрузки к исходной.

Поскольку при расчете методом перемещений статическая проверка является необходимой, вырезав последовательно все узлы и рассмотрев их равновесие, можно проверить правильность построения всех окончательных эпюр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вагапов Р.Ф., Капитонов С.М. Строительная механика: Конспект лекций. Часть 2 – Уфа: Изд-во УГНТУ, 1996. –146с.
2. Ванюшенков М.Г., Сеницын С.Б. Матричный метод перемещений и метод конечных элементов решения задач строительной механики: Учебное пособие. – М.: МИСИ, 1984. – 125с.
3. Основы строительной механики стержневых систем: Учебник / Н.Н. Леонтьев и др. – М.: Изд-во АСВ, 1996. – 541 с.
4. Баженов В.А. и др. Строительная механика. Компьютерные технологии и моделирование: Учебник / В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, О.В. Шишов / под общ. ред. В.А. Баженов. – М.: Изд-во СКАД СОФТ, Изд-й Дом АСВ, 2014. – 911с.