

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»

А.Е. Кобитянский, А.В. Шафранов

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Конспект лекций

В двух частях

Часть 1

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета

Издательство
Пермского национального исследовательского
политехнического университета
2017

УДК 621.01 (078)
К55

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор *В.Ф. Панов*
(Пермский государственный национальный
исследовательский университет);

д-р техн. наук, профессор *В.Я. Беленький*
(Пермский национальный исследовательский
политехнический университет)

Кобитянский, А.Е.

К55 Теория механизмов и машин: конспект лекций : в 2 ч. / А.Е. Кобитянский, А.В. Шафранов. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2017. – 137 с.

ISBN 978-5-398-01724-3

Ч. 1. 2017. – 137 с.

ISBN 978-5-398-01725-0

Представлены материалы по структурному и кинематическому анализу рычажных, кулачковых и зубчатых механизмов в соответствии с курсом «Теория механизмов и машин». Рассмотрены основы синтеза зубчатого зацепления. Приведены контрольные вопросы и задания для усвоения изучаемого материала.

Предназначено для студентов технических специальностей вузов по направлениям: «Машиностроение», «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Энергетическое машиностроение», «Технологические машины и оборудование», «Оборудование и агрегаты нефтегазового производства», «Нефтегазовое дело» и др.

УДК 621.01 (078)

ISBN 978-5-398-01725-0 (ч. 1)
ISBN 978-5-398-01724-3

© ПНИПУ, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Лекция 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН	7
1.1. Понятия машины и механизма	7
1.2. Звенья механизмов и их виды	8
1.3. Кинематические пары и кинематические цепи	10
1.4. Классификация механизмов	14
Контрольные вопросы и упражнения	16
Лекция 2. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ	18
2.1. Подвижность механизмов	18
2.2. Заменяющие плоские механизмы	23
2.3. Структурный синтез механизмов по Ассур-Артоболовскому	24
2.4. Последовательность структурного анализа механизмов	26
Контрольные вопросы и упражнения	28
Лекция 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ. МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКИХ ДИАГРАММ	30
3.1. Основные понятия кинематики механизмов	30
3.2. Методы кинематического анализа	31
3.3. Графический метод кинематического анализа	32
Контрольные вопросы и упражнения	37
Лекция 4. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	42
4.1. Общие положения графоаналитического метода (метода планов)	42
4.2. Кинематический анализ механизма шарнирного четырехзвенника	44
4.3. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма	46
4.4. Кинематический анализ кулисного механизма	48
4.5. Кинематический анализ пятизвенного стержневого механизма	50
Контрольные вопросы и упражнения	53
Лекция 5. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КИНЕМАТИКИ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ	55
5.1. Основные положения метода векторных контуров	55
5.2. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма	55
5.3. Кинематический анализ шарнирного четырехзвенника	58
5.4. Кинематический анализ кулисного механизма	60
Контрольные вопросы и упражнения	62

Лекция 6. ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ. ПАРАМЕТРЫ ЭВОЛЬВЕНТНОГО ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОЛЕС	64
6.1. Основные понятия	64
6.2. Основная теорема зацепления	66
6.3. Эвольвента окружности и ее свойства	67
6.4. Элементы прямозубого цилиндрического зубчатого колеса	68
6.5. Картина эвольвентного зацепления прямозубых цилиндрических колес	70
6.6. Параметры зацепления косозубых цилиндрических колес	71
Контрольные вопросы и упражнения	75
Лекция 7. СИНТЕЗ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОЛЕС	76
7.1. Основные качественные показатели зубчатого зацепления	76
7.2. Методы нарезания зубчатых колес	81
7.3. Коррекция зубчатых колес	83
7.3.1. Исходный производящий контур инструмента	83
7.3.2. Явление подреза зубчатого колеса	83
7.3.3. Основные виды коррекции зубчатых колес	85
Контрольные вопросы и упражнения	89
Лекция 8. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ	91
8.1. Рядовые (рядные) зубчатые механизмы	91
8.2. Планетарно-дифференциальные зубчатые механизмы	94
8.3. Комбинированные (смешанные) передачи	99
Контрольные вопросы и упражнения	100
Лекция 9. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ. ПАРАМЕТРЫ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ	103
9.1. Основные типы кулачковых механизмов	103
9.2. Основные параметры кулачковых механизмов	107
Контрольные вопросы и упражнения	110
Лекция 10. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ	111
10.1. Задачи кинематического анализа	111
10.2. Кулачковый механизм с поступательным роликовым толкателем	111
10.3. Плоский кулачковый механизм с коромыслом	115
10.4. Кулачковый механизм с плоским толкателем	117
Контрольные вопросы и упражнения	118

Лекция 11. ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ВЫХОДНЫХ ЗВЕНЬЕВ

КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ	120
11.1. Требования к законам движения и их особенности	120
11.2. Особенности и характеристики некоторых типовых законов движения.....	121
11.2.1. Линейный закон движения	121
11.2.2. Параболический закон движения.....	123
11.2.3. Синусоидальный закон движения.....	126
11.2.4. Косинусоидальный закон движения	127
11.2.5. Трапецеидальный закон изменения ускорения выходного звена	128
Контрольные вопросы и упражнения	132
Список литературы	136

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изложены теоретические основы структурного и кинематического анализа рычажных, зубчатых и кулачковых механизмов, а также рассмотрены вопросы синтеза зубчатого зацепления. Представлены конструкции, принципы действия, общие приемы и методы исследования типовых механизмов, широко применяемых в различных областях современной техники. Даны основные понятия и определения теории механизмов и машин. Представлены методики структурного анализа механизмов. Приведены основные методы кинематического исследования механизмов. Подробно рассмотрены способы изготовления зубчатых колес и вопросы синтеза прямозубого зубчатого зацепления.

Теоретические вопросы учебного пособия сопровождаются конкретными примерами. В конце каждого раздела предложены контрольные вопросы и задачи, решение которых способствует качественному усвоению материалов.

Материал пособия систематизирован и изложен в соответствии с курсом «Теория механизмов и машин» и базируется на сведениях, полученных студентами при изучении естественно-научных и общетехнических дисциплин: математики, физики, теоретической механики, начертательной геометрии, инженерной графики и др.

Предлагаемое пособие может быть использовано студентами при выполнении лабораторных работ, контрольных заданий, курсового проекта, а также для подготовки к сдаче экзамена при изучении курса «Теория механизмов и машин».

Лекция 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Содержание: понятия машины и механизма; виды звеньев механизмов; кинематические пары, кинематические цепи и их классификация; классификация механизмов.

Ключевые слова: машина; механизм; кинематическая пара; кинематическая цепь; степень свободы.

1.1. Понятия машины и механизма

Теория механизмов и машин (ТММ) – наука об общих методах исследования механизмов и машин в связи с их анализом и синтезом.

Машина – техническое устройство, выполняющее *механические движения* для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения труда человека, повышения его качества и производительности.

По выполняемым функциям различают четыре основных класса машин (рис. 1.1).

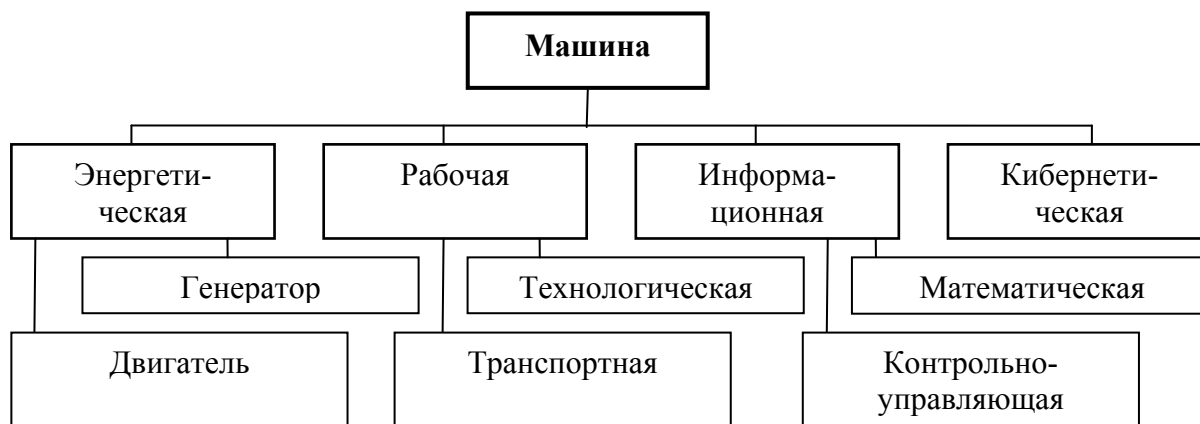


Рис. 1.1. Классификация машин

Энергетические машины предназначены для преобразования энергии: *машины-двигатели* (тепловые, электрические, гидравлические, пневматические двигатели и т.д.) и *машины-генераторы* (электрогенераторы, гидронасосы, компрессоры и т.д.).

Рабочие машины предназначены для преобразования материалов за счет их перемещения или изменения их формы и свойств: *транспортные машины* (лифты, конвейеры и т.д.) и *технологические машины* (станки, прессы, молоты и т.д.).

Информационные машины предназначены для получения и преобразования информации: *контрольно-управляющие* и *математические машины*.

Кибернетические машины имитируют или заменяют человека в процессах деятельности, присущих только ему или объектам живой природы. Обладают элементами искусственного интеллекта (промышленные роботы, искусственное сердце и т.д.).

Техническая система, состоящая из нескольких соединенных последовательно или параллельно машин, называется **машинным агрегатом**. Например, в состав машинного агрегата входят: двигатель (ДВ), передаточный механизм (П), рабочая (РМ) и контрольно-управляющая машины (рис. 1.2).

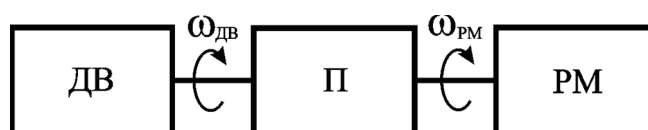


Рис. 1.2. Структурная схема машинного агрегата

Механизм – система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел.

В машинах и механизмах применяются абсолютно твердые (жесткие), упругие (гибкие), жидкие и газообразные тела.

В ТММ классически изучаются машины и механизмы только с **абсолютно твердыми телами**.

1.2. Звенья механизмов и их виды

Элементарными составляющими любого технического устройства являются **детали** – изделия, которые изготавливаются без сборочных операций и не могут быть разобраны без разрушения (зубчатые колеса, валы и т.п.).

Совокупность деталей, совершающая движение как одно целое и участвующая в заданном преобразовании движения, называется **звеном**. Например, шатун – **звено** двигателя внутреннего сгорания состоит из **деталей**: стержня, втулок, крышек, соединенных болтами, гайками и т.п. (рис. 1.3).

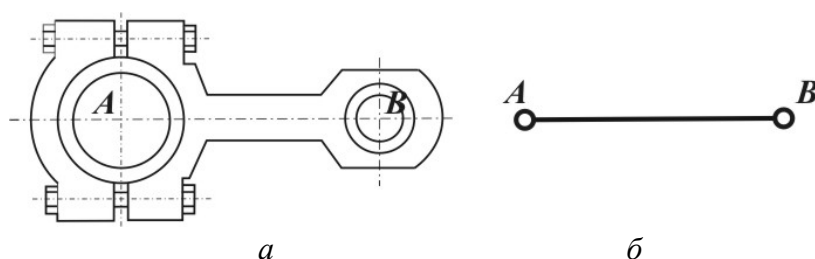


Рис. 1.3. Шатун двигателя внутреннего сгорания:
a – конструктивная форма; *б* – условное изображение

Звенья классифицируют по ряду признаков (рис. 1.4).

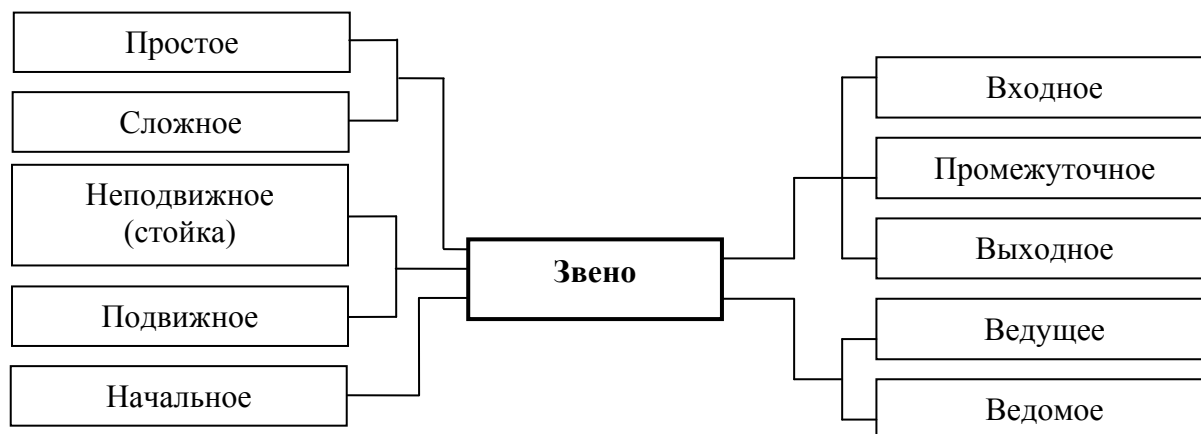


Рис. 1.4. Классификация звеньев

Звенья, имеющие не более двух элементов, которыми они присоединяются к другим звеньям механизма, называются **простыми**, все остальные – **сложными**. При исследовании механизмов звенья независимо от их конструктивной формы изображаются согласно ГОСТ 2.770-68*: простые – в виде линий (рис. 1.3, б), а сложные (рис. 1.5, а, г) – в виде геометрических фигур (рис. 1.5, б, в, д).

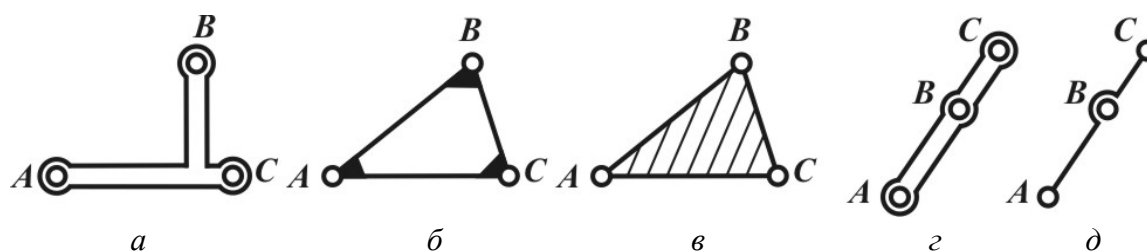


Рис. 1.5. Примеры сложных звеньев (а, г) и их условных обозначений (б, в, д)

Неподвижные детали механизма, образующие одну жесткую систему неизменной конфигурации, называют **стойкой** или **неподвижным звеном**. Например, в двигателе внутреннего сгорания (рис. 1.6) за неподвижное звено условно принимаются детали, неизменно связанные с корпусом 0.

Подвижное звено – деталь или группа деталей, образующая одну жесткую **подвижную** систему тел.

Звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения других звеньев, называется **входным** (звено 1 – поршень, рис. 1.6).

Звено, совершающее требуемое движение, для выполнения которого предназначен механизм – **выходное** (звено 3 – коленчатый вал, рис. 1.6). Все остальные звенья механизма называются **промежуточными** (звено 2 – шатун, рис. 1.6).

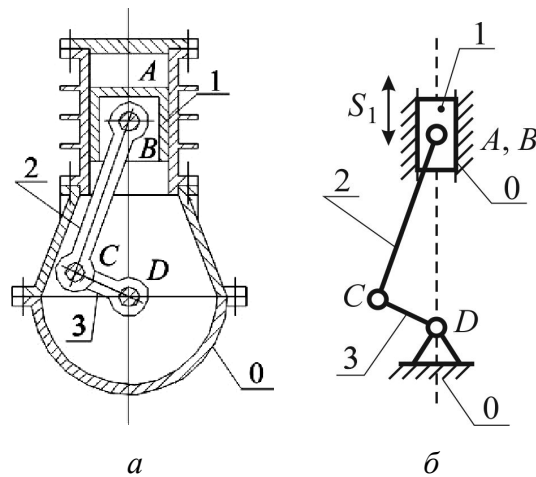


Рис. 1.6. Механизм двигателя внутреннего сгорания:
a – со схематизированными конструктивными формами звеньев;
б – структурная схема

Ведущим называют звено, для которого элементарная работа приложенных к нему внешних сил и моментов сил является положительной.

Ведомое звено – звено, для которого элементарная работа приложенных к нему внешних сил и моментов сил является отрицательной или равна нулю.

Обобщенная координата механизма – каждая из независимых между собой координат, определяющих положение всех звеньев механизма относительно стойки. **Начальное звено** – звено, которому при исследовании механизма приписывается одна или несколько обобщенных координат.

1.3. Кинематические пары и кинематические цепи

Соединение двух звеньев, допускающее их относительное движение, называется **кинематической парой**.

Классификация кинематических пар по основным признакам представлена на рис. 1.7.

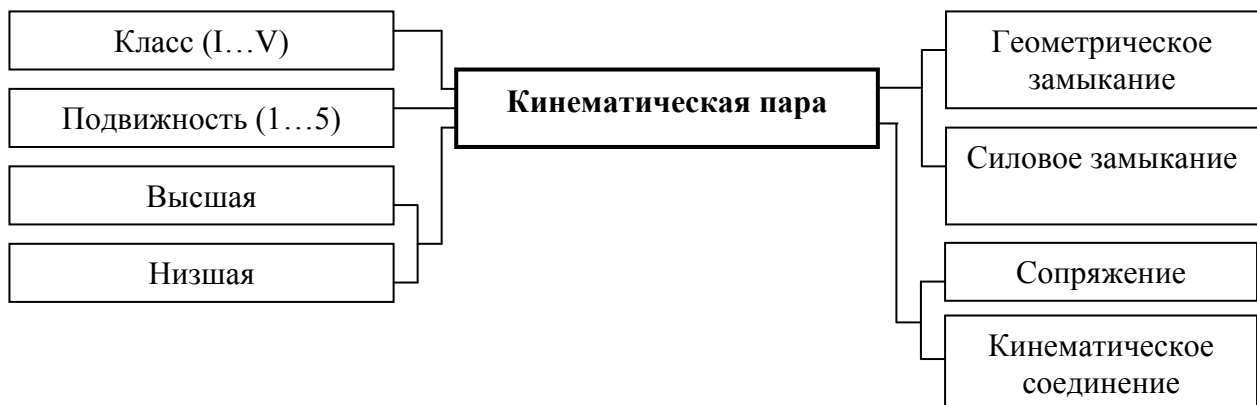


Рис. 1.7. Классификация кинематических пар

В зависимости от способа соединения звеньев на относительное движение каждого звена накладываются **связи**. Количество условий связей S определяет **класс** кинематической пары (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Примеры кинематических пар

Класс пары	Число условий связи, S	Число степеней свободы, H	Название пары	Конструктивная форма	Условные обозначения
I	1	5	Точечная (шар–плоскость)		
II	2	4	Трубчатая (шар–цилиндр)		
			Линейная (цилиндр–плоскость)		
III	3	3	Сферическая		
			Плоскостная		
IV	4	2	Цилиндрическая		
			Сферическая с пальцем		
V	5	1	Поступательная		
			Вращательная		
			Винтовая		

Количество степеней свободы (*подвижность*) кинематической пары $H = 6 - S$ – количество независимых координат, необходимых для описания относительного положения звеньев кинематической пары. В зависимости от количества допускаемых движений H различают *одно-, двух-, трех-, четырёх- и пятиподвижные кинематические пары*.

Элемент кинематической пары – общая поверхность, линия или точка, по которым происходит соединение двух звеньев, образующих кинематическую пару.

Кинематическая пара, элементом которой является линия или точка, называется **высшей** (например, точечная, трубчатая, линейная, табл. 1.1). В **низшей** – элементом кинематической пары является поверхность (например, сферическая, плоскостная, цилиндрическая, поступательная, вращательная, винтовая, табл. 1.1).

По *условиям замыкания* звеньев кинематические пары делятся на пары с **геометрическим замыканием**, реализуемым геометрическими формами сопрягаемых элементов звеньев, и с **силовым замыканием**, реализуемым силой веса, упругостью пружины и т.д.

Подвижное соединение двух звеньев, образованное путем их непосредственного соединения, называют **сопряжением** (все пары в табл. 1.1). Если подвижное соединение реализовано с помощью промежуточных твердых тел,

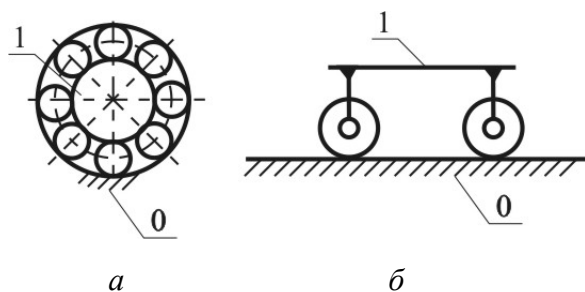


Рис. 1.8. Кинематические соединения:

a – подшипник качения;

б – направляющая поступательного движения

не участвующих в заданном преобразовании движения, то получают **кинематические соединения**. Например, вращательная пара между стойкой 0 и валом 1 , образованная с помощью подшипника качения (рис. 1.8, *a*); поступательная пара между стойкой 0 и ползуном 1 , реализованная при помощи роликовых направляющих (рис. 1.8, *б*) и т.п.

Схема механизма – графическое изображение механизма, на котором посредством условных обозначений показаны принятые для исследования модели звеньев и кинематических пар.

Система звеньев, образующих между собой кинематические пары, называется **кинематической цепью**. В основе любого механизма лежит кинематическая цепь.

Классификация кинематических цепей приведена на рис. 1.9.



Рис. 1.9. Классификация кинематических цепей

В **пространственной** кинематической цепи точки некоторых звеньев могут описывать пространственные или плоские траектории, расположенные в пересекающихся плоскостях (рис. 1.10). Звенья **плоской** кинематической цепи совершают плоское движение в одной или параллельных плоскостях (рис. 1.11). На структурных схемах кинематических цепей (см. рис. 1.10, 1.11) обозначения пар приведены в соответствии с ГОСТ 2.770-68* (см. табл. 1.1).

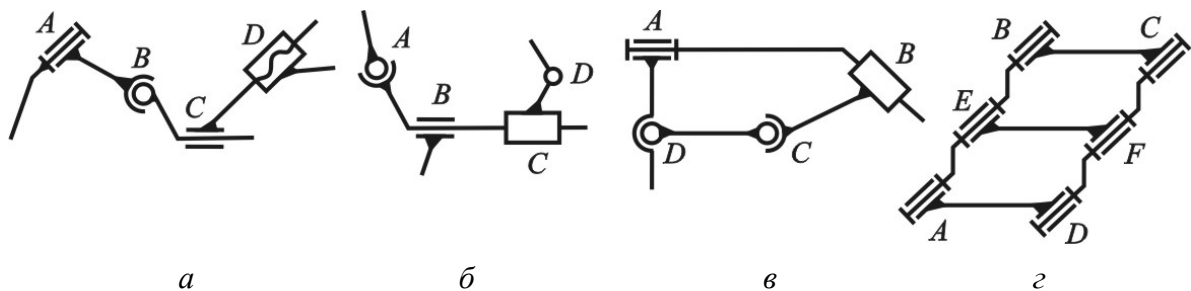


Рис. 1.10. Пространственные кинематические цепи: *a* – простая незамкнутая; *б* – сложная незамкнутая; *в* – простая замкнутая; *г* – сложная замкнутая

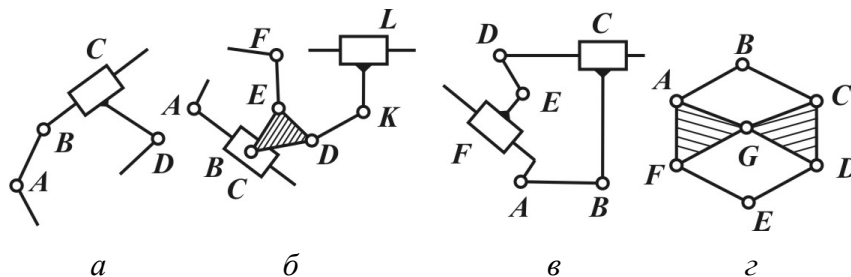


Рис. 1.11. Плоские кинематические цепи: *a* – простая незамкнутая; *б* – сложная незамкнутая; *в* – простая замкнутая; *г* – сложная замкнутая

Каждое звено **простой** кинематической цепи входит не более чем в две кинематические пары (рис. 1.10, *a, в*; рис. 1.11, *a, в*). Если в кинематической цепи имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары, то такая цепь – **сложная** (рис. 1.10, *б, г*; рис. 1.11, *б, г*).

В **незамкнутой** кинематической цепи имеется хотя бы одно звено, входящее только в одну кинематическую пару (рис. 1.10, *a, б*; рис. 1.11, *a, б*). Каждое

из звеньев **замкнутой** кинематической цепи образует кинематические пары по крайней мере с двумя другими звеньями (рис. 1.10, в, г; рис. 1.11, в, г).

1.4. Классификация механизмов

Механизм – кинематическая цепь, в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев все остальные звенья совершают однозначно определяемые движения.

Классификация механизмов по ряду основных признаков представлена на рис. 1.12.

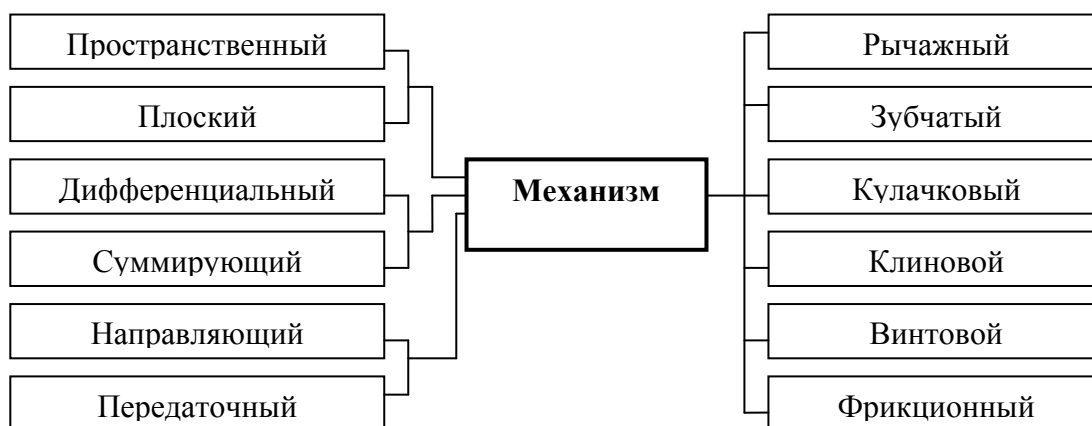


Рис. 1.12. Классификация механизмов

По характеру движения звеньев различают **плоские** (движение звеньев в одной или параллельных плоскостях, рис. 1.13, а; рис. 1.14, а, б, в; рис. 1.15, б, г, д) и **пространственные** (движение звеньев в пересекающихся плоскостях, рис. 1.13, б; рис. 1.14, г; рис. 1.15, в, г) механизмы.

В основном механизмы имеют одно входное и одно выходное звено. В противном случае по количеству входных и выходных звеньев различают дифференциальные и суммирующие механизмы. Механизмы с одним входным звеном и несколькими выходными звеньями называются **дифференциальными** (дифференциалы автомобилей и т.п.). Механизмы с несколькими входными звеньями и одним выходным – **суммирующими** (станочный дифференциал, некоторые механизмы текстильных и счетно-решающих машин и т.п.).

По назначению механизмы подразделяются на **передаточные** – воспроизводящие требуемую функциональную зависимость между перемещениями входных и выходных звеньев (зубчатые, ременные, цепные передачи, вариаторы и т.п.), и **направляющие** – механизмы, в которых определенная точка звена воспроизводит заданную траекторию (некоторые механизмы швейных машин и т.п.).

По конструктивному исполнению механизмы подразделяют: на рычажные, кулачковые, зубчатые, клиновые, винтовые, фрикционные, механизмы

с гибкими связями, с гидравлическими и пневматическими устройствами, с электрическими устройствами и т.д.

Рычажные (стержневые) механизмы – механизмы, звенья которых образуют только низшие кинематические пары (рис. 1.13).

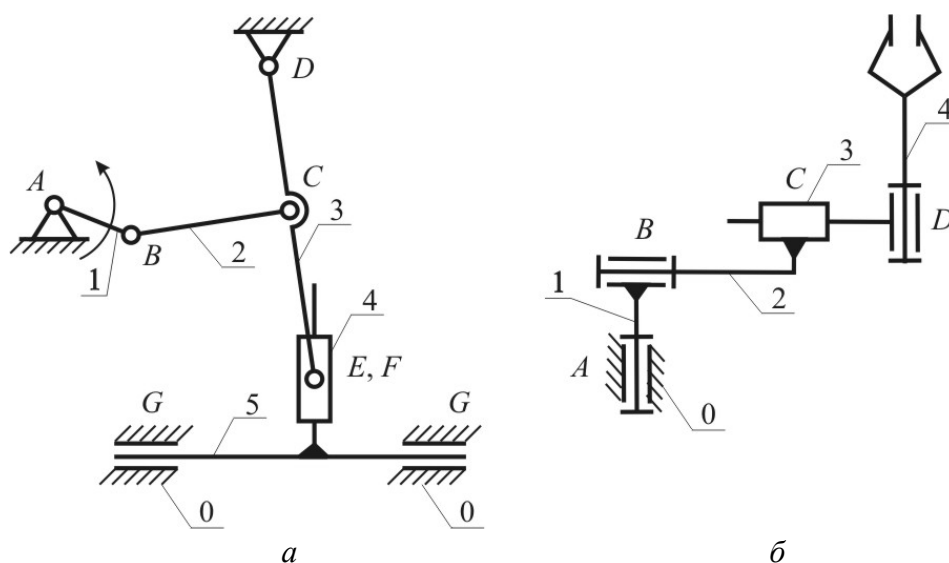


Рис. 1.13. Структурные схемы рычажных механизмов:
а – плоский замкнутый; *б* – пространственный незамкнутый

Достоинства рычажных механизмов: простота в эксплуатации; высокая технологичность изготовления; возможность выполнения шарнирных соединений на подшипниках качения; низкий износ соприкасающихся поверхностей; долговечность и надежность в работе.

Недостатки: большие габариты механизмов; значительные динамические усилия, возникающие при высоких скоростях.

Кулачковые механизмы – механизмы, содержащие по крайней мере один **кулачок** – звено, сопрягаемый элемент высшей кинематической пары которого выполнен в виде криволинейной поверхности (звено 1, рис. 1.14).

Достоинства кулачковых механизмов: простота конструкции, малые габариты по сравнению с эквивалентными рычажными механизмами, надежность, возможность получения любого закона движения выходного звена, в том числе движение с остановками заданной продолжительности.

Недостатки: высокие удельные давления и повышенный износ элементов высшей кинематической пары; необходимость обеспечения замыкания звеньев; трудности изготовления кулачков сложного профиля.

Зубчатые механизмы – передаточные механизмы, содержащие по крайней мере одно **зубчатое зацепление** – высшую пару, образованную последовательно соприкасающимися зубьями двух зубчатых колес (рис. 1.15, *а*).

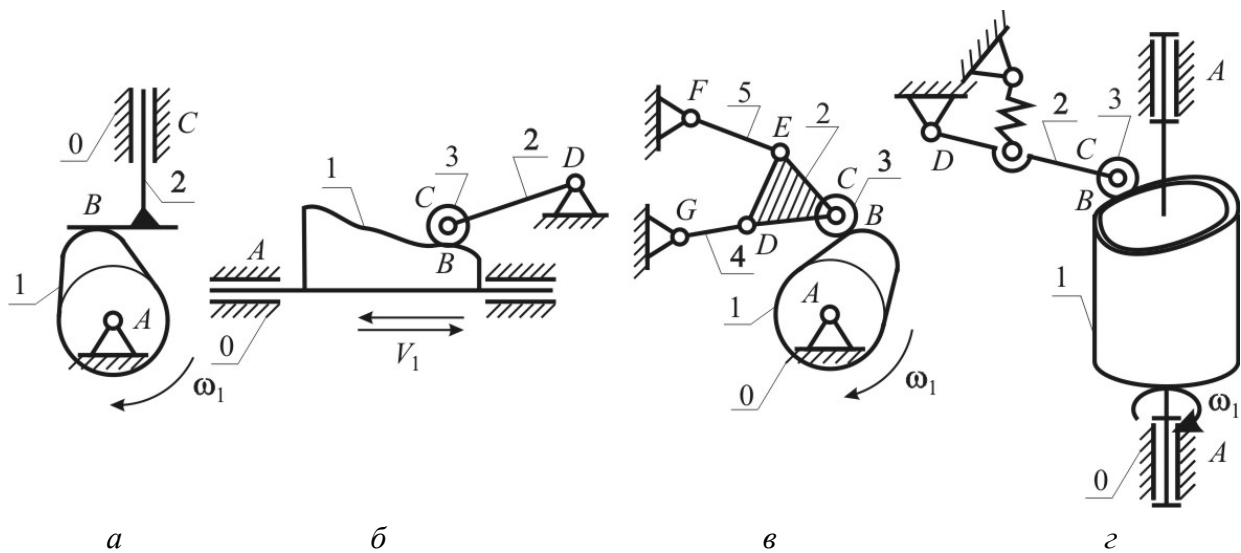


Рис. 1.14. Схемы кулачковых механизмов: *а, б, в* – плоских; *г* – пространственных

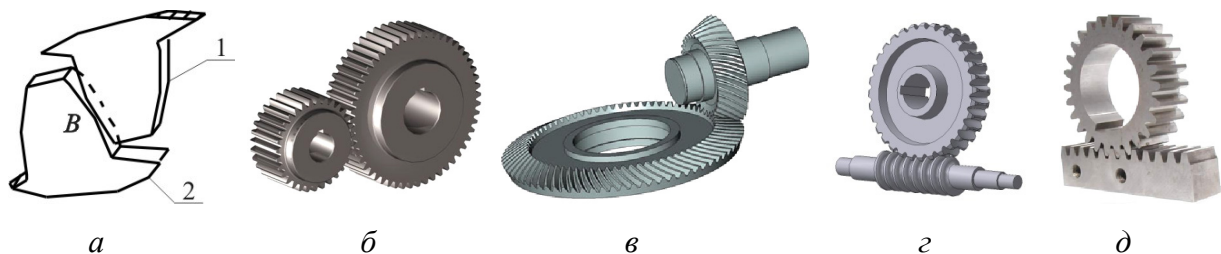


Рис. 1.15. Примеры зубчатых передач: *а* – зубчатое зацепление; *б* – цилиндрическая; *в* – коническая; *г* – червячная; *д* – реечная

Зубчатые механизмы служат, как правило, для передачи, вращательного движения по заданному закону между валами с параллельными (рис. 1.15, *б*), пересекающимися (рис. 1.15, *в*) и перекрещивающимися (рис. 1.15, *г*) осями.

Преобразование вращательного движения в поступательное или наоборот реализуется *реечной* передачей (рис. 1.15, *д*), состоящей из зубчатого колеса и зубчатой рейки.

Достоинства зубчатых механизмов: компактность; высокий КПД; надежность и простота обслуживания; долговечность; высокая точность воспроизведения заданного закона движения; возможность обеспечения постоянного передаточного отношения; работа в широком диапазоне окружных скоростей и передаваемых мощностей.

Недостатки: необходимость высокой точности изготовления и сборки; шум в работе при больших скоростях; ограниченность ряда передаточных чисел.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Основные задачи теории механизмов и машин.
2. Понятие о машине и механизме. Примеры.

3. Основной признак, отличающий машину от других технических устройств.

4. Классификация машин.

5. Машинный агрегат и его структура.

6. Деталь и звено механизма.

7. Классификация звеньев механизма.

8. Кинематические пары и их классификация.

9. Признаки существования кинематической пары.

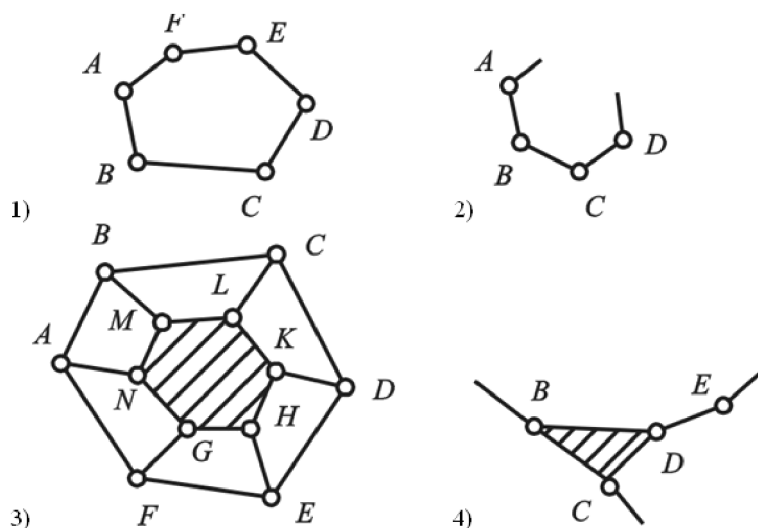
10. Особенности силового и геометрического замыкания элементов кинематических пар.

11. Кинематические цепи и их классификация.

12. Признаки классификации механизмов.

13. Преимущества и недостатки основных видов механизмов.

14. Виды кинематических цепей, представленные на схемах.



Лекция 2

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Содержание: подвижность механизма; избыточные и пассивные связи; структурный синтез механизмов; алгоритм структурного анализа.

Ключевые слова: степень подвижности; избыточная и пассивная связь; заменяющие механизмы; структурные группы; элементарный механизм.

Безмасштабное графическое изображение механизма, на котором с помощью условных обозначений показаны звенья и образуемые ими кинематические пары, называют **структурной схемой механизма**. Такая схема значительно упрощает понимание строения механизма и используется при его структурном анализе.

Цель структурного анализа – определение степени подвижности механизма и разложение его на простейшие кинематические цепи, к которым можно применить общие методы кинематического и силового анализа.

Структурный анализ предусматривает:

- выделение и классификацию подвижных звеньев и кинематических пар;
- определение степени подвижности (числа степеней свободы) механизма;
- выявление и устранение избыточных (пассивных) связей и лишних степеней свободы;
- выделение и классификацию простейших кинематических цепей, образующих исследуемый механизм;
- определение класса и порядка механизма.

2.1. Подвижность механизмов

Степень подвижности (свободы) механизма W – количество обобщенных координат механизма, которые необходимо задать начальным звеньям для определенности положения остальных подвижных звеньев относительно стойки.

Степень подвижности *пространственных* механизмов определяется по формуле Сомова–Малышева:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (2.1)$$

где 6 – количество степеней свободы каждого из звеньев в пространстве до их соединения кинематическими парами; n – количество подвижных звеньев механизма; p_i – количество кинематических пар i -го класса ($i = 1 \dots 5$); 5, 4, 3,

2, 1 – количество условий связи, накладываемых каждой кинематической парой i -го класса.

Например, для замкнутого пространственного рычажного механизма (рис. 2.1, а) $n = 4, p_5 = 4, p_3 = 1$, степень подвижности

$$W = 6n - 5p_5 - 3p_3 = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 1.$$

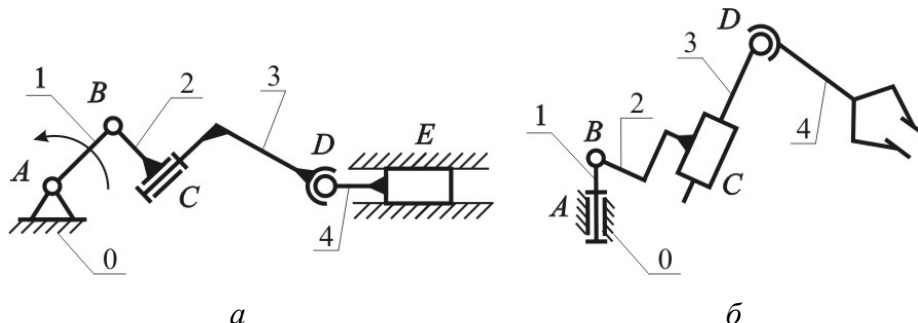


Рис. 2.1. Структурные схемы пространственных механизмов:
а – замкнутого; б – незамкнутого

Для незамкнутого механизма манипулятора (рис. 2.1, б) $n = 4, p_5 = 3$ (пары А, В и С), $p_3 = 1$ (пара D), степень подвижности

$$W = 6n - 5p_5 - 3p_3 = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 6.$$

Подвижность *плоских* механизмов определяется по **формуле Чебышева**:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4, \quad (2.2)$$

где n – количество подвижных звеньев механизма; p_5 – количество низших кинематических пар (V класса); p_4 – количество высших кинематических пар (IV класса).

Например, для плоского зубчато-рычажного механизма (рис. 2.2): $n = 6, p_5 = 7, p_4 = 1$ (пара В), степень подвижности

$$W = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 - 1 = 3.$$

На механизм могут быть наложены как *избыточные*, так и *пассивные* связи или *лишние степени свободы*.

1) Избыточные связи не влияют на кинематику механизма, но вызывают его статическую неопределимость.

Например, если оси вращательных пар шарнирного четырехзвенника (рис. 2.3, а) параллельны, то механизм является плоским:

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

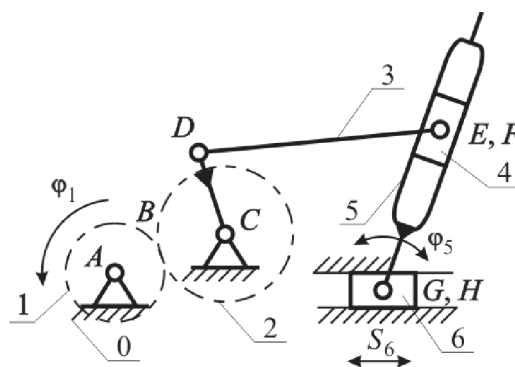


Рис. 2.2. Структурная схема плоского зубчато-рычажного механизма

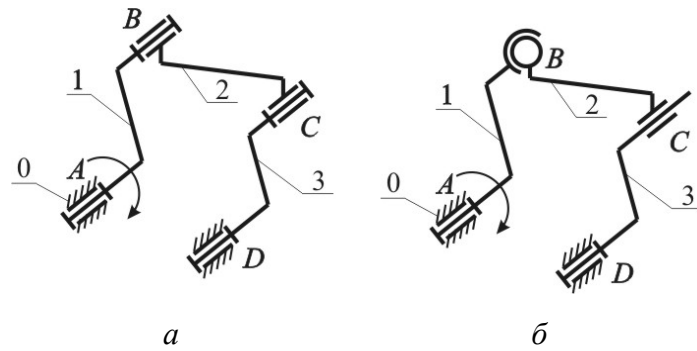


Рис. 2.3. Схемы рычажных механизмов:
a – с избыточными связями; *б* – рационального

Если же непараллельность осей вращательных пар этого механизма не компенсируется зазорами между элементами пар, то механизм является пространственным:

$$W = 6n - 5p_5 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = -2.$$

Значит, в этом случае на механизм наложены избыточные связи. Количество избыточных связей g можно определить по формуле

$$g = W_0 - 6n + 5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1, \quad (2.3)$$

где W_0 – **основная подвижность** механизма, без учета избыточных связей.

Для механизма на рис. 2.3, *a*

$$g = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 3.$$

Избыточные связи исключают увеличение подвижности пар. Например, если вращательные пары *B* и *C* (рис. 2.3, *a*) заменить сферической и цилиндрической (рис. 2.3, *б*), то получится **рациональный механизм**:

$$g = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0.$$

2) Пассивные связи.

Пример 1. Степень подвижности зубчатого механизма (рис. 2.4, *a*)

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 4 = 0.$$

Это говорит о том, что его звенья не имеют подвижности, но из схемы следует, что при задании движения зубчатому колесу *1* остальные колеса получают определенные движения.

Ничего не изменится в движении выходного колеса *3*, если колесо *2'*, накладывающее **пассивные связи**, удалить из механизма (рис. 2.4, *б*). Без учета пассивного звена

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

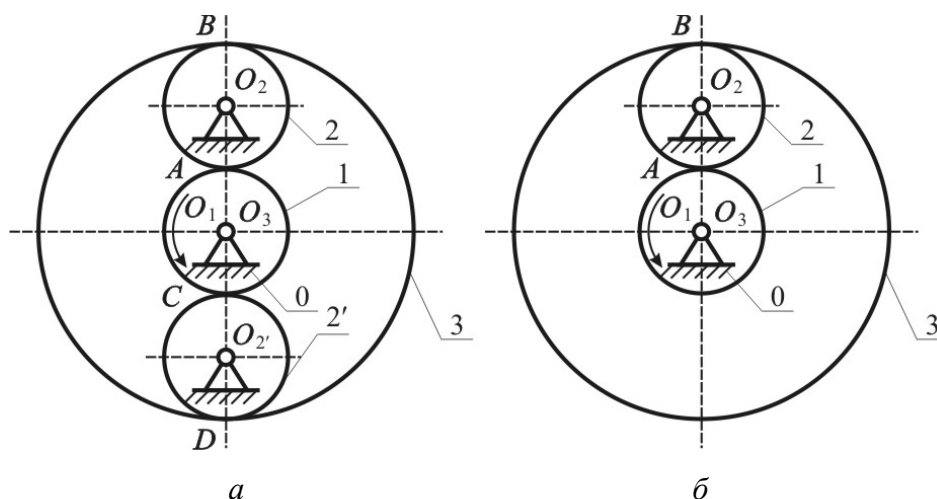


Рис. 2.4. Схемы зубчатых механизмов:
a – с пассивными связями; *б* – без пассивных связей

В данном случае звено 2', накладывающее пассивные условия связи, вводится для того, чтобы снизить усилия в зацеплении зубьев колес и, следовательно, уменьшить габариты передачи.

Пример 2. На рис. 2.5, *a* показан плоский механизм параллельных кривошипов. Степень подвижности этого механизма

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0.$$

Это означает, что данная кинематическая цепь представляет собой жесткую неподвижную систему (ферму).

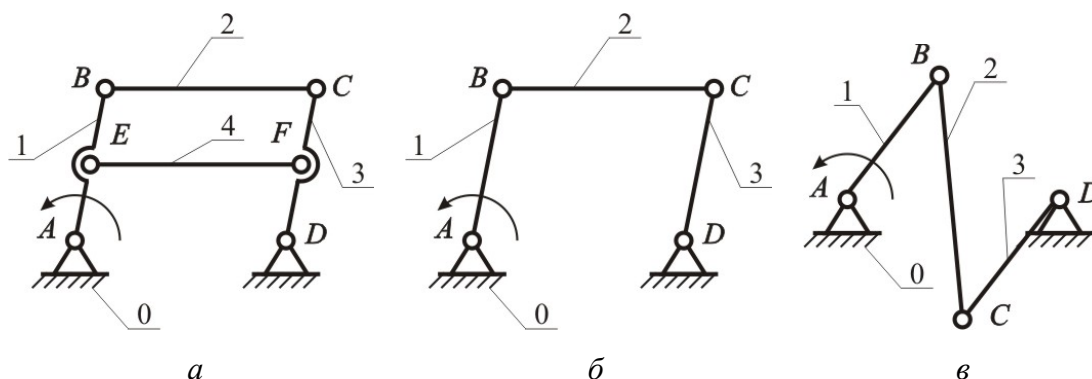


Рис. 2.5. Схема механизма параллельных кривошипов:
a – со звеном, налагающим пассивные условия связи; *б* – освобожденного от пассивных условий связи; *в* – механизм антипаралелограмма

Однако если размеры звеньев механизма удовлетворяют условиям $AB = CD$, $AE = EB$ и $DF = FC$, $BC = FE = AD$ и оси шарниров параллельны, то этот механизм обладает подвижностью $W = 1$, как и в механизме без звена 4 (рис. 2.5, *б*):

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Звено 4 устанавливается для увеличения жесткости и исключения пре- вращения механизма параллельных кривошипов в антипараллелограмм (рис. 2.5, в) при выходе второго кривошипа из крайних положений, в кото- рых оси всех звеньев расположены на одной прямой.

Если $AB \neq CD$, $AE \neq EB$ и $DF \neq FC$, $BC \neq FE \neq AD$, число степеней свободы механизма действительно будет равно 0 и движение звеньев невозможно.

Пример 3. Пример местной подвижности. Подвижность механизма (рис. 2.6, а)

$$W = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2.$$

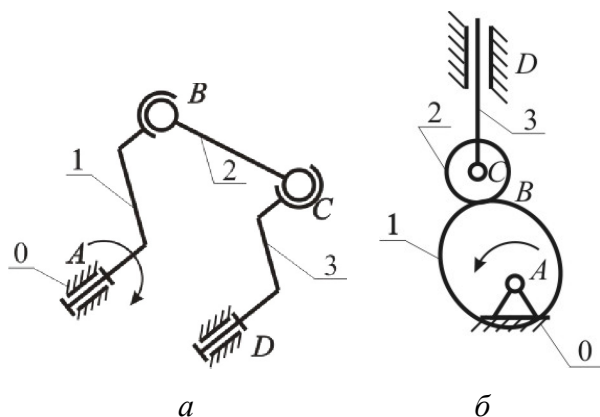


Рис. 2.6. Схемы механизмов с лишними степенями свободы

Здесь лишняя **местная подвижность** $W_m = 1$ дает возможность вращения шатуна 2 вокруг своей оси BC и не влияет на закон дви- жения механизма.

Местная подвижность не влия- ет на основной закон движения ме- ханизма, но полезна с точки зрения выравнивания износа шарниров: шатун 2 может при работе механиз- ма поворачиваться вокруг своей оси за счет динамических нагрузок.

Также таким свойством обладает круглый ролик кулачкового механизма (рис. 2.6, б). Вращение ролика 2 вокруг своей оси, проходящей через точку B , не оказывает влияния на характер движения звена 3. Свободно поворачи- вающийся ролик обладает местной подвижностью $W_m = 1$. Поэтому получен- ная подвижность данного механизма

$$W = W_o + W_m = 1 + 1 = 2.$$

Без нарушения характера движения механизма в целом ролик можно жестко соединить с толкателем.

Таким образом, избыточные связи существенно снижают работоспособ- ность и надежность конструкции. Если избавляются от избыточных связей, то получают **рациональные** или **самоустанавливающиеся** механизмы. Их можно собирать без натягов, что уменьшает силы трения в кинематиче- ских парах, увеличивает срок службы и надежность механизма.

Пассивные связи повышают жесткость механизма, уменьшают его де- формации, а также более равномерно распределяют нагрузку на звенья и ки- нематические пары.

Местные подвижности вводят в механизмы для улучшения условий ра- боты отдельных его частей (повышения КПД, уменьшения и выравнивания износа в кинематических парах, повышения надежности и т.п.).

Наличие пассивных условий связи и лишних степеней свободы должно **обязательно учитываться** при структурном анализе механизма.

2.2. Заменяющие плоские механизмы

Для упрощения дальнейшего структурного анализа высшие пары заменяют низшими так, чтобы **заменяющий механизм** обладал прежней подвижностью с сохранением мгновенных относительных движений всех его звеньев.

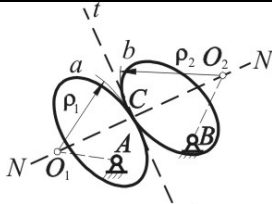
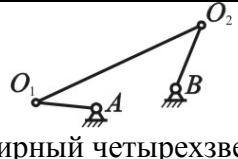
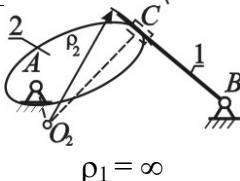
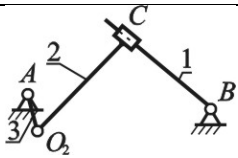
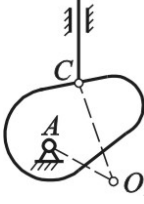
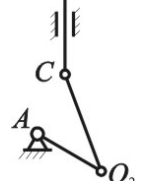
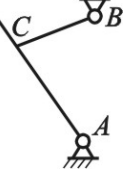
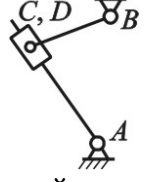
Алгоритм замены высших кинематических пар низшими:

1. В месте контакта элементов высшей пары проводят нормаль $N-N$.
2. На нормали находят центры кривизны ρ звеньев в месте контакта.
3. Помещают:
 - в центр кривизны вращательную пару, если ρ конечен;
 - в месте контакта поступательную пару, если $\rho = \infty$.
4. Соединяют между собой все кинематические пары звеньями.

Примеры замены высших пар низшими представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Примеры замены высших кинематических пар

№	Основной механизм	Заменяющий механизм
1		 шарнирный четырехзвенник
2	 $\rho_1 = \infty$	 кулисный механизм
3	 $\rho_1 = 0$	 кривошипно-ползунный механизм
4.	 $\rho_1 = \infty; \rho_2 = 0$	 кулисный механизм

Заменяющий механизм эквивалентен основному механизму только в рассматриваемом положении.

За исключением механизма 4 (см. табл. 2.1), при неизменной структуре заменяющего механизма для других положений, размеры звеньев изменятся, так как сместятся центры кривизны элементов высшей кинематической пары. Следовательно, при кинематическом и динамическом исследовании механизмов с высшими кинематическими парами их заменяющие механизмы будут иметь переменные по величине звенья.

2.3. Структурный синтез механизмов по Ассур-Артоболовскому

Основной принцип образования механизмов: механизм может быть образован последовательным присоединением к **начальным звеньям** и **стойке** кинематических цепей с **нулевой степенью подвижности** относительно тех звеньев, к которым цепь присоединяется. Такие кинематические цепи называют **структурными группами Ассура**.

Начальное звено, связанное со стойкой кинематической парой, называют **элементарным механизмом** или **механизмом I класса**.

Механизм, состоящий из элементарного(ных) механизма(ов) с присоединенной к нему (ним) только одной структурной группой, называют **простым**.

Степень подвижности **плоской структурной группы**, в состав которой входят только низшие кинематические пары,

$$W_{\text{гр}} = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 = 0, \quad (2.4)$$

следовательно,

$$p_5 = \frac{3}{2} n. \quad (2.5)$$

Так как количества звеньев и кинематических пар могут быть только целыми, то количество звеньев плоских структурных групп всегда **четное число**, а количество низших кинематических пар **кратно трем** (2.5).

Кинематические пары, которыми звенья структурной группы соединяются между собой, называются **внутренними**. Пары, которыми звенья группы присоединяются к другим звеньям – **внешними**.

Группа, состоящая из двух звеньев и трех кинематических пар, относится ко **II классу 2-го порядка** (II^2). Порядок определяется количеством внешних пар, которыми группа присоединяется к основному механизму.

В табл. 2.2 представлены виды структурных групп II класса (например, II_1 – первый вид) и их обозначения, а также образуемые ими простые одноподвижные механизмы.

Структурные группы второго класса

Вид	Схема	Механизм
1, II ₁		Шарнирный четырехзвенник
2, II ₂		Кривошипно-ползунный
3, II ₃		Кулисный
4, II ₄		Тангенсный
5, II ₅		Синусный

Класс структурной группы (*выше второго*) определяется количеством внутренних пар, входящих в наиболее сложный замкнутый контур.

Например, сложная незамкнутая кинематическая цепь (рис. 2.7, а) является структурной группой III класса 3-го порядка (III³).

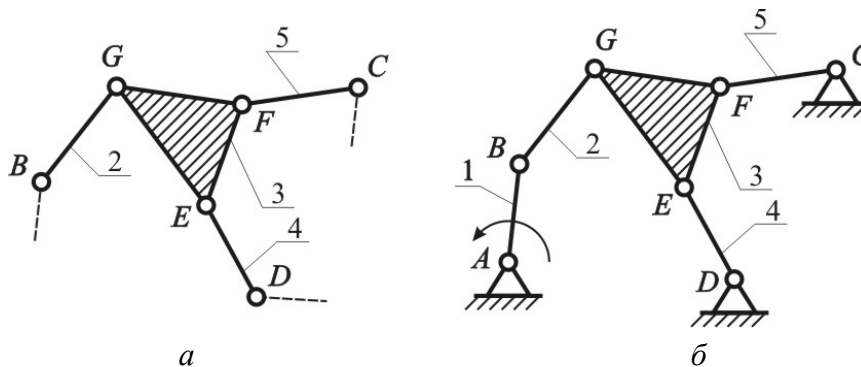


Рис. 2.7. Схемы: структурной группы III³ (а); простого механизма III³ (б)

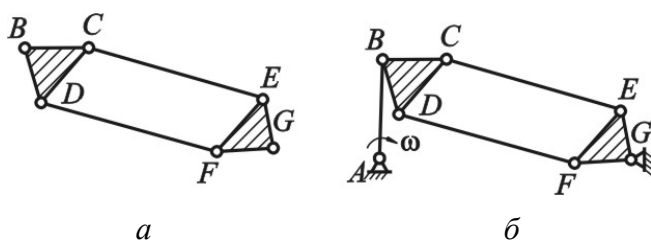


Рис. 2.8. Схемы: структурной группы IV^2 (а); простого механизма IV^2 (б)

Сложная замкнутая структурная группа (рис. 2.8, а) относится к **IV классу 2-го порядка** (IV^2).

Класс механизма определяется высшим классом структурных групп, входящих в его состав.

2.4. Последовательность структурного анализа механизмов

Алгоритм структурного анализа:

1. По исходным данным выполняется структурная схема механизма.
2. Определяется степень подвижности механизма.
3. Устраняются пассивные связи и лишние степени свободы.
4. При наличии высших пар строится заменяющий механизм.
5. Проводится разложение механизма на структурные группы, и определяется класс, вид и порядок групп Ассур и самого механизма.
6. Составляется формула строения механизма.

Замечания:

а) Отсоединение структурных групп начинается с групп Ассур II класса, наиболее удаленных по кинематической цепи от начального звена.

б) После отсоединения структурной группы степень подвижности оставшейся кинематической цепи не должна измениться.

в) Если отсоединить структурную группу II класса не удастся, то следует попытаться отсоединить группу Ассур более высокого класса.

г) Окончательно в результате разложения должны остаться механизмы I класса, количество которых соответствует степени подвижности механизма.

Пример: для кулачкового-рычажного механизма (рис. 2.9, а) $n = 5$, $p_5 = 6$, $p_4 = 1$, степень подвижности: $W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 1 = 2$.

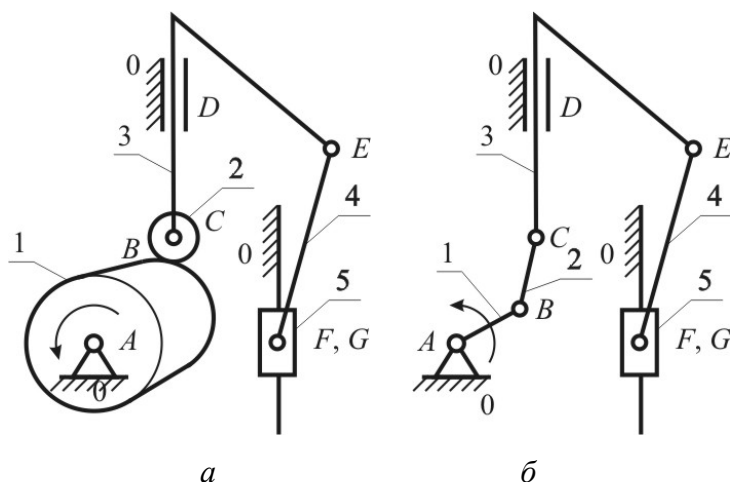


Рис. 2.9. Схемы механизмов: основного (а); заменяющего (б)

Лишнюю степень подвижности вносит круглый ролик 2 вращаясь вокруг своей оси. Полагая ролик закрепленным на звене 3, $n = 4$; $p_5 = 5$; $p_4 = 1$,

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 = 1.$$

Высшая кинематическая пара B заменяется звеном BC , которое входит в две вращательные пары (рис. 2.9, б). Для заменяющего механизма $n = 5$, $p_5 = 7$, степень подвижности не изменилась:

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 2 = 1.$$

Разложение заменяющего механизма следует начать с отсоединения наиболее удаленной от начального звена 1-й группы Π_2 (2 – вид группы Π класса) (рис. 2.10, а). Для оставшейся кинематической цепи $n = 3$, $p_5 = 4$,

$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Далее отсоединяется структурная группа также Π_2 (рис. 2.10, б), после отсоединения которой остается начальное звено 1 и стойка (рис. 2.10, в). Следовательно, разложение на структурные группы произведено правильно.

Механизм относится ко Π классу второго порядка, формула строения

$$I \rightarrow \Pi_2^2 \rightarrow \Pi_2^2.$$

Замечание. В общем случае количество начальных звеньев меньше или равно числу степеней подвижности (табл. 2.3).

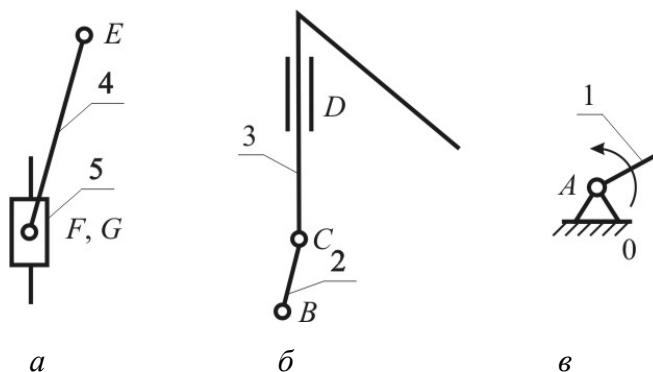


Рис. 2.10. Структурные группы и механизм I класса

Таблица 2.3

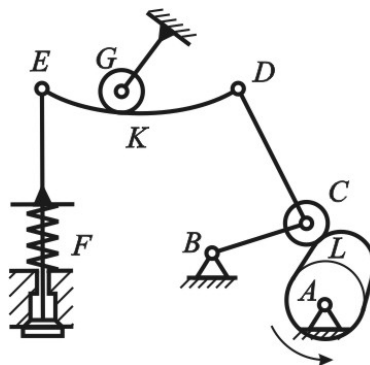
Механизмы I класса

$W = 1$	$W > 1$

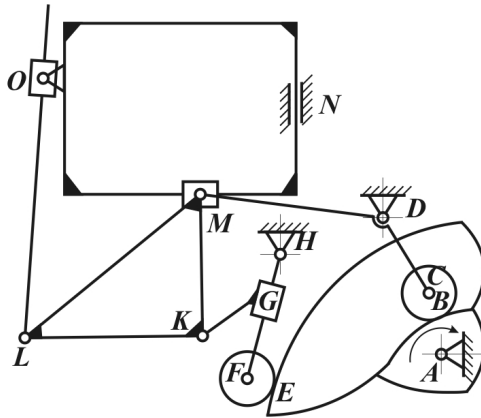
Механизмы I класса	
$W = 1$	$W > 1$

Контрольные вопросы и упражнения

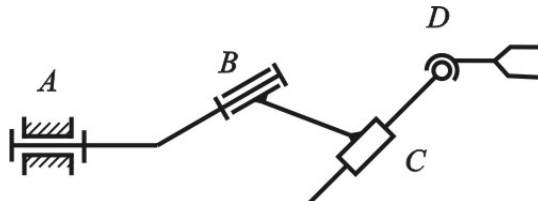
1. Цели и задачи структурного анализа.
2. Определение степени подвижности пространственного механизма и ее физический смысл.
3. Определение степени подвижности плоского механизма.
4. Какие кинематические пары могут существовать в плоских механизмах?
5. Понятие избыточных и пассивных связей в механизме. В чем заключается местная подвижность звеньев механизма?
6. Условия и алгоритм замены высших кинематических пар низшими.
7. Основной принцип образования механизмов.
8. Механизм I класса и его признаки.
9. Понятие структурной группы Ассур–Артоболевского.
10. Определение класса и порядка структурной группы Ассур–Артоболевского. Чем определяется класс и порядок механизма?
11. Привести примеры основных видов плоских рычажных механизмов образованных группами II класса 2-го порядка.
12. Последовательность проведения структурного анализа. Формула строения механизма.
13. Определить сумму числа степеней основной и местной подвижностей механизма газораспределения.



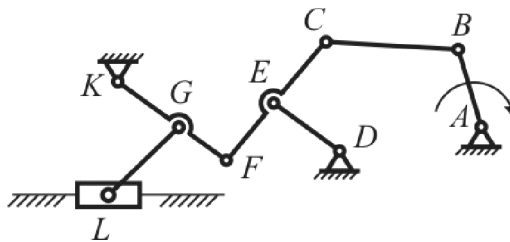
14. Чему равна абсолютная величина разности между количеством кинематических пар IV и V классов?



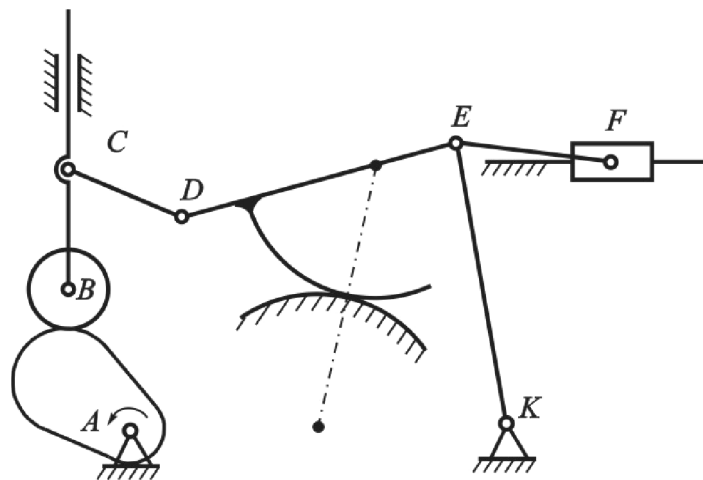
15. Определить количество степеней свободы механизма манипулятора.



16. Какова формула строения плоского механизма?



17. Какова формула строения плоского механизма?



Лекция 3

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ. МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКИХ ДИАГРАММ

Содержание: понятия кинематики механизмов; методы кинематического анализа; графический метод исследования кинематики.

Ключевые слова: кинематическая схема механизма; характеристики и относительные функции кинематики; аналоги скорости и ускорения; кинематические диаграммы.

3.1. Основные понятия кинематики механизмов

Кинематический анализ механизмов заключается в определении движения звеньев механизма по заданному движению начальных звеньев без учета массовых и силовых факторов.

Исследование проводится по заданной **кинематической схеме механизма, представляющей собой структурную схему, выполненную в масштабе с указанием размеров звеньев.**

Кинематический анализ сводится к решению следующих задач:

- 1) задачи о положениях;
- 2) задачи о скоростях и ускорениях точек звеньев и самих звеньев механизма.

Траектории, скорости, ускорения точек и звеньев, связанные с изменением времени, относятся к **кинематическим характеристикам** механизма. Если движение звеньев изучается в зависимости от обобщенных координат начальных звеньев, то рассматриваются **кинематические относительные функции**, к которым относятся:

- 1) функция положения;
- 2) кинематические передаточные функции скорости и ускорения.

Эти функции являются **геометрическими характеристиками** механизма.

Пусть S и φ – соответственно линейное и угловое перемещение точки или звена; q – обобщенная координата. Тогда **функция положения** – зависимость координаты (обычно выходного звена) от обобщенных координат механизма: $S = S(q)$ или $\varphi = \varphi(q)$.

Кинематической **передаточной функцией скорости** (линейной или угловой) называется первая производная функции положения по обобщенной координате механизма. Обозначается через $V_q = \frac{dS}{dq}$ – **аналог скорости** или

$\omega_q = \frac{d\varphi}{dq}$ – *аналог угловой скорости*. Связь между скоростями и соответствующими аналогами:

$$\begin{aligned} V &= \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = V_q \cdot \dot{q}, \\ \omega &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = \omega_q \cdot \dot{q}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Размерность аналога скорости – [м], а аналога угловой скорости, если q [рад], – безразмерная величина.

Кинематическая **передаточная функция ускорения** – вторая производная функции положения по обобщенной координате. Обозначается через $a_q = \frac{d^2S}{dq^2}$ – *аналог ускорения* или $\varepsilon_q = \frac{d^2\varphi}{dq^2}$ – *аналог углового ускорения*.

Связь между ускорениями и их аналогами:

$$\begin{aligned} a &= \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dS}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} \right) = \frac{d^2S}{dq^2} (\dot{q})^2 + \frac{dS}{dq} \cdot \frac{d^2q}{dt^2} = a_q \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + V_q \frac{d^2q}{dt^2} = \\ &= a_q \cdot \dot{q}^2 + V_q \cdot \ddot{q}, \\ \varepsilon &= \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon_q \cdot \dot{q}^2 + \omega_q \cdot \ddot{q}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если q в [рад], то размерность аналогов ускорений a_q – [м] и ε_q – безразмерная величина.

Часто q характеризует угол поворота начального звена, и при его равномерном вращении $\dot{q} = \text{const} = \omega_n$:

$$\begin{aligned} V &= V_q \cdot \dot{q} = V_q \cdot \omega_n, \\ \omega &= \omega_q \cdot \dot{q} = \omega_q \cdot \omega_n, \\ a &= a_q \cdot \dot{q}^2 = a_q \cdot \omega_n^2, \\ \varepsilon &= \varepsilon_q \cdot \dot{q}^2 = \varepsilon_q \cdot \omega_n^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.2. Методы кинематического анализа

Основные методы кинематического анализа:

- графический (метод кинематических диаграмм);
- графоаналитический (метод планов);
- аналитический;
- экспериментальный.

Графический метод (метод кинематических диаграмм) использует только геометрические построения. Наряду с простотой обладает невысокой точностью. Его результаты могут рассматриваться как приближенные, дающие общее представление о движении механизма.

Графоаналитический метод (метод планов) основан на сочетании векторных уравнений и геометрических построений. Нагляден и более точен по сравнению с графическим при решении задач о скоростях и ускорениях.

Аналитический метод базируется на методе замкнутых контуров (преобразования координат) и сводится к решению трансцендентных систем математических соотношений с помощью ЭВМ. Обладает высокой точностью, однако возникают сложности в его алгоритмизации, особенно в случае многозвенных механизмов.

Экспериментальный метод позволяет проводить кинематический анализ в условиях, наиболее приближенных к реальным, требуя значительных затрат на оборудование и измерительную аппаратуру.

3.3. Графический метод кинематического анализа

Задачу о положениях звеньев механизма рекомендуется решать в следующей последовательности: масштабирование схемы; по возможности определение предельных (крайних) положений механизма; построение промежуточных положений.

Масштабный коэффициент длин кинематической схемы μ_l [м/мм] равен отношению длины [м] одного из звеньев механизма к соответствующему отрезку схемы [мм]. При выборе масштабного коэффициента длин задается отрезок кинематической схемы, соответствующий длине одного из звеньев механизма. Действительные длины звеньев [м] принято обозначать буквой l с индексами (например, l_{AB} или l_1), а соответствующий отрезок схемы двумя прописными буквами (например, AB).

Разделив значения длин остальных звеньев на выбранную величину μ_l , определяют длины [мм] соответствующих отрезков кинематической схемы.

На рис. 3.1, *a* в качестве примера изображена структурная схема механизма. Выбрав длину отрезка AB [мм], соответствующего длине начального звена, определяем масштабный коэффициент длин: $\mu_l = l_{AB}/(AB)$ [м/мм]. Длины отрезков схемы, соответствующие остальным звеньям [мм],

$$AC = l_{AC}/\mu_l,$$

$$CD = l_{CD}/\mu_l,$$

$$DE = l_{DE}/\mu_l.$$

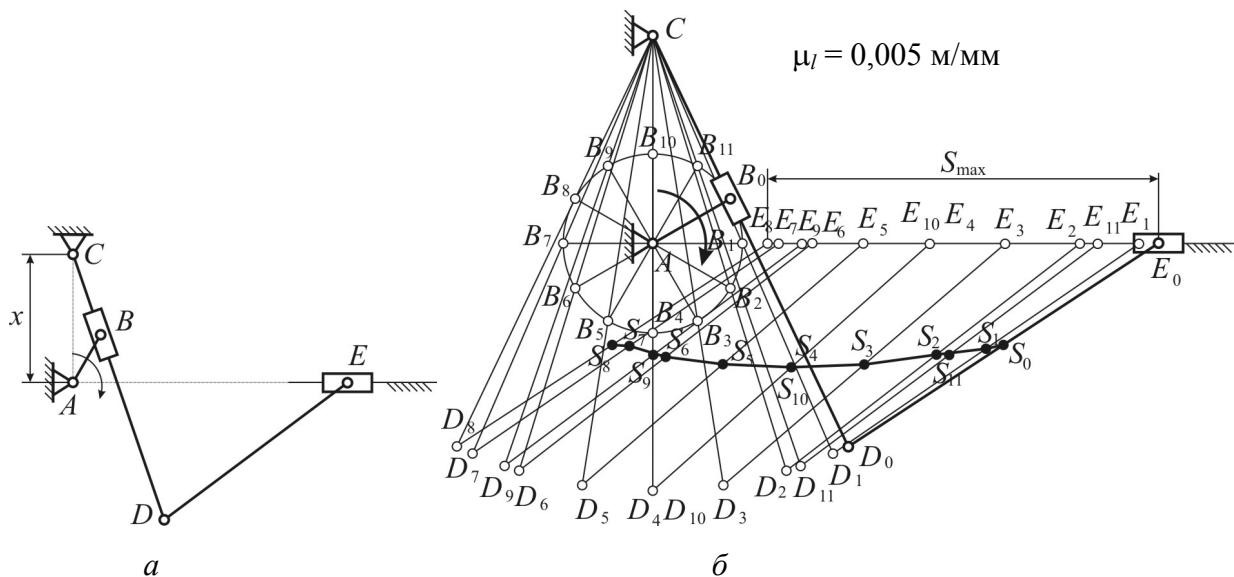


Рис. 3.1. Схемы кулисного механизма: структурная (а); кинематическая в 12 положениях (б)

Задавшись значением обобщенной координаты начального звена и направлением его движения, с помощью метода засечек в порядке присоединения структурных групп получают **план механизма**, т.е. положения характерных точек и звеньев механизма. Таким образом, можно получить ряд положений механизма, например, для равноотстоящих значений обобщенной координаты (рис. 3.1, б).

Если есть возможность, то для удобства исследований за начало отсчета принимают **крайнее положение механизма** (положение, из которого выходное звено может перемещаться только в одном направлении), соответствующее началу рабочего хода. Для ряда типовых механизмов существуют простые способы нахождения таких положений.

1. Для **шарнирного четырехзвенника** (рис. 3.2, а) предельные положения выходного звена (коромысла 3) будут тогда, когда начальное звено (кривошип 1) и шатун 2 располагаются на одной прямой. Из точки А в масштабе

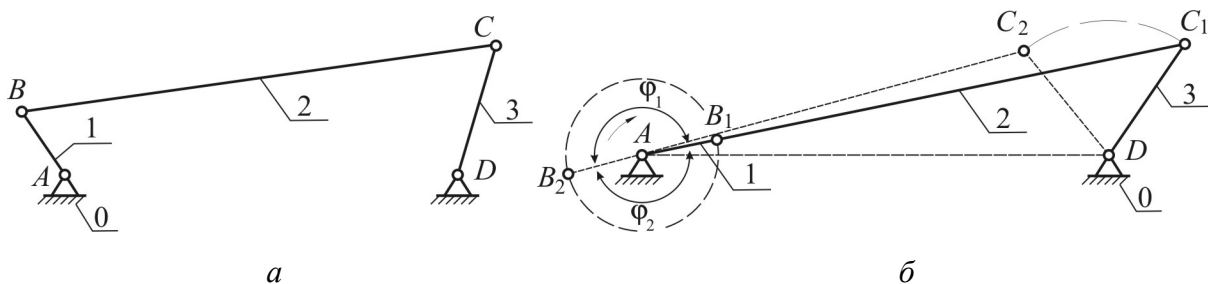


Рис. 3.2. Шарнирный четырехзвенник: а – схема; б – крайние положения

чертежа радиусом AB , а из точки D радиусом CD проводят окружности. Затем из точки A делают засечки длинами $(AB + BC)$ и $(BC - AB)$ до пересече-

ния с траекторией конца звена CD в точках C_1 и C_2 . Полученные точки C_1 и C_2 соединяют с точкой A отрезками, пересекающими окружность начального звена в точках B_1 и B_2 . Положения механизма, соответствующие схемам AB_1C_1D и AB_2C_2D , – предельные (крайние) (рис. 3.2, б).

2. Методика определения крайних положений для **кривошипно-ползунного механизма** (рис. 3.3) аналогична рассмотренной выше. Из точки A радиусами $(AB + BC)$ и $(BC - AB)$ проводят дуги до пересечения с направляющей $x-x$. Полученные точки C_1 и C_2 характеризуют предельные положения ползуна 3. Этим положениям соответствуют точки B_1 и B_2 конца начального звена 1, которые находятся на пересечениях отрезков C_1A и C_2A с окружностью радиусом AB .

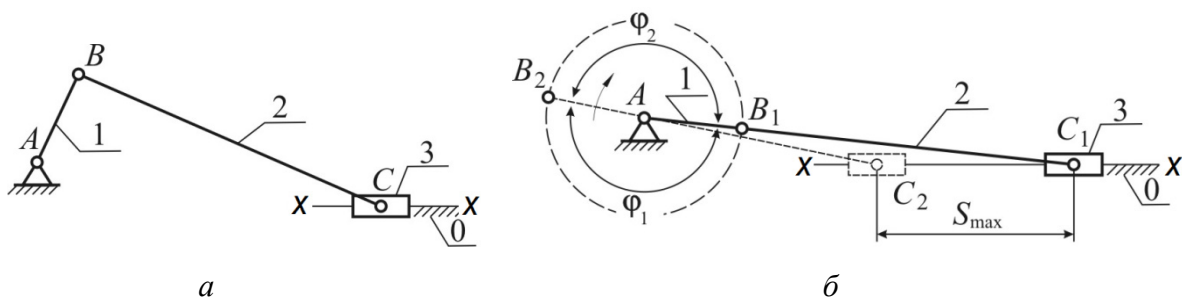


Рис. 3.3. Кривошипно-ползунный механизм: а – схема; б – крайние положения

3. Для **механизма с качающейся кулисой** (рис. 3.4) определение предельных положений начинают с построения окружности кривошипа 1 с центром в точке A . Затем из точки C проводятся две касательные к этой окружности. Отрезки AB_1 и AB_2 , перпендикулярные к проведенным касательным, соответствуют положениям звена 1, когда кулиса занимает предельные положения.

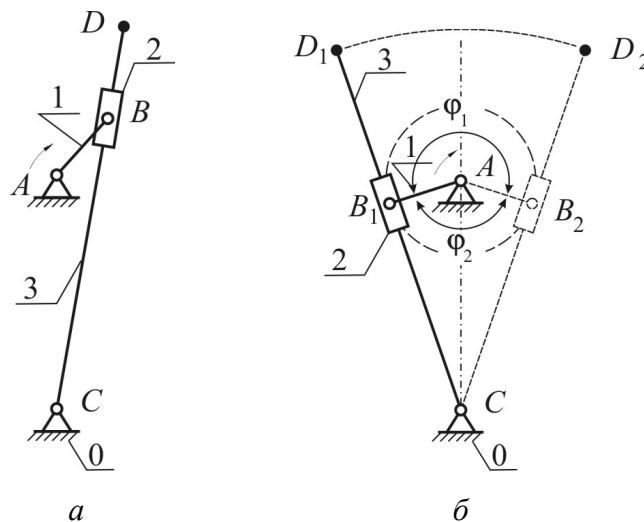


Рис. 3.4. Кулисный механизм: а – схема; б – крайние положения

Для более сложных стержневых механизмов крайние положения определяют исходя из конкретной схемы, с учетом способов, изложенных выше. В качестве примера на рис. 3.1, б изображена схема кулисного механизма в 12 положениях.

Соединив плавной кривой последовательные положения характерных точек, получают траектории их движения (т. S на рис. 3.1, б).

Расстояние между двумя крайними положениями выходного звена называется **максимальным перемещением** или **максимальным ходом** S_{\max} (см. рис. 3.1, б).

Для точки механизма, совершающей прямолинейное возвратно-поступательное движение, строится **диаграмма перемещений** (например т. E на рис. 3.1, б). Диаграмма перемещений дает положение точки E относительно ее начального положения E_0 (рис. 3.5, а). В прямоугольной системе координат по горизонтали откладывают положение начального звена (ось $O\varphi$), а по вертикали – перемещение (ось OS).

Масштабные коэффициенты:

обобщенной координаты φ

$$\mu_{\varphi} = \frac{2\pi}{(0k)} \text{ [рад/мм]},$$

времени

$$\mu_t = \frac{60}{n_1(0k)} = \frac{2\pi}{\omega_1(0k)} \text{ [с/мм]},$$

где $0k$ – отрезок оси φ , соответствующий полному обороту кривошипа, [мм];

n_1 – частота вращения кривошипа [об/мин]; $\omega_1 = \frac{\pi \cdot n}{30}$ – угловая скорость

кривошипа, [рад/с].

При равномерном вращении кривошипа перемещение $S_E(\varphi_1) = S_E(t)$.

Отрезок длиной $(0k)$ [мм] делится на N (на рис. 3.5 $N = 12$) равных частей, и через точки деления в масштабе μ_S откладывают по вертикали соответствующее перемещение т. E (E_0E_1, E_0E_2, E_0E_3 и т.д.). Соединив полученные точки, получают кривую **перемещений** (см. рис. 3.5, а). Для получения графика **пути** откладывают по вертикали отрезки $E_0E_1, E_0E_2, \dots E_0E_8 + E_8E_9, E_0E_8 + E_8E_{10}$ и т.д. (см. рис. 3.5, а). Если отрезки E_0E_i брались из схемы без изменений, то $\mu_S = \mu_t$, если E_0E_i уменьшают в m раз, то $\mu_S = m \cdot \mu_t$ и наоборот. Если второе крайнее положение кривошипа не попадает в точку деления, то для нахождения этого положения на оси $O\varphi$ используется принцип пропорциональных частей.

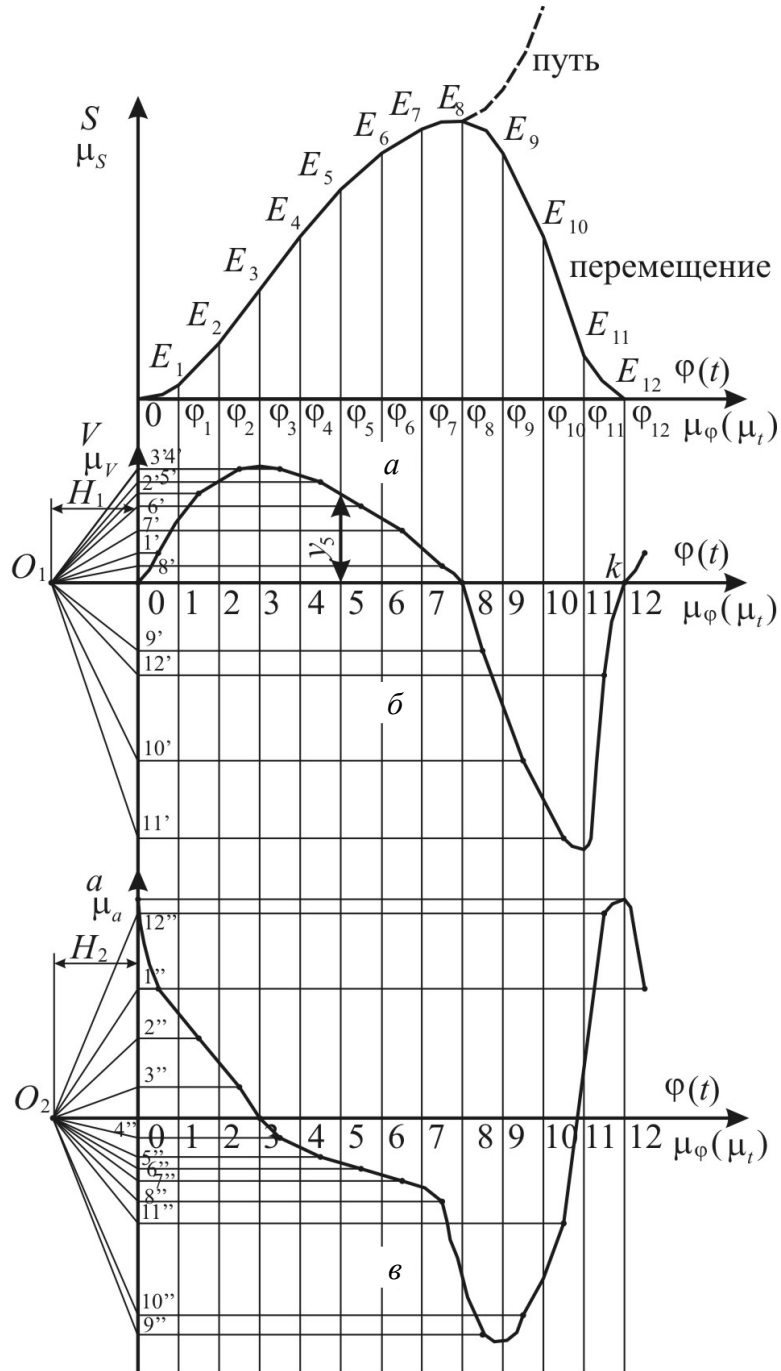


Рис. 3.5. Диаграммы движения т. E : a – перемещение и путь; \bar{b} – скорость; $\bar{в}$ – ускорение

Используя соотношения (3.3), графическим дифференцированием кривой перемещения получают диаграммы скоростей и ускорений т. E . Для этого можно применить метод хорд, касательных, приращений и т.д.

Например, в методе хорд кривую перемещения $S = S(\varphi)$ разбивают на ряд участков (хорд): $0-E_1$, E_1-E_2 , E_2-E_3 и т.д. (участки могут быть неравными, рис. 3.5, a). В системе координат $VO\varphi$ левее т. 0 откладывается отрезок

H_1 , произвольной величины (рис. 3.5, б). Чем больше H_1 , тем больше величины ординат диаграммы $V = f(\varphi)$. Из т. O_1 проводят лучи O_1-1' , O_1-2' , O_1-3' и т.д., параллельные хордам $0-E_1$, E_1-E_2 , E_2-E_3 и т.д. (см. рис. 3.5, а, б). Проведенные лучи отсекают на оси ординат отрезки $0-1'$, $0-2'$, $0-3'$ и т.д., величины которых откладываются по вертикали из середин отрезков $0-1$, $1-2$, $2-3$ и т.д. оси 0φ . Соединив полученные точки плавной кривой, получают график скорости (аналога скорости) точки E (см. рис. 3.5, б) с соответствующими масштабными коэффициентами:

$$\mu_V = \frac{\mu_S}{H_1 \cdot \mu_\varphi} \omega_1 = \frac{\mu_S}{\mu_t \cdot H_1} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм}]; \quad \mu_{V_\varphi} = \frac{\mu_S}{H_1 \cdot \mu_\varphi} [\text{м} / \text{мм}].$$

Имея график $V = f(t)$ ($V_\varphi = f(\varphi)$), можно найти значение скорости (аналога скорости) в любом положении механизма. Например, для 5-го положения

$$V_{E_5} = \mu_V \cdot (y_5) [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}]; \quad V_{\varphi E_5} = \mu_{V_\varphi} \cdot (y_5) [\text{м}].$$

Аналогичным образом строится график ускорения (аналога ускорения) точки E (рис. 3.5, в). В случае прямолинейного движения точки – это **полное ускорение**, иначе – **тангенциальное**. Масштабные коэффициенты

$$\mu_a = \frac{\mu_V}{\mu_t \cdot H_2} = \frac{\mu_V}{\mu_\varphi \cdot H_2} \omega_1 [\text{м} \cdot \text{с}^{-2} / \text{мм}]; \quad \mu_{a_\varphi} = \frac{\mu_{V_\varphi}}{H_2 \cdot \mu_\varphi} [\text{м} / \text{мм}].$$

Для получения значений ускорения в начале и конце цикла (положения 0 и 12, рис. 3.5, в) необходимо продлить график скорости на одно положение следующего цикла движения и продифференцировать этот участок графика. В результате получают точку для положения 12 (конец цикла). Эту точку фиксируют и в положении 0, так как при вращении кривошипа положения 0 и 12 совпадают:

$$V_{E_0} = V_{E_{12}}, \quad a_{E_0} = a_{E_{12}}.$$

Контрольные вопросы и упражнения

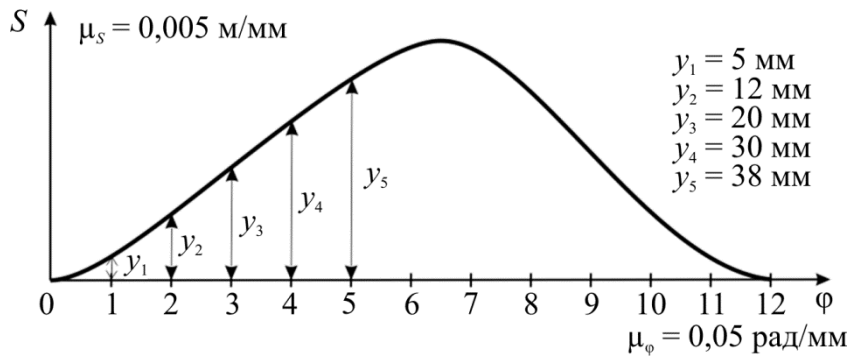
1. Основные задачи кинематического исследования механизмов.
2. Кинематические характеристики механизма.
3. Кинематические относительные функции механизма.
4. Понятие об аналогах скорости и ускорения.
5. Методы кинематического анализа механизмов. Их достоинства и недостатки.

6. Методика графического анализа кинематики механизмов. Кинематические диаграммы и их особенности.

7. Понятие о масштабных коэффициентах длин, скорости и ускорения.

8. Чему равно значение перемещения точки поступательно движущегося звена из положения 2 в положение 4?

График перемещения точки



9. Чему равна величина масштабного коэффициента графика ускорения точки при графическом дифференцировании методом хорд ($\omega = 18 \text{ (1/с)}$)?

График скорости точки

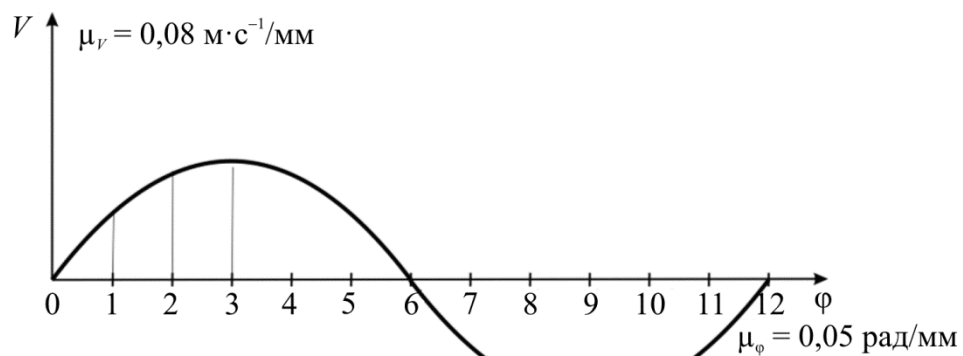
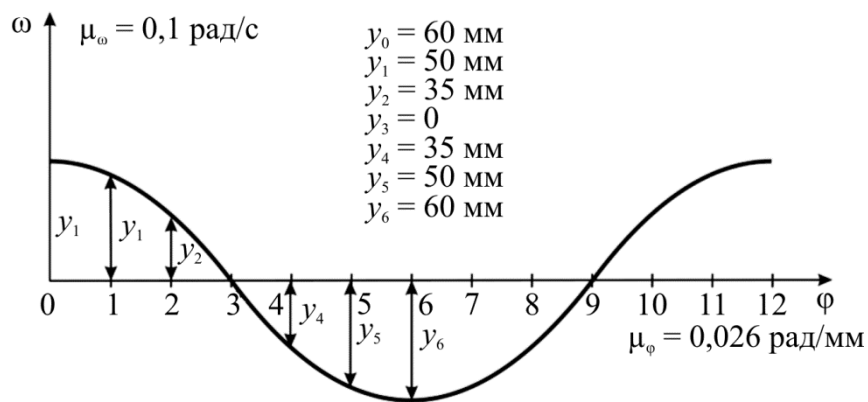


График ускорения точки



10. Определить разность между величинами угловой скорости звена в 1-м и 4-м положениях.

График угловой скорости звеньев



11. Определить величину скорости точки в 3-м положении при $\omega = 20 \text{ 1/с}$.

График перемещения точки

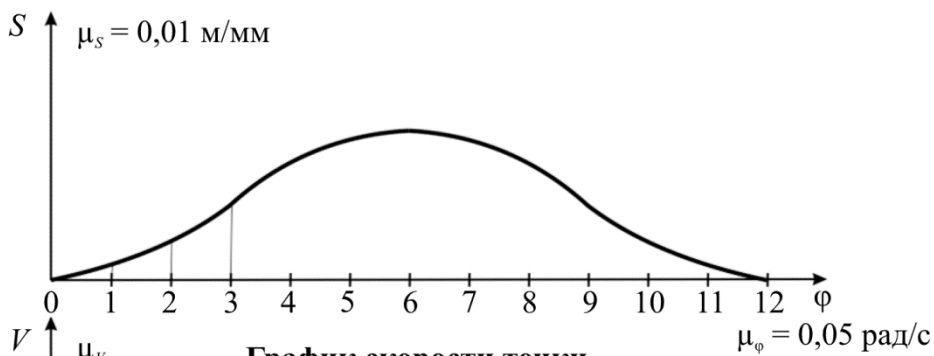


График скорости точки



12. При каком значении ω_1 скорость точки C в третьем положении равна 2 м/с?

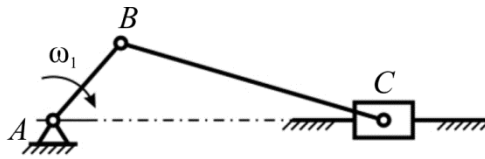


График перемещения точки C

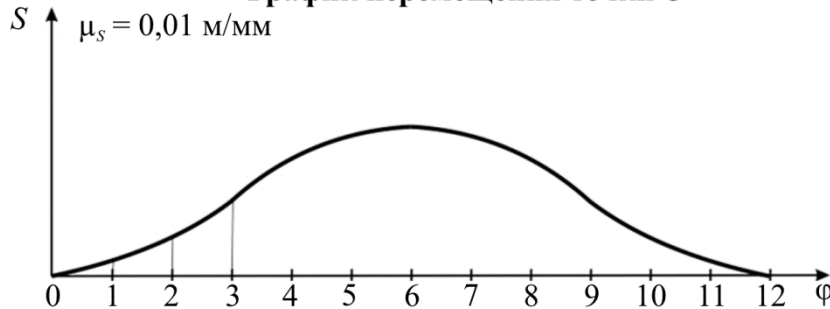


График скорости точки C

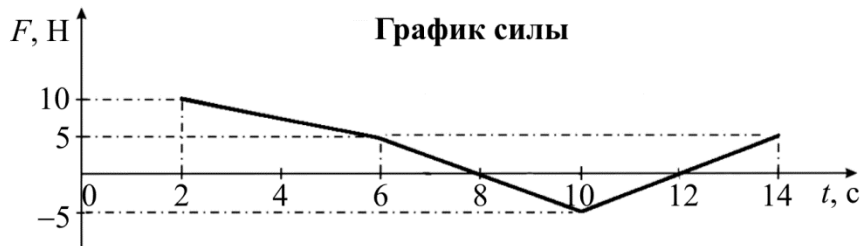


13. Чему равно отношение времени, когда поступательно движущееся входное звено при действующей на него силе F является ведомым, ко времени, когда оно – ведущее?

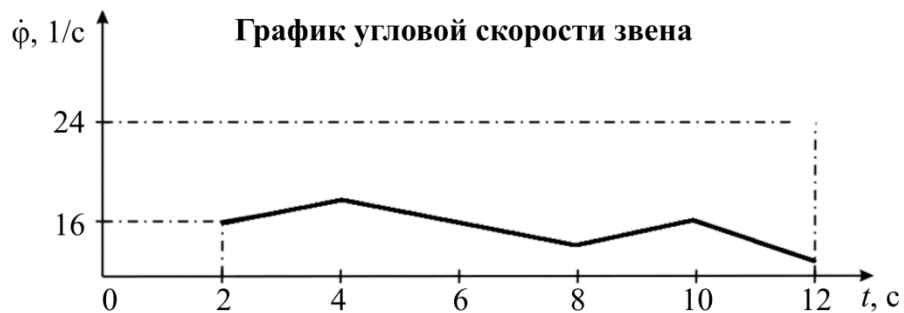
График скорости точки звена



График силы



14. Выходное звено совершает вращательное движение. При действующем на него моменте сил M определить отношение времени, когда оно является ведомым, ко времени, когда оно – ведущее.



Лекция 4 ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Содержание: общие положения графоаналитического метода кинематического исследования; кинематический анализ плоских рычажных механизмов.

Ключевые слова: кинематика; полюс, план скоростей и ускорений.

4.1. Общие положения графоаналитического метода (метода планов)

Применяют тогда, когда известна кинематическая схема механизма в данном положении и закон движения начального звена (начальных звеньев).

Обычно считается, что для начального звена в виде кривошипа частота вращения $n_n = \text{const}$, а для поступательно движущегося начального звена линейная скорость $V_n = \text{const}$.

С помощью векторной алгебры строятся планы скоростей и ускорений.

План скоростей (ускорений) – геометрическое место точек, характеризующее по величине и направлению скорости (ускорения) точек звеньев. Точка плана, скорость (ускорение) которой равна нулю – **полюс плана**. Все векторы, исходящие из полюса, соответствуют абсолютным скоростям (ускорениям), а векторы, соединяющие промежуточные точки планов, характеризуют относительные скорости (ускорения).

Векторные уравнения метода планов составляются в порядке присоединения структурных групп к начальному звену (начальным звеньям) и к стойке на основе ряда соотношений и свойств кинематики плоского движения твердого тела.

При этом следует придерживаться следующих свойств кинематики звеньев.

1. В случае **простого непоступательного** движения звена, которому принадлежат т. A и B (рис. 4.1, a),

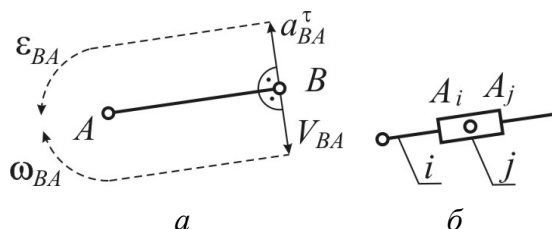


Рис. 4.1. Непоступательное движение звеньев:
 a – простое; b – переносное

$$\begin{aligned}\bar{V}_B &= \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \\ \bar{a}_B &= \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,\end{aligned}\quad (4.1)$$

где \bar{V}_B , \bar{V}_A и \bar{V}_{BA} – соответственно векторы абсолютных скоростей т. A и B и относительной скорости т. B вокруг т. A ; \bar{a}_B и \bar{a}_A – векторы абсолютных ускорений т. B и A ; \bar{a}_{BA}^n и \bar{a}_{BA}^τ – векторы нормального и тангенциального ускорений т. B относительно т. A .

2. Для звена i , совершающего **непоступательное переносное** движение, по которому поступательно перемещается звено j (рис. 4.1, б),

$$\begin{aligned}\bar{V}_{A_i} &= \bar{V}_{A_j} + \bar{V}_{A_i A_j}, \\ \bar{a}_{A_i} &= \bar{a}_{A_j} + \bar{a}_{A_i A_j}^k + \bar{a}_{A_i A_j}^r,\end{aligned}\quad (4.2)$$

где \bar{V}_{A_i} и \bar{V}_{A_j} – векторы абсолютных скоростей т. A_i и A_j , принадлежащих звеньям i и j и совпадающих в данный мгновенный момент времени; $\bar{V}_{A_i A_j}$ – вектор скорости т. A_i относительно т. A_j ; \bar{a}_{A_i} и \bar{a}_{A_j} – векторы абсолютных ускорений т. A_i и A_j ; $\bar{a}_{A_i A_j}^k$ и $\bar{a}_{A_i A_j}^r$ – векторы ускорений Кориолиса и относительного ускорения т. A_i относительно т. A_j .

В случае когда движение звена i **поступательное**, $\bar{a}_{A_i A_j}^k = 0$, иначе по величине $a_{A_i A_j}^k = 2V_{A_i A_j} \cdot \omega_i$. Направление вектора определяется поворотом $\bar{V}_{A_i A_j}$ плана скоростей на 90° по направлению ω_i .

3. Величина угловой скорости для звена, совершающего непоступательное движение, $\omega = V_{\text{отн}}/l$, где $V_{\text{отн}}$ – значение относительной скорости [м/с], а l – длина звена [м]. Например, для рис. 4.1, а $\omega_{BA} = V_{BA}/l_{BA}$.

Направление угловой скорости звена определяется путем переноса вектора относительной скорости в ту точку звена схемы механизма, для которой записаны векторные уравнения, и поворотом этого вектора вокруг точки, относительно которой рассматривается движение (т. A , рис. 4.1, а). Аналогичным образом определяется величина и направление углового ускорения звена: $\varepsilon_{BA} = a_{BA}^\tau/l_{BA}$ (см. рис. 4.1, а).

4. **Теорема подобия. Фигура кинематической схемы**, образованная соединением точек одного и того же звена, **подобна фигуре**, образованной соединением одноименных концов векторов скоростей (ускорений) **плана**. Направления обхода полученных фигур схемы и плана должны быть одинаковыми.

Методика определения скоростей и ускорений рассматривается на конкретных примерах в последующих материалах лекции.

4.2. Кинематический анализ механизма шарнирного четырехзвенника

Формула строения: $I \rightarrow II_1$ (звенья 2 и 3) (рис. 4.2, а).

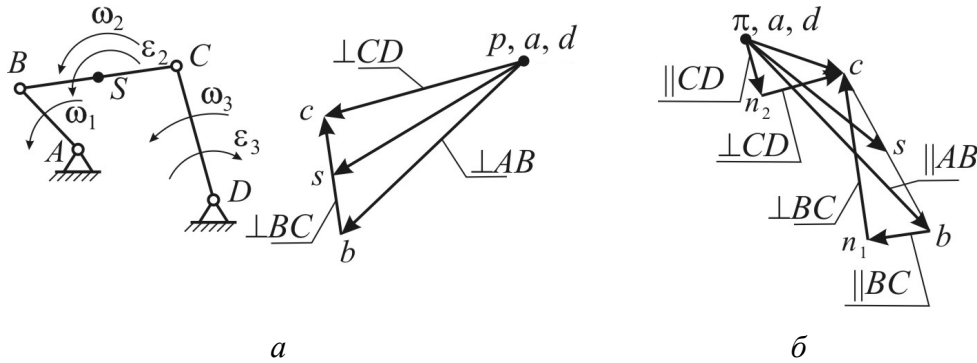


Рис. 4.2. Планы шарнирного четырехзвенника:
а – скоростей; б – ускорений

Порядок расчетов и построений следующий.

Построение плана скоростей

а) Угловая скорость кривошипа: $\omega_{AB} = \frac{\pi \cdot n_{AB}}{30} = \omega_1 = \text{const} \text{ [с}^{-1}\text{]}$.

б) Скорость т. В: $V_B = \omega_1 \cdot l_1 \text{ [м} \cdot \text{с}^{-1}\text{]}$. Вектор скорости \bar{V}_B перпендикулярен отрезку AB схемы и направлен в сторону вращения кривошипа.

Выбирают произвольную точку p – полюс. $\bar{V}_p = 0$. Из т. p проводят вектор \overline{pb} , изображающий скорость точки В (рис. 4.2, а). Длина отрезка (pb) выбирается произвольно. Масштабный коэффициент плана скоростей $\mu_V = V_B / (pb) = \omega_1 l_1 / (pb) \text{ [м} \cdot \text{с}^{-1}\text{/мм]}$.

в) Согласно (4.1) векторные уравнения скоростей структурной группы II_1

$$\begin{cases} \bar{V}_C = \underline{\bar{V}}_B + \underline{\bar{V}}_{CB}, \\ \bar{V}_C = \underline{\bar{V}}_D + \underline{\bar{V}}_{CD}, \end{cases} \quad (4.3)$$

где $\underline{\bar{V}}_{CB}$ – вектор скорости т. С в ее движении относительно т. В ($\underline{\bar{V}}_{CB} \perp CB$); $\underline{\bar{V}}_{CD}$ – вектор относительной скорости т. С вокруг D ($\underline{\bar{V}}_{CD} \perp CD$).

Величины этих векторов неизвестны.

Скорости концевых элементов группы $\bar{V}_B = \bar{V}_D = 0$ известны. Согласно первому уравнению системы (4.3) из т. b проводят луч $\perp CB$ схемы, а согласно второму уравнению (4.3) из т. p – луч $\perp CD$. Пересечение лучей дает точку c – конец вектора V_C (см. рис. 4.2, а).

$$V_C = (pc)\mu_V [\text{м}\cdot\text{с}^{-1}]; V_{CB} = (cb)\cdot\mu_V [\text{м}\cdot\text{с}^{-1}]; V_{CD} = (cd)\mu_V = V_C [\text{м}\cdot\text{с}^{-1}].$$

г) Положение т. s , соответствующей т. S схемы (см. рис. 4.2), определяют на плане из пропорции $\frac{BC}{BS} = \frac{l_{BC}}{l_{BS}} = \frac{bc}{bs}$ по свойству подобия. Соединив s с полюсом p , получают величину и направление скорости т. S : $V_S = (ps)\cdot\mu_V [\text{м}\cdot\text{с}^{-1}]$.

д) Угловые скорости звеньев CB и CD : $\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} = \frac{(cb)\mu_V}{l_{CB}} [\text{с}^{-1}];$

$$\omega_3 = \frac{V_{CD}}{l_{CD}} = \frac{(pc)\mu_V}{l_{CD}} [\text{с}^{-1}].$$

Направления угловых скоростей ω_2 и ω_3 определяют прикладыванием векторов \bar{V}_{CB} и \bar{V}_{CD} соответственно в т. C схемы. По рис. 4.2, а \bar{V}_{CB} вращает звено CB относительно т. B против часовой стрелки, а \bar{V}_{CD} вращает звено CD относительно т. D также против часовой стрелки.

Построение плана ускорений

а) При равномерном вращении кривошипа $a_B = a_B^n = \omega_1^2 l_1 = \frac{V_B^2}{l_1} [\text{м}\cdot\text{с}^{-2}]$.

Вектор \bar{a}_B направлен по звену AB к центру вращения – к т. A . Выбирают точку π – полюс. $\bar{a}_\pi = \bar{a}_D = 0$. Из т. π проводят вектор $\bar{\pi b}$, изображающий \bar{a}_B (рис. 4.2, б). Длина отрезка (πb) выбирается произвольной, масштабный коэффициент $\mu_a = \frac{a_B}{(\pi b)} = \frac{\omega_1^2 l_1}{(\pi b)} = \frac{V_B^2}{(\pi b) l_1} [\text{м}\cdot\text{с}^{-2}/\text{мм}]$.

$$\mu_a = \frac{a_B}{(\pi b)} = \frac{\omega_1^2 l_1}{(\pi b)} = \frac{V_B^2}{(\pi b) l_1} [\text{м}\cdot\text{с}^{-2}/\text{мм}].$$

б) Векторные уравнения ускорений для структурной группы Π_1

$$\begin{cases} \bar{a}_C = \underline{\bar{a}_B} + \underline{\bar{a}_{CB}^n} + \underline{\bar{a}_{CB}^\tau}, \\ \bar{a}_C = \underline{\bar{a}_D} + \underline{\bar{a}_{CD}^n} + \underline{\bar{a}_{CD}^\tau}, \end{cases} \quad (4.4)$$

где $a_{CB}^n = \omega_2^2 l_2 = \frac{V_{CB}^2}{l_{CB}}$ – нормальное ускорение т. C относительно т. B , направленное вдоль CB от C к B $[\text{м}\cdot\text{с}^{-2}]$; a_{CB}^τ – тангенциальное ускорение т. C относительно B ($a_{CB}^\tau \perp CB$); $a_{CD}^n = \frac{V_{CD}^2}{l_{CD}} = \omega_3^2 l_3$ – нормальное ускорение т. C относительно т. D , направленное вдоль звена CD от C к D $[\text{м}\cdot\text{с}^{-2}]$; a_{CD}^τ – тангенциальное ускорение т. C относительно т. D ($a_{CD}^\tau \perp CD$).

$\overline{a_{CB}^n}$ соответствует отрезок $\overline{bn_1}$ плана, длина которого $(bn_1) = a_{CB}^n / \mu_a$ [мм]; $\overline{a_{CD}^n}$ – вектор $\overline{\pi n_2}$ плана с длиной $(\pi n_2) = a_{CD}^n / \mu_a$ [мм] (см. рис. 4.2, б).

С учетом уравнений системы (4.4), значений (bn_1) , (πn_1) и их направлений достраивают план ускорений. Соединив полученную точку c с полюсом π , получают вектор $\overline{\pi c}$, соответствующий $\overline{a_C}$ (см. рис. 4.2, б).

$$a_C = (\pi c) \mu_a \text{ [м} \cdot \text{с}^{-2}\text{]}; a_{CB}^\tau = (n_1 c) \mu_a \text{ [м} \cdot \text{с}^{-2}\text{]}; a_{CD}^\tau = (n_2 c) \mu_a \text{ [м} \cdot \text{с}^{-2}\text{]}.$$

в) Ускорение т. S находят, соединив т. c и b : $\frac{cs}{cb} = \frac{CS}{CB}$; $a_S = (\pi s) \mu_a \text{ [м} \cdot \text{с}^{-2}\text{]}.$

г) Угловые ускорения звеньев $\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{CB}} = \frac{(n_1 c) \mu_a}{l_2}$; $\varepsilon_3 = \frac{a_{CD}^\tau}{l_{CD}} = \frac{(n_2 c) \mu_a}{l_3} \text{ [с}^{-2}\text{]}.$

Направление ε_2 и ε_3 определяется установкой векторов $\overline{a_{CB}^\tau}$ и $\overline{a_{CD}^\tau}$ в т. C схемы по методике, рассмотренной выше, для определения угловых скоростей (см. рис. 4.2, б).

4.3. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма

Формула строения: $I \rightarrow II_2$ (рис. 4.3, а)

Построение плана скоростей

а) $\omega_{AB} = \frac{\pi \cdot n_{AB}}{30} = \omega_1 = \text{const} \text{ [с}^{-1}\text{]}.$

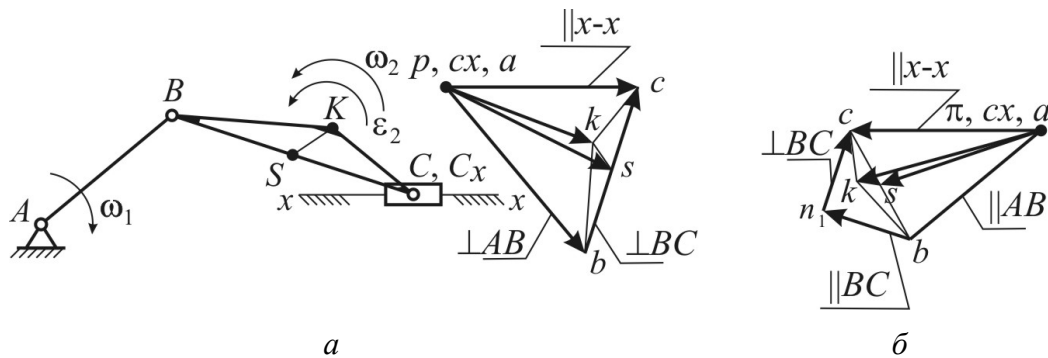


Рис. 4.3. Планы кривошипно-ползунного механизма: а – скоростей; б – ускорений

$$V_B = \omega_1 l_1 \text{ [м} \cdot \text{с}^{-1}\text{]} (\overline{V_B} \perp AB). \mu_v = V_B / (pb) = \omega_1 l_1 / (pb) \text{ [м} \cdot \text{с}^{-1}\text{/мм]}.$$

б) Векторные уравнения скоростей структурной группы II_2

$$\begin{cases} \overline{V_C} = \overline{V_B} + \overline{V_{CB}}, \\ \overline{V_C} = \overline{V_{C_x}} + \overline{V_{CC_x}}, \end{cases} \quad (4.5)$$

где \vec{V}_{CB} – вектор относительной скорости т. C вокруг т. B , $\vec{V}_{CB} \perp CB$; $\vec{V}_{C_x} = 0$ – скорость неподвижной т. C_x направляющей $x-x$; \vec{V}_{CC_x} – вектор скорости т. C относительно направляющей ($\vec{V}_{CC_x} \parallel x-x$).

По 1-му уравнению (4.5) из т. b проводят луч $\perp CB$; по 2-му уравнению (4.5) из c_x проводят луч $\parallel x-x$. На пересечении лучей получается т. c (см. рис. 4.3, а):

$$V_C = (pc)\mu_V [\text{м}\cdot\text{с}^{-1}]; V_{CB} = (cb) \cdot \mu_V [\text{м}\cdot\text{с}^{-1}].$$

в) $\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} = \frac{(cb)\mu_V}{l_{CB}} [\text{с}^{-1}]$. Направление ω_2 определяется по правилу, рассмотренному в предыдущем примере.

г) Скорость т. S находят по подобию из пропорции $\frac{(bs)}{(bc)} = \frac{BS}{BC} = \frac{l_{BS}}{l_{BC}}$. Абсолютная скорость т. S по величине $V_S = (ps) \cdot \mu_V [\text{м}\cdot\text{с}^{-1}]$ (см. рис. 4.3, а).

Для определения скорости т. k на плане скоростей строят треугольник $\Delta bkc \sim \Delta BKC$ схемы. При этом соблюдается идентичность направлений обхода контура bkc как на плане, так и на схеме. $V_K = (pk) \cdot \mu_V [\text{м}\cdot\text{с}^{-1}]$.

Построение плана ускорений

а) Ускорение т. B : $a_B = \omega_1^2 l_1 = \frac{V_B^2}{l_1} [\text{м}\cdot\text{с}^{-2}]$. Вектор \bar{a}_B направлен по звену AB от B к A . Отрезок (πb) откладывают от полюса π (рис. 4.3, б). Масштабный коэффициент $\mu_a = \frac{a_B}{(\pi b)} [\text{м}\cdot\text{с}^{-2}/\text{мм}]$, где длина отрезка (πb) [мм] произвольна.

б) Векторные уравнения для ускорений группы Π_2

$$\begin{cases} \bar{a}_C = \underline{\bar{a}_B} + \underline{\bar{a}_{CB}^n} + \underline{\bar{a}_{CB}^\tau}, \\ \bar{a}_C = \underline{\bar{a}_{C_x}} + \underline{\bar{a}_{CC_x}^k} + \underline{\bar{a}_{CC_x}^r}, \end{cases} \quad (4.6)$$

где \bar{a}_{CB}^n – нормальное ускорение т. C относительно т. B , направленное вдоль CB от C к B ($a_{CB}^n = \omega_2^2 l_2 = \frac{V_{CB}^2}{l_2} [\text{м}\cdot\text{с}^{-2}]$); \bar{a}_{CB}^τ – тангенциальное ускорение т. C относительно B ($\bar{a}_{CB}^\tau \perp CB$); \bar{a}_{C_x} – ускорение точки C_x неподвижной направляющей ($\bar{a}_{C_x} = 0$); $\bar{a}_{CC_x}^k$ – ускорение Кориолиса в движении т. C относительно

C_x и вместе с ней ($a_{CC_x}^k = 2V_{CC_x} \cdot \omega_{x-x} = 2V_{CC_x} \cdot 0 = 0$); $\bar{a}_{CC_x}^r$ – относительное ускорение т. C относительно C_x ($\bar{a}_{CC_x}^r \parallel x-x$); \bar{a}_{CB}^n – соответствует отрезок (bn_1), длина которого равна a_{CB}^n / μ_a [мм].

По 1-му уравнению (4.6) из точки b плана проводят $\bar{bn}_1 \parallel BC$ (от C к B), затем из т. n_1 проводится луч $\perp BC$ (направление a_{CB}^r). По 2-му уравнению (4.6) так как $a_{C_x} = a_\pi = 0 = a_{CC_x}^k$, то из точки π проводят луч $\parallel x-x$ (направление $\bar{a}_{CC_x}^r$). На пересечении лучей получается точка c (см. рис. 4.3, б).
 $a_C = (\pi c) \cdot \mu_a$ [м·с⁻²]; $a_{CB}^r = (n_1 c) \mu_a$ [м·с⁻²].

в) $\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^r}{l_2} = \frac{(n_1 c) \mu_a}{l_2}$ [с⁻²]. Направление углового ускорения ε_2 определяется по ранее рассмотренному правилу.

Ускорения точек S и K определяются из подобия так же, как и при построении плана скоростей: $a_S = (\pi s) \mu_a$ [м·с⁻²]; $a_K = (\pi k) \mu_a$ [м·с⁻²].

4.4. Кинематический анализ кулисного механизма

Формула строения: $I \rightarrow II_3$ (рис. 4.4, а).

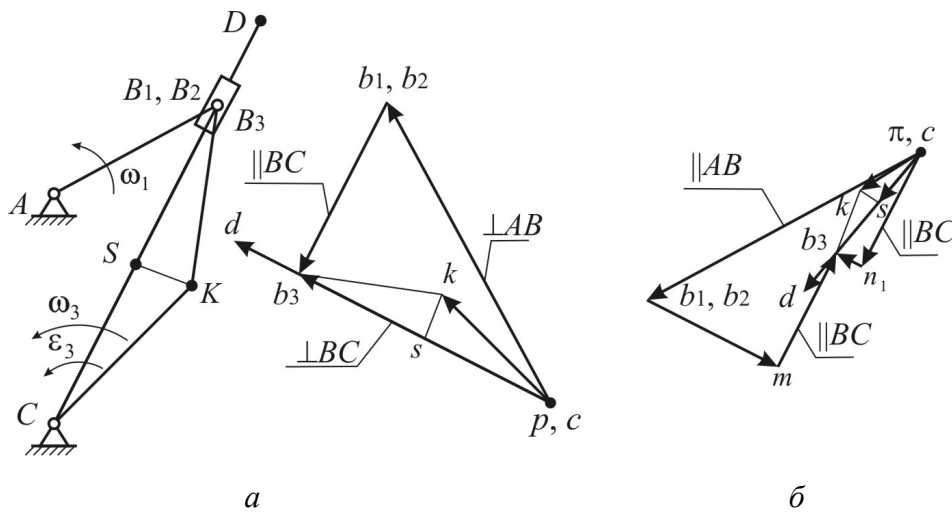


Рис. 4.4. Планы кулисного механизма: а – скоростей; б – ускорений

Построение плана скоростей

а) Для этого механизма (рис. 4.4) рассматриваются точки B_1, B_2, B_3 , принадлежащие соответственно концу кривошипа, камню кулисы, кулисе и совпадающие в данный момент времени. Вектор $\bar{V}_{B_1} = \bar{V}_{B_2}$, $\perp AB$ и направлен в сторону вращения звена I . Величина $V_{B_1} = V_{B_2} = \omega_1 l_{AB}$ [м·с⁻¹].

Из полюса p плана скоростей проводят вектор $\overline{pb_1} \perp AB$ (см. рис. 4.4, *a*), соответствующий \overline{V}_{B_1} .

$$\mu_V = \frac{V_{B_1}}{(pb_1)} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм}].$$

б) Для структурной группы Π_3 векторное уравнение скоростей имеет вид

$$\begin{cases} \overline{V}_{B_3} = \overline{V}_{B_2} + \overline{V}_{B_3B_2}, \\ \overline{V}_{B_3} = \overline{V}_C + \overline{V}_{B_3C}, \end{cases} \quad (4.7)$$

где $\overline{V}_{B_3B_2}$ – вектор относительной скорости т. B_3 кулисы в движении относительно т. B_2 камня кулисы, $\overline{V}_{B_3B_2} \parallel B_3C$; $\overline{V}_C = 0$; \overline{V}_{B_3C} – вектор относительной скорости т. B_3 вокруг т. C , $\overline{V}_{B_3C} \perp B_3C$.

По первому уравнению (4.7) из т. b_2 плана скоростей проводят луч, параллельный кулисе B_3C , а по второму уравнению системы (4.7) из полюса p – луч, перпендикулярный B_3C (т. p и c совпадают, так как $\overline{V}_C = \overline{V}_p = 0$). На пересечении лучей находят точку b_3 , которая является концом вектора $\overline{pb_3}$, $V_{B_3} = \mu_V (pb_3) [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}]$; $V_{B_3B_1} = V_{B_3B_2} = \mu_V (b_3b_1) = \mu_V (b_3b_2) [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}]$ (см. рис. 4.4, *a*).

в) Скорость точки D определяют из подобия (см. рис. 4.4, *a*):

$$\frac{CD}{CB_3} = \frac{pd}{pb_3} \Rightarrow pd = pb_3 \frac{CD}{CB_3} [\text{мм}] \Rightarrow V_D = \mu_V (pd) [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}].$$

Скорость т. S и K находят по аналогии с рассмотренными примерами.

г) $\omega_2 = \omega_3 = \frac{V_{B_3}}{l_{CB}} = \frac{V_{B_3}}{l_{CB_3}} = \frac{V_{B_3}}{(CB_3)\mu_l} [\text{с}^{-1}]$. Направление ω_3 (см. рис. 4.4, *a*)

находится по ранее введенному правилу.

Построение плана ускорений

а) Для плана ускорений $\overline{a}_{B_1} = \overline{a}_{B_2}$. По величине $a_{B_1} = a_{B_2} = \omega_1^2 l_1 = V_{B_1}^2 / l_1 [\text{м} \cdot \text{с}^{-2}]$. Из полюса π плана ускорений параллельно AB схемы от B к A откладывают вектор $\overline{\pi b_1} = \overline{\pi b_2}$ (см. рис. 4.4, *б*); $\mu_a = a_{B_1} / (\pi b_1) [\text{м} \cdot \text{с}^{-2} / \text{мм}]$.

б) Для структурной группы Π_3 векторные уравнения ускорений

$$\begin{cases} \overline{a}_{B_3} = \overline{a}_{B_2} + \overline{a}_{B_3B_2}^k + \overline{a}_{B_3B_2}^r, \\ \overline{a}_{B_3} = \overline{a}_C + \overline{a}_{B_3C}^n + \overline{a}_{B_3C}^\tau, \end{cases} \quad (4.8)$$

где $\bar{a}_{B_3B_2}^k$ – ускорение Кориолиса в движении т. B_3 относительно т. B_2 и вместе с ней (см. лекцию 2 п. 4.1) $a_{B_3B_2}^k = 2V_{B_3B_2} \cdot \omega_3$ [$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$]; $\bar{a}_{B_3B_2}^r$ – относительное ускорение т. B_3 относительно т. B_2 ($\bar{a}_{B_3B_2}^r \parallel CB$); $\bar{a}_{B_3C}^n$ – нормальное ускорение т. B_3 , вокруг т. C ($\bar{a}_{B_3C}^n \parallel CB$ от B к C); $a_{B_3C}^n = \omega_3^2 l_{B_3C} = \frac{V_{B_3}^2}{l_{B_3C}}$ [$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$]; $\bar{a}_{B_3C}^\tau$ – тангенциальное ускорение т. B_3 относительно т. C , ($\bar{a}_{B_3C}^\tau \parallel CB$).

$\bar{a}_{B_3B_2}^k$ соответствует вектор $(b_2m) = a_{B_3B_2}^k / \mu_a$ [мм]. Направление этого вектора определяется путем поворота на 90° в направлении ω_3 вектора относительной скорости $\bar{V}_{B_3B_2}$ (или $\overline{b_2b_3}$) плана скоростей (см. рис. 4.4, а). По 1-му уравнению системы (4.8) $\overline{b_2m}$ откладывают от точки b_2 , а затем из т. m проводят луч $\parallel B_3C$ схемы. По 2-му уравнению из т. c плана откладывают вектор $(cn_1) = \bar{a}_{B_3C}^n / \mu_a$ [мм] ($\parallel CB$), направленный от B к C .

Затем из т. n_1 строится луч $\perp BC$, соответствующий направлению $\bar{a}_{B_3C}^\tau$. На пересечении двух лучей фиксируют точку b_3 , являющуюся концом вектора $\overline{pb_3}$ – ускорения т. B_3 . Следовательно, $a_{B_3} = \mu_a (\pi b_3)$ [$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$]; $a_{B_3B_2}^r = \mu_a (mb_3)$ [$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$]; $a_{B_3C}^\tau = \mu_a (n_1 b_3)$ [$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$].

в) Из подобия $\frac{CD}{CB_3} = \frac{\pi d}{\pi b_3} \Rightarrow \pi d = \pi b_3 \frac{CD}{CB_3}$ [мм] $\Rightarrow a_D = \mu_a (\pi d)$, [$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$].

Ускорения точек S и K находят из подобия, используя принцип обхода контура CBK (см. рис. 4.4, б). $a_S = \mu_a (\pi s)$ [$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$]; $a_K = \mu_a (\pi k)$ [$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$].

г) Угловое ускорение $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{a_{B_3C}^\tau}{l_{B_3C}}$ [с^{-2}] (см. рис. 4.4, б).

Методики графоаналитического исследования рассмотренных примеров применяются таким же образом и при кинематическом исследовании более сложных стержневых механизмов.

4.5. Кинематический анализ пятизвенного стержневого механизма

Построение плана скоростей (рис. 4.5)

а) $\bar{V}_A = \bar{V}_C = \bar{V}_X = 0$,

б) $\bar{V}_{B_1} = \bar{V}_{B_2}$; $\bar{V}_{B_1}, \bar{V}_{B_2} \perp AB$, $\bar{V}_{B_1} = \bar{V}_{B_2} = \omega_1 l_{AB_1} \Rightarrow \mu_V = \frac{V_{B_1}}{(pb_1)}$, $\overline{pb_1} \perp AB$,

$$B) \begin{cases} \vec{V}_{B_3} = \vec{V}_{B_2} + \vec{V}_{B_3B_2}, (\vec{V}_{B_3B_2} \perp BC), \\ \vec{V}_{B_3} = \vec{V}_C + \vec{V}_{B_3C}, (\vec{V}_{B_3C} \perp BC), \end{cases}$$

$$\vec{V}_{B_3} = (\overline{pb_3}) \cdot \mu_V; V_{B_3} = \mu_V \cdot (pb_3); V_{B_3B_2} = (b_2 \cdot b_3) \cdot \mu_V; \omega_3 = \frac{V_{B_3}}{\mu_l(CB_3)}.$$

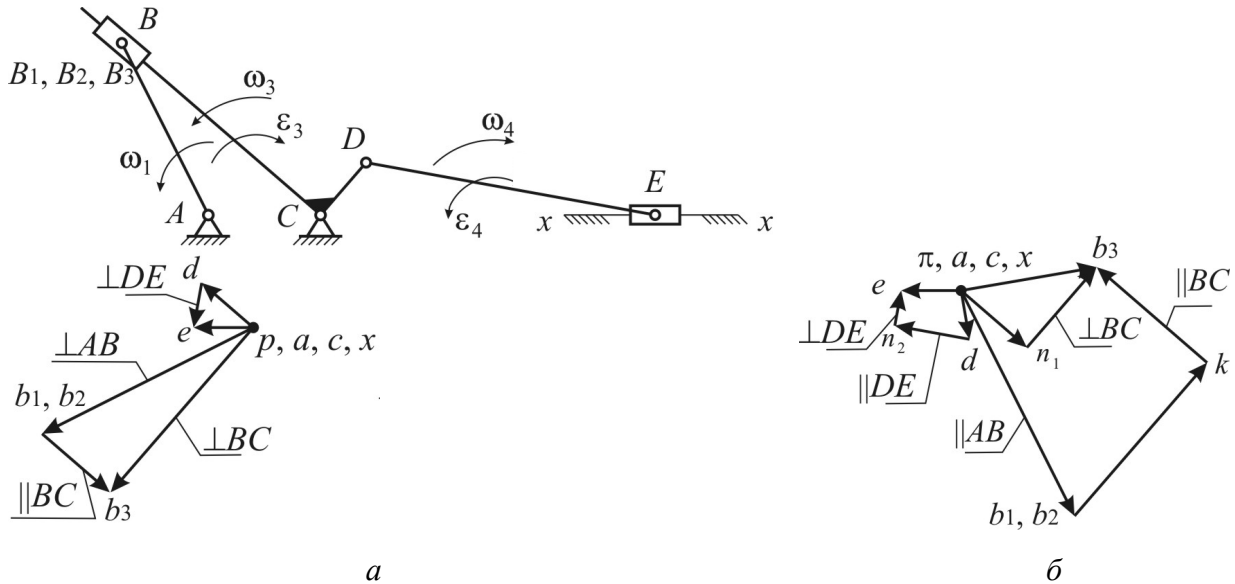


Рис. 4.5. Планы пятизвенного стержневого механизма:
а – скоростей; б – ускорений

Построения в соответствии с этапом в) представлены на рис. 4.5, а.

$$\frac{V_D}{V_{B_3}} = \frac{(pd)}{(pb_3)} = \frac{CD}{CB_3} \Rightarrow (pd) = \frac{CD}{CB_3} \cdot (pb_3) \Rightarrow V_D = \mu_V (pd).$$

При нахождении положения точки d плана скоростей используется правило обхода контура B_3CD и b_3cd (см. рис. 4.5, а).

$$\Gamma) \begin{cases} \vec{V}_E = \vec{V}_X + \vec{V}_{EX}, (\vec{V}_{EX} // x-x), \\ \vec{V}_E = \vec{V}_D + \vec{V}_{ED}, (\vec{V}_{ED} \perp ED). \end{cases}$$

Построения этапа г) изображены на рис. 4.5, а.

$$V_E = (pe) \cdot \mu_V; \vec{V}_{ED} = \mu_V \cdot (de); \omega_4 = \frac{V_{ED}}{l_{ED}} = \frac{V_{ED}}{l_4}.$$

Полный план скоростей для механизма представлен рис. 4.5, а.

Построение плана ускорений

а) $\bar{a}_A = \bar{a}_C = \bar{a}_X = 0$.

б) $\bar{a}_{B_1} = \bar{a}_{B_2}$; $\bar{a}_{B_1}, \bar{a}_{B_2} // AB$,

$$a_{B_1} = a_{B_2} = \omega_1^2 l_{AB_1} = \frac{V_{B_1}^2}{l_{AB_1}} \Rightarrow \mu_a = \frac{a_{B_1}}{(\pi b_1)}, \overline{\pi b_1} // AB_1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{B_3} = \bar{a}_{B_2} + \underline{\bar{a}_{B_3 B_2}^k} + \bar{a}_{B_3 B_2}^r, \\ \left(a_{B_3 B_2}^k = 2\omega_3 \cdot V_{B_3 B_2}, (b_2 k) = \frac{a_{B_3 B_2}^k}{\mu_a}, \bar{a}_{B_3 B_2}^r // BC \right), \\ \text{в) } \underline{\bar{a}_{B_3}} = \underline{\bar{a}_C} + \underline{\bar{a}_{B_3 C}^n} + \bar{a}_{B_3 C}^\tau, \\ a_{B_3 C}^n = \omega_3^2 l_{B_3 C} = \frac{V_{B_3}^2}{l_{B_3 C}}, \\ (cn_1) = \frac{a_{B_3 C}^n}{\mu_a}, \bar{a}_{B_3 C}^n // BC; \bar{a}_{B_3 C}^\tau \perp BC. \end{array} \right.$$

Построения этапа в) проведены на рис. 4.5, б. По результатам этих построений получаем

$$a_{B_3} = \mu_a (\pi b_3); a_{B_3 C}^\tau = (n_1 b_3) \cdot \mu_a; a_{B_3 B_2}^r = \mu_a \cdot (kb_3); \varepsilon_3 = \frac{a_{B_3 C}^\tau}{l_{B_3 C}} = \frac{a_{B_3 C}^\tau}{\mu_l \cdot (B_3 C)}.$$

$$\text{г) } \frac{a_D}{a_{B_3}} = \frac{(\pi d)}{(\pi b_3)} = \frac{CD}{CB_3} \Rightarrow (\pi d) = \frac{CD}{CB_3} \cdot (\pi b_3) \Rightarrow a_D = \mu_v \cdot (\pi d).$$

Положение т. d плана ускорений находится по правилу обхода контура $B_3 CD$ и $b_3 cd$ (рис. 4.5, б).

$$\text{д) } \left\{ \begin{array}{l} a_E = \bar{a}_X + \underline{\bar{a}_{Ex}^k} + \bar{a}_{Ex}^r, \left(a_{Ex}^k = 2 \cdot \omega_x \cdot V_{Ex} = 0; \bar{a}_{Ex}^r // x - x \right), \\ a_E = \underline{\bar{a}_D} + \underline{\bar{a}_{ED}^n} + \bar{a}_{ED}^\tau, \left(a_{ED}^n = \omega_4^2 l_{ED} = \frac{a_{ED}^n}{\mu_a}; \bar{a}_{ED}^\tau \perp ED \right). \end{array} \right.$$

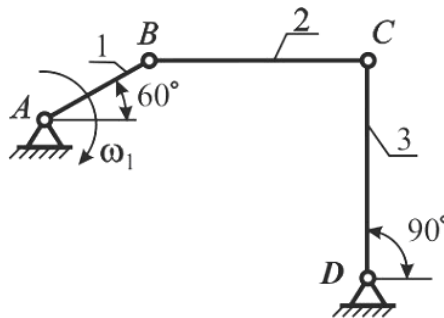
На рис. 4.5, б проведены построения этапа д).

$$a_E = \mu_a \cdot (\pi e); a_{ED}^\tau = \mu_a \cdot (n_2 e); \bar{a}_{Ex}^r = \bar{a}_E; \varepsilon_4 = \frac{a_{ED}^\tau}{l_{ED}}.$$

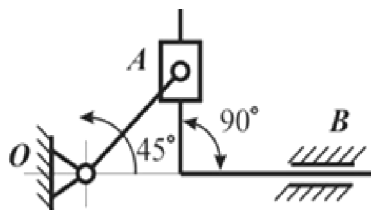
План ускорения механизма в заданном положении изображен на рис. 4.5, б.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Суть графоаналитического метода кинематического анализа механизмов.
2. Понятие о планах скоростей и ускорений.
3. Порядок составления векторных уравнений при кинематическом анализе.
4. Суть метода подобия.
5. Определение угловой скорости и углового ускорения по величине и направлению для звеньев механизма.
6. Определение ускорения Кориолиса.
7. Нормальное ускорение: его величина и направление.
8. Особенности и уравнения при построении планов скоростей и ускорений для четырехзвенных плоских механизмов.
9. $\omega_1 = 100 \text{ рад/с}$, $l_{AB} = 0,1 \text{ м}$, $l_{BC} = 0,4 \text{ м}$, $l_{CD} = 0,35 \text{ м}$. Найти ω_2 для данного положения.

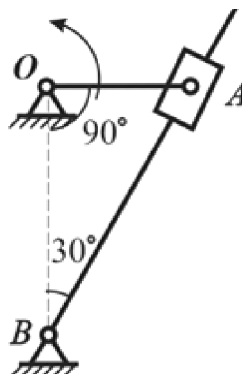


10. $l_{OA} = 0,3 \text{ м}$; $\omega_{OA} = 12 \text{ с}^{-1}$. Определить скорость поступательного движения кулисы в данном положении механизма.

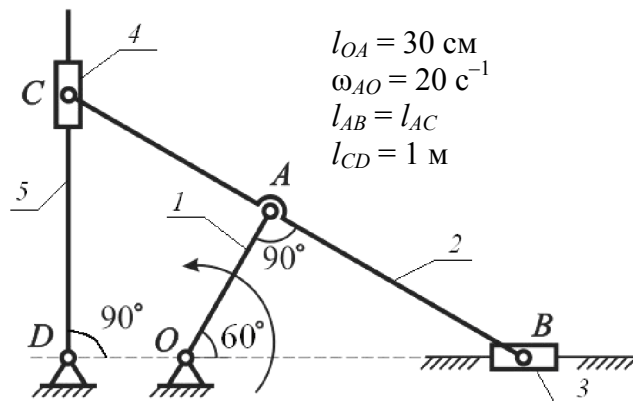


11. Определить величину нормального ускорения точки A относительно точки B в данном положении механизма.

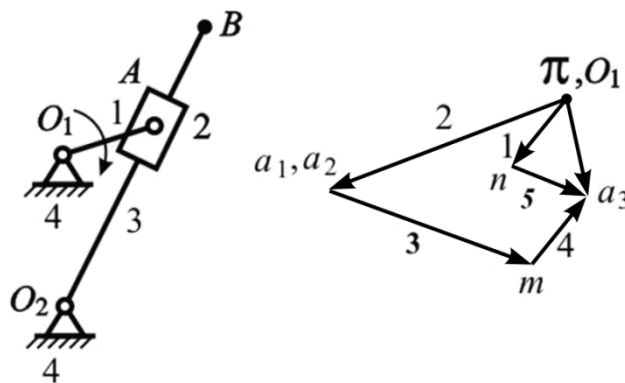
$$\begin{aligned}
 l_{OA} &= 15 \text{ см} \\
 l_{AB} &= 0,3 \text{ м} \\
 \omega_{OA} &= 20 \text{ с}^{-1}
 \end{aligned}$$



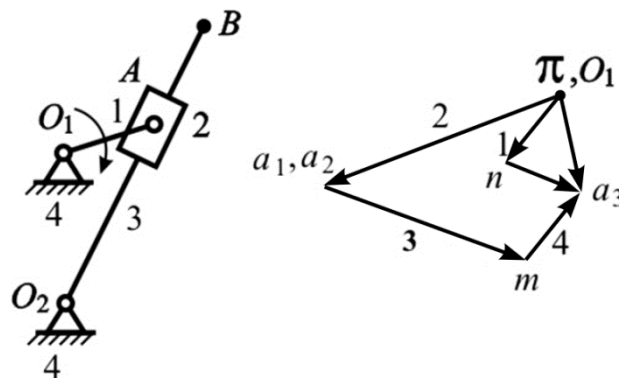
12. Чему равно ускорение Кориолиса $a_{C_5C_4}^k$ в данном положении механизма?



13. Указать вектор плана, соответствующий тангенциальному ускорению точки A относительно O_2 .



14. Указать вектор ускорения Кориолиса.



Лекция 5 АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КИНЕМАТИКИ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Содержание: метод векторных контуров; примеры кинематического исследования плоских рычажных механизмов.

Ключевые слова: векторный контур; уравнение замкнутости; задачи о положениях, скоростях и ускорениях.

5.1. Основные положения метода векторных контуров

Аналитические методы в отличие от графических и графоаналитических позволяют проводить кинематические исследования эффективно, с высокой степенью точности, с использованием численных методов и компьютерных технологий.

Один из методов аналитической кинематики рычажных механизмов – метод векторных контуров, предложенный В.А. Зиновьевым.

Звенья механизма представляются в виде векторов, образующих замкнутый контур, уравнения которого проецируются на оси системы координат. На основе полученных математических соотношений решаются задачи о положениях, скоростях и ускорениях.

Для удобства дальнейшего изложения приняты следующие допущения и обозначения:

- 1) ω_k и ε_k – угловая скорость и угловое ускорение k -го звена;
- 2) \vec{V}_{S_k} и \vec{a}_{S_k} – скорость и ускорение точки S k -го звена;
- 3) $\omega_{k\varphi}$, $\varepsilon_{k\varphi}$, \vec{V}_{S_φ} и \vec{a}_{S_φ} – соответственно аналоги угловой скорости и углового ускорения k -го звена, аналоги скорости и ускорения точки S ;
- 4) $\lambda_k = \frac{l_k}{l_1}$; $\lambda_{AS_2} = \frac{l_{AS_2}}{l_1}$ – отношение длин звеньев к длине 1-го звена.

Исходные данные для проведения расчетов: длины звеньев, угловая или линейная скорость начального (начальных) звена, схема механизма.

Применение аналитического метода удобно рассмотреть на примерах плоских рычажных механизмов.

5.2. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма

Случай сборки механизма, когда при обходе по часовой стрелке сохраняется контур с последовательностью $OABCO$, представлен на рис. 5.1.

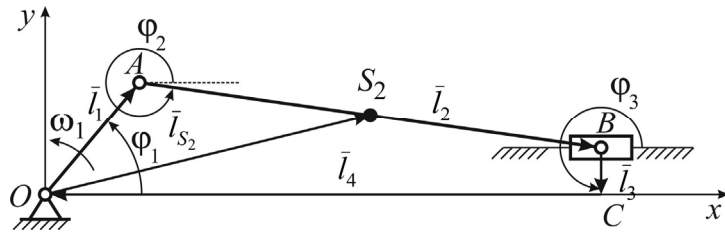


Рис. 5.1. Схема кривошипно-ползунного механизма

Даны длины звеньев, угловая скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1 кривошипа OA .

Задача о положениях

Уравнение замкнутости векторного контура

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4 = 0. \quad (5.1)$$

В проекциях на оси xOy системы координат (рис. 5.1)

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 = l_4, \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = e, \end{cases} \quad (5.2)$$

так как $\varphi_3 = 270^\circ$, $\varphi_4 = 180^\circ$, $\bar{l}_3 = \bar{e}$ – дезаксиал.

Решая второе уравнение из (5.2), получают значение угла φ_2 , характеризующего положение шатуна:

$$\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{e - l_1 \sin \varphi_1}{l_2}\right) = \arcsin\left(\frac{\lambda_e - \sin \varphi_1}{\lambda_2}\right). \quad (5.3)$$

Текущее положение ползуна (точка C)

$$x_C = l_4 = l_1 \left[\cos \varphi_1 + \lambda_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_e - \sin \varphi_1}{\lambda_2}\right)^2} \right].$$

Максимальный ход ползуна

$$H = l_{4\max} - l_{4\min} = l_1 \left(\sqrt{(\lambda_2 + 1)^2 - \lambda_e^2} - \sqrt{(\lambda_2 - 1)^2 - \lambda_e^2} \right).$$

Текущее перемещение ползуна относительно одного из крайних положений, например левого

$$S_C = x_C - l_{4\min} = l_1 \left[\cos \varphi_1 + \lambda_2 \sqrt{1 - \frac{(\lambda_e - \sin \varphi_1)^2}{\lambda_2^2}} - \sqrt{(\lambda_2 - 1)^2 - \lambda_e^2} \right].$$

Задача о скоростях

Дифференцируя по времени (5.3), определяют угловую скорость шатуна:

$$\frac{d}{dt}(\sin \varphi_2) = \cos \varphi_2 \cdot \omega_2 = -\frac{\cos \varphi_1}{\lambda_2} \omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \omega_{2\varphi} \cdot \omega_1,$$

где $\omega_{2\varphi} = -\frac{\cos \varphi_1}{\lambda_2 \cos \varphi_2}$ – аналог угловой скорости шатуна.

Скорость ползуна

$$V_C = \frac{dS_C}{dt} = -l_1 (\omega_1 \sin \varphi_1 + \lambda_2 \omega_2 \sin \varphi_2) = V_{C\varphi} \cdot \omega_1,$$

где $V_{C\varphi} = -l_1 (\sin \varphi_1 + \lambda_2 \omega_{2\varphi} \sin \varphi_2)$.

Задача об ускорениях

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \omega_{2\varphi} \cdot \varepsilon_1 + \frac{\omega_1^2}{\lambda_2 \cos^2 \varphi_2} (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \omega_{2\varphi}).$$

$$a_C = \frac{dV_C}{dt} = -l_1 (\omega_1^2 (\cos \varphi_1 + \lambda_2 \sin \varphi_2 \omega_{2\varphi}^2) + \varepsilon_1 \sin \varphi_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 \sin \varphi_2).$$

Замечание. Для определения кинематических характеристик т. S_2 звена AB (см. рис. 5.1)

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_{AS_2} = \bar{l}_{S_2}. \quad (5.4)$$

В проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} x_{S_2} &= l_1 \cos \varphi_1 + l_{AS_2} \cos \varphi_2, \\ y_{S_2} &= l_1 \sin \varphi_1 + l_{AS_2} \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Проекции скорости точки S_2

$$\begin{aligned} \dot{x}_{S_2} &= -l_1 \omega_1 [\sin \varphi_1 + \lambda_{AS_2} \omega_{2\varphi} \sin \varphi_2], \\ \dot{y}_{S_2} &= l_1 \omega_1 [\cos \varphi_1 + \lambda_{AS_2} \omega_{2\varphi} \cos \varphi_2]. \end{aligned}$$

Значение скорости точки S_2 и направляющий угол $\varphi_{V_{S_2}}$ вектора этой скорости относительно оси Ox

$$V_{S_2} = \sqrt{\dot{x}_{S_2}^2 + \dot{y}_{S_2}^2}, \quad \varphi_{V_{S_2}} = \arccos \frac{\dot{x}_{S_2}}{V_{S_2}}.$$

Аналогичным образом находится ускорение точки S_2 :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{S_2} &= -l_1 \left[\omega_1^2 \left(\cos \varphi_1 + \lambda_{AS_2} \omega_{2\varphi}^2 \cos \varphi_2 \right) + \varepsilon_1 \sin \varphi_1 + \varepsilon_2 \lambda_{AS_2} \sin \varphi_2 \right], \\ \ddot{y}_{S_2} &= l_1 \left[-\omega_1^2 \left(\sin \varphi_1 + \lambda_{AS_2} \omega_{2\varphi}^2 \sin \varphi_2 \right) + \varepsilon_1 \cos \varphi_1 + \varepsilon_2 \lambda_{AS_2} \cos \varphi_2 \right], \\ a_{S_2} &= \sqrt{\ddot{x}_{S_2}^2 + \ddot{y}_{S_2}^2}, \quad \varphi_{a_{S_2}} = \frac{\ddot{x}_{S_2}}{a_{S_2}}.\end{aligned}$$

В некоторых механизмах длина шатуна существенно больше длины кривошипа, т.е. $\lambda_2 \ll 1$. В этом случае для определения кинематических характеристик используют приближенные, более простые формулы на основе разложения радикалов в ряд по формуле бинома Ньютона. Подробнее с этими решениями можно ознакомиться в различных учебниках по ТММ.

5.3. Кинематический анализ шарнирного четырехзвенника

Система координат выбрана так, что ось Ox направлена от точки O к точке C (рис. 5.2).

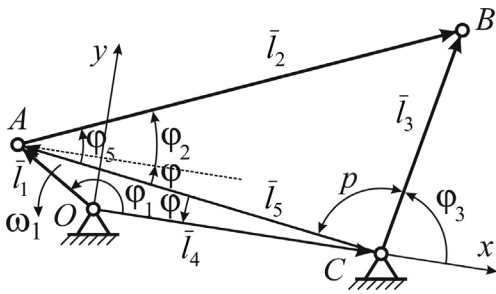


Рис. 5.2. Схема шарнирного четырехзвенника

Даны длины звеньев, угловая скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1 кривошипа OA .

Уравнение замкнутого векторного контура $OABC$

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{l}_3 + \bar{l}_4. \quad (5.6)$$

В проекциях на оси координат

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 = l_3 \cos \varphi_3 + l_4, \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = l_3 \sin \varphi_3, \end{cases} \quad (5.7)$$

так как $\varphi_4 = 0$.

Задача о положениях

Из $\triangle OAC$ длина вспомогательного вектора \bar{l}_5 (см. рис. 5.2)

$$l_5 = \sqrt{l_1^2 + l_4^2 - 2l_1l_4 \cos \varphi_1} = l_1 \sqrt{1 + \lambda_4^2 - 2\lambda_4 \cos \varphi_1}.$$

Значения дополнительных углов в соответствии с рис. 5.2

$$\varphi = \arcsin \frac{|y_A|}{l_5} = \arcsin \frac{|\sin \varphi_1|}{\lambda_5}, \quad \varphi_5 = \arccos \frac{\lambda_2^2 + \lambda_5^2 - \lambda_3^2}{2\lambda_2\lambda_5},$$

$$p = \arccos \frac{\lambda_3^2 + \lambda_5^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_3\lambda_5}.$$

Величины углов поворота звеньев AB и BC :

$$\varphi_2 = \begin{cases} \varphi_5 - \varphi & \text{при } y_A \geq 0, \\ \varphi_5 + \varphi & \text{при } y_A < 0, \end{cases}$$

$$\varphi_3 = \begin{cases} \pi - \varphi - \rho & \text{при } y_A \geq 0, \\ \pi + \varphi - \rho & \text{при } y_A < 0. \end{cases}$$

Задача о скоростях

Дифференцируя соотношения (5.7), получают систему уравнений относительно угловых скоростей звеньев 2 и 3:

$$\begin{cases} -\sin \varphi_1 \omega_1 = \lambda_2 \omega_2 \sin \varphi_2 - \lambda_3 \omega_3 \sin \varphi_3, \\ \cos \varphi_1 \omega_1 = -\lambda_2 \omega_2 \cos \varphi_2 + \lambda_3 \omega_3 \cos \varphi_3. \end{cases} \quad (5.8)$$

В результате решения (5.8)

$$\omega_2 = \omega_{2\varphi} \omega_1, \quad \omega_{2\varphi} = -\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{\lambda_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)},$$

$$\omega_3 = \omega_{3\varphi} \omega_1, \quad \omega_{3\varphi} = -\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\lambda_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}.$$

Линейные скорости точек A и B

$$V_A = l_1 \omega_1, \quad V_B = l_3 \omega_3,$$

а их проекции

$$\dot{x}_A = -l_1 \omega_1 \sin \varphi_1; \quad \dot{y}_A = l_1 \omega_1 \cos \varphi_1.$$

$$\dot{x}_B = \dot{x}_A - l_1 \lambda_2 \omega_2 \sin \varphi_2; \quad \dot{y}_B = \dot{y}_A + l_1 \lambda_2 \omega_2 \cos \varphi_2.$$

Задача об ускорениях

Соотношения для определения угловых ускорений 2-го и 3-го звеньев получают дифференцированием (5.8):

$$\begin{cases} -\cos \varphi_1 \omega_1^2 - \sin \varphi_1 \varepsilon_1 = \lambda_2 \omega_2^2 \cos \varphi_2 + \lambda_2 \varepsilon_2 \sin \varphi_2 - \lambda_3 \omega_3^2 \cos \varphi_3 - \lambda_3 \varepsilon_3 \sin \varphi_3, \\ -\sin \varphi_1 \omega_1^2 + \cos \varphi_1 \varepsilon_1 = \lambda_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2 - \lambda_2 \varepsilon_2 \cos \varphi_2 - \lambda_3 \omega_3^2 \sin \varphi_3 + \lambda_3 \varepsilon_3 \cos \varphi_3. \end{cases}$$

В результате

$$\varepsilon_2 = \omega_{2\varphi} \varepsilon_1 + \frac{\omega_1}{\lambda_2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)} \times$$

$$\times [\cos(\varphi_1 - \varphi_3) \sin(\varphi_2 - \varphi_3) (\omega_1 - \omega_3) - \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) (\omega_2 - \omega_3)];$$

$$\varepsilon_3 = \omega_{3\varphi} \varepsilon_1 + \frac{\omega_1}{\lambda_3 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)} \times$$

$$\times [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_2 - \varphi_3) (\omega_1 - \omega_2) - \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) (\omega_2 - \omega_3)].$$

Линейные ускорения точек и их проекции

$$a_A = l_1 \sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}; \quad \ddot{x}_A = -l_1 \omega_1^2 \cos \varphi_1 - l_1 \varepsilon_1 \sin \varphi_1; \quad \ddot{y}_A = -l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 + l_1 \varepsilon_1 \cos \varphi_1;$$

$$a_B = l_3 \sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2}; \quad \ddot{x}_B = \ddot{x}_A - l_1 \lambda_2 (\omega_2^2 \cos \varphi_2 + \varepsilon_1 \sin \varphi_2);$$

$$\ddot{y}_B = \ddot{y}_A - l_1 \lambda_2 (\omega_2^2 \sin \varphi_2 + \varepsilon_2 \cos \varphi_2).$$

Значения кинематических характеристик различных точек звеньев определяются аналогично методике, представленной в п. 5.2.

5.4. Кинематический анализ кулисного механизма

Схема механизма с качающейся кулисой представлена на рис. 5.3.

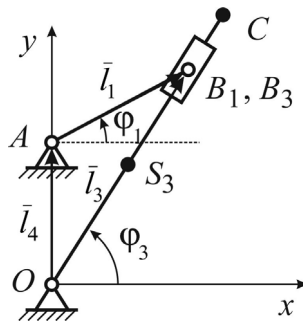


Рис. 5.3. Схема кулисного механизма

Даны длина кривошипа AB , кулисы OC , расстояние OA , угловая скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1 кривошипа AB .

Уравнение замкнутости векторного контура $OABO$

$$\bar{l}_1 - \bar{l}_3 + \bar{l}_4 = 0. \quad (5.9)$$

Вектор \bar{l}_3 , характеризующий положение камня кулисы, имеет переменную величину и направление.

Задача о положениях

В проекциях (5.9) на оси координат (см. рис. 5.3)

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 = l_3 \cos \varphi_3, \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_4 = l_3 \sin \varphi_3. \end{cases} \quad (5.10)$$

В результате решения (5.10)

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\sin \varphi_1 + \lambda_4}{\cos \varphi_1}, \quad l_3 = l_1 \sqrt{1 + \lambda_4^2 + 2\lambda_4 \sin \varphi_1}.$$

Окончательно

$$\varphi_3 = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi_1 + \lambda_4}{\cos \varphi_1} & \text{при } y_{A_1} = l_1 \sin \varphi_1 + l_4 \geq 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi_1 + \lambda_4}{\cos \varphi_1} & \text{при } y_{A_1} = l_1 \sin \varphi_1 + l_4 < 0, \\ -\frac{3}{2}\pi & \text{при } \varphi_1 = \frac{3}{2}\pi, \\ \pi/2 & \text{при } \varphi_1 = \pi/2. \end{cases}$$

Координаты характерных точек

$$\begin{aligned} x_{A_1} &= l_1 \cos \varphi_1; & y_{A_1} &= l_4 + l_1 \sin \varphi_1. \\ x_C &= l_{OC} \cos \varphi_3; & y_C &= l_{OC} \sin \varphi_3. \end{aligned}$$

Задача о скоростях

Уравнения для определения скоростей:

$$\begin{cases} -l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 = V_{A_3 A_1} \cos \varphi_3 - l_1 \omega_3 \sin \varphi_3, \\ l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 = V_{A_3 A_1} \sin \varphi_3 + l_3 \omega_3 \cos \varphi_3, \end{cases} \quad (5.11)$$

где относительная скорость $V_{A_3 A_1} = \frac{dl_3}{dt}$.

В результате

$$\omega_3 = \omega_{3\varphi} \cdot \omega_1, \quad V_{A_3 A_1} = V_{A_3 A_1 \varphi} \cdot \omega_1,$$

где $\omega_{3\varphi} = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{\lambda_3}$, $V_{A_3 A_1 \varphi} = -l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)$.

Проекции линейных скоростей

$$\begin{aligned} \dot{x}_{A_1} &= -l_1 \omega_1 \sin \varphi_1; & \dot{y}_{A_1} &= l_1 \omega_1 \cos \varphi_1. \\ \dot{x}_C &= -l_{OC} \omega_3 \sin \varphi_3; & \dot{y}_C &= l_{OC} \omega_3 \cos \varphi_3. \end{aligned}$$

Задача об ускорениях

Система уравнений относительно углового ускорения звена 3 и ускорений точки A_3 при дифференцировании (5.11) принимает форму

$$\begin{cases} -l_1\omega_1^2 \cos \varphi_1 - l_1\varepsilon_1 \sin \varphi_1 = a_{A_3A_1}^{\tau} \cos \varphi_1 - 2V_{A_3A_1} \omega_3 \sin \varphi_3 - l_3\varepsilon_3 \sin \varphi_3 - l_3\omega_3^2 \cos \varphi_3, \\ -l_1\omega_1^2 \sin \varphi_1 + l_1\varepsilon_1 \cos \varphi_1 = a_{A_3A_1}^{\tau} \sin \varphi_3 + 2V_{A_3A_1} \omega_3 \cos \varphi_3 + l_3\varepsilon_3 \cos \varphi_3 - l_3\omega_3^2 \sin \varphi_3, \end{cases}$$

где $2V_{A_3A_1} \cdot \omega_3 = a_{A_3A_1}^k$ – величина ускорения Кориолиса; $a_{A_3A_1}^r = \frac{dV_{A_3A_1}}{dt}$ – релятивное ускорение.

В результате

$$\varepsilon_3 = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{\lambda_3} \varepsilon_1 - \frac{\omega_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{\lambda_3} - \frac{a_{A_3A_1}^k}{l_3},$$

$$a_{A_3A_1}^r = -\varepsilon_1 l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + \omega_1^2 \left[\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{\lambda_3} - \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \right] l_1.$$

$$a_C = l_{OC} \sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2}; \quad a_{A_1} = l_1 \sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}.$$

$$\ddot{x}_C = -l_{OC} (\omega_3^2 \cos \varphi_3 + \varepsilon_3 \sin \varphi_3); \quad \ddot{y}_C = l_{OC} (\varepsilon_3 \cos \varphi_3 - \omega_3^2 \sin \varphi_3).$$

$$\ddot{x}_{A_1} = -l_1 (\omega_1^2 \cos \varphi_1 + \varepsilon_1 \sin \varphi_1); \quad \ddot{y}_{A_1} = l_1 (\varepsilon_1 \cos \varphi_1 - \omega_1^2 \sin \varphi_1).$$

Контрольные вопросы и упражнения

1. Суть метода векторных контуров при кинематическом анализе механизмов.

2. Последовательность аналитического исследования кинематики простых рычажных механизмов.

3. Вид уравнения замкнутости для кривошипно-ползунного механизма.

4. Вид уравнения замкнутости для шарнирного четырехзвенника.

5. Вид уравнения замкнутости для кулисного механизма с качающейся кулисой.

6. Аналитически определить величину перемещения ползуна центрального кривошипно-ползунного механизма при $l_{OA} = 0,1$ м; $l_{AB} = 0,5$ м; $\varphi_1 = 30^\circ$ (см. рис. 5.1). Результат сравнить с графическим методом.

7. Аналитически определить величину скорости ползуна центрального кривошипно-ползунного механизма при $l_{OA} = 0,1$ м; $l_{AB} = 0,5$ м; $\varphi_1 = 60^\circ$, $\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon_1 = 3 \text{ с}^{-2}$ (см. рис. 5.1). Результат сравнить с графоаналитическим методом.

8. Аналитически определить величину угловой скорости шатуна шарнирного четырехзвенника при $l_{OA} = 0,1$ м; $l_{AB} = 0,5$ м; $l_{BC} = 0,6$ м; $l_{OB} = 0,8$ м; $\varphi_1 = 60^\circ$, $\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon_1 = 0$ (см. рис. 5.2). Результат сравнить с графоаналитическим методом.

9. Аналитически определить величину углового ускорения шатуна шарнирного четырехзвенника при $l_{OA} = 0,1$ м; $l_{AB} = 0,5$ м; $l_{BC} = 0,6$ м; $l_{OB} = 0,8$ м; $\varphi_1 = 60^\circ$, $\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon_1 = 0$ (см. рис. 5.2). Результат сравнить с графоаналитическим методом.

10. Аналитически определить величину угловой скорости кулисы при $l_{AB} = 0,1$ м; $l_{OA} = 0,5$ м; $l_{OB} = 0,6$ м; $l_{OC} = 0,8$ м; $\varphi_1 = 60^\circ$, $\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon_1 = 0$ (см. рис. 5.3). Результат сравнить с графоаналитическим методом.

Лекция 6

ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ. ПАРАМЕТРЫ ЭВОЛЬВЕНТНОГО ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОЛЕС

Содержание: основные понятия и определения, основная теорема зацепления, параметры эвольвентного зацепления прямозубых и косозубых цилиндрических колес.

Ключевые слова: зубчатое зацепление; зубчатый механизм; эвольвента окружности; эвольвентное зацепление; модуль; передаточное отношение; косозубое колесо; нормальный и торцовый модуль.

6.1. Основные понятия

Зуб – выступ звена, образующий высшую кинематическую пару с выступом другого звена.

Зубчатое зацепление – высшая кинематическая пара, образованная последовательно соприкасающимися зубьями двух зубчатых колес.

Зубчатый механизм – передаточный механизм, содержащий по крайней мере одно зубчатое зацепление.

Простейшая зубчатая передача – трехзвенный механизм, в котором два подвижных звена – **зубчатые колеса**, образующие между собой высшую кинематическую пару, а со стойкой – низшие кинематические пары (вращательные или поступательные).

Зубчатые механизмы предназначены для передачи и преобразования движения и сил путем непосредственного зацепления. При этом давление зубьев вращающегося ведущего колеса передается зубьям ведомого колеса.

Широко применяются в различных отраслях машиностроения благодаря высокой точности воспроизведения заданного закона движения, надежной и долговечной работе в различных условиях эксплуатации, высокому КПД (до 0,99), постоянству передаточного отношения, широкому диапазону окружных скоростей и передаваемых мощностей.

Зубчатые механизмы классифицируют:

1) по **форме профиля зубьев**: эвольвентные, циклоидальные, зацепление Новикова, цевочные и т.д.;

2) по **геометрической форме колес**: цилиндрические, конические, секторные, некруглые и т.д.;

3) по **расположению зубьев на ободке колеса**: прямозубые, косозубые, шевронные, с криволинейными зубьями и т.д. (рис. 6.1);

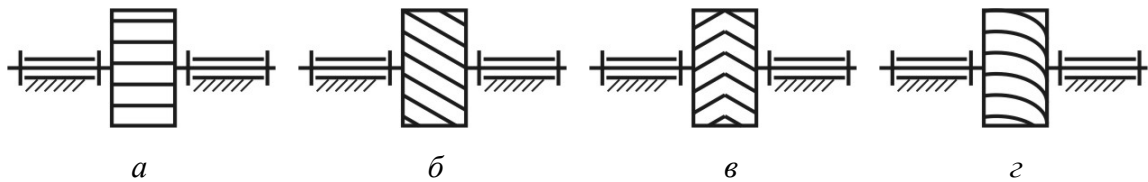


Рис. 6.1. Расположение зубьев на ободе колеса: *a* – прямозубые; *б* – косозубые; *в* – шевронные; *г* – с круговыми зубьями

4) по **расположению зубчатых колес**: с внешним зацеплением, с внутренним зацеплением, с торцевым зацеплением (рис. 6.2);

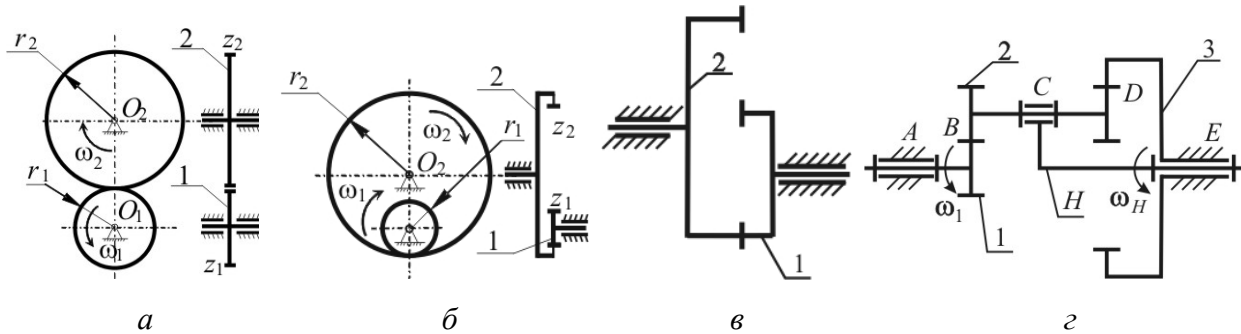


Рис. 6.2. Плоские зубчатые передачи: *a* – с внешним зацеплением; *б* – с внутренним зацеплением; *в* – с торцевым зацеплением; *г* – планетарная

5) по **геометрическому признаку**: плоские – оси колес параллельны (см. рис. 6.2), пространственные – оси колес пересекаются или перекрещиваются (рис. 6.3);

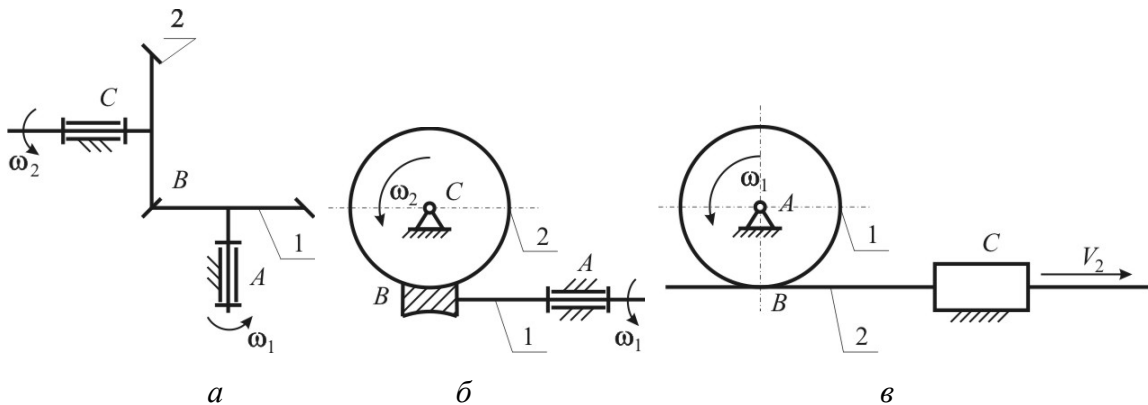


Рис. 6.3. Пространственные зубчатые передачи: *a* – коническая; *б* – червячная; *в* – реечная

6) по **кинематическому признаку**: рядовые – оси колес неподвижны (см. рис. 6.2, *a*, *б*, *в*), планетарные – оси некоторых колес подвижны (рис. 6.2, *г*);

7) по **окружной скорости**: тихоходные (≤ 5 м/с), скоростные (5–15 м/с), быстроходные (> 15 м/с);

8) по **конструктивному исполнению**: закрытые, открытые.

Зубчатый механизм называется **редуктором**, если он предназначен для уменьшения скорости вращения. Если зубчатый механизм служит для увеличения скорости вращения, то это – **мультипликатор**.

В простейшей передаче звено с большим числом зубьев принято называть **колесом** и обозначать его индексом 2, а звено с меньшим числом зубьев – **шестерней** с индексом 1 (см. рис. 6.2, а, б, в).

6.2. Основная теорема зацепления

Взаимодействующие поверхности в высшей кинематической паре, обеспечивающие заданный закон движения звеньев в их относительном движении, называют **сопряженными**.

Сечения сопряженных поверхностей плоскостью, параллельной плоскости движения, называют **сопряженными профилями**.

Связь между геометрией профилей и законами относительного движения этих профилей устанавливает **основная теорема зацепления**.

Основная теорема зацепления. Общая нормаль в точке контакта сопряженных профилей делит линию межцентрового расстояния на части, отношение которых обратно пропорционально отношению угловых скоростей профилей (рис. 6.4).

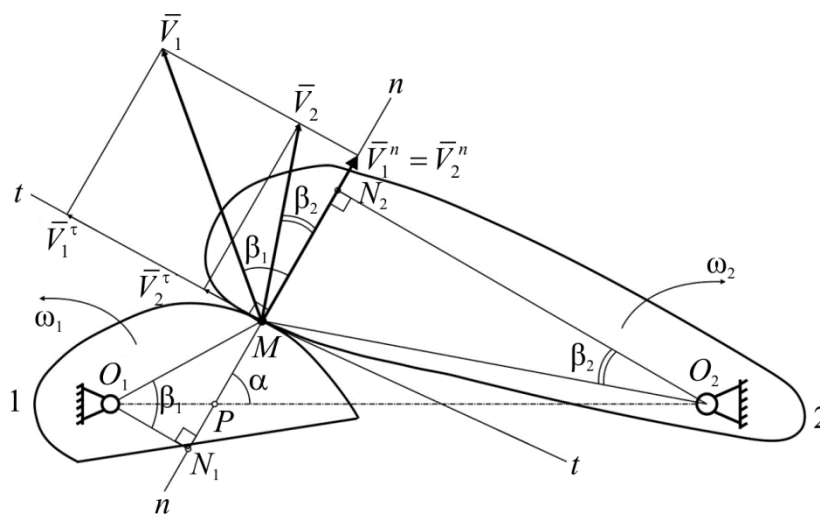


Рис. 6.4. Сопряженные профили

Доказательство:

$n-n$ – общая нормаль в точке контакта M ;

$t-t$ – общая касательная в точке контакта M ;

O_1O_2 – межцентровое расстояние;

P – полюс зацепления;

ω_1 и ω_2 – угловые скорости соответствующих профилей.

Нормальная составляющая скорости каждого профиля в точке M

$$V_1^n = V_1 \cos \beta_1 = \omega_1 O_1 M \cos \beta_1 = \omega_1 O_1 N_1 = \omega_1 O_1 P \sin \alpha ;$$

$$V_2^n = V_2 \cos \beta_2 = \omega_2 O_2 M \cos \beta_2 = \omega_2 O_2 N_2 = \omega_2 O_2 P \sin \alpha .$$

Условие существования высшей кинематической пары в точке M

$$V_1^n = V_2^n ,$$

следовательно,

$$\omega_1 O_1 P = \omega_2 O_2 P .$$

Окончательно

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 P}{O_1 P} = i_{12} - \text{передаточное отношение} .$$

Следствие из теоремы:

1. Для постоянства передаточного отношения сопряженных профилей полюс зацепления P должен занимать постоянное положение.

2. Величина относительной скорости скольжения профилей в высшей кинематической паре для внешнего зацепления

$$V_{\text{ск}} = |\omega_1 + \omega_2| \cdot l_{MP} ,$$

для внутреннего зацепления

$$V_{\text{ск}} = |\omega_2 - \omega_1| \cdot l_{MP} .$$

3. Если связать с расстояниями $O_1 P = R_1$ и $O_2 P = R_2$ соответствующие профили, то в точке их контакта скорость скольжения равна нулю. R_1 и R_2 называются **начальными радиусами**, а соответствующие им окружности – **начальными**.

6.3. Эвольвента окружности и ее свойства

Для большинства зубчатых колес характерен эвольвентный профиль зуба, обеспечивающий постоянство передаточного отношения в соответствии со следствием 1 основной теоремы зацепления.

Эвольвента окружности – кривая, которую описывает любая точка прямой, перекатывающейся без скольжения по некоторой окружности. Данная прямая называется **производящей**, а окружность – **основной** (рис. 6.5). Ее радиус обозначается r_b .

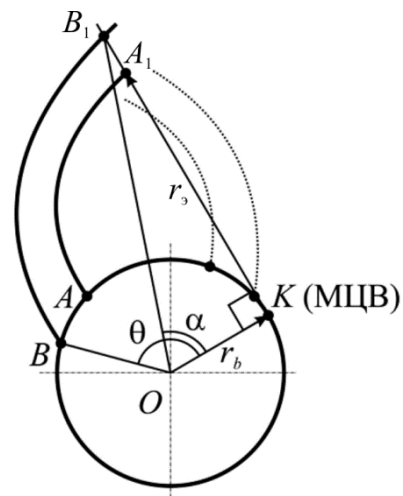


Рис. 6.5. Эвольвента окружности

Свойства:

- 1) симметричность – левая и правые ветви эвольвенты симметричны;
- 2) эвольвента начинается на основной окружности и не существует внутри ее;
- 3) форма эвольвенты зависит от радиуса основной окружности;
- 4) нормаль к любой точке эвольвенты направлена по касательной к основной окружности, и центр кривизны эвольвенты лежит в точке касания;
- 5) эвольвенты AA_1 и BB_1 – эквидистантны;
- 6) $\cup KA = KA_1$; $\cup KB = KB_1$.

Уравнения эвольвенты

С помощью этих уравнений все параметры кривой выражаются через полярные координаты, что позволяет построить эвольвенту.

$r_s = OB_1$ – текущий радиус эвольвенты; α – угол профиля эвольвенты; θ – эвольвентный угол; $r_b = OB$ – радиус основной окружности.

1) треугольник OKB_1 – прямоугольный $\Rightarrow r_s = r_b / \cos \alpha$;

2) $\cup KB = KB_1$; $KB_1 = r_b \operatorname{tg} \alpha$; $\cup KB = r_b(\alpha + \theta) \Rightarrow \theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$.

Окончательно уравнения эвольвенты в полярных координатах выглядят так:

$$\begin{cases} r_s = r_b / \cos \alpha, \\ \theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha = \operatorname{inv} \alpha, \end{cases}$$

где $\operatorname{inv} \alpha$ – инволюта угла α .

6.4. Элементы прямозубого цилиндрического зубчатого колеса

Прямозубое цилиндрическое колесо и его элементы представлены на рис. 6.6.

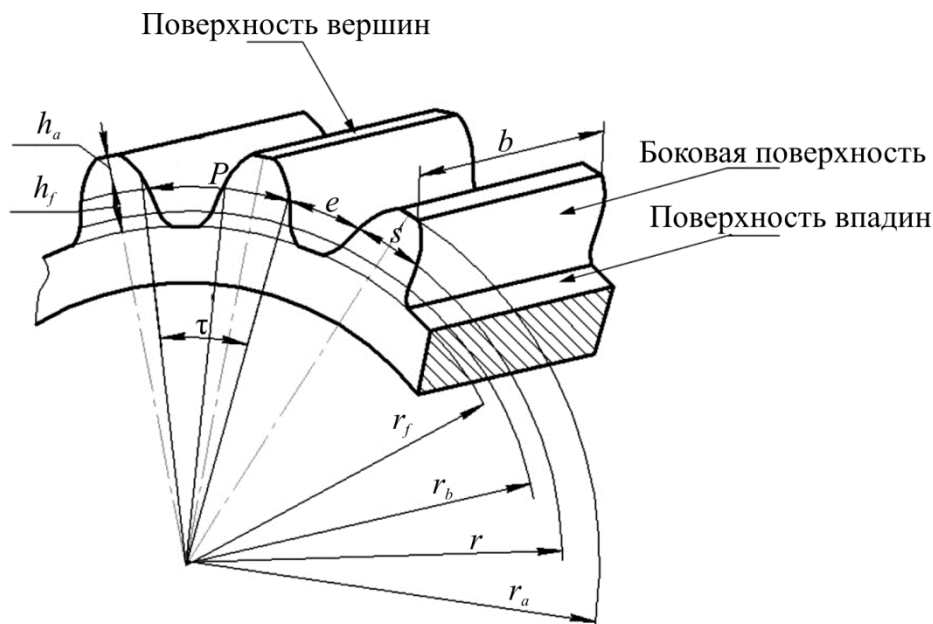


Рис. 6.6. Основные параметры цилиндрического прямозубого колеса

Поверхность впадин отделяет зуб от тела колеса.

Поверхность вершин отделяет зубья со стороны, противоположной телу зубчатого колеса.

Пространство между двумя соседними зубьями – **впадина**.

Боковая поверхность зубьев – наиболее важная из всех поверхностей. Она ограничивает зуб со стороны впадины и состоит из главной и переходной поверхностей.

Главная поверхность обеспечивает заданное передаточное отношение и является эвольвентной.

Сечение поверхности зубчатого колеса плоскостью, перпендикулярной оси вращения, представляет собой **эвольвентный профиль зуба**.

На рис. 6.6. указаны основные элементы колеса и их обозначения.

Окружность, служащая для построения эвольвенты и от которой она начинается, – **основная** (r_b).

Базовая окружность для определения размеров зубьев цилиндрического колеса – **делительная** (r). Она делит зуб на две части: головку и ножку.

Окружность, ограничивающая соответственно вершины и впадины колеса, – окружности **вершин** (r_a) и **впадин** (r_f).

Расстояние между одноименными точками двух соседних зубьев по делительной окружности – **окружной шаг** колеса (p).

s и e – соответственно **толщина зуба** и **ширина впадины** по делительной окружности.

h_a и h_f – соответственно **высота головки** и **ножки** зуба.

τ – **угловой шаг**; b – **ширина венца зубчатого колеса**; z – **число зубьев**.

Длина делительной окружности (см. рис. 6.6) $2\pi r = p \cdot z \Rightarrow d \cdot \pi = p \cdot z$

$\Rightarrow d = \frac{p}{\pi} z$. Величина $\frac{p}{\pi} = m$ – **модуль колеса** [мм] – стандартизован.

Остальные параметры зубчатого колеса определяются из следующих соотношений:

$r_b = r \cos \alpha$ – радиус основной окружности;

$h_a = h_a^* \cdot m$ – высота головки зуба; h_a^* – коэффициент высоты головки ($h_a^* = 1$ и $h_a^* = 0,8$ для укороченного зуба);

$h_f = (h_a^* + c^*) m$ – высота ножки зуба; c^* – коэффициент радиального зазора ($c^* = 0,25$ и $c^* = 0,3$ для укороченного зуба). Радиальный зазор необходим для того, чтобы зуб одного колеса при зацеплении мог повернуться во впадине другого колеса;

$h = h_a + h_f$ – высота зуба;

$p = s + e$.

Важно отметить: *все параметры зубчатого колеса выражаются через модуль m и число зубьев z .*

6.5. Картина эвольвентного зацепления прямозубых цилиндрических колес

Рассматривается зацепление двух колес, зубья которых нарезаны стандартным инструментом без модификации (*коррекции*) с равноделенным шагом. Такое зацепление называется **нулевым**.

Картина зацепления представлена на рис. 6.7.

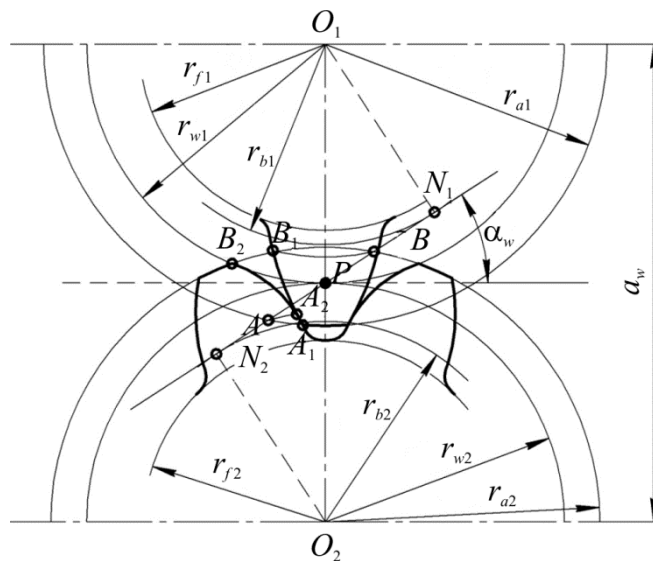


Рис. 6.7. Картина нулевого эвольвентного зацепления
прямозубых цилиндрических колес

В процессе зацепления появляются **начальные окружности** радиусами r_{w1} и r_{w2} , касающиеся друг друга в полюсе P . Эти окружности катятся друг относительно друга без скольжения (см. основную теорему зацепления).

В случае нулевого зацепления начальные и делительные окружности колес совпадают: $r_{w1} = r_1$ и $r_{w2} = r_2$.

Линия N_1N_2 , касательная к основным окружностям колес и проходящая под углом α_w через полюс зацепления P , называется **теоретической линией зацепления**. Острый угол, образованный линией N_1N_2 и касательной к начальным окружностям в полюсе P , называется **углом зацепления** α_w (для нулевого зацепления $\alpha_w = \alpha = 20^\circ$). На **части** линии зацепления встречаются **сопряженные точки** соответствующих зубьев двух колес.

Расстояние между соответствующими окружностями выступов одного колеса и впадин сопряженного ему другого колеса, измеренное по межосевой линии O_1O_2 , называется **радиальным зазором**. Он необходим для возможности «проворота» зуба одного колеса во впадине другого, а также для подачи смазки в зону контакта зубьев. При этом боковой зазор отсутствует.

Эвольвентные профили зубьев строятся перекачиванием линии N_1N_2 по соответствующим основным окружностям.

Отрезок AB , заключенный между точками пересечения окружностей выступов колес с линией зацепления N_1N_2 , называется **активным** (практическим) **участком линии зацепления**. На этом участке входят в контакт сопряженные точки зубьев колес.

Участки A_1B_1 и A_2B_2 профилей зубьев, заключенные между окружностями выступов колес и точками пересечения окружностей O_1B и O_2A с профилями зубьев, являются **активными (рабочими) участками профилей зубьев**. Точки этих участков сопрягаются на активном участке AB .

Параметры нулевого зацепления приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Параметры нулевого зацепления

№ п/п	Параметр	Формула
1	Шаг зацепления	$p = \pi \cdot m$
2	Радиусы начальных (делительных) окружностей	$r_{w_i} = r_i = \frac{m \cdot z_i}{2}$
3	Радиусы основных окружностей	$r_{b_i} = r_i \cdot \cos \alpha$, ($\alpha=20^\circ$)
4	Толщина зуба по делительной окружности	$S = p/2$
5	Ширина впадины	$e = S = p/2$
6	Межосевое расстояние	$a_w = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}$
7	Радиальный зазор	$c = c^* \cdot m$, ($c^*=0,25 \div 0,3$)
8	Высота головки зуба	$h_a = h_a^* \cdot m$, ($h_a^*=0,8 \div 1,0$)
9	Высота ножки зуба	$h_f = m(h_a^* + c^*)$
10	Высота зуба	$h = h_a + h_f$
11	Радиусы окружностей вершин	$r_{a_i} = r_i + h_{a_i}$
12	Радиусы окружностей впадин	$r_{f_i} = r_i - h_{f_i}$

6.6. Параметры зацепления косозубых цилиндрических колес

Зацепление колес с косыми зубьями предназначено для передачи вращения между параллельными валами (рис. 6.8).

Боковая поверхность 3 косого зуба – развертывающийся геликоид, получающийся перекачиванием прямой AC вместе с плоскостью l по основному

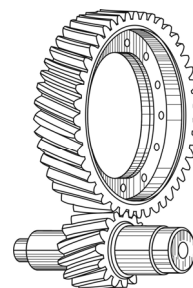


Рис. 6.8. Зацепление косозубых цилиндрических колес

цилиндру 2. При этом прямая AC смещена на острый угол $\beta = \text{const}$ относительно образующей основного цилиндра (рис. 6.9).

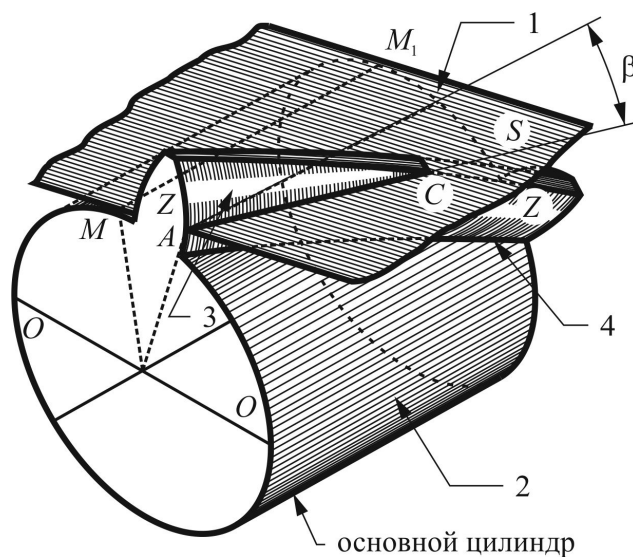


Рис. 6.9. Образование развертывающего геликоида

Каждая точка прямой AC описывает эвольвенту в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Боковая линия 4 косо́го зуба – винтовая (см. рис. 6.9). Косой зуб не имеет плоского нормального сечения, так как прямые, образующие его боковую поверхность, не параллельны.

Угол β между боковой линией косо́го зуба и направлением, параллельным оси колеса, – *угол скручивания*. Наклон косо́го зуба различают по направлению. Если со стороны цилиндрической поверхности венца зуб поднимается слева направо, то такое направление является правым. В большинстве своем зуб шестерни выполняется *правым*, а колеса – *левым*.

При зацеплении сопряженных косо́зубых колес угол скручивания одинаков для обоих профилей, а направления зубьев противоположны при внешнем зацеплении и одинаковы в случае внутреннего зацепления.

Если плоскость зацепления S касается основного цилиндра по прямой MM_1 , то поверхность зуба ZZ она пересекает по линии касания AC с сопряженным зубом другого колеса.

В плоскости, перпендикулярной осям колес (торцовое сечение), характер зацепления косо́зубых колес совпадает с зацеплением прямозубых колес. Таким образом, расчет геометрических параметров косо́зубых эвольвентных передач **аналогичен расчету прямозубых передач**, но с той лишь разницей, что исходные данные для расчетов имеют торцовые значения.

При пересечении косо́зубого колеса плоскостью, перпендикулярной оси начального цилиндра, получается *торцовый (о́кружной) шаг* r_t зацеп-

ления, в плоскости, нормальной к винтовой линии на начальном цилиндре – **нормальный шаг** p_n , а в плоскости, параллельной оси цилиндра – **осевой шаг** p_a (рис. 6.10).

$$p_n = p_t \cdot \cos\beta; \quad p_a = p_t \cdot \operatorname{ctg}\beta.$$

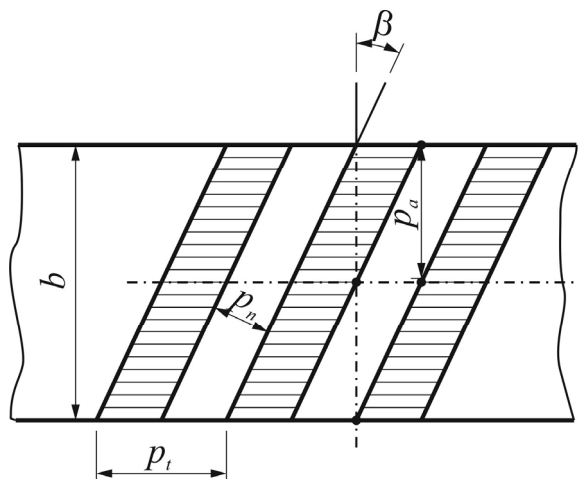


Рис. 6.10. Схема развтки обода косозубого колеса

Для каждого из сечений соответствующие значения модулей

$$m_n = m_t \cdot \cos\beta; \quad m_a = m_t \cdot \operatorname{ctg}\beta.$$

Нормальный модуль стандартизован. Его значение определяется режущим инструментом:

$$m_t = \frac{m_n}{\cos\beta}; \quad m_a = m_n \cdot \sin\beta,$$

а угол профиля в торцовом сечении

$$\operatorname{tg}\alpha_t = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta},$$

где α – угол профиля прямозубого колеса с этим же числом зубьев.

Нормальные шаг и модуль у двух зацепляющихся колес одинаковы.

Расчет геометрии косозубых колес и их зацепления осуществляется по торцовому сечению, так как в этом сечении профили зубьев – эвольвенты. Следует еще раз отметить, что все теоретические соотношения, полученные ранее для прямозубых передач, полностью справедливы для косозубых передач. Сохраняется вид этих формул, но в них вместо стандартных параметров вводят параметры по торцовым сечениям m_t и α_t , предварительно выразив их через нормальные параметры.

Для исходных данных z_1, z_2, m_n, β основные соотношения представлены в табл. 6.2, где для удобства принимаем m_n за m .

Таблица 6.2

Параметры нулевого косозубого колеса

№ п/п	Параметр	Соотношения
1	Торцовый модуль	$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta} = \frac{m}{\cos \beta}$
2	Угол профиля в торцовом сечении	$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}$
3	Диаметр делительной окружности	$d = z m_t = \frac{m z}{\cos \beta}$
4	Диаметр основной окружности	$d_b = d \cos \alpha_t = \left(\frac{m z}{\cos \beta} \right) \cos \alpha_t$
5	Диаметр окружности вершин	$d_a = d + 2 h_a^* m$
6	Диаметр окружности впадин	$d_f = d - 2 (h_a^* + c^*) m$
7	Толщина зубьев по дуге делительной окружности в торцовом сечении	$S_t = \frac{\pi m_t}{2} = \frac{\pi m}{2 \cos \beta}$
8	Толщина зубьев по дуге делительного цилиндра в нормальном сечении	$S_n = \frac{\pi m}{2}$
9	Высота зуба	$h = \frac{d_a - d_f}{2}$

Таблица 6.3

Параметры нулевого зацепления косозубых колес

№ п/п	Параметр	Соотношения
1	Торцовый шаг	$p_t = \frac{\pi m_n}{\cos \beta} = \frac{\pi m}{\cos \beta}$
2	Диаметры начальных окружностей	$d_{w_i} = m_t z_i = \frac{m z_i}{\cos \beta}$
3	Диаметры основных окружностей	$d_{b_i} = d_i \cos \alpha_t = \left(\frac{m z_i}{\cos \beta} \right) \cos \alpha_t$
4	Толщины зубьев по дугам делительных окружностей в торцовом сечении	$S_{t_i} = \frac{\pi m_t}{2} = \frac{\pi m}{2 \cos \beta}$
5	Толщины зубьев по дугам делительных цилиндров в нормальном сечении	$S_{n_i} = \frac{\pi m}{2}$
6	Делительное межосевое расстояние	$a = \frac{(z_1 + z_2) m}{2 \cos \beta}$

Следует учесть, что $h_{a_t}^* = h_a^* \cdot \cos \beta$ и $c_t^* = c^* \cdot \cos \beta$.

Одним из недостатков зацепления косозубых колес является возникновение осевого усилия на валу колеса за счет нормальных реакций, направ-

ленных наклонно к его оси. Вследствие этого необходима установка упорных осевых подшипников, что приводит к увеличению потерь на трение. Этот недостаток устраняется применением шевронных колес с зубьями одинакового наклона в обе стороны (см. рис. 6.1, в). Шевронные колеса используют для передачи больших мощностей при значительной скорости. Они имеют высокую прочность, бесшумный и спокойный ход.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Классификация зубчатых механизмов.
2. Суть основной теоремы зацепления и следствия из нее.
3. Эвольвента окружности и ее свойства.
4. Характеристика основных параметров эвольвентного зубчатого колеса.
5. Каковы особенности построения картины нулевого внешнего зацепления эвольвентных зубчатых колес?
6. Определить значение радиуса делительной окружности второго колеса нулевого эвольвентного зацепления r_2 , если $i_{2-1} = 0,2$, $m = 3$ мм, $z_1 = 20$.
7. Вычислить окружной шаг p зубчатого колеса, если $r = 100$ мм, $z = 20$.
8. Определить толщину зуба по делительной окружности нулевого колеса, если $r = 200$ мм, $z = 25$.
9. Найти значение радиуса основной окружности второго колеса зацепления, если величина $i_{1-2} = 3$, $m = 5$ мм, $z_1 = 36$.
10. Вычислить значение модуля m эвольвентного нулевого зацепления прямозубых колес, если величина $i_{1-2} = 2$, $r_{w2} = 100$ мм, $z_1 = 25$.
11. Найти значение межцентрового расстояния нулевого эвольвентного зацепления прямозубых цилиндрических колес, если величина $i_{1-2} = 2$, $r_{a1} = 100$ мм, $z_1 = 18$.
12. Рассчитать геометрические параметры косозубого колеса, если осевой модуль $m_a = 7$ мм, $\beta = 15^\circ$, $z = 25$.
13. Определить параметры нулевого зацепления косозубых колес, если $z_1 = 20$, $z_2 = 30$, $\beta = 15^\circ$, $m_n = 5$ мм.

Лекция 7

СИНТЕЗ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОЛЕС

Содержание: качественные показатели зубчатого зацепления; методы нарезания зубчатых колес; подрез зуба колеса; коррекция зубчатых колес.

Ключевые слова: коэффициент перекрытия; относительное скольжение профилей; метод копирования; метод обката; подрез зуба; смещение инструмента; коррекция зацепления.

7.1. Основные качественные показатели зубчатого зацепления

К качественным показателям зацепления зубчатых колес относятся: коэффициент перекрытия, коэффициент относительного скольжения, коэффициент формы зуба, коэффициент удельных давлений, КПД.

Коэффициент перекрытия

Характеризует плавность и непрерывность работы зацепления. Для определения коэффициента перекрытия необходимо ознакомиться с понятиями дуги зацепления и угла торцового перекрытия.

Дуга зацепления – путь, пройденный по начальной окружности любой точкой зуба за время полного зацепления пары зубьев (рис. 7.1).

Угол торцового перекрытия – центральный угол поворота зубчатого колеса от положения входа зуба в зацепление до выхода из зацепления.

Коэффициент торцового перекрытия (ε_α) – отношение угла торцового перекрытия к угловому шагу.

Для случая **прямозубых цилиндрических колес** его называют **коэффициентом перекрытия**. Если рассматривать зацепление колес с углом зацепления α_w , то

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\theta_i}{\tau} = \frac{\varphi_{\alpha_i}}{\tau} = \frac{\cup C_1 C_2}{r_{w1} \tau} = \frac{ABz}{r_b 2\pi} = \frac{ABz}{2r \cos \alpha_w \pi} = \frac{ABz}{\pi m z \cos \alpha_w} = \frac{AB}{\pi m \cos \alpha_w} = \frac{AB}{p \cos \alpha_w},$$

где **AB** – активный участок линии зацепления.

$$AB = N_2 A + N_1 B - N_1 N_2 = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a_w \sin \alpha_w.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a_w \sin \alpha_w}{p \cos \alpha_w}. \quad (7.1)$$

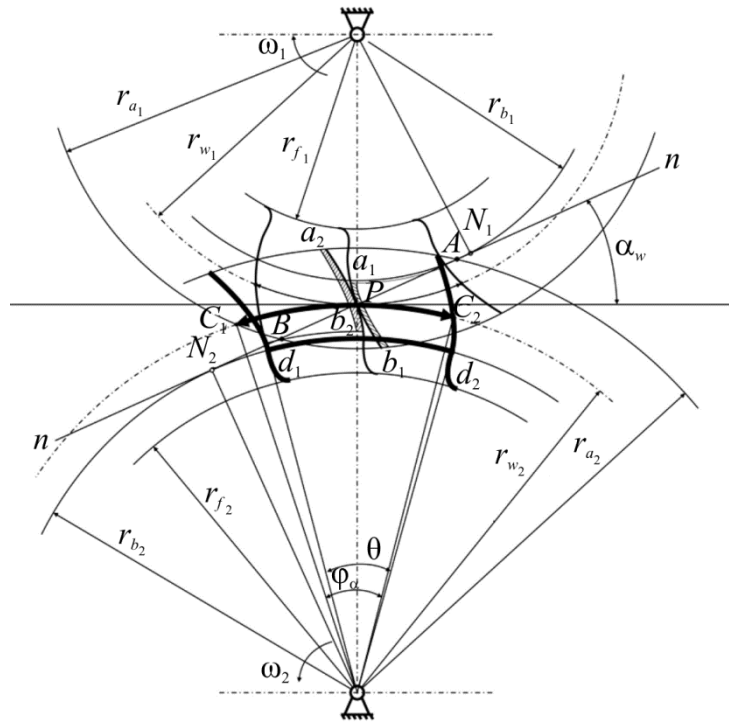


Рис. 7.1. К определению коэффициента перекрытия прямозубых цилиндрических колес: $\cup C_1C_2$ – дуга зацепления; φ_{α} – центровой угол; θ – угол торцового перекрытия

Фактически коэффициент перекрытия – отношение дуги зацепления к шагу по начальной окружности, $\varepsilon_{\alpha} = \frac{\cup C_1C_2}{p_{\alpha}}$.

Коэффициент перекрытия характеризует плавность работы зацепления. Если он меньше единицы, то зацепление работает с ударами – плавность нарушена. Если ε_{α} больше единицы, то обеспечивается плавность работы зацепления.

Для прямозубых цилиндрических колес $1 < \varepsilon_{\alpha} < 1,98$.

Например, если $\varepsilon_{\alpha} = 1,3$, то 30 % времени в зацеплении находятся две пары зубьев, а 70 % времени – одна пара.

Коэффициент перекрытия зависит от числа зубьев и величины передаточного отношения. С ростом передаточного отношения ε_{α} увеличивается, а с ростом угла зацепления – уменьшается.

В передаче с косозубыми колесами каждый зуб входит в зацепление не всей длиной сразу. При этом за счет дополнительного угла θ_{β} (благодаря скручиванию зуба) увеличивается угол перекрытия:

$$\theta_{\gamma} = \theta_{\alpha} + \theta_{\beta}; \theta_{\beta} = (2b \cdot \operatorname{tg}\beta) / (m_t \cdot z),$$

где b – ширина колеса.

Таким образом, коэффициент перекрытия в передаче с косозубыми колесами

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \frac{(b \cdot \operatorname{tg}\beta)}{p_t},$$

где ε_α – коэффициент перекрытия в торцовой плоскости, совпадающий с коэффициентом перекрытия для прямозубых колес, $\varepsilon_\gamma > \varepsilon_\alpha$. В этом **преимущество** косозубого зацепления перед прямозубым.

На практике встречаются косозубые передачи с $\varepsilon_\gamma = 8 \dots 10$. Нагрузка в них распределяется на несколько зубьев, плавность повышается, удельные давления уменьшаются. Применяют в передачах, работающих при больших окружных скоростях и передаваемых мощностях.

Коэффициент относительного скольжения профилей

Рабочие участки профилей зубьев в процессе зацепления скользят друг относительно друга, в силу чего возникает износ поверхности зубьев. Разные участки рабочих профилей изнашиваются по-разному. Износ характеризуется **коэффициентом скольжения**, учитывающим влияние геометрических и кинематических характеристик на проскальзывание профилей при зацеплении.

На рис. 7.2 сопряженные точки K_1 и K_2 профилей **прямозубых колес** встречаются на линии зацепления в точке K . $\cup K_1K - \cup K_2K$ – дуга **относительного скольжения**. В мгновенный момент времени

$$\lambda_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cup K_1K - \cup K_2K}{\cup K_1K} - \text{коэффициент скольжения первого профиля;}$$

$$\lambda_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cup K_2K - \cup K_1K}{\cup K_2K} - \text{коэффициент скольжения второго профиля.}$$

Разделив числители и знаменатели соответствующих формул на Δt , получают, что коэффициенты скольжений – **отношение скорости скольжения к скорости движения** соответствующих сопряженных точек до встречи их на линии зацепления:

$$\lambda_1 = \frac{V_{\text{ск}}}{V_{K_1K}}; \lambda_2 = \frac{V_{\text{ск}}}{V_{K_2K}} \text{ (скорости берутся с учетом знаков).}$$

Для оценки коэффициентов относительных скольжений строят диаграммы их распределения вдоль линии зацепления, принимаемой за ось Ox (см. рис. 7.2), по соотношениям

$$\lambda_1 = 1 - \frac{l-x}{x} |i_{2-1}|; \lambda_2 = 1 - \frac{x}{l-x} |i_{1-2}|, \text{ где } l = N_1 N_2. \quad (7.2)$$

Распределение этих коэффициентов вдоль рабочих профилей зубьев представлено в виде круговых диаграмм на рис. 7.2.

В полюсе зацепления $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. На ножке зуба $\lambda < 0$, а на головке зуба $\lambda > 0$. При этом наибольший износ возникает на ножке зуба.

Существуют рекомендации по выбору коэффициентов скольжения в зависимости от окружных скоростей прямозубых колес. Например, при скоростях 2–10 м/с $|\lambda| \leq 8$; 10–20 м/с $|\lambda| \leq 3$; свыше 20 м/с $|\lambda| \leq 1,5$. Особенно важны значения коэффициентов скольжения для открытых передач.

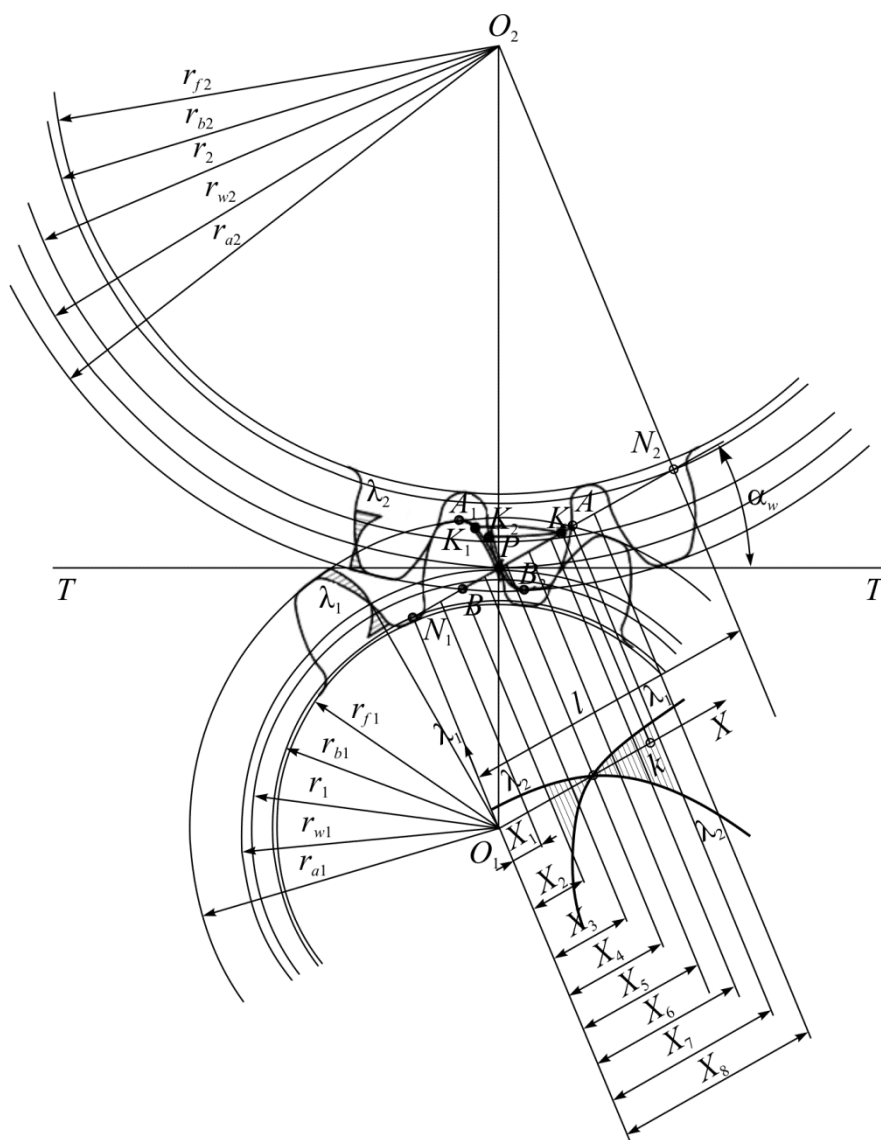


Рис. 7.2. Диаграммы распределения коэффициентов скольжения прямозубых колес

Коэффициенты λ можно уменьшить, осуществив коррекцию зубчатых колес.

Коэффициент удельного давления

Взаимодействие сопряженных профилей при зацеплении зубчатых колес сопровождается появлением **контактных напряжений**. Их увеличение в некоторых случаях приводит к выкрашиванию материала зубьев на рабочей поверхности, что значительно ухудшает качество функционирования зацепления. Контактное взаимодействие зубьев прямозубых колес характеризуется **коэффициентом удельного давления** υ ,

$$\upsilon = \frac{m}{\rho}, \quad (7.3)$$

где m – модуль зацепления; ρ – приведенный радиус кривизны эвольвентных профилей в точке контакта.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{N_1 N_2}{N_1 K \cdot N_2 K}, \quad (7.4)$$

где K – точка контакта.

Следовательно,

$$\upsilon = \frac{m(N_1 N_2)}{N_1 K \cdot N_2 K}. \quad (7.5)$$

υ – безразмерная переменная величина, зависящая от положения т. K в ее движении по линии зацепления. Графическая иллюстрация коэффициента υ представлена на рис. 7.3.

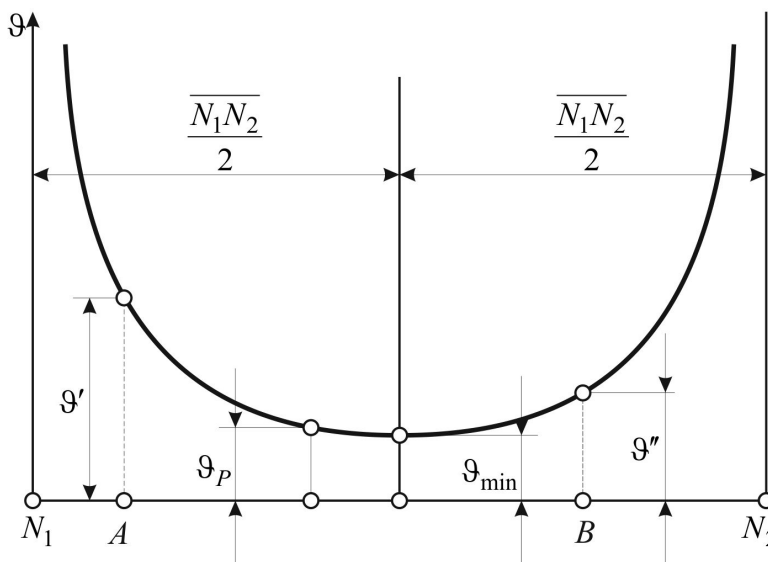


Рис. 7.3. Диаграммы распределения коэффициентов удельного давления прямозубых колес

Значения контактных напряжений можно определить по формуле Герца:

$$\sigma = 0,418 \sqrt{\frac{Q E}{b m}} \sqrt{v}, \quad (7.6)$$

где Q – сила взаимодействия зубьев; b – ширина зубчатых колес;

$E = \frac{2E_1E_2}{(E_1 + E_2)}$ – приведенный модуль упругости колес.

Таким образом, v учитывает влияние геометрии зубьев.

Осуществив коррекцию зубчатых колес, можно также уменьшить этот коэффициент.

7.2. Методы нарезания зубчатых колес

В машиностроении применяются два основных метода нарезания зубчатых колес: **копирование** и **обкатка** (огибание).

Метод копирования

Профиль режущей кромки инструмента совпадает с профилем впадины зуба нарезаемого колеса и при обработке копируется на заготовке. В качестве инструмента применяют дисковые и пальцевые фрезы в единичном производстве (рис. 7.4), а зуборезные головки и протяжки – в массовом.

Главное движение резания – вращение фрезы 1. При поступательной подаче заготовки 2 за один проход вырезается впадина зуба. При отводе инструмента от заготовки осуществляется поворот заготовки с помощью делительного механизма на угловой шаг колеса. Затем процесс повторяется. Между соответствующими впадинами образуются зуб колеса.

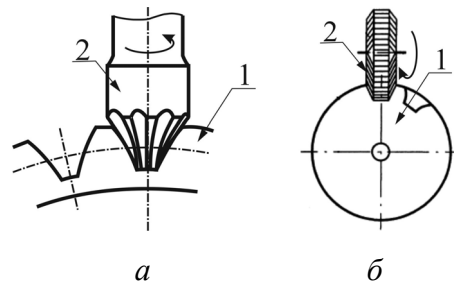


Рис. 7.4. Нарезание зубчатого колеса методом копирования: пальцевой фрезой (а); дисковой фрезой (б)

Достоинства метода:

- 1) позволяет выполнять нарезание при минимальном числе формообразующих движений на станках с простой кинематикой;
- 2) дает возможность нарезания колес на универсальном фрезерном оборудовании.

Недостатки метода:

- 1) низкая производительность;
- 2) сложность заточки профиля инструмента и неточность нарезания зубьев;

- 3) неточность поворота заготовки и ошибки по шагу;
- 4) необходимость иметь для каждого сочетания количества зубьев и модуля свой инструмент.

Метод обката (огибания)

Суть метода заключается в том, что заготовке и инструменту сообщается движение, воспроизводящее зацепления пары сопряженных зубчатых колес или колеса с зубчатой рейкой (рис. 7.5). Одновременно с этим режущий инструмент совершает рабочее движение резания.

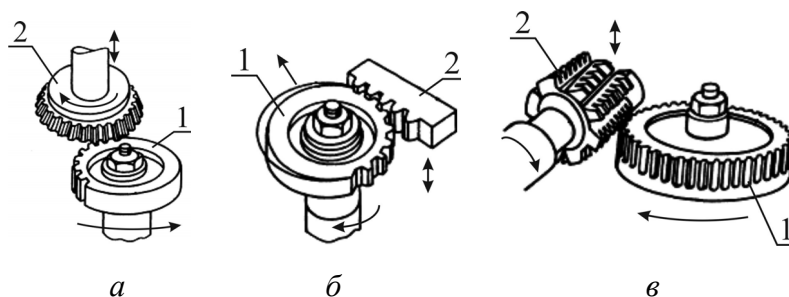


Рис. 7.5. Нарезание зубчатого колеса методом обката: долбяком (а); гребенкой (рейкой) (б); червячной фрезой (в)

В качестве инструмента применяются **долбяки** (режущий инструмент в виде зубчатого колеса), **рейки** (зуборезные гребенки), **червячные фрезы**, **протяжки** и др. Нарезание зубьев и образование их профиля методом обката осуществляется при согласованном движении инструмента и заготовки, что обеспечивается путем их жесткой кинематической связи.

Рассматриваемый метод называется **обкатом** или **огибанием**, так как эвольвентные профили зубьев возникают как огибающие мгновенных последовательных положений режущих кромок инструмента.

Достоинства метода:

- 1) высокая производительность (применяется в серийном производстве);
- 2) более высокая точность нарезания колес;
- 3) одним и тем же инструментом можно нарезать колеса одного модуля

с различным числом зубьев; например, в случае нарезания долбяком $z_k = \frac{n_d}{n_3} z_d$;

- 4) возможность использования достаточно простого инструмента (рейки).

Недостатки метода – необходимость специального зубонарезного оборудования.

Замечание: наряду с рассмотренными методами существуют методы наплавки и накатки, имеющие ограниченное применение.

Как и прямозубые, косозубые колеса нарезаются стандартным прямозубым инструментом, который устанавливается поворотом относительно заготовки на угол β . В этом случае производящая поверхность – наклонная. Появляется возможность изменения угла наклона зубьев колеса в широком диапазоне.

Кроме того, находят применение станки, работающие с косозубыми зуборезными гребенками или косозубыми долбяками. В этом случае углы β косозубых колес однозначно соответствуют углам зубьев инструмента.

7.3. Коррекция зубчатых колес

7.3.1. Исходный производящий контур инструмента

При движении резания режущие кромки инструмента образуют поверхность, называемую **производящей (инструментальной)**. У рейки инструментальная поверхность – **плоскость**, у долбяка – **цилиндр**.

Сечение производящей поверхности плоскостью, перпендикулярной оси нарезаемого колеса, образует **исходный производящий контур (ИПК)**.

В качестве примера на рис. 7.6 представлен ИПК эвольвентного реечного инструмента.

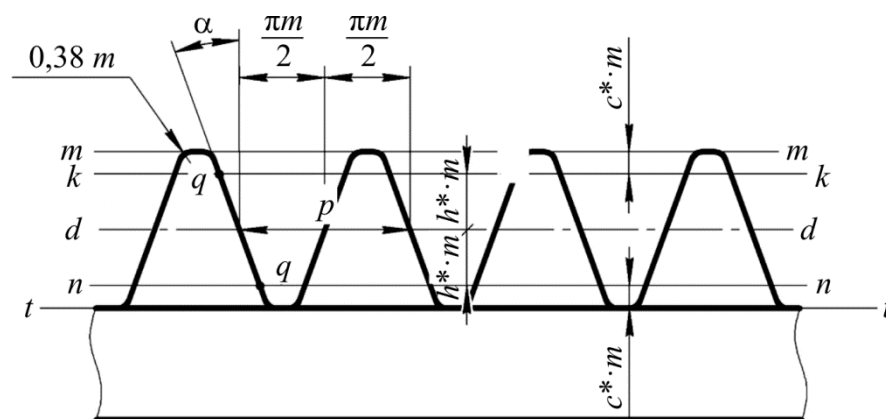


Рис. 7.6. ИПК реечного инструмента: $t-t$ и $f-f$ – соответственно прямые выступов и впадин; $k-k$ и $n-n$ – граничные прямые; $q-q$ – режущая часть рейки (прямая линия); $\alpha = 20^\circ$; $d-d$ – делительная прямая, разделяющая ИПК на две равные части; $p = \pi \cdot m$ – шаг ИПК, одинаковый по любой прямой параллельной делительной.

Высота зуба инструментальной рейки $h = 2,5m$

7.3.2. Явление подреза зубчатого колеса

Рассматривается нулевое зацепление **ИПК** реечного инструмента с нарезаемым прямозубым колесом, которое называется **нулевым станочным зацеплением**.

В этом случае у рейки появляется **станочно-начальная прямая**, которая катится относительно начальной окружности заготовки. Появление станочно-начальной прямой обусловлено разным расположением режущего инструмента относительно нарезаемого колеса.

В некоторых случаях возможна ситуация, когда в процессе нарезания колеса «вырезается» часть эвольвенты на ножке зуба, что приводит к износу, поломке зуба и нарушению плавности работы соответствующей передачи. Такое явление называется «**подрезом**» зубчатого колеса (рис. 7.7) и вызвано тем, что граничная прямая ИПК «заходит» за теоретический участок линии зацепления PN .

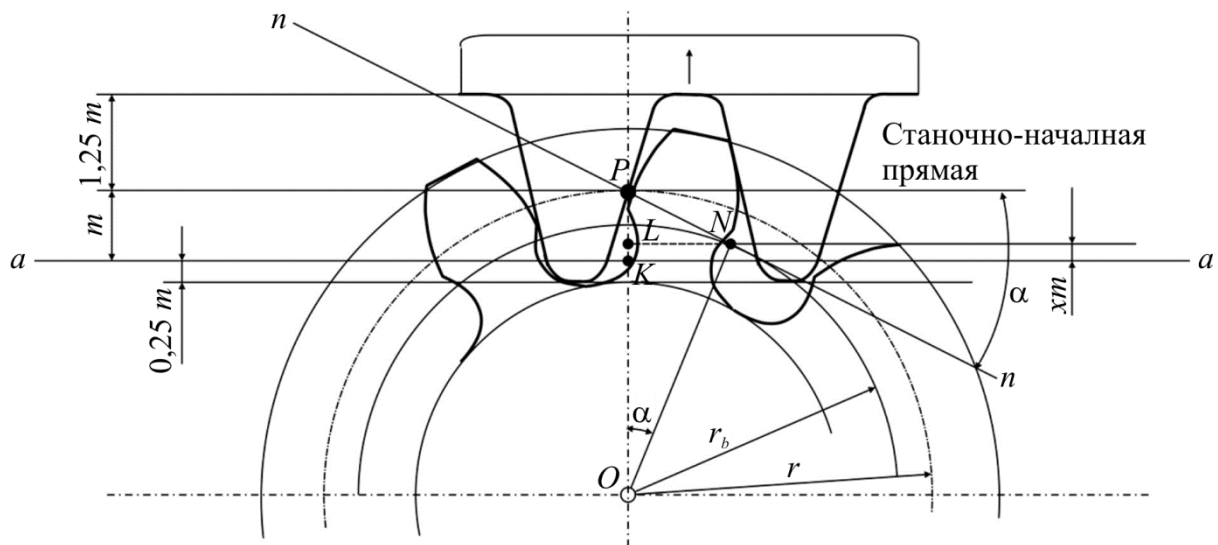


Рис. 7.7. Подрез зубчатого колеса

Для устранения этого явления необходимо сдвинуть рейку от центра заготовки так, чтобы граничная прямая проходила через точку L , т.е. смещение рейки $X = KL$. В соответствии с рис. 7.7

$$KL = PK - PL = h_a^* \cdot m - PN \sin \alpha = h_a^* \cdot m - r \sin^2 \alpha = m \left(h_a^* - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha \right).$$

Граничный случай отсутствия подреза возникает при $X = 0$, т.е. при $z_{\min} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha} \approx 17$, при $h_a^* = 1$ и $\alpha = 20^\circ$. Таким образом, у прямозубых колес при числе зубьев нарезаемого колеса меньше 17 наблюдается его «подрез». При этом минимальный сдвиг рейки от центра заготовки для отсутствия «подреза» зубчатого колеса $X_{\min} = m \left(\frac{17 - z}{17} \right)$.

Минимальное число зубьев, при котором отсутствует подрез зубьев нулевого косоугольного колеса,

$$z_{\min} = \frac{2h_{a_i}^*}{\sin^2 \alpha_t} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha_t} \cos \beta,$$

что меньше соответствующей величины для прямозубых колес ($h_{a_i}^* < h_a^*$, $\alpha_t > \alpha$), т.е. возможно получение косозубых передач с бóльшим передаточным отношением, чем у прямозубых, но при тех же радиальных габаритах. Это является **преимуществом** косозубых колес перед прямозубыми.

7.3.3. Основные виды коррекции зубчатых колес

При нарезании зубчатого колеса без сдвига инструментальной рейки осуществляется **нулевое зацепление** рейки и колеса. **Станочно-начальная прямая рейка** совпадает с ее делительной прямой и катится без скольжения по начальной (делительной) окружности колеса.

Процесс смещения рейки (ИПК) относительно ее положения при нулевом зацеплении называется **коррекцией**.

Основные цели коррекции формируются в соответствии с выполнением как геометрических, так и силовых критериев, предъявляемых к зацеплению.

Геометрические критерии характеризуют отсутствие интерференции (подреза зубьев колес), отсутствие заострения профиля зуба, непрерывность взаимодействия зубьев, обеспечение заданных габаритов передачи и др.

Силовые критерии характеризуют минимизацию износа при взаимодействии сопряженных профилей зубьев, уменьшение удельных давлений, минимизацию изгибных деформаций и др.

Иллюстрации видов коррекции колес представлены на рис. 7.8.

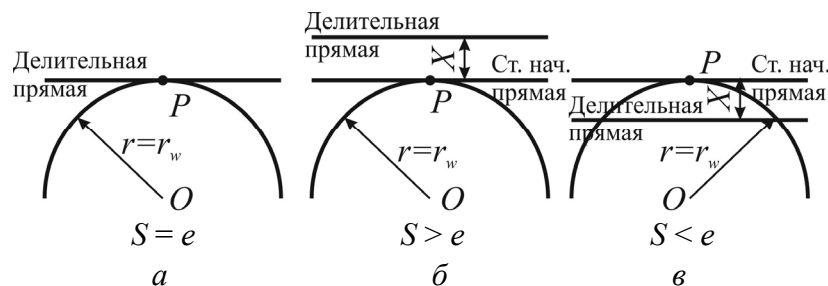


Рис. 7.8. Виды коррекции: *a* – нулевое колесо (некорректированное);

б – положительное смещение ($x > 0$), где $x = \frac{17-z}{17}$ – коэффициент относительного смещения; $X = tx$ (мм) – сдвиг инструмента; *в* – отрицательное смещение ($x < 0$)

Другими словами, при $x > 0$ инструмент смещают от центра заготовки, в противном случае, при $x < 0$ – к центру заготовки.

Зацепление двух зубчатых колес с числом зубьев z_1 и z_2 одного модуля, изготовленных со смещением инструмента, образует **корректированную**

(исправленную) зубчатую передачу. В этих передачах значения радиусов основных окружностей, делительных окружностей, окружного шага и радиального зазора такие же, как в случае нулевого зацепления. Остальные параметры колес и всего зацепления изменяются. Следует отметить ряд особенностей, которые используются при определении параметров зацепления.

1. Межцентровое расстояние зацепления после коррекции изменяется на величину **воспринимаемого смещения tu** :

$$a_w - a = a_w - \frac{m}{2}(z_1 + z_2) = tu,$$

где a_w – межцентровое расстояние коррегированного зацепления; y – безразмерный коэффициент воспринимаемого смещения со своим знаком (определяется из таблиц или расчетным путем).

2. Для получения коррегированной зубчатой передачи без **бокового зазора**, но со стандартным **радиальным зазором s^*** вводится **уравнительное смещение $m\Delta y$** :

$$m\Delta y = m(x_1 + x_2) - tu,$$

$$\Delta y = (x_1 + x_2) - y,$$

где Δy – безразмерный коэффициент уравнительного смещения со своим знаком, характеризующий изменение высоты зуба по отношению к нулевому колесу.

3. **Угол зацепления** коррегированного зацепления α_w определяется из соотношения

$$\operatorname{inv}\alpha_w = \operatorname{inv}\alpha + \frac{2x_\Sigma}{z_\Sigma} \operatorname{tg}\alpha, \quad (7.7)$$

где $\alpha = 20^\circ$; $x_\Sigma = x_1 + x_2$; $z_\Sigma = z_1 + z_2$.

Цилиндрические эвольвентные передачи подразделяются на три вида в зависимости от соотношения между смещениями каждого из колес. В качестве примера в табл. 7.1 приведены особенности прямозубых передач.

Таблица 7.1

Виды передач и их особенности

№	$x_\Sigma = x_1 + x_2$	Вид передачи	Основные особенности
1 а)	$x_\Sigma = 0; x_1 = x_2 = 0$	Нулевая	$S_1 = e_2; S_2 = e_1; a_w = a; \alpha_w = \alpha; \varepsilon_\alpha = \varepsilon; y = 0$
1 б)	$x_\Sigma = 0; x_1 = x_2 \neq 0$	Равносмещенная	$S_1 = e_2; S_2 = e_1; a_w = a; \alpha_w = \alpha; \varepsilon_\alpha = \varepsilon; y = 0$
2	$x_\Sigma > 0$	Положительная	$S_1 > e_2; S_2 > e_1; a_w > a; \alpha_w > \alpha; \varepsilon_\alpha > \varepsilon; y > 0$
3	$x_\Sigma < 0$	Отрицательная	$S_1 < e_2; S_2 < e_1; a_w < a; \alpha_w < \alpha; \varepsilon_\alpha > \varepsilon; y < 0$

Примечание. При **равносмещенном** зацеплении $z_1 + z_2 \geq 34$ (для прямозубых колес), иначе происходит подрез инструментальной рейкой ножки зуба одного из колес. В этом случае высоты зубьев не изменяются по отношению к нулевым колесам, но перераспределяются высоты их ножек и головок.

Для определения коэффициентов смещения инструмента существует ряд различных методов.

1. Метод профессора В.Н. Кудрявцева основан на принципе максимальной контактной прочности профилей зубчатых колес. x_1 и x_2 находятся из специальных таблиц в зависимости от количества зубьев колес. Такая система учитывает и другие качественные показатели зацепления. Особенно это полезно для закрытой, работающей в масляной ванне, зубчатой передачи, где важна контактная прочность.

2. Система ЦКБР (Центральное конструкторское бюро редукторостроения) представляется также в виде таблиц. Основана на равенстве коэффициентов относительного удельного скольжения зубьев обоих колес. Таблицы сформированы для равносмещенного ($x_1 = -x_2$; $|x_1| = |x_2|$) и неравносмещенного ($x_1 + x_2 \neq 0$) зацеплений.

3. Метод блокирующих контуров – совокупности линий в системе координат x_1 и x_2 , ограничивающих зону допустимых значений этих коэффициентов в зависимости от z_1 и z_2 . Границы линий контура удовлетворяют ранее перечисленным критериям по отсутствию подреза, отсутствию заострения вершины и др. (рис. 7.9).

Такой контур является номограммой для выбора коэффициентов относительных смещений.

4. Методы оптимизации с применением ЭВМ на основе всего комплекса критериев.

Обычно значения параметров коррегированного зацепления определяются по формулам ГОСТ 13755-81.

Значения основных параметров прямозубых колес и всего зацепления для различных видов передач могут определяться в соответствии с табл. 7.2.

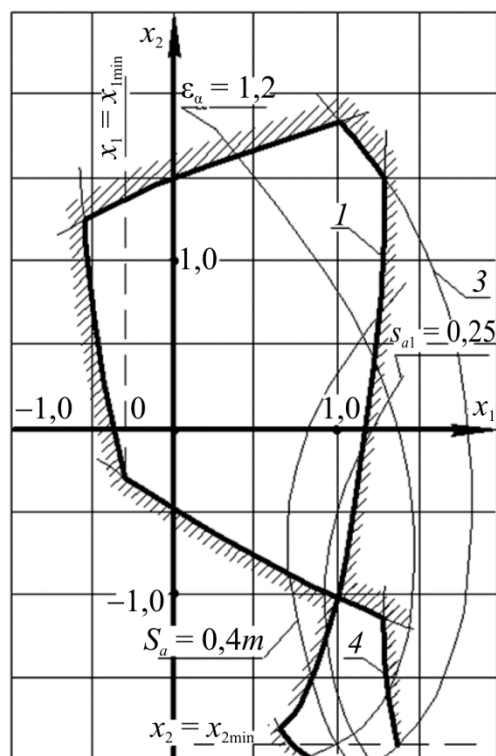


Рис. 7.9. Блокирующий контур

Таблица 7.2

Параметры корригированного прямозубого зацепления

№ п/п	Параметр	Вид зацепления	
		Неравносменное $x_{\Sigma} \neq 0$	Равносменное $x_1 = -x_2$
1	Шаг зацепления	$p = \pi \cdot m$	$p = \pi \cdot m$
2	Радиус делительной окружности	$r_i = \frac{m \cdot z_i}{2}$	$r_i = \frac{m \cdot z_i}{2}$
3	Радиус основной окружности	$r_{bi} = r_i \cdot \cos \alpha$	$r_{bi} = r_i \cdot \cos \alpha$
4	Толщина зуба по делительной окружности	$S_i = \frac{p}{2} + 2x_i m \operatorname{tg} \alpha$	$S_i = \frac{p}{2} + 2x_i m \operatorname{tg} \alpha$
5	Ширина впадины	$e = S = p/2$	
6	Межосевое расстояние	$a_w = m \left(\frac{z_{\Sigma}}{2} + y \right)$	$a_w = \frac{m z_{\Sigma}}{2}$
7	Радиус начальной окружности	$r_{wi} = r_i \left(1 + \frac{2y}{z_{\Sigma}} \right)$	$r_{wi} = r_i$
8	Глубина захода зубьев	$h_d = m (2h_a^* - \Delta y)$	$h_d = 2mh_a^*$
9	Высота зуба	$h = h_d + c^* m$	$h = h_d + c^* m$
10	Радиус окружности впадин	$r_{fi} = r_i - m (h_a^* + c^* - x_i)$	$r_{fi} = r_i - m (h_a^* + c^* - x_i)$
11	Радиус окружности вершин	$r_{ai} = r_{fi} + h$	$r_{ai} = r_{fi} + h$

Для исправленного косозубого зацепления параметры приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Параметры корригированного косозубого зацепления

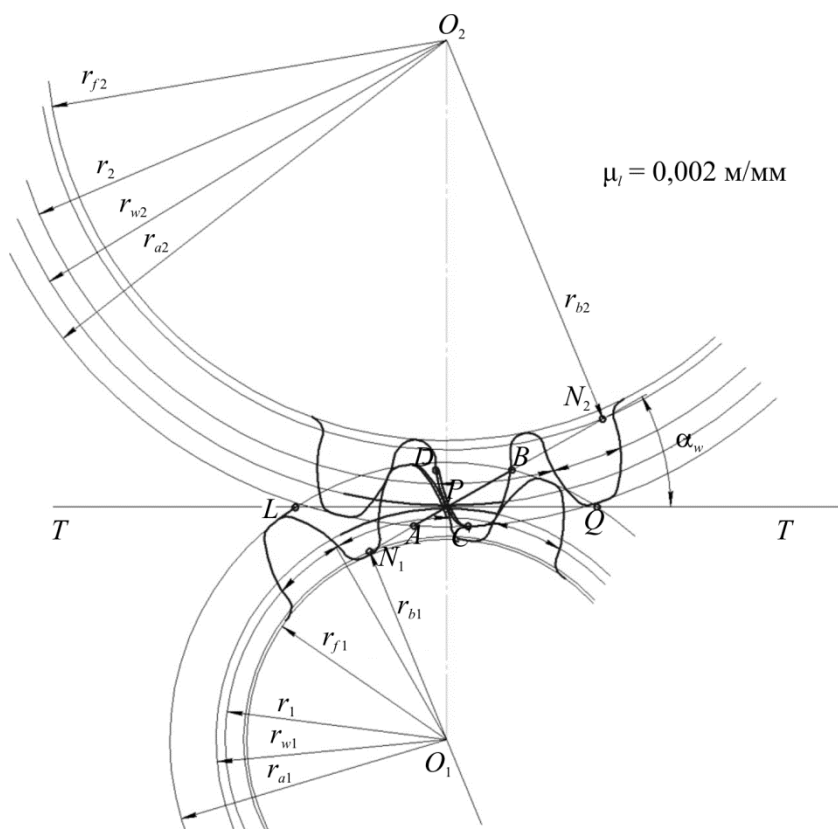
№ п/п	Параметр	Соотношения
1	Торцовый окружной шаг	$p_t = \pi m_t = \frac{p}{\cos \beta}$
2	Радиусы делительных окружностей	$r_i = \frac{m_t \cdot z_i}{2}$
3	Радиусы основных окружностей	$r_{bi} = r_i \cos \alpha_t = \left(\frac{m z_i}{2 \cos \beta} \right) \cos \alpha_t$
4	Толщина зуба по делительной окружности в торцовом сечении	$S_{ti} = \left(\frac{\pi}{2} + 2x_i \operatorname{tg} \alpha \right) \frac{m}{\cos \beta}$
5	Толщина зубьев по дуге делительного цилиндра в нормальном сечении	$S_{ni} = \left(\frac{\pi}{2} + 2x_i \operatorname{tg} \alpha \right) m$
6	Межосевое расстояние	$a_w = \frac{(a \cos \alpha_t)}{\cos \alpha_{tw}} = a + m y$
7	Радиусы начальных окружностей	$r_{wi} = \frac{(m z_i)}{2} \left(\frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{tw}} \right) = \frac{2a_w \cdot i_{1-2}}{(i_{1-2} + 1)}$

№ п/п	Параметр	Соотношения
8	Угол безззорного зацепления	$\text{inv}\alpha_{rw} = \text{inv}\alpha_t + \left(\frac{2x_\Sigma}{z_1 + z_2} \right) \text{tg}\alpha_t$
9	Радиусы окружностей вершин	$r_{a_i} = r_i + (h_a^* + x_i - \Delta y_i) m$
10	Радиусы окружностей впадин	$r_{f_i} = r_i - (h_a^* + c^* - x_i) m$
11	Высота зуба	$h = \frac{(d_{a_i} - d_{f_i})}{2} = (2h_a^* + c^*) m - \Delta y m$
12	Коэффициент воспринимаемого смещения	$y = \frac{(a_w - a)}{m} = \left(\frac{z_1 + z_2}{2 \cos \beta} \right) \left(\frac{\cos \alpha_t - \cos \alpha_{rw}}{\cos \alpha_{rw}} \right)$
13	Коэффициент уравнивающего смещения	$\Delta y = x_\Sigma - y$
14	Коэффициент перекрытия	$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \frac{b}{p_t \text{tg}\beta}$

По аналогии с предыдущим коэффициенты смещения $x_i = x_i \cos \beta$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Коэффициент перекрытия и его влияние на плавность работы передачи.
2. Вычислить значение коэффициента перекрытия эвольвентного зацепления прямозубых колес, если $\mu_t = 0,002$ м/мм, $N_1 N_2 = 102$ мм, $N_2 B = 30$ мм, $N_1 A = 36$ мм, $m = 5$ мм.



3. Коэффициенты относительных скольжений и их влияние на износостойкость зубчатых колес.
4. Характеристика и особенности методов нарезания зубчатых колес.
5. Параметры исходного производящего контура.
6. «Подрез» зубчатого колеса, его влияние на качество работы передачи, виды коррекции зубчатых колес.
7. Параметры станочного зацепления с инструментальной рейкой.
8. Понятия о коэффициентах относительных смещений, методы их определения. Классификация зубчатых передач по виду смещения инструмента.
9. Каковы требования, предъявляемые в процессе коррекции зубчатых колес?
10. Какова причина появления уравнивающего и воспринимаемого смещения режущего инструмента?
11. Особенность равносмещенного зацепления.
12. Указать изменяемые и неизменяемые параметры исправленной зубчатой передачи в случае различных видов коррекции.
13. Высота зуба исправленного прямозубого колеса $h = 48$ мм, модуль колеса $m = 24$ мм. Чему равен коэффициент уравнивающего смещения Δu ?
14. Радиус окружности вершин исправленного прямозубого колеса с внешними зубьями $r_a = 120$ мм, шаг по делительной окружности $p = 36$ мм, коэффициент уравнивающего смещения $\Delta u = 0,25$. Найти величину радиуса окружности впадин колеса r_f .
15. Межосевое расстояние $a_w = 116,4$ мм, величина $i_{1-2} = 2,5$, $z_2 = 40$, модуль $m = 4$ мм. Вычислить коэффициент воспринимаемого смещения u .
16. Модуль $m = 10$ мм, величина $i_{1-2} = 2,5$, $z_1 = 16$, коэффициент воспринимаемого смещения $u = 1,5$. Определить межосевое расстояние a_w .
17. Особенности нарезания косозубых цилиндрических колес.
18. Почему можно синтезировать косозубую передачу с большим передаточным отношением, чем у прямозубой?

Лекция 8 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

Содержание: кинематический расчет рядовых, планетарно-дифференциальных и комбинированных зубчатых механизмов.

Ключевые слова: передаточное отношение; рядовые зубчатые механизмы; планетарные и дифференциальные зубчатые механизмы; комбинированные зубчатые механизмы; сателлит; поводок; обращенное движение.

Цель кинематического исследования зубчатых механизмов заключается в определении передаточного отношения и частот вращения колес по заданной схеме механизма, количеству зубьев колес и закону движения входного (входных) звеньев.

В основу кинематического исследования положены методики расчета для различных видов зубчатых механизмов.

Основной кинематической характеристикой зубчатых механизмов является **передаточное отношение** – отношение угловых скоростей зубчатых колес, взятое со знаком «+» или «-» в зависимости от **сонаправленного** или **противонаправленного** вращения. Например, для k -го и j -го колес передаточное отношение $i_{k-j} = \pm \frac{\omega_k}{\omega_j} = \pm \frac{n_k}{n_j}$. Для двух находящихся в зацеплении ко-

лес с неподвижными осями $i_{1-2} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1}$. При **внешнем** зацеплении берется знак «-», при **внутреннем** – «+».

8.1. Рядовые (рядные) зубчатые механизмы

Рядовым зубчатым механизмом называется последовательное соединение нескольких пар зубчатых колес, вращающихся вокруг **неподвижных осей**. Подвижность таких передач $W = 1$. Различают два вида рядовых зубчатых механизмов: с паразитными колесами и кратным зацеплением.

Рядовые (рядные) зубчатые механизмы с паразитными колесами

Рядовой (рядный) зубчатый механизм с паразитными колесами – рядовой механизм, в котором каждое промежуточное колесо имеет самостоятельную ось вращения и входит в зацепление с двумя соседними (рис. 8.1).

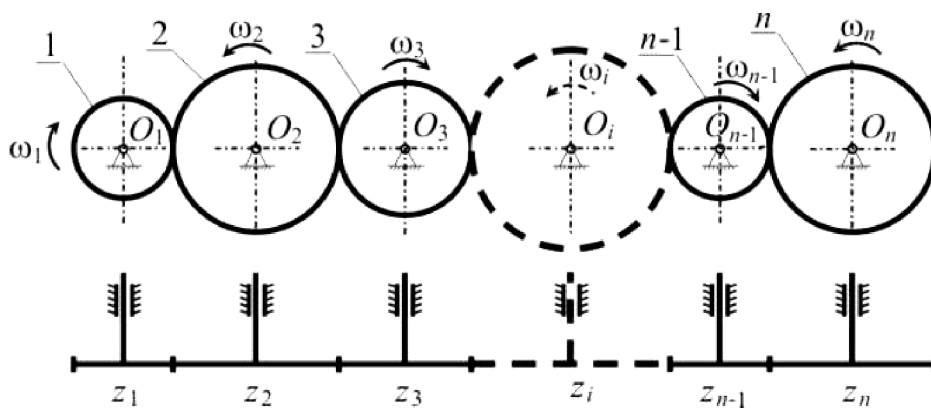


Рис. 8.1. Рядовая передача с паразитными колесами

Передаточное отношение таких передач определяется как

$$i_{1-n} = i_{1-2} \cdot i_{2-3} \cdot i_{3-4} \cdot \dots \cdot i_{(n-1)-n} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} \cdot \dots \cdot \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} =$$

$$= \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2} \right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3} \right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{z_n}{z_{n-1}} \right).$$

Следовательно,

$$i_{1-n} = (-1)^k \frac{z_n}{z_1}, \quad (8.1)$$

где k – число внешних зацеплений в механизме.

Полученное значение передаточного отношения не зависит от чисел зубьев промежуточных колес, которые называются *паразитными*. Они, не влияя на величину передаточного отношения, влияют на его знак, т.е. на направление вращения последнего ведомого звена и затрачивают мощность на трение.

Такие механизмы применяют для передачи вращения выходному валу с определенным направлением (коробки передач станков, автомобилей и т.п.), а также для обеспечения передачи движения при больших межосевых расстояниях и при небольших значениях передаточных отношений, когда нельзя увеличить размеры входных и выходных колес.

Рядовые (рядные) зубчатые механизмы с кратным зацеплением

Рядовой зубчатый механизм с кратным зацеплением – рядовой механизм, в котором промежуточные колеса имеют попарно общую ось вращения и входят в зацепление с одним соседним колесом (рис. 8.2).

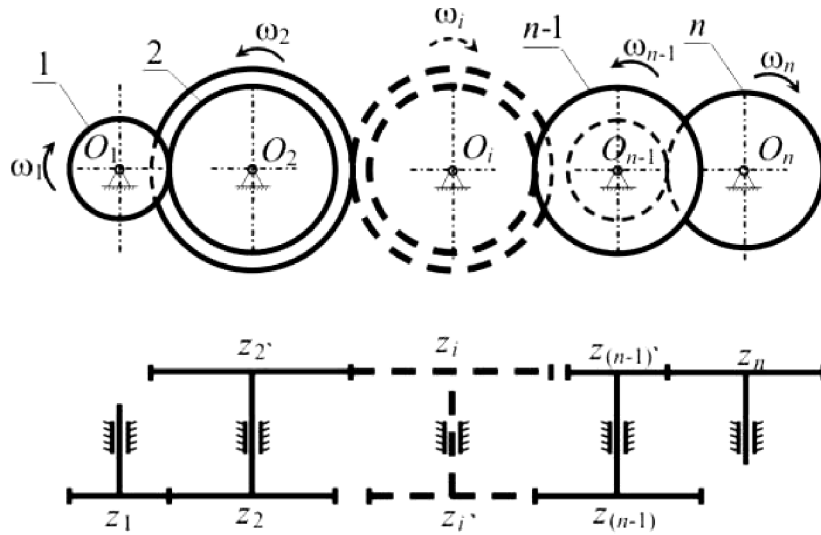


Рис. 8.2. Рядовая передача с кратным зацеплением

Передаточное отношение этих передач определяется как

$$\begin{aligned}
 i_{1-n} &= i_{1-2} \cdot i_{2'-3} \cdot i_{3'-4} \cdot \dots \cdot i_{(n-1)'-n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3'}{\omega_4} \cdot \dots \cdot \frac{\omega_{(n-1)'}}{\omega_n} = \\
 &= (-1)^k \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n}{z_1 \cdot z_2' \cdot \dots \cdot z_{(n-1)'}}
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

где k – число внешних зацеплений; $\omega_2 = \omega_2'$; $\omega_3 = \omega_3' \dots \omega_{n-1} = \omega_{(n-1)'}$.

Величина передаточного отношения этих передач равна отношению произведений чисел зубьев всех ведомых колес элементарных передач к произведению чисел зубьев всех их ведущих колес.

Рядовые механизмы с кратным зацеплением применяются для получения больших передаточных отношений.

Следует отметить, что в конических передачах (рис. 8.3) знак передаточного отношения определяется по **правилу стрелок**, характеризующих

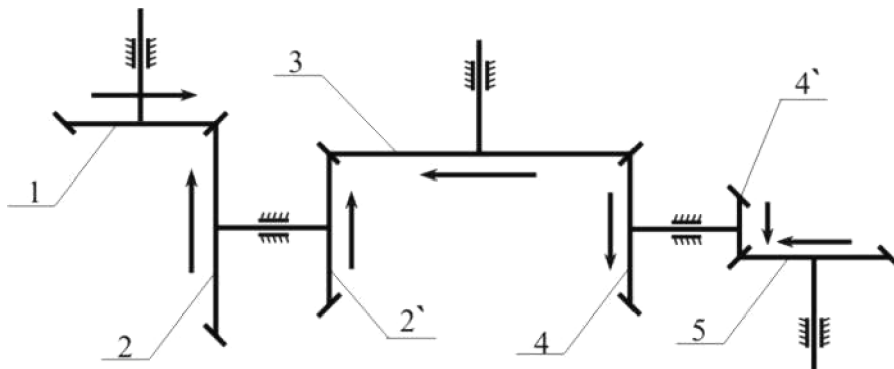


Рис. 8.3. Рядовая передача с коническими колесами

направления вращения колес. В каждой паре сцепляющихся колес стрелки должны быть обращены друг к другу одноименными элементами (либо остриями, либо хвостами).

Схема рис. 8.3 иллюстрирует это правило:

$$i_{1-5} = \frac{\omega_1}{\omega_5} = -\frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5}{z_1 \cdot z_{2'} \cdot z_3 \cdot z_{4'}} = -\frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_5}{z_1 \cdot z_{2'} \cdot z_{4'}}$$

Знак «-» у i_{1-5} выбран вследствие разнонаправленности стрелок на входе и выходе передачи.

8.2. Планетарно-дифференциальные зубчатые механизмы

Зубчатые механизмы, в которых имеются колеса с движущимися геометрическими осями, называются **планетарно-дифференциальными**.

Колеса с подвижными осями – **сателлиты** участвуют в двух вращениях – вокруг собственной оси и вместе с ней – вокруг неподвижной оси. Подвижное звено, в котором помещены оси сателлитов, называется **водилом (поводком)** и на схемах обозначается буквой **Н**. Колеса, ось которых неподвижна и по которым катятся сателлиты, называются **центральными**.

Планетарно-дифференциальные механизмы подразделяются на **дифференциальные** и **планетарные передачи**.

Дифференциальные передачи

Дифференциальная передача (дифференциал) – планетарно-дифференциальный механизм, у которого все **центральные колеса вращаются**. Применяются для сложения движений двух ведущих звеньев на одно движение ведомого звена или для разложения движения ведущего звена на два независимых движения ведомых звеньев.

Схемы простейших дифференциальных передач представлены на рис. 8.4.

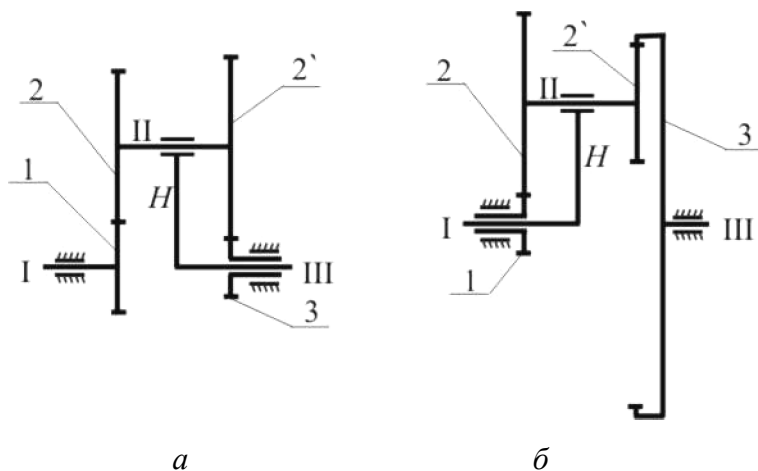


Рис. 8.4. Простейшие дифференциальные передачи

Центральные колеса 1, 3 и водило H вращаются вокруг осей, расположенных на одной прямой. Сателлиты 2–2' установлены в подшипнике водила H и совершают сложное (переносное) движение.

Степень подвижности рассматриваемых механизмов

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 2.$$

Другими словами, дифференциал должен иметь два ведущих звена, например звенья 1 и H . Тогда угловые скорости звеньев 2 и 3 определяются через угловые скорости звеньев 1 и H .

В основе определения передаточных отношений дифференциальной передачи положен **метод обращенного движения**. Всем звеньям механизма сообщается дополнительное вращение с угловой скоростью $(-\omega_H)$. Водило H становится **неподвижным**. Получается обращенный механизм, представляющий собой рядовую передачу, для которой можно определить передаточные отношения по формулам (8.1) и (8.2).

Например, для схемы рис. 8.4, *a* получают табл. 8.1.

Таблица 8.1

Угловые скорости звеньев исходного и обращенного механизмов

Номер звена	Первоначальная угловая скорость звена	Угловая скорость звена в обращенном движении
1	ω_1	$\omega_1 - \omega_H$
2	ω_2	$\omega_2 - \omega_H$
2'	$\omega_{2'}$	$\omega_{2'} - \omega_H$
3	ω_3	$\omega_3 - \omega_H$

Следовательно, для обращенного механизма

$$i_{1-3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = (-1)^2 \cdot \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_{2'}}, \quad (8.3)$$

где $i_{1-3}^{(H)}$ – передаточное отношение обращенного механизма при неподвижном водиле H .

В общем случае для n колес получают **формулу Виллиса**

$$i_{1-n}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_n - \omega_H}. \quad (8.4)$$

Также формула Виллиса может быть использована для определения угловых скоростей сателлитов. Для этого рассматривается зацепление сателлита с центральным колесом, угловая скорость которого известна. Для рис. 8.4, *a*

$$i_{1-2}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1} \Rightarrow \omega_1 - \omega_H = -\frac{z_2}{z_1}\omega_2 + \frac{z_2}{z_1}\omega_H \Rightarrow \frac{z_2}{z_1}\omega_2 = \omega_H \left(\frac{z_2}{z_1} + 1 \right) - \omega_1,$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_H \left(\frac{z_2}{z_1} + 1 \right) - \omega_1}{z_2} z_1.$$

Пример расчета дифференциальной передачи

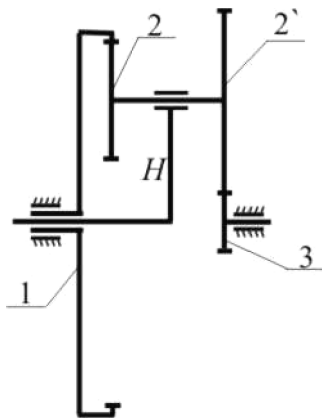


Рис. 8.5. Дифференциальная передача.
Пример расчета

Пусть дана дифференциальная передача, у которой известны числа зубьев всех колес (рис. 8.5):

$$z_1 = 80; z_2 = 20; z_2' = 30; z_3 = 30;$$

$$n_1 = 300 \text{ об/мин}; n_H = 200 \text{ об/мин}.$$

Требуется определить числа оборотов всех колес передачи.

По формуле Виллиса

$$i_{1-3}^{(H)} = \frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H} = (-1)^1 \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'};$$

тогда

$$\frac{300 - 200}{n_3 - 200} = -\frac{20 \cdot 30}{80 \cdot 30} \Rightarrow \frac{100}{n_3 - 200} = -\frac{1}{4} \Rightarrow -n_3 + 200 = 400 \Rightarrow n_3 = -200 \text{ об/мин}.$$

Знак « \leftarrow » перед значением n_3 соответствует случаю, когда направление вращения звена 3 противоположно направлению вращений звеньев 1 и H.

Далее определяем число оборотов звена 2:

$$i_{2-1}^{(H)} = \frac{n_2 - n_H}{n_1 - n_H} = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \frac{n_2 - 200}{300 - 200} = 4 \Rightarrow n_2 - 200 = 400 \Rightarrow n_2 = 600 \text{ об/мин},$$

$n_2 = n_{2'}$, так как z_2 и z_2' жестко скреплены на одном валу.

Если в дифференциальной передаче ведущие звенья связать между собой дополнительной зубчатой передачей, то получится **замкнутая дифференциальная передача**.

Замкнутая дифференциальная передача

Замкнутая дифференциальная передача имеет одно ведущее звено (подвижность $W = 1$) и подвижные центральные колеса.

В качестве примера представлена дифференциальная передача (рис. 8.6, а), в которой два ведущих звена 1 и H. Если эти звенья замкнуть рядом колес 1', 5', 5, 4, то получится замкнутая дифференциальная передача (рис. 8.6, б).

$$W = 3n - 2 \cdot p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 1.$$

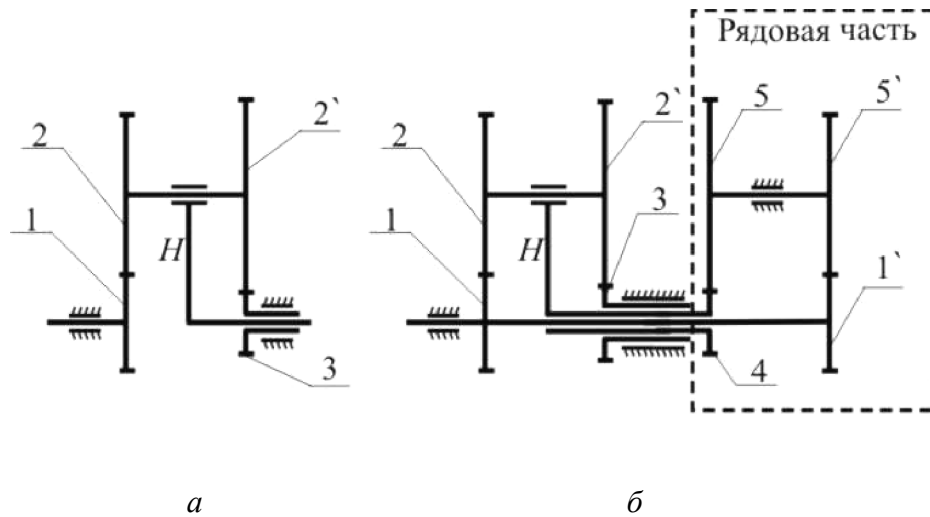


Рис. 8.6. Получение дифференциальной замкнутой передачи

Для кинематического исследования таких передач составляется система двух алгебраических уравнений. **Одно из них – уравнение для определения передаточного отношения между центральными колесами дифференциальной части с помощью формулы Виллиса. Второе – уравнение замкнутости для определения передаточного отношения рядовой части передачи.**

Решая полученную систему, определяют угловые скорости всех звеньев и, соответственно, передаточное отношение механизма.

Для рис. 8.6, б при ведущем звене 1 система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} i_{1-3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = (-1)^2 \cdot \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_{2'}}, & (8.5) \\ i_{1-4} = i_{1'-H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = (-1)^2 \cdot \frac{z_{5'} \cdot z_4}{z_1' \cdot z_5}. & (8.6) \end{cases}$$

Числитель и знаменатель левой части уравнения (8.5) делят на ω_1 :

$$\frac{\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_1} - \frac{\omega_H}{\omega_1}}{\frac{\omega_3 - \omega_H}{\omega_1} - \frac{\omega_H}{\omega_1}} = \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_{2'}} \Rightarrow \frac{1 - i_{H-1}}{i_{3-1} - i_{H-1}} = \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_{2'}} \Rightarrow i_{3-1} = \frac{z_1 \cdot z_{2'}}{z_2 \cdot z_3} + i_{H-1} \left(1 - \frac{z_1 \cdot z_{2'}}{z_2 \cdot z_3} \right).$$

Используя (8.6), получают

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{z_1 \cdot z_{2'}}{z_2 \cdot z_3} + \frac{z_1' \cdot z_5}{z_5' \cdot z_4} \left(1 - \frac{z_1 \cdot z_{2'}}{z_2 \cdot z_3} \right) \Rightarrow \omega_3 = \omega_1 \left[\frac{z_1 \cdot z_{2'}}{z_2 \cdot z_3} + \frac{z_1' \cdot z_5}{z_5' \cdot z_4} \left(1 - \frac{z_1 \cdot z_{2'}}{z_2 \cdot z_3} \right) \right],$$

$$\omega_H = \omega_1 \frac{z_{1'} \cdot z_5}{z_{5'} \cdot z_4}; i_{4-5} = \frac{\omega_4}{\omega_5} = \frac{\omega_H}{\omega_5} = -\frac{z_5}{z_4} \Rightarrow \omega_5 = -\frac{z_4}{z_5} \omega_H.$$

Угловая скорость сателлитов по методике из предыдущего примера

$$i_{2-1}^{(H)} = \frac{\omega_2 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H} = -\frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \omega_2 = \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \omega_H - \frac{z_1}{z_2} \omega_1.$$

Планетарные передачи

Планетарная передача – планетарно-дифференциальный механизм, у которого одно из центральных колес (*опорное*) неподвижно. Например, если в дифференциальной передаче (см. рис. 8.5) центральное колесо 3 жестко соединить со стойкой, то получится планетарная передача с одной степенью подвижности (рис. 8.7).

$$W = 3n - 2 \cdot p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

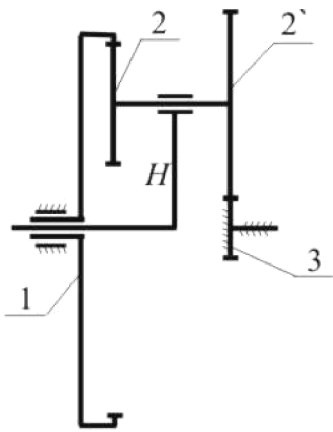


Рис. 8.7. Планетарная передача

В случае входного центрального колеса 1 выходным звеном передачи будет являться водило *H*. При входном водиле *H* выходное – центральное колесо 1.

Планетарные передачи применяют для получения значительных передаточных отношений, повышенных значений КПД, при габаритах меньших, чем габариты рядовых передач.

Для вывода формулы передаточного отношения в планетарной передаче (см. рис. 8.7) применяется формула Виллиса

$$i_{1-3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - i_{1-H}, \text{ так как } \omega_3 = 0.$$

Другими словами, $i_{1-H} = 1 - i_{1-3}^{(H)}$ при ведущем колесе 1. $i_{H-1} = \frac{1}{i_{1-H}} = \frac{1}{1 - i_{1-3}^{(H)}}$

при ведущем поводке *H*.

$i_{1-3}^{(H)}$ – передаточное отношение обращенного движения при неподвижном поводке и раскрепленном колесе 3: $i_{1-3}^{(H)} = (-1)^1 \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$.

В общем случае для планетарных передач

$$i_{1-H} = 1 - i_{1-n}^{(H)}, \quad (8.7)$$

где $i_{1-n}^{(H)}$ – передаточное отношение от подвижного колеса 1 к неподвижному центральному колесу n при остановленном поводке H в *обращенном движении*.

$i_{1-n}^{(H)}$ определяется по соотношениям (8.1) или (8.2) для рядовых передач.

8.3. Комбинированные (смешанные) передачи

Передачи, состоящие из рядовых и планетарных механизмов, называются **комбинированными** или **смешанными**. Порядок их расчета:

1. Вся передача разделяется на отдельные простейшие виды известных передач по принципу: выходное звено предыдущей является входным для последующей передачи.
2. Подсчитываются передаточные отношения выделенных передач.
3. Общее передаточное отношение всего механизма равно произведению отдельных передаточных отношений из п. 2.
4. Определение угловых скоростей центральных колес и сателлитов основывается на методиках, изложенных в предыдущих разделах.

Пример расчета

Определить передаточное отношение i_{1-6} механизма (рис. 8.8).

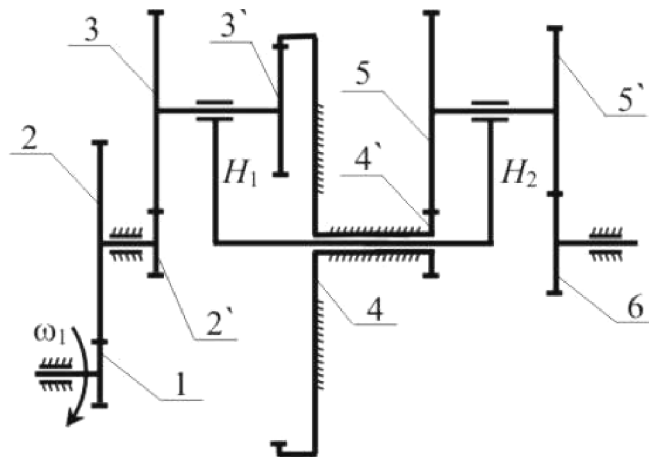


Рис. 8.8. Схема зубчатого механизма

Решение

$$W = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 1.$$

а) элементарные передачи: (1,2); (2', 3, 3', 4, H₁); (H₂, 4', 5, 5', 6);

$$\text{б) } i_{1-6} = i_{1-2} \cdot i_{2'-H_1} \cdot i_{H_2-6};$$

$$\text{в) } i_{1-2} = -\frac{z_2}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow \omega_2 = \omega_2' = \omega_1 / i_{1-2};$$

$$\text{г) } i_{2'-H_1} = 1 - i_{2'-4}^{(H)} = 1 - (-1)^1 \cdot \frac{z_3 \cdot z_4}{z_2' \cdot z_3'} \Rightarrow \omega_{H_1} = \omega_2 / i_{2'-H_1};$$

$$\text{д) } i_{H_2-6} = \frac{1}{i_{6-H_2}} = \frac{1}{1 - (-1)^2 \cdot \frac{z_5' \cdot z_4'}{z_6 \cdot z_5}} \Rightarrow \omega_{H_2} = \omega_{H_1} \Rightarrow \omega_6 = \omega_{H_1} / i_{H_2-6};$$

$$\text{е) } i_{1-6} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \left(1 + \frac{z_3 \cdot z_4}{z_2' \cdot z_3'} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{z_5' \cdot z_4'}{z_6 \cdot z_5}} \right) = \frac{\omega_1}{\omega_6} \Rightarrow \omega_6 = \frac{\omega_1}{i_{1-6}};$$

ж) угловая скорость сателлитов 3–3' определяется, например, формулой

$$i_{3'-4}^{(H_1)} = \frac{\omega_{3'} - \omega_{H_1}}{0 - \omega_{H_1}} = \frac{\omega_{3'} - \omega_{H_1}}{-\omega_{H_1}} = \frac{z_4}{z_3'} \Rightarrow \omega_{3'} = \omega_{H_1} - \frac{z_4}{z_3'} \cdot \omega_{H_1} = \omega_{H_1} \left(1 - \frac{z_4}{z_3'} \right),$$

где ω_{H_1} определено в пункте г).

Контрольные вопросы и упражнения

1. Цели и задачи кинематики зубчатых механизмов. Кинематическая классификация зубчатых механизмов.

2. Каковы особенности расчета кинематики зубчатых механизмов с неподвижными осями?

3. Виды зубчатых механизмов с подвижными осями и их элементы.

4. Методика расчета простейших планетарных передач.

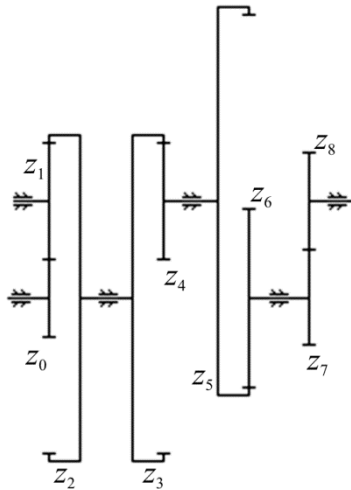
5. Дифференциальные передачи и расчет их кинематики.

6. Особенность замкнутой дифференциальной передачи и методики расчета ее кинематики.

7. Как определить угловую скорость сателлитов?

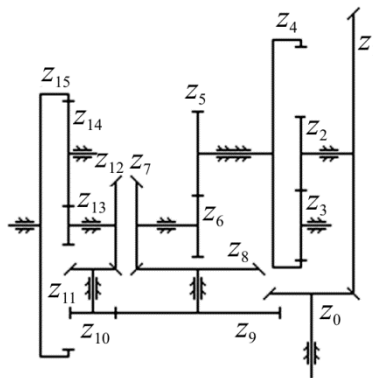
8. Комбинированные (смешанные) зубчатые механизмы и методика расчета их кинематики.

9. Дано: $z_0 = 20, z_1 = 30, z_2 = 80, z_3 = 110, z_4 = 30, z_5 = 80, z_6 = 30, z_7 = 30, z_8 = 20, \omega_0 = 55 \text{ с}^{-1}$.



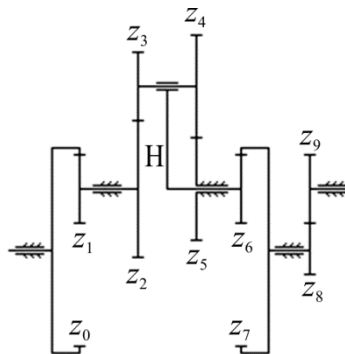
Найти: $i_{0-8}, \omega_1, \omega_8$.

10. Дано: $z_0 = 20, z_1 = 56, z_2 = 20, z_3 = 24, z_4 = 68, z_5 = 38, z_6 = 24, z_7 = 40, z_8 = 44, z_9 = 64, z_{10} = 22, z_{11} = 28, z_{12} = 40, z_{13} = 22, z_{14} = 40, z_{15} = 102, n_0 = 900 \text{ об/мин}$.



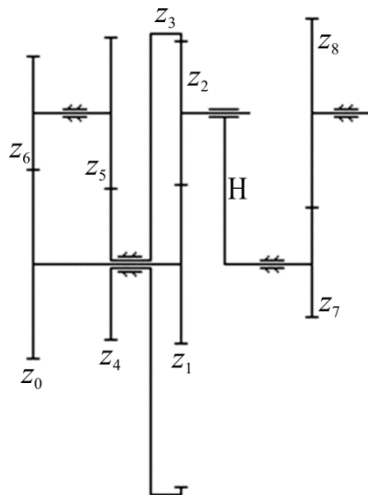
Найти: $i_{0-15}, n_{15}, n_5, n_9$.

11. Дано: $z_0 = 80, z_1 = 30, z_2 = 40, z_3 = 28, z_4 = 24, z_5 = 44, z_6 = 40, z_7 = 80, z_8 = 28, z_9 = 40, \omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}$.



Найти: $i_{0-9}, \omega_3, \omega_H$.

12. Дано: $z_0 = 24$, $z_1 = 24$, $z_2 = 28$, $z_3 = 80$, $z_4 = 22$, $z_5 = 30$, $z_6 = 28$, $z_7 = 18$,
 $z_8 = 34$, $n_8 = 250$ об/мин.



Найти: n_0 .

Лекция 9
КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ.
ПАРАМЕТРЫ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

Содержание: типы кулачковых механизмов и их классификация; основные параметры кулачковых механизмов.

Ключевые слова: кулачок; толкатель; коромысло; центровый и действительный профиль; минимальный радиус кулачка; фазовые и профильные углы.

9.1. Основные типы кулачковых механизмов

Кулачком называется звено, содержащее элемент высшей кинематической пары в виде поверхности переменной кривизны. Механизм, в состав которого входит кулачок, называется **кулачковым**. В таких механизмах кулачок является входным звеном, а движение выходного звена воспроизводится по определенному закону за счет профиля кулачка. Выходное звено, называемое **толкателем**, может совершать возвратно-поступательное или качательное движение. В последнем случае такое звено принято называть **коромыслом**.

Применение кулачковых механизмов особенно рационально в тех случаях, когда выходное звено должно временно останавливаться при непрерывном движении входного звена. Это позволяет широко использовать их в механизмах подачи инструмента в станках, автоматах, системах управления, текстильных и швейных машинах, копировальных аппаратах, системах газораспределения, в двигателях внутреннего сгорания, в механизмах раскладки кабельной продукции и других машинах.

Кулачковые механизмы подразделяются на **плоские** и **пространственные**.

В пространственных кулачковых механизмах движения входного и выходного звеньев происходят в разных непараллельных плоскостях (рис. 9.1).

На рис. 9.1, *а* вращение цилиндрического кулачка и движение толкателя происходят во взаимно перпендикулярных плоскостях, а на рис. 9.1, *б* конический кулачок и толкатель перемещаются в плоскостях, расположенных под произвольным углом друг к другу.

В пространственных механизмах кроме цилиндрических и конических применяются сферические, глобоидальные и другие виды кулачков.

В плоских кулачковых механизмах все точки звеньев механизма движутся в одной или в параллельных плоскостях. Классификация плоских кулачковых механизмов представлена на рис. 9.2.

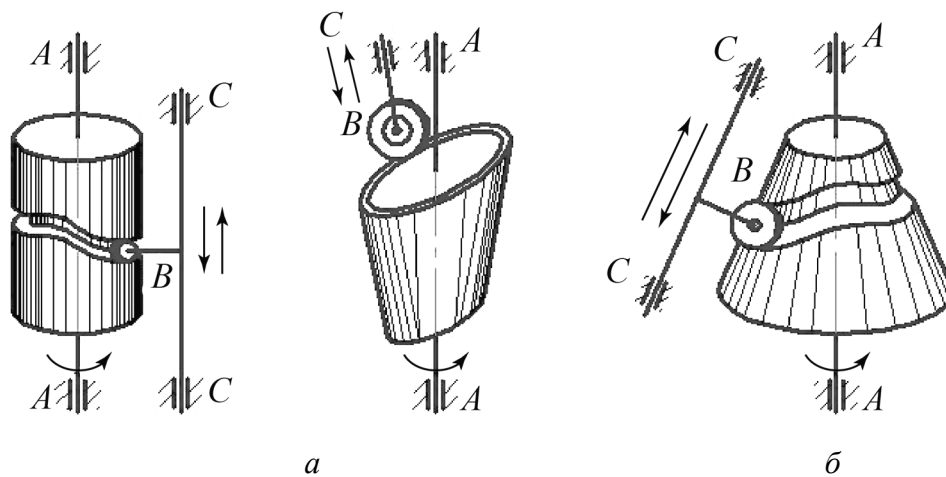


Рис. 9.1. Виды пространственных кулачковых механизмов

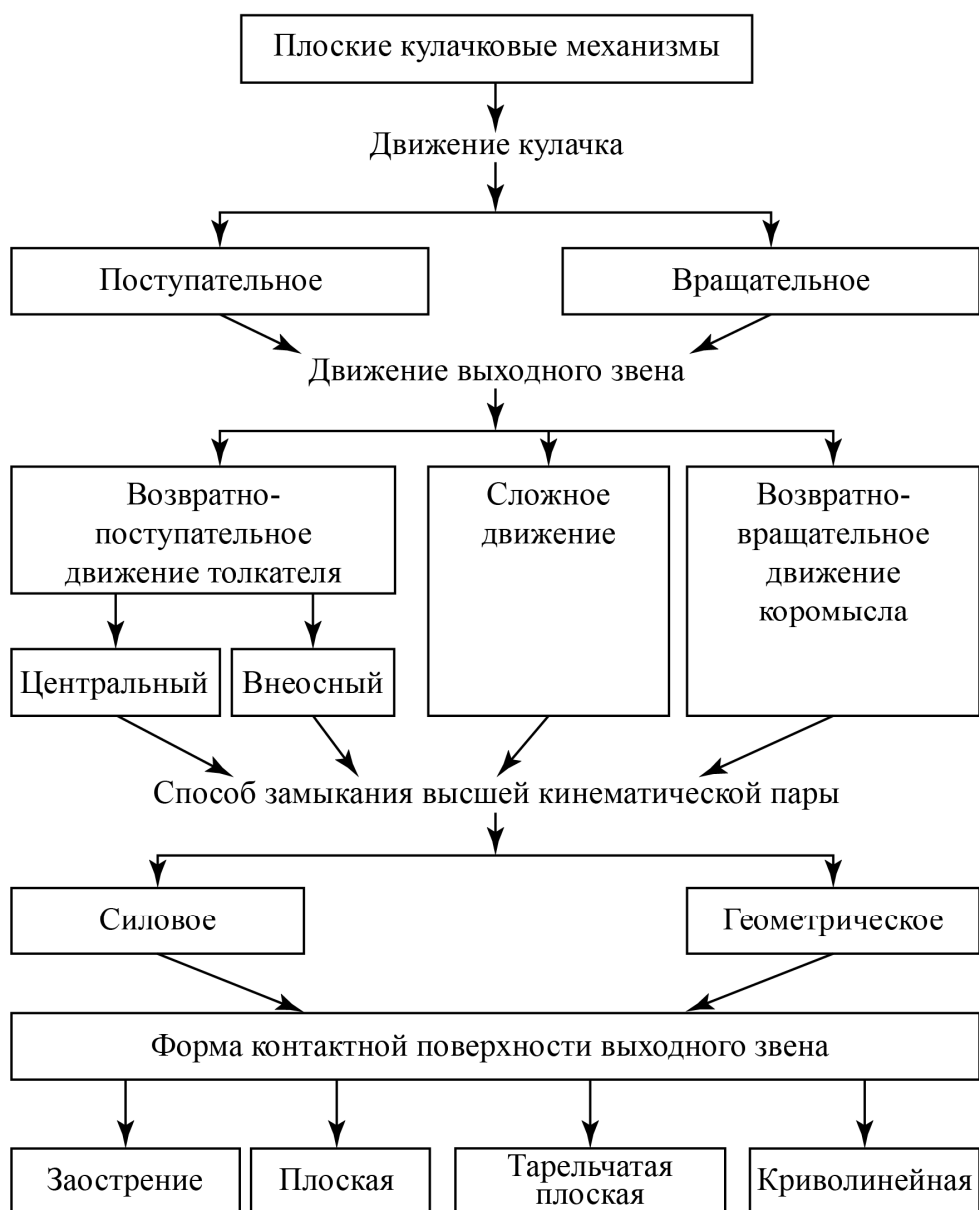


Рис. 9.2 Классификация плоских кулачковых механизмов

В большей своей части эта классификация характерна и для пространственных кулачковых механизмов.

В соответствии с этой классификацией на рис. 9.3 показаны схемы ряда плоских кулачковых механизмов.

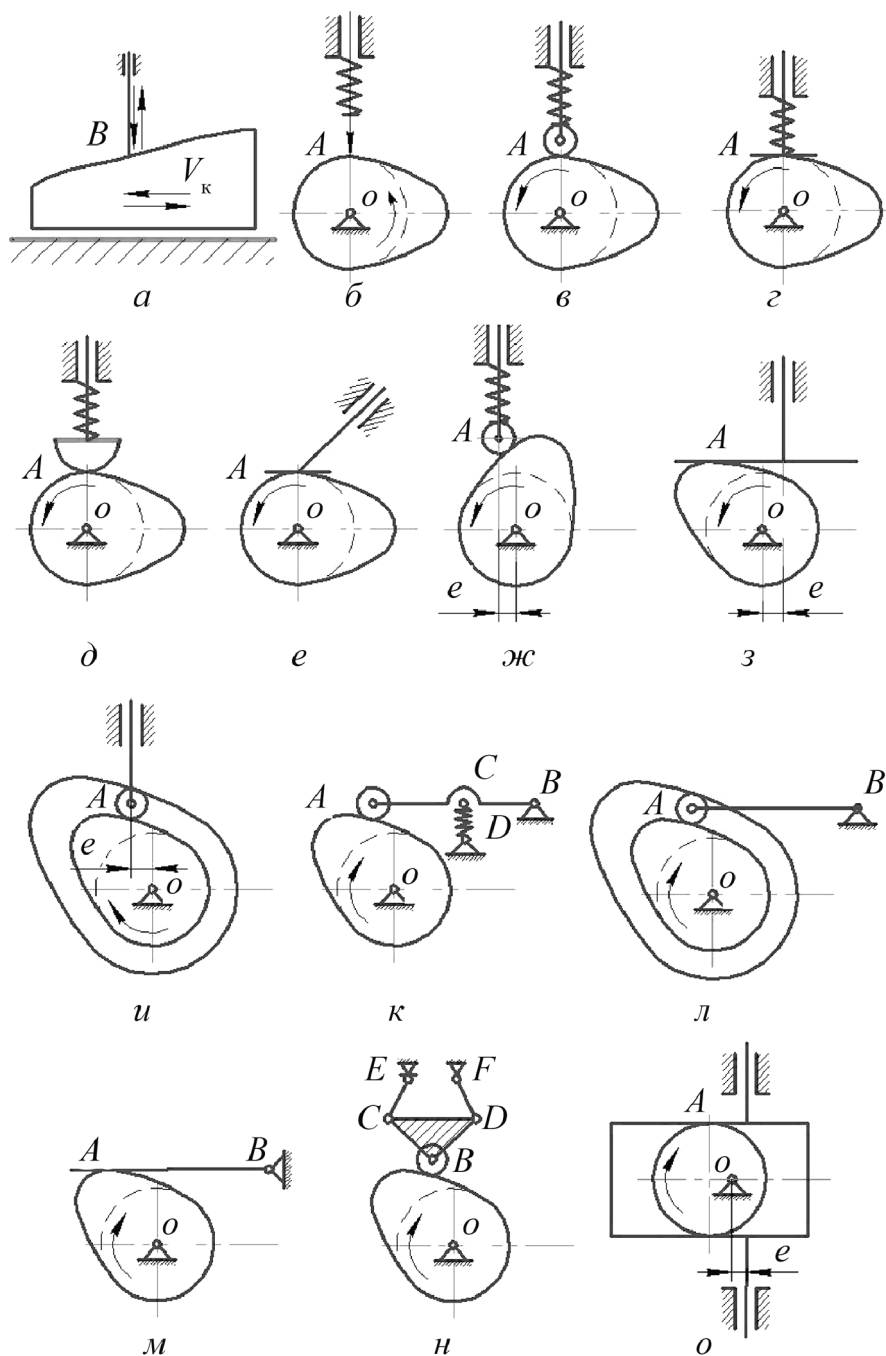


Рис. 9.3. Виды плоских кулачковых механизмов

Схема механизма с поступательно движущимся кулачком представлена на рис. 9.3 *а*, а на остальных рисунках – механизмы с вращающимся кулачком.

Схемы рис. 9.3, *б–и*, *о* соответствуют возвратно-поступательному движению толкателя, а рис. 9.3, *к–м* – качательному движению коромысла.

Причем возможен случай плоско-параллельного (сложного) движения выходного звена (рис. 9.3, *н*).

Если ось движения толкателя проходит через центр вращения кулачка, то такой тип механизма – **центральный** (рис. 9.3, *б–д*). В случае смещения оси толкателя относительно центра вращения кулачка – механизм **нецентральный (внеосный)**, рис. 9.3, *ж–и, о*). Внеосность характеризуется **эксцентриситетом (смещением) *e***.

Постоянное соприкосновение элементов высшей кинематической пары может обеспечиваться **силовым** замыканием с помощью упругого элемента или силами тяжести, а также силами давления жидкости или газа (рис. 9.3, *б–д, ж, к*). В случае **геометрического** замыкания – с помощью пазов на профиле кулачка или, например, толкателя в виде рамки (рис. 9.3, *и, л, о*), а также другими конструктивными оформлениями.

Элемент выходного звена, входящий в контакт с кулачком, может быть плоским, криволинейным, в виде острия, а также заканчиваться роликом (см. рис. 9.3).

За счет ролика уменьшается эффект трения скольжения, сменяясь на трение качения.

Следует отметить, что выходные звенья, оканчивающиеся плоскостью, могут работать только с плоским кулачком, имеющим **выпуклый** профиль. Если выходное звено оканчивается криволинейной поверхностью, то оно может работать со всеми типами кулачков, но при правильных соотношениях между кривизной его площадки и профиля кулачка.

В плоских кулачковых механизмах, как правило, применяются дисковые кулачки.

Как кулачок, так и толкатель могут быть либо ведущим, либо ведомым звеном. В случае геометрического замыкания кулачок во все время движения является ведущим. При силовом замыкании кулачок – ведущее звено во время подъема толкателя, а при опускании толкателя может быть как ведущим, так и ведомым в зависимости от соотношения между замыкающей и внешней силами, действующими на кулачок.

Достоинством кулачковых механизмов является простота конструкции, надежность, компактность, относительно высокий к.п.д., возможность получения практически любого закона движения выходного звена с точными остановками заданной продолжительности, что важно для автоматических устройств.

Недостатками кулачковых механизмов являются:

а) ограниченность передаваемых нагрузок из-за больших удельных давлений, износа соприкасающихся поверхностей высшей кинематической пары и высоких относительных скоростей;

б) ограниченность применения при повышенных скоростях ввиду возникновения динамических нагрузок;

в) трудности изготовления кулачков сложного профиля.

Дальнейшее изложение материала связано с особенностями анализа и синтеза плоских кулачковых механизмов.

9.2. Основные параметры кулачковых механизмов

Линия пересечения боковой поверхности кулачка плоскостью, перпендикулярной оси вращения (или параллельной оси движения при поступательном движении кулачка), называется **профилем** кулачка.

В кулачковых механизмах различают два профиля:

– **действительный** (практический) профиль (рис. 9.4), контактирующий с выходным звеном, оканчивающимся роликом;

– **центральной** (теоретической) профиль – траектория центра ролика (или закругления толкателя) относительно кулачка.

Таким образом, центральной профиль кулачка работает с выходным звеном, оканчивающимся острием, и обеспечивает такой же закон движения выходного звена, что и действительный профиль.

Действительный и центральной профили являются эквидистантными кривыми, которые отстоят друг от друга по нормали на величину радиуса ролика.

За **начальный (минимальный)** радиус кулачка R_0 принимается наименьшее расстояние от точек центральной профиля до центра вращения кулачка. Окружность начального (минимального) радиуса может соприкасаться с профилем как в одной или нескольких точках, так и с частью профиля кулачка (см. рис. 9.4).

Минимальный радиус R действительного профиля кулачка

$$R = R_0 - r_p,$$

где r_p – радиус ролика.

Так как ролик не влияет на закон движения выходного звена, то для удобства исследований можно рассматривать движение толкателя, оканчивающегося острием, относительно центральной профиля кулачка (рис. 9.4, 9.5).

В общем случае за один оборот кулачка выходное звено последовательно удаляется от центра вращения кулачка, затем может останавливаться, далее приближается к центру кулачка, вновь может останавливаться, снова повторяя весь цикл движения. Эти этапы движения называются фазами движения. Соответственно:

– на **фазе удаления** выходное звено движется от центра вращения кулачка;

– на **фазе дальнего стояния** выходное звено неподвижно и наиболее удалено от центра вращения кулачка;

– на **фазе сближения** выходное звено приближается к центру вращения кулачка;

– на **фазе ближнего стояния** выходное звено неподвижно и наиболее близко расположено к центру вращения кулачка.

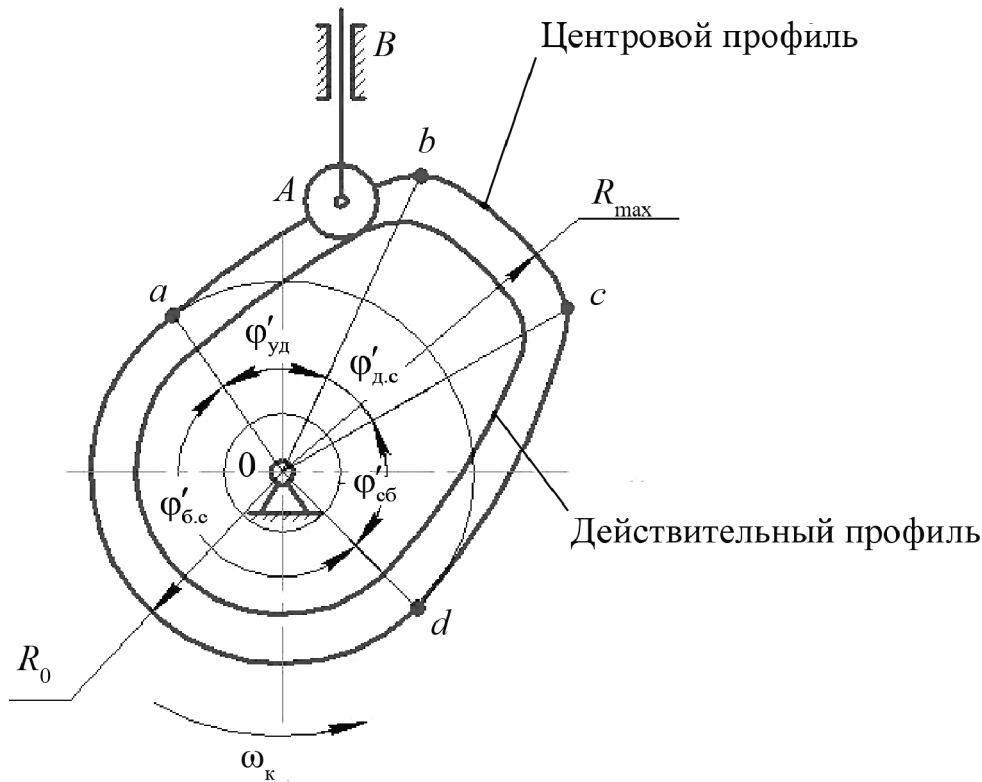


Рис. 9.4. Геометрические параметры кулачкового механизма

Участки центрального профиля кулачка, соответствующие фазе дальнего стояния, представляют собой дугу окружности с максимальным радиусом R_{\max} , центр которой совпадает с центром вращения кулачка. Участки, соответствующие ближнему стоянию, совпадают с окружностью начального (минимального) радиуса R_0 (см. рис. 9.4). В некоторых кулачковых механизмах фазы ближнего и дальнего стояния могут отсутствовать (сразу обе или одна).

Центральные углы, заключающие участки профиля, соответствующие каждой фазе движения, называются **профильными** углами кулачка: $\varphi'_{уд}$, $\varphi'_{д.с}$, $\varphi'_{сб}$, $\varphi'_{б.с}$ (см. рис. 9.4, 9.5). Эти углы характеризуют **геометрию** кулачка.

Участок (ab) соответствует фазе удаления; (bc) – ближнего стояния; (cd) – сближения; (da) – ближнего стояния.

Углы, на которые поворачивается кулачок за время каждой фазы, называются **фазовыми** углами. Они являются параметрами **движения** кулачка.

В общем случае фазовые и профильные углы не совпадают по величине (см. рис. 9.5).

Их совпадение возможно только для **центрального** кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.

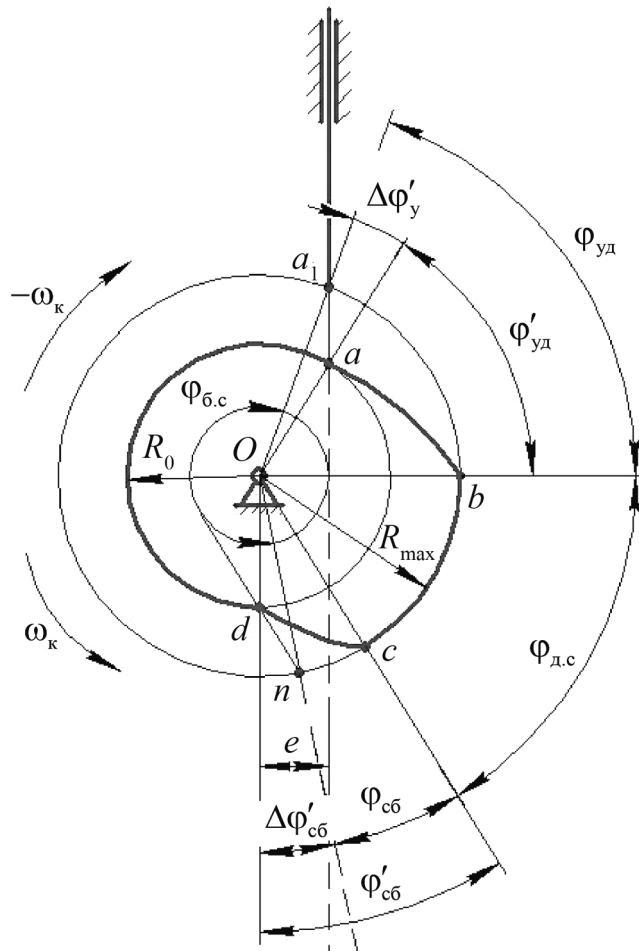


Рис. 9.5. Фазовые и профильные углы: $\phi_{уд}$ – угол удаления; $\phi_{сб}$ – угол сближения; $\phi_{д.с}$, $\phi_{б.с}$ – углы дальнего и ближнего стояния

Сумма трех фазовых углов $\phi_{уд}$, $\phi_{д.с}$, $\phi_{сб}$ равна рабочему углу ϕ_r .

$$\phi_{уд} + \phi_{д.с} + \phi_{сб} = \phi'_{уд} + \phi'_{д.с} + \phi'_{сб} = \phi_r.$$

С учетом того, что большинство кулачковых механизмов относятся к цикловым,

$$\phi_{уд} + \phi_{д.с} + \phi_{сб} + \phi_{б.с} = \phi_{ц},$$

где $\phi_{ц}$ – цикловой угол. Чаще всего $\phi_{ц} = 2\pi$.

На примере нецентрального кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем и со смещением (эксцентриситетом) e фазовые углы определяются с помощью метода обращенного движения следующим образом (см. рис. 9.5).

Всем звеньям механизма сообщается угловая скорость $(-\omega_k)$, где ω_k – угловая скорость кулачка. Кулачок останавливается, а толкатель с направляющей будет вращаться с угловой скоростью $(-\omega_k)$.

В любом положении направление движения толкателя всегда будет касательным к окружности радиусом e с центром O .

На фазе удаления угол $\varphi_{уд}$ заключен между центральными лучами, соединяющими т. b профиля дальнего стояния и точку a_1 пересечения окружности радиусом R_{max} с осью движения толкателя (см. рис. 9.5). $\angle bOa_1 = \varphi_{уд}$.

Центральный угол $\angle bOc = \varphi_{д.с.}$. Затем на профиле кулачка определяют точки c и d , соответствующие началу и концу фазы сближения. Через точку d в обратном движении проводят касательную к окружности радиусом e до пересечения с дугой радиусом R_{max} в точке n . Тогда центральный угол $\angle cOn = \varphi_{сб}$ (см. рис. 9.5).

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какое звено называется кулачком?
2. Охарактеризовать состав простейшего кулачкового механизма.
3. Каковы достоинства и недостатки кулачковых механизмов?
4. С какой целью выходное звено кулачкового механизма снабжается роликом?
5. По каким признакам классифицируются кулачковые механизмы?
6. За счет чего реализуется заданный закон движения выходного звена кулачкового механизма?
7. Как реализуется постоянный контакт элементов высшей кинематической пары кулачкового механизма?
8. Области применения кулачковых механизмов.
9. В чем отличия действительного профиля кулачка от центрового?
10. Минимальный радиус действительного профиля кулачка $R = 120$ мм; начальный радиус $R_0 = 130$ мм. Чему равен диаметр ролика?
11. Охарактеризовать фазы движения выходного звена.
12. В чем отличия профильных углов от фазовых углов кулачкового механизма?
13. $\varphi_{уд} : \varphi_{д.с.} : \varphi_{сб} : \varphi_{б.с.} = 5 : 2 : 3 : 2$. Цикл работы кулачкового механизма соответствует полному обороту. Определить величины фазовых углов.
14. $\varphi_{уд} : \varphi_{д.с.} : \varphi_{сб} = 5 : 2 : 4$. Рабочий угол $\varphi_p = 330^\circ$. Цикл работы соответствует полному обороту кулачка. Определить величины фазовых углов.
15. В чем суть метода обращенного движения?
16. Чем вызван переход к рассмотрению центрового профиля кулачка при анализе и синтезе кулачковых механизмов?
17. По каким кривым очерчен профиль кулачковой шайбы на фазах ближнего и дальнего стояния?

Лекция 10
КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

Содержание: задачи кинематического анализа; методы положений и обращенного движения; метод кинематических диаграмм для различных типов кулачковых механизмов.

Ключевые слова: кинематический анализ; кинематические диаграммы; обращенное движение; аналоги скорости и ускорения.

10.1. Задачи кинематического анализа

Задача кинематического анализа кулачковых механизмов заключается в том, что по заданному закону движения входного звена (кулачка) и его профилю требуется определить:

- а) перемещение выходного звена (толкателя или коромысла);
- б) скорости точек выходного звена;
- в) ускорения точек выходного звена.

Для схем на рис. 9.3, в которых выходное звено снабжено круглым роликом, степень свободы по формуле Чебышева

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2.$$

Круглый ролик не влияет на движение выходного звена, внося лишнюю (местную) степень свободы. Поэтому удобно рассматривать движение центра ролика по центровому (теоретическому) профилю кулачка (рис. 9.3, а, б). Тогда

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Для остальных схем рис. 9.3 значение W также равно 1.

Кинематика кулачковых механизмов изучается с помощью аналитических или графических методов. Далее рассматривается графический метод обращенного движения как относительно наглядный и простой, когда профиль кулачка вычерчивается только один раз в отличие от метода положений.

10.2. Кулачковый механизм
с поступательным роликовым толкателем

Методом обращенного движения решается задача о положениях, т.е. определяется перемещение острия толкателя, работающего с центровым профилем кулачка следующим образом.

1. С учетом масштабного коэффициента μ_S вычерчивают кулачковый механизм при заданном направлении его вращения так, чтобы острие толкателя находилось на кривой профиля, соответствующей началу удаления толкателя от центра кулачка (рис. 10.1). Всем звеньям сообщается угловая скорость $(-\omega_K)$, где ω_K – угловая скорость кулачка. Толкатель с направляющей будет вращаться с угловой скоростью $(-\omega_K)$ вокруг неподвижного кулачка.

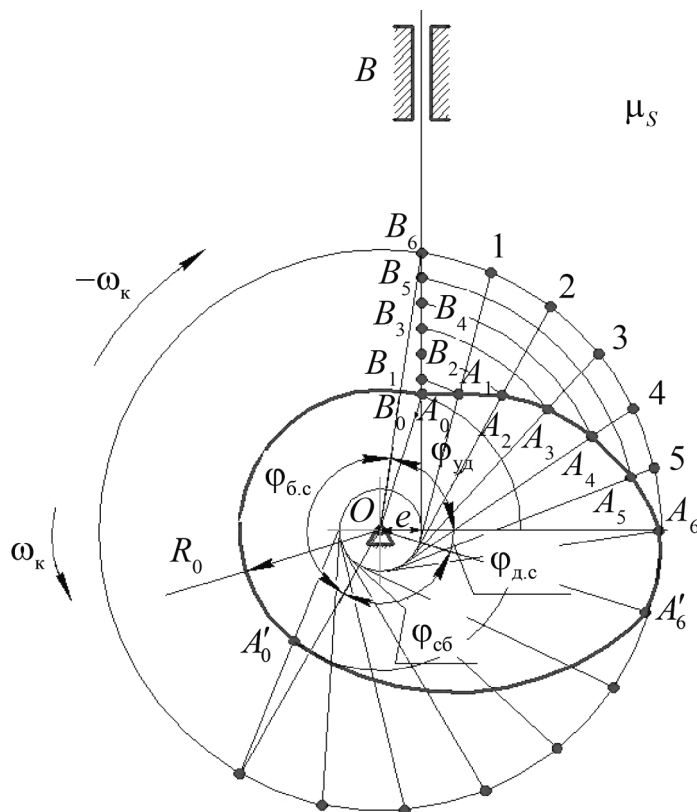


Рис. 10.1. Схема кулачкового механизма со смещенным толкателем, оканчивающимся острием

2. Точки A_0 и A_6 профиля кулачка соответствуют началу и концу фазы удаления, а точки A'_6 и A'_0 – началу и концу фазы сближения. По методике лекции 8 определяют фазовые углы.

3. Из точки O радиусом OA_6 проводят окружность до пересечения с осью движения толкателя в т. B_6 . Дуги этой окружности, соответствующие углам удаления и сближения, делят на равное количество частей. Например, на рис. 10.1 дуга B_6A_6 на фазе удаления разделена на шесть равных частей в направлении, противоположном вращению кулачка. Через точки $1, 2, 3, \dots, A_6$ деления этой дуги строят касательные к окружности радиусом e , пересекающие профиль кулачка в точках A_1, A_2, \dots, A_6 .

4. Затем из центра вращения кулачка O через эти точки проводят дуги до пересечения с осью толкателя. Полученные точки B_1, B_2, \dots, B_6 – положение

ния острия толкателя на фазе удаления при повороте кулачка на равные углы. Отрезок A_0B_6 (B_0B_6) соответствует максимальному перемещению h_{\max} толкателя. $h_{\max} = \mu_S(B_0B_6)$.

На фазе сближения положения острия толкателя получают аналогичным образом.

5. По положениям B_1, B_2, \dots строят закон движения толкателя в виде графика $S = f(\varphi)$, где φ – угол поворота кулачка. Для этого на оси абсцисс прямоугольной системы координат откладывают отрезки, соответствующие фазовым углам $\varphi_{уд}, \varphi_{д.с}, \varphi_{сб}, \varphi_{б.с}$ с масштабным коэффициентом μ_φ (рис. 10.2), а по оси ординат с учетом масштабного коэффициента μ_S откладывают соответствующие перемещения толкателя от его начального положения.

6. Последовательно, графически дифференцируя график $S = f(\varphi)$, получают графики аналогов скорости $V_\varphi = \frac{dS}{d\varphi} = f'(\varphi)$ и ускорения $a_\varphi^\tau = \frac{d^2S}{d\varphi^2} = f''(\varphi)$.

Масштабные коэффициенты

$$\begin{aligned} \mu_S &= \frac{h_{\max}}{Y} \left[\frac{\text{М}}{\text{ММ}} \right]; & \mu_\varphi &= \frac{\varphi_p}{(ON)} = \frac{2\pi}{(OM)} \left[\frac{\text{рад}}{\text{ММ}} \right]; \\ \mu_{V_\varphi} &= \mu \frac{dS}{d\varphi} = \frac{\mu_S}{\mu_\varphi \cdot H_1} \left[\frac{\text{М}}{\text{ММ}} \right]; & \mu_{a_\varphi} &= \mu \frac{d^2S}{d\varphi^2} = \frac{\mu \frac{dS}{d\varphi}}{\mu_\varphi \cdot H_2} \left[\frac{\text{М}}{\text{ММ}} \right]; \\ \mu_V &= \frac{\mu_S \cdot \omega_k}{\mu_\varphi \cdot H_1} \left[\frac{\text{М} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{ММ}} \right]; & \mu_a &= \frac{\mu_V \cdot \omega_k}{\mu_\varphi \cdot H_2} \left[\frac{\text{М} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{ММ}} \right], \end{aligned} \quad (10.1)$$

где Y , мм, – максимальная ордината на графике $S = f(\varphi)$, соответствующая h_{\max} (см. рис. 10.2); $\varphi_p = \varphi_{уд} + \varphi_{д.с} + \varphi_{сб}$; (ON) – длина отрезка в мм, соответствующего φ_p ; $\omega_k = \text{const}$; H_1, H_2 – базовые расстояния в мм.

В случае $\omega_k = \text{const}$ по оси абсцисс можно откладывать время, так как оно пропорционально углам поворота кулачка.

С помощью соотношений

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dS}{d\varphi} \omega_k = V_\varphi \cdot \omega_k,$$

$$a = a^\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{d\varphi^2} \omega_k^2 = a_\varphi^\tau \cdot \omega_k^2$$

получают значения скорости и тангенциального ускорения толкателя. При этом ω_k – угловая скорость кулачка принята постоянной, V и a – скорость и ускорение толкателя.

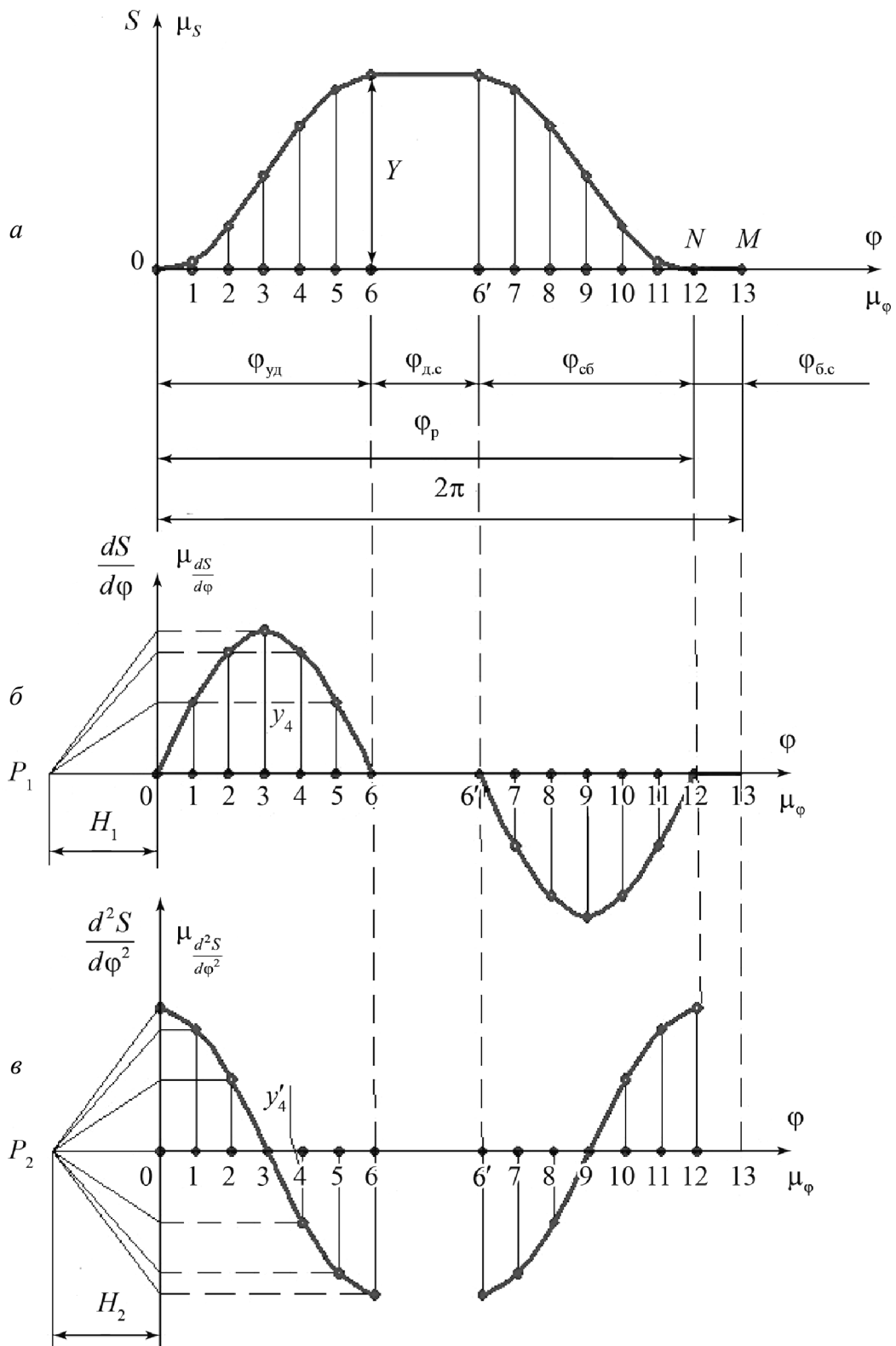


Рис. 10.2. Графики: изменения перемещения (а);
аналога скорости (б); аналога ускорения толкателя (в)

В случае центрального кулачкового механизма кинематический анализ упрощается. Окружность радиусом e обращается в точку. Все касательные лучи обращаются в радиальные прямые. Определение закона движения ни-

чем не отличается от описанного выше. При одинаковом профиле кулачка в механизмах с центральным расположением толкателя ход h_{\max} будет меньше, чем при смещенном толкателе. При этом законы и фазы движения центрального и нецентрального механизмов будут различными.

10.3. Плоский кулачковый механизм с коромыслом

На основе метода обращенного движения кинематический анализ проводят в следующей последовательности.

1. Выбрав масштабный коэффициент μ_S , вычерчивают кулачковый механизм в положении, соответствующем началу подъема коромысла (рис. 10.3). На профиле кулачка определяют точки A_0 и A_6 , соответствующие фазе удаления, а также точки A'_6 и A'_0 , соответствующие фазе сближения. Эти точки определяются как граничные при касании окружностей радиусом R_0 и R_{\max} с профилем кулачка.

2. Затем определяется максимальный угол качания коромысла β_{\max} . Для этого из точки C_0 как из центра проводят дугу радиусом $C_0B_0 = C_0A_0 = \frac{l_k}{\mu_S}$ [мм] (l_k – длина коромысла в м). Эта дуга пересекается с дугой радиусом $OA_6 = \frac{R_{\max}}{\mu_S}$ в точке B_6 . Угол $\angle B_6C_0B_0$ – максимальный угол качания коромысла β_{\max} .

3. Далее определяют фазовые углы. Из центра O радиусом $OC = \frac{a_w}{\mu_S}$ [мм], где a_w – межосевое расстояние в м, проводится окружность. На этой окружности делают засечки из точек A_0 и A_6 , A'_0 и A'_6 профиля в направлении, противоположном вращению кулачка.

Получают точки C_0 , C_6 , C'_0 , C'_6 . В результате – центральные углы $\angle C_0OC_6 = \varphi_{уд}$; $\angle C_6OC'_0 = \varphi_{д.с}$; $\angle C'_0OC'_6 = \varphi_{сб}$; $\angle C_0OC'_0 = \varphi_{б.с}$ (см. рис. 10.3).

Фазовые углы откладываются от прямой OC_0 в направлении, противоположном вращению кулачка. Полученные углы делят, например, на шесть равных частей.

4. Из точек деления C_1 , C_2 и т.д. радиусом, равным $\frac{l_k}{\mu_S} = C_0B_0 = C_0A_0$, [мм], производят засечки на профиле кулачка, получая точки A_1 , A_2 , A_3 и т.д. Затем эти точки из центра O радиусами OA_0 , OA_1 , OA_2 и т.д. сносят на дугу качания коромысла. В результате получают точки B_0 , B_1 , B_2 и т.д.

5. Соединив эти точки с центром качания коромысла C_0 , получают $\beta_i = \angle B_iC_0B_0$ – текущие углы отклонения коромысла от начального положения (см. рис. 10.3).

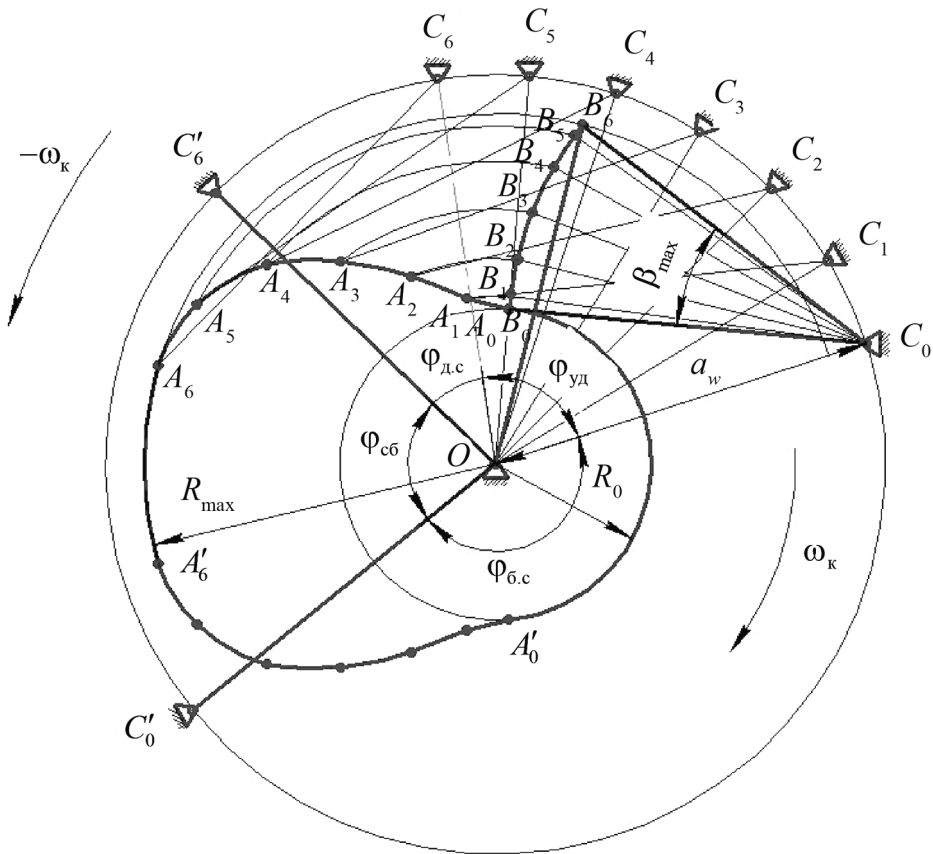


Рис. 10.3. Схема кулачкового механизма с коромыслом

6. Зная углы поворота кулачка φ_i и соответствующие им углы β_i , строят диаграмму функции положения $\beta = f(\varphi)$. Наряду с этим вместо полученной зависимости можно построить график $S = f(\varphi)$, где $S_i = \frac{l_k}{\mu_s} \beta_i$ – перемещение конца коромысла в мм (длина дуг B_0B_1, B_0B_2, B_0B_3 и т.д.) (см. рис. 10.2, 10.3).

7. Проводя последовательно графическое дифференцирование графика $S = f(\varphi)$, получают графики аналогов скорости $V_\varphi = \frac{dS}{d\varphi} = f'(\varphi)$ и тангенци-

ального ускорения $a_\varphi^\tau = \frac{d^2S}{d\varphi^2} = f''(\varphi)$ точки B конца коромысла (см. рис. 10.2) в масштабах формул (10.1).

Значения аналога скорости и аналога ускорения находятся из соответствующих графиков. Например, для четвертого положения (см. рис. 10.2)

$$\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)_4 = \mu_{\frac{dS}{d\varphi}} \cdot y_4; \quad \left(\frac{d^2S}{d\varphi^2}\right)_4 = \mu_{\frac{d^2S}{d\varphi^2}} \cdot y'_4, \text{ где } y_4 \text{ и } y'_4 \text{ – ординаты графиков в мм.}$$

Величина полного ускорения точки B конца коромысла для любого положения кулачкового механизма при $\omega_k = \text{const}$ определяется формулой

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2} = \sqrt{\left(\frac{V_B^2}{l_k}\right)^2 + (a_B^\tau)^2} = \omega_k^2 \sqrt{\left(\frac{\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)^2}{l_k}\right)^2 + \left(\frac{d^2S}{d\varphi^2}\right)^2}. \quad (10.2)$$

10.4. Кулачковый механизм с плоским толкателем

Так как толкатель совершает поступательное движение, то для установления закона движения достаточно рассмотреть перемещение любой его точки. За такую точку принимается точка B_1 пересечения плоскости толкателя с прямой, параллельной оси его движения, проходящей через центр вращения кулачка (рис. 10.4).

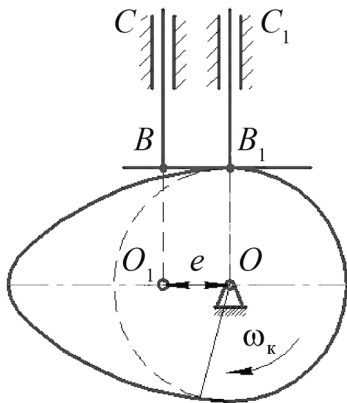


Рис. 10.4. Кулачковый механизм с плоским толкателем

То есть вместо смещенной оси толкателя вводится ось, проходящая через центр O , так как $O_1B = OB_1$. Следовательно, при наличии эксцентриситета $e \neq 0$ выполняются построения такие же, как и при $e = 0$.

Закон движения для случая, когда ось толкателя и плоскость тарелки перпендикулярны, пересекаясь в точке B (см. рис. 10.4), иллюстрирует рис. 10.5. Последовательность построений следующая.

1. В обратном движении плоскость толкателя всегда скользит по профилю кулачка. При этом ось толкателя последовательно занимает положения 1, 2, 3 и т.д., получаемые при делении соответствующих фазовых углов (см. рис. 10.5). Касательные к профилю кулачка, образующие заданные углы с осью толкателя (в данном случае 90°), определяют соответствующие положения $B'_1, B'_2, B'_3 \dots$ точки B_1 тарелки толкателя.

2. Затем дугами с центром O через точки $B'_1, B'_2, B'_3 \dots$ делают засечки на начальном положении оси толкателя. Получают точки B_1, B_2, B_3 и т.д. (см. рис. 10.5). Зная положения точки B_1 , строят диаграммы движения, как и для предыдущих случаев (см. рис. 10.2).

Все построения остаются без изменения и в том случае, если плоскость тарелки с осью толкателя составляет угол $\gamma \neq 90^\circ$. Тогда под углом γ к каждому из положений оси толкателя в обратном движении проводят касательную к профилю кулачка.

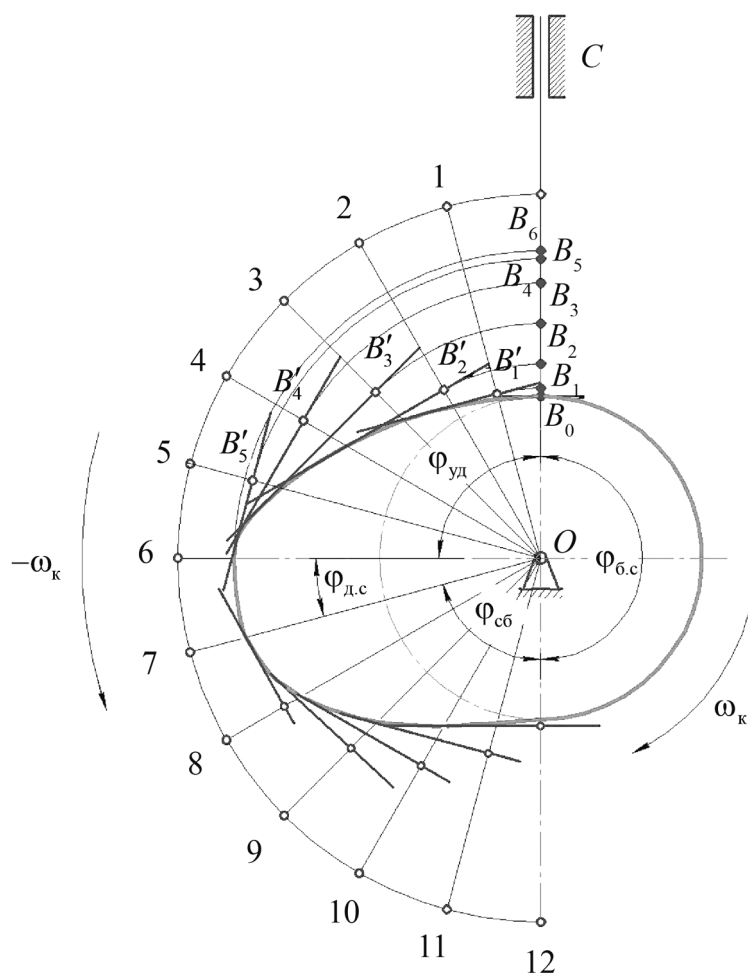


Рис. 10.5. Схема кулачкового механизма с толкателем, оканчивающимся плоскостью

Замечание. Точки касания профиля кулачка и плоскости тарелки изменяют свое положение относительно оси толкателя. В этом случае минимальная длина тарелки толкателя определяется наиболее удаленными точками касания.

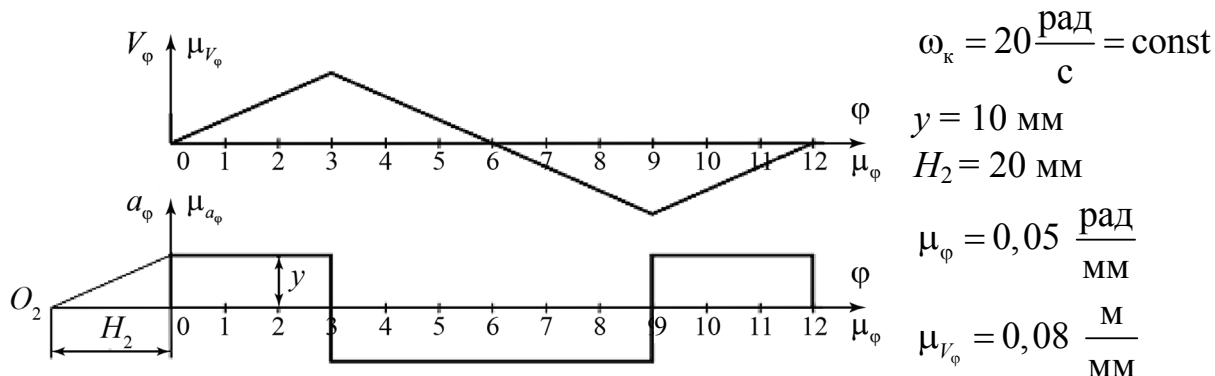
Контрольные вопросы и упражнения

1. Цель и задачи кинематического анализа кулачковых механизмов.
2. В чем преимущества метода обращенного движения в сравнении с методом положений?
3. Алгоритм решения задачи о положениях кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.
4. Чем обусловлен при кинематическом анализе переход от кулачкового механизма с роликовым толкателем к кулачковому механизму с толкателем, оканчивающимся острием?
5. Как по диаграмме перемещения поступательно движущегося толкателя получить диаграммы аналога скорости и аналога ускорения?

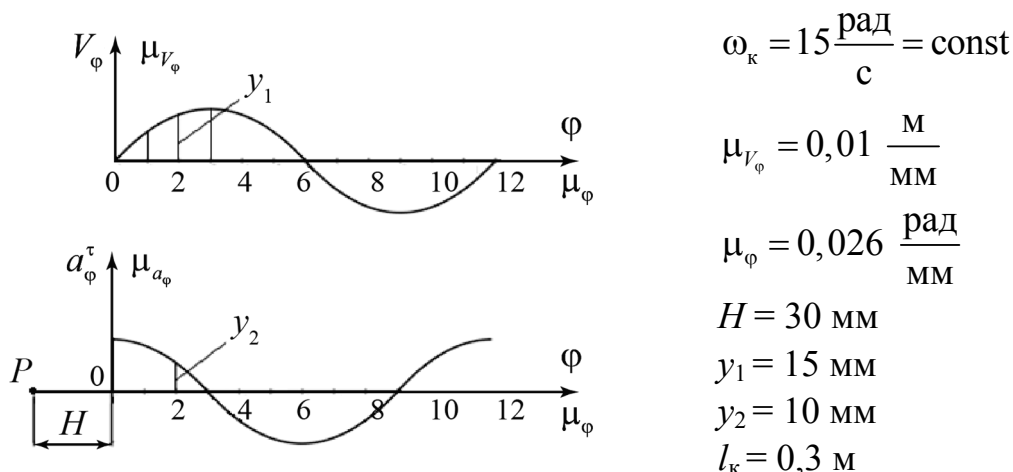
6. Алгоритм решения задачи о положениях для кулачкового механизма с коромыслом.

7. Как определяется максимальный угол качания коромысла β_{\max} ?

8. Определить величину ускорения поступательно движущегося толкателя во втором положении.



9. Определить величину ускорения конца коромысла во втором положении кулачкового механизма.



10. Сравнить алгоритм решения задачи о положениях для кулачковых механизмов с роликовым толкателем и с толкателем, оканчивающимся плоскостью.

11. Как с помощью графического решения задачи о положениях оценить минимальную длину тарелки толкателя исходя из требований к профилю кулачка?

12. Влияет ли угол наклона плоскости толкателя к оси его движения на кинематический анализ кулачкового механизма?

13. Как соотносятся профильные и фазовые углы кулачкового механизма с плоским толкателем?

14. Где возможно применение результатов кинематического анализа кулачковых механизмов?

Лекция 11

ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ВЫХОДНЫХ ЗВЕНЬЕВ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

Содержание: требования, основные законы движения выходных звеньев кулачковых механизмов и их характеристики.

Ключевые слова: закон движения; «мягкие» и «жесткие удары»; графическая и аналитическая формы законов движения.

11.1. Требования к законам движения и их особенности

Закон движения выходного звена кулачкового механизма формируется исходя из особенностей технологического процесса машины. При этом могут учитываться ряд требований по надежности, долговечности, быстродействию, точности и др.

Закон движения представляется функциональными зависимостями перемещения, скорости или ускорения выходного звена от времени:

$$S = f(t); V = f'(t); a^{\tau} = f''(t).$$

В случае равномерного движения кулачка – это зависимости перемещения, аналогов скорости и ускорения выходного звена от обобщенной координаты:

$$S = f(\varphi); V = f'(\varphi); a^{\tau} = f''(\varphi).$$

Функциональные зависимости могут задаваться графически, аналитически или таблично.

Некоторые законы сопровождаются мгновенными скачками скоростей или ускорений, так называемыми «ударами». Случай конечного скачка – «**мягкий удар**», случай бесконечного скачка – «**жесткий удар**».

При функционировании машин различного назначения реализуются самые разнообразные законы движения выходных звеньев кулачковых механизмов.

Например, в металлорежущих станках кулачки применяются для реализации постоянной скорости подачи резца. В текстильных и швейных машинах кулачковые механизмы служат для направления нити при ее наматывании на катушку. Равномерность распределения провода или кабеля по всей рабочей длине катушки или барабана в электротехнической и кабельной промышленности обеспечивается механизмом раскладчика, в состав которого входит кулачковый механизм.

Следует отметить подбор законов движения выходного звена для кулачковых механизмов распределения тепловых двигателей, двигателей внутреннего сгорания и т.п. В этом случае закон движения выходного звена дол-

жен удовлетворять условию максимально возможной характеристики «время-сечение», пропорциональной площади ограниченной кривой (S, φ) на графике перемещений. Тогда не затягивается подъем клапана и не происходит изменения свойств пара или газа.

В быстроходных механизмах большое значение играют инерционные нагрузки. Поэтому задаются законом движения в форме $\frac{d^2 S}{d\varphi^2} = f''(\varphi)$ с плавным изменением ускорения и его небольшой величиной, получая $V_\varphi = f'(\varphi)$ и $S = f(\varphi)$ с помощью интегрирования.

В тихоходных механизмах исходят из технологических требований. Если они не играют ответственной роли в рабочем процессе, то задаются зависимостью $S = f(\varphi)$. Значения $V_\varphi = f'(\varphi)$ и $a_\varphi^\tau = f''(\varphi)$ получают последовательным дифференцированием $S = f(\varphi)$. Тогда могут применяться законы с «мягкими» или «жесткими» ударами, так как звенья механизма обладают определенной упругостью, в какой-то мере снижая эффект «удара».

Одним из методов аналитического задания законов движения является введение безразмерных функций: $S(k), V_\varphi(k), a_\varphi^\tau(k)$, в которых безразмерный аргумент $k \in [0; 1]$.

На фазе удаления $k = k_y = \frac{\varphi_i}{\varphi_{уд}}$, на фазе сближения $k = k_{сб} = \frac{(\varphi_p - \varphi_i)}{\varphi_{сб}}$, где

φ_i – текущий угол поворота кулачка на соответствующей фазе.

При равномерном движении кулачка, например, на фазе удаления

$$S(\varphi) = h_{\max} S(k); V_\varphi(\varphi) = \frac{h_{\max}}{\varphi_{уд}} S'(k); a_\varphi^\tau(\varphi) = \frac{h_{\max}}{\varphi_{уд}^2} S''(k).$$

Функции $S(k), S'(k), S''(k)$ разнообразны и могут представляться степенными полиномами, а также различными тригонометрическими выражениями. Коэффициенты безразмерных функций определяются из начальных и граничных условий, обычно в начале и конце соответствующих фаз.

Довольно часто применяются комбинированные законы движения, когда на соответствующих фазах законы разные или реализуются их комбинации.

В лекции рассматриваются особенности наиболее распространенных типовых законов движения, представленных как в аналитической, так и графической форме.

11.2. Особенности и характеристики некоторых типовых законов движения

11.2.1. Линейный закон движения

Аналитическое выражение для линейного закона можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} S = h_{\max} \frac{\varphi}{\varphi_{\text{уд}}}; \frac{dS}{d\varphi} = \frac{h_{\max}}{\varphi_{\text{уд}}} = \text{const}; 0 \leq \varphi \leq \varphi_{\text{уд}} - \text{для фазы удаления,} \\ S = h_{\max} \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{\text{сб}}}\right); \frac{dS}{d\varphi} = -\frac{h_{\max}}{\varphi_{\text{сб}}} = \text{const}; 0 \leq \varphi \leq \varphi_{\text{сб}} - \text{для фазы сближения,} \end{cases} \quad (11.1)$$

где φ – текущая угловая координата поворота кулачка, отсчитываемая от **начала** соответствующей фазы движения; h_{\max} – максимальный ход толкателя (для коромысла $h_{\max} = l_k \beta_{\max}$).

Диаграмма перемещения $S = f(\varphi)$ строится в виде наклонных прямых по заданному максимальному перемещению h_{\max} выходного звена соответственно в конце фазы удаления и в начале фазы сближения (рис. 11.1).

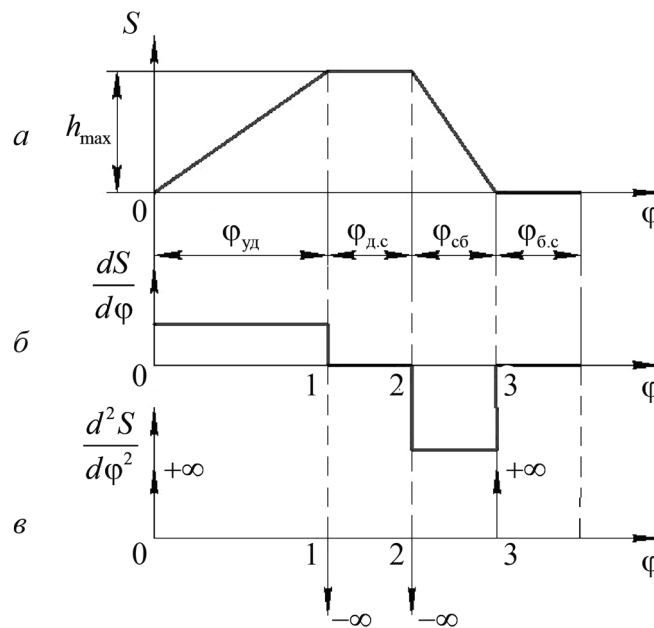


Рис. 11.1. Линейный закон движения

Этот закон обеспечивает равномерное движение выходного звена. Величина аналога скорости (скорость) остается в пределах фаз удаления и сближения постоянной. В начале и в конце каждой фазы (точки $0, 1, 2, 3$, рис. 11.1, б) величина $\frac{dS}{d\varphi}$ изменяется конечным скачком. В этих точках

мгновенно возрастает ускорение (в данном случае аналог ускорения $\frac{d^2S}{d\varphi^2}$) теоретически до бесконечно большой величины (рис. 11.1, в). Происходят «жесткие» удары, что приводит при больших скоростях вращения кулачка к динамическим перегрузкам.

В действительности звенья механизма обладают упругостью, смягчая удар, вследствие чего в точках $0, 1, 2, 3$ скорость меняется не мгновенно. Ускорения будут значительными, не достигая бесконечно больших величин.

Применение линейного закона движения (см. рис. 11.1) возможно только в тихоходных кулачковых механизмах, так как в случае больших ускорений возникают значительные инерционные нагрузки.

Замечание. Для уменьшения ударов закон модернизируют, сопрягая в точках 0, 1, 2, 3 линейные зависимости дугами окружностей, вследствие чего скорость изменяется плавно. С увеличением радиуса дуг плавность увеличивается. Ускорение (в данном случае аналог ускорения $\frac{d^2S}{d\varphi^2}$) выходного звена на этих участках меняется конечными скачками. Удары смягчаются. Динамическая нагрузка уменьшается.

11.2.2. Параболический закон движения

Аналитическая форма представления

Закон иллюстрируется диаграммами рис. 11.2. График перемещения на фазах удаления и сближения состоит из двух участков таких, что

$$\varphi_{уд} = \varphi'_y + \varphi''_y; \quad \varphi_{сб} = \varphi'_c + \varphi''_c.$$

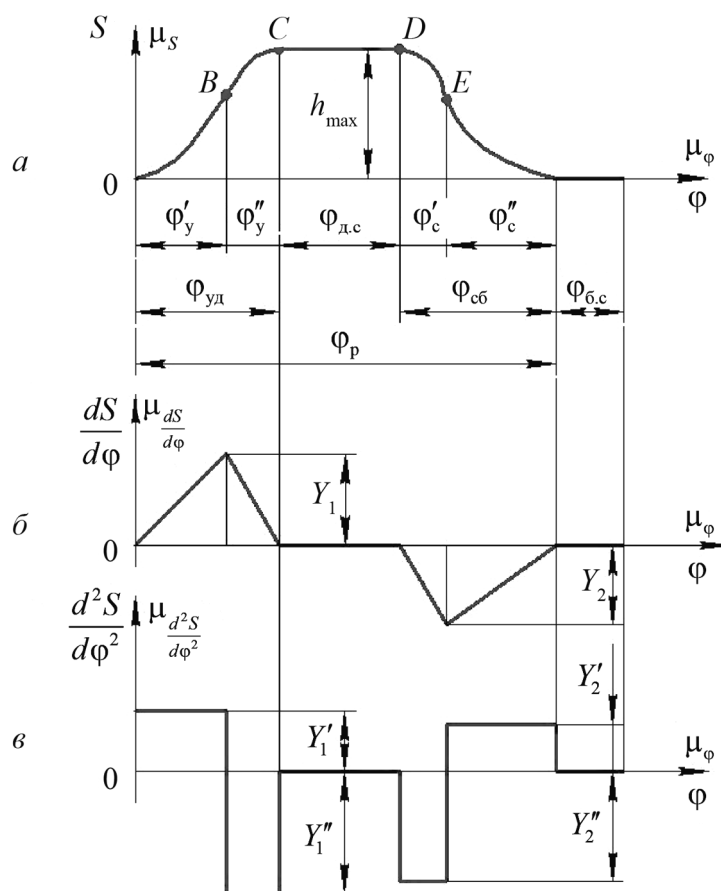


Рис. 11.2. Параболический закон движения

Например, на фазе удаления график состоит из двух парабол, которые сопрягаются в точке **B** (см. рис. 11.2).

Закон движения для фазы удаления представляется аналитическими зависимостями

$$\left\{ \begin{array}{ll} S = h_{\max} \frac{\varphi^2}{\varphi'_y \cdot \varphi_{уд}} & \text{для } 0 \leq \varphi \leq \varphi'_y, \\ S = h_{\max} \frac{\varphi^2}{\varphi''_y \cdot \varphi_{уд}} \left(-\varphi^2 + 2\varphi_{уд} \cdot \varphi - \varphi'_y \cdot \varphi_{уд} \right) & \text{для } \varphi'_y \leq \varphi \leq \varphi_{уд}, \\ \frac{dS}{d\varphi} = \frac{2h_{\max} \varphi}{\varphi'_y \cdot \varphi_{уд}} & \text{для } 0 \leq \varphi \leq \varphi'_y, \\ \frac{dS}{d\varphi} = \frac{2h_{\max} \varphi}{\varphi''_y \cdot \varphi_{уд}} (\varphi_{уд} - \varphi) & \text{для } \varphi'_y \leq \varphi \leq \varphi_{уд}, \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = \frac{2h_{\max}}{\varphi'_y \cdot \varphi_{уд}} = \text{const} & \text{для } 0 \leq \varphi \leq \varphi'_y, \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = -\frac{2h_{\max}}{\varphi''_y \cdot \varphi_{уд}} = \text{const} & \text{для } \varphi'_y \leq \varphi \leq \varphi_{уд}. \end{array} \right. \quad (11.2)$$

Для фазы сближения, соответствующей углу $\varphi_{сб}$, все параметры движения рассчитываются по уже выведенным формулам с соответствующей заменой φ'_y, φ''_y на φ'_c, φ''_c . Причем значение угла φ заменяется на $(\varphi_{сб} - \varphi)$. Отсчет текущих значений угла φ идет от **начала** фазы сближения в диапазоне $0 \leq \varphi \leq \varphi'_c$ и $\varphi'_c \leq \varphi \leq \varphi_{сб}$ (11.2*).

$$\left\{ \begin{array}{ll} S = h_{\max} \left(1 - \frac{\varphi^2}{\varphi'_c \varphi_{сб}} \right), & 0 \leq \varphi \leq \varphi'_c, \\ S = h_{\max} \left(1 + \frac{\varphi^2 - 2\varphi_{сб} \cdot \varphi + \varphi'_c \varphi_{сб}}{\varphi''_c \varphi_{сб}} \right), & \varphi'_c \leq \varphi \leq \varphi_{сб}, \\ \frac{dS}{d\varphi} = -\frac{2h_{\max} \cdot \varphi}{\varphi'_c \varphi_{сб}}, & 0 \leq \varphi \leq \varphi'_c, \\ \frac{dS}{d\varphi} = 2h_{\max} \frac{(\varphi - \varphi_{сб})}{\varphi''_c \varphi_{сб}}, & \varphi'_c \leq \varphi \leq \varphi_{сб}, \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = -\frac{2h_{\max}}{\varphi'_c \varphi_{сб}}, & 0 \leq \varphi \leq \varphi'_c, \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = \frac{2h_{\max}}{\varphi''_c \varphi_{сб}}, & \varphi'_c \leq \varphi \leq \varphi_{сб}. \end{array} \right. \quad (11.2^*)$$

Внутри фаз удаления и сближения изменение аналогов ускорения сопровождается конечными скачками с изменением знака, что приводит к «мягким» ударам, скачкообразному изменению инерционных нагрузок, возникновению вибраций и т.п. Такой закон движения целесообразно назначать в **ТИХОХОДНЫХ** механизмах.

В случае когда $\varphi'_y = \varphi''_y$, $\varphi'_c = \varphi''_c$, соотношения (11.2), например, для фазы удаления принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{2h_{\max} \cdot \varphi^2}{\varphi_{\text{уд}}^2}, \\ \frac{dS}{d\varphi} = \frac{4h_{\max} \cdot \varphi}{\varphi_{\text{уд}}^2}, \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = \frac{4h_{\max}}{\varphi_{\text{уд}}^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} S = \frac{2h_{\max}}{\varphi_{\text{уд}}^2} \left(-\varphi^2 + 2\varphi_{\text{уд}} \varphi - \frac{\varphi_{\text{уд}}^2}{2} \right), \\ \frac{dS}{d\varphi} = \frac{4h_{\max} \cdot \varphi}{\varphi_{\text{уд}}^2} (\varphi_{\text{уд}} - \varphi), \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = -\frac{4h_{\max}}{\varphi_{\text{уд}}^2} \end{array} \right. \quad (11.3)$$

$$\text{при } 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_{\text{уд}}}{2}.$$

$$\text{при } \frac{\varphi_{\text{уд}}}{2} \leq \varphi \leq \varphi_{\text{уд}}.$$

В этом случае величины отрезков, соответствующие максимальным значениям аналога скорости и ускорения на фазе удаления, определяются соотношениями

$$\left(\frac{dS}{d\varphi} \right)_{\max} = \left(\frac{2h_{\max}}{\mu_S \cdot \varphi_{\text{уд}}} \right) [\text{ММ}]$$

$$\text{и } \left(\frac{d^2S}{d\varphi^2} \right)_{\max} = \left(\frac{4h_{\max}}{\mu_S \varphi_{\text{уд}}^2} \right) [\text{ММ}].$$

Их ординаты на фазе удаления и сближения при $\varphi'_y = \varphi''_y$ и $\varphi'_c = \varphi''_c$ соотносятся как

$$\left(\frac{Y_1}{Y_2} \right) = \left(\frac{\varphi_{\text{сб}}}{\varphi_y} \right) \text{ и } \left(\frac{Y'_1}{Y'_2} \right) = \left(\frac{\varphi_{\text{сб}}}{\varphi_y} \right)^2,$$

где Y_1 и Y_2 – значения максимальных ординат на графике $\frac{dS}{d\varphi}$, соответствующие фазам удаления и сближения; Y'_1 и Y'_2 – максимальные значения ординат на графике $\frac{d^2S}{d\varphi^2}$, соответствующие фазам удаления и сближения (см. рис. 11.2).

Аналогично формируется закон движения для фазы сближения.

11.2.3. Синусоидальный закон движения

Аналитическая форма представления

Ускорение изменяется по закону синуса. Функциональные зависимости для фаз удаления и сближения, например, при $\varphi'_y = \varphi''_y$ и $\varphi'_c = \varphi''_c$ представляются соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{l} S = h_{\max} \left(\frac{\varphi}{\varphi_{\text{уд}}} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\varphi_{\text{уд}}} \varphi \right), \\ \frac{dS}{d\varphi} = \frac{h_{\max}}{\varphi_{\text{уд}}} \left(1 - \cos \frac{2\pi\varphi}{\varphi_{\text{уд}}} \right), \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = \frac{2\pi h_{\max}}{\varphi_{\text{уд}}^2} \sin \frac{2\pi}{\varphi_{\text{уд}}} \varphi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} S = h_{\max} \left(\left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{\text{сб}}} \right) - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{\text{сб}}} \right) \right), \\ \frac{dS}{d\varphi} = -\frac{h_{\max}}{\varphi_{\text{сб}}} \left(1 - \cos 2\pi \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{\text{сб}}} \right) \right), \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = \frac{2\pi h_{\max}}{\varphi_{\text{сб}}^2} \sin 2\pi \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{\text{сб}}} \right) \end{array} \right. \quad (11.4)$$

при $0 \leq \varphi \leq \varphi_{\text{уд}}$.

при $0 \leq \varphi \leq \varphi_{\text{сб}}$.

Текущие углы φ отсчитываются от начала соответствующих фаз.

Иллюстрация синусоидального закона движения представлена на рис. 11.3.

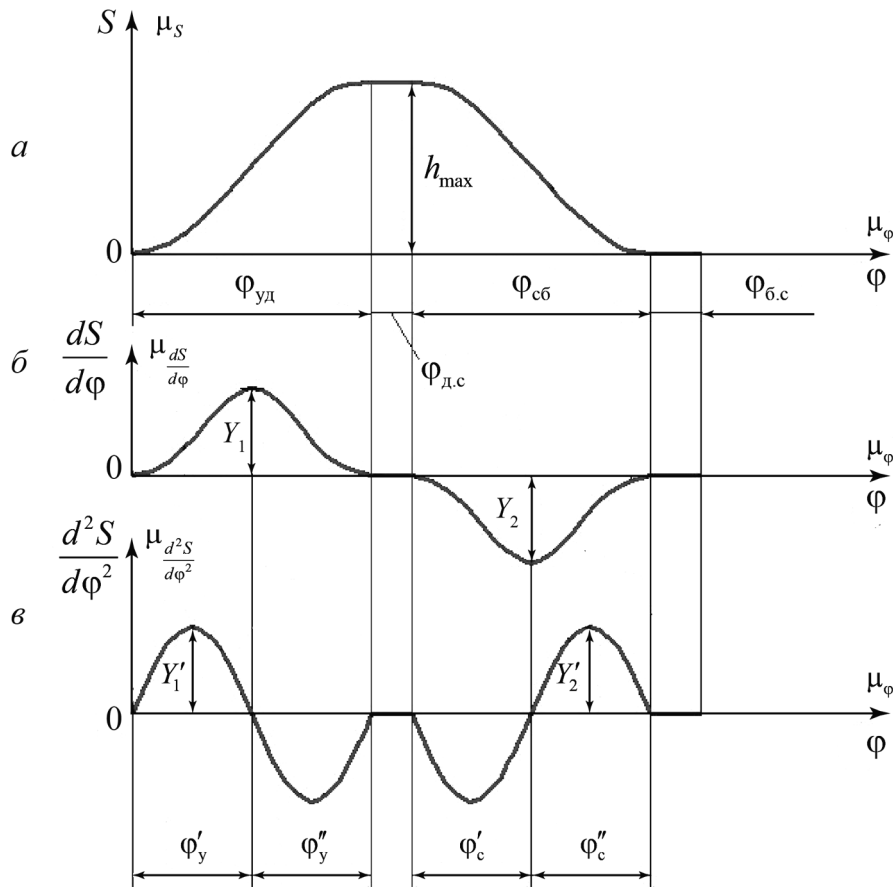


Рис. 11.3. Синусоидальный закон движения

Амплитуды графиков на соответствующих фазах связаны соотношениями

$$\left(\frac{Y_1}{Y_2}\right) = \left(\frac{\varphi_{сб}}{\varphi_{уд}}\right) \text{ и } \left(\frac{Y'_1}{Y'_2}\right) = \left(\frac{\varphi_{сб}}{\varphi_{уд}}\right)^2.$$

В начале и в конце фаз движения аналоги скорости и ускорения равны 0, что и определяет безударную работу кулачкового механизма.

Таким образом, достоинство синусоидального закона заключается в плавном изменении ускорения выходного звена. Соответственно плавно изменяются инерционные нагрузки, действующие на это звено.

Для клапанных механизмов этот закон имеет недостаток, так как кривая подъема слишком плавно подходит к оси $\theta\varphi$. Подъем клапана замедляется, негативно влияя на изменение свойств рабочей смеси (газа или пара).

11.2.4. Косинусоидальный закон движения

Аналитическая форма представления

Для наиболее часто встречающегося случая, когда $\varphi'_y = \varphi''_y = \frac{\varphi_{уд}}{2}$

и $\varphi'_c = \varphi''_c = \frac{\varphi_{сб}}{2}$, зависимость перемещения, аналогов скорости и ускорения

по углу поворота кулачка для фаз движения представлена соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{h_{\max}}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\varphi_{уд}} \varphi \right), \\ \frac{dS}{d\varphi} = \frac{h_{\max} \pi}{2\varphi_{уд}} \sin \frac{\pi}{\varphi_{уд}} \varphi, \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = \frac{h_{\max}}{2} \frac{\pi^2}{\varphi_{уд}^2} \cos \frac{\pi}{\varphi_{уд}} \varphi \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} S = \frac{h_{\max}}{2} \left(1 - \cos \left(\pi \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{сб}} \right) \right) \right), \\ \frac{dS}{d\varphi} = -\frac{h_{\max} \pi}{2\varphi_{сб}} \sin \left(\pi \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{сб}} \right) \right), \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = \frac{h_{\max}}{2} \frac{\pi^2}{\varphi_{сб}^2} \cos \left(\pi \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{сб}} \right) \right) \end{array} \right., \quad (11.5)$$

при $0 \leq \varphi \leq \varphi_{уд}$.

при $0 \leq \varphi \leq \varphi_{сб}$.

Текущие углы φ отсчитываются от начала соответствующих фаз. Иллюстрация закона представлена на рис. 11.4.

Ускорение выходного звена меняется по закону косинуса в пределах удаления и сближения. Внутри фазы удаления и сближения оно изменяется плавно. Но в начале и в конце этих фаз движения значения ускорений скачком возрастают от 0 до максимального значения, что приводит к появлению «мягких» ударов (рис. 11.4, в).

Применение данного закона движения возможно в **тихоходных** и в механизмах с **умеренными** скоростями звеньев.

По аналогии с предыдущим ординаты амплитуд на фазах удаления и сближения соотносятся как

$$\left(\frac{Y_1}{Y_2}\right) = \left(\frac{\varphi_{сб}}{\varphi_{уд}}\right) \text{ и } \left(\frac{Y'_1}{Y'_2}\right) = \left(\frac{\varphi_{сб}}{\varphi_{уд}}\right)^2.$$

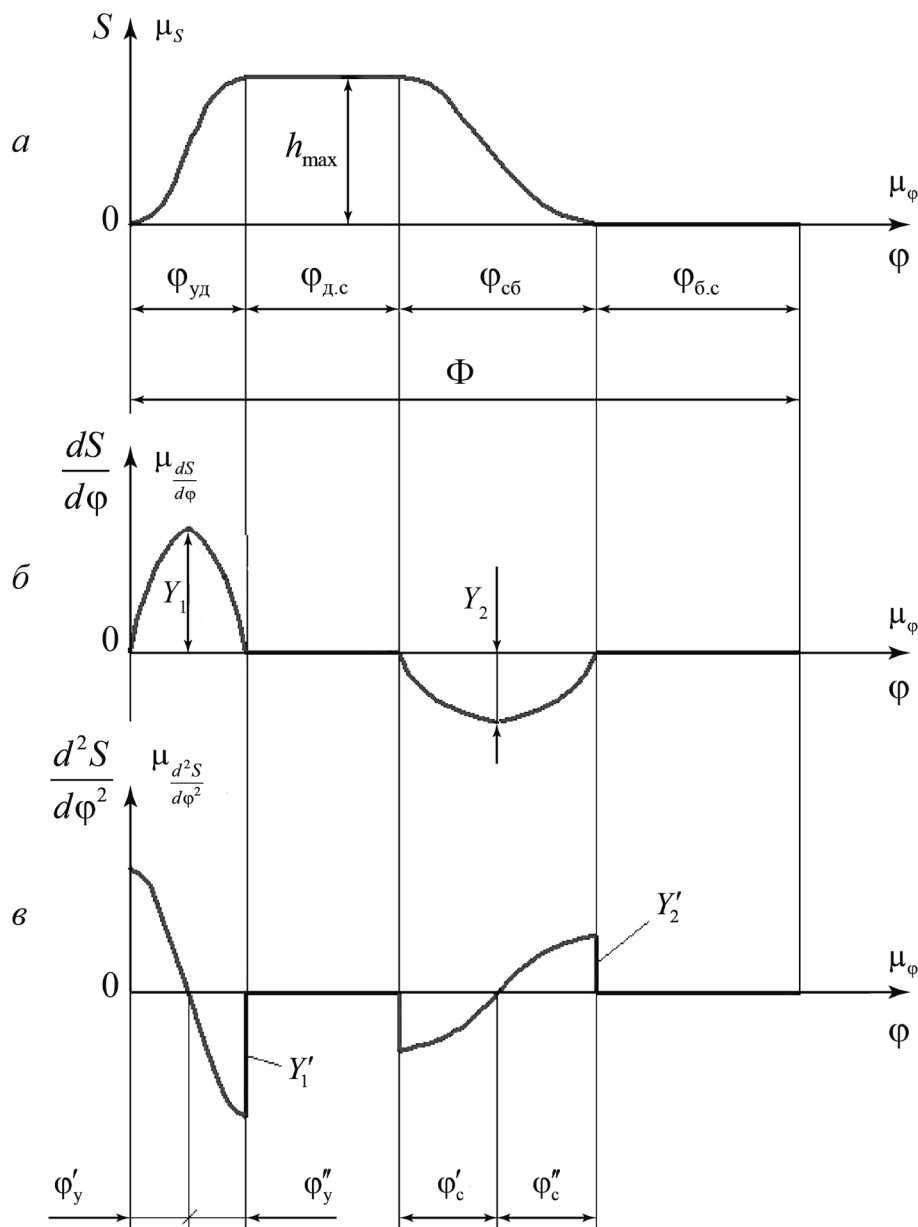


Рис. 11.4. Косинусоидальный закон движения

11.2.5. Трапецидальный закон изменения ускорения выходного звена

Графическая форма представления закона движения

Ускорение (аналог ускорения) изменяется по трапецидальной кривой (рис. 11.5, а). Кривая скоростей (аналогов скоростей) состоит из частей па-

рабол и отрезков прямых, а кривая перемещений – из сопряженных отрезков кубических и простых парабол (рис. 11.5, б, в).

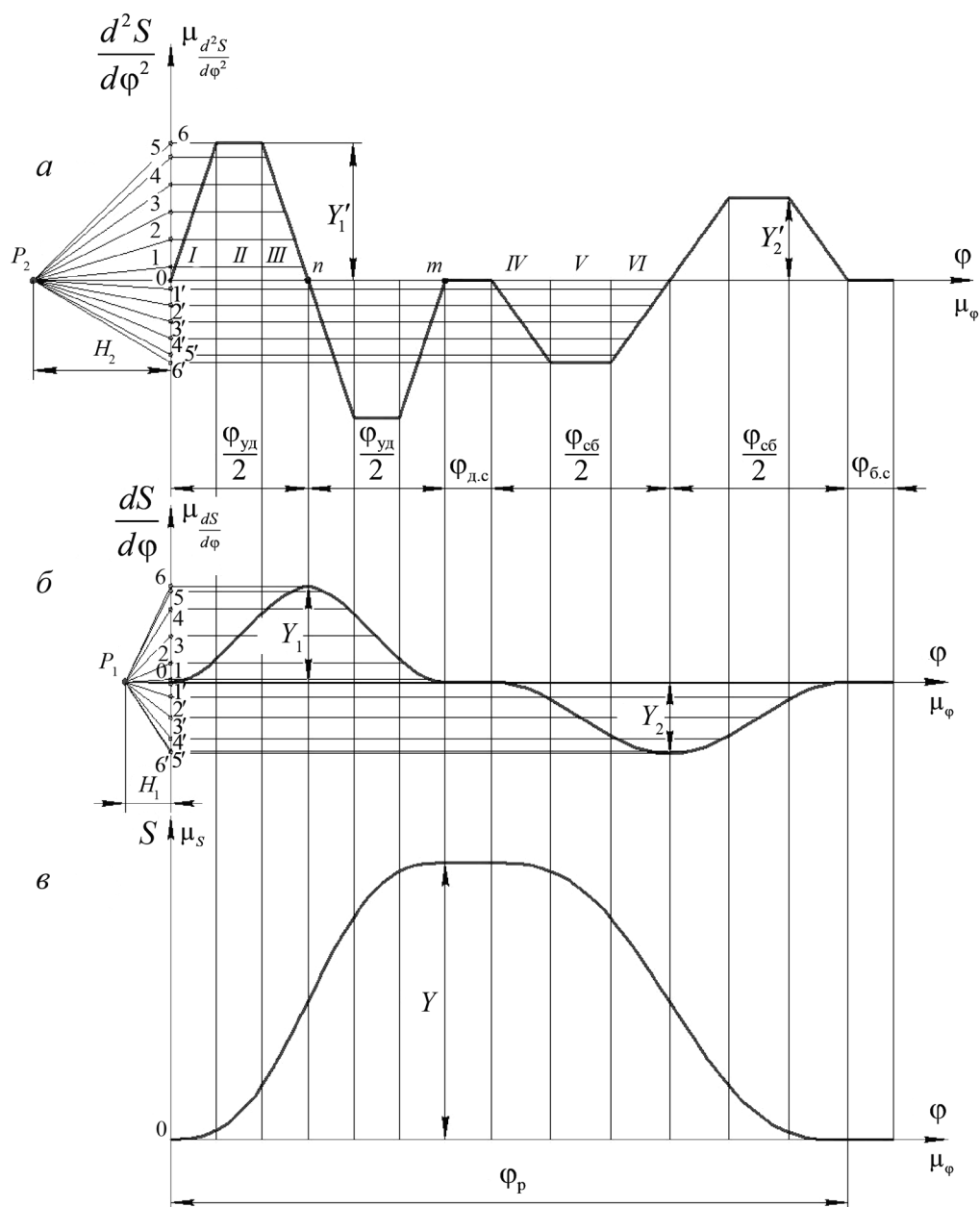


Рис. 11.5. Диаграммы трапецеидального закона движения

При определенных параметрах трапеции получаются достаточно удовлетворительные характеристики для работы кулачковых механизмов при **высоких** скоростях.

Трапецеидальный закон (см. рис. 11.5) является вариацией параболического. Участки трапеции и переходы между ее прямыми зависят от величины коэффициента k (см. рис. 11.5). Коэффициент k характеризует соотношения между углами участков I и III на фазе удаления и углами участков IV и VI на фазе сближения, где соответственно растет и убывает аналог ускорения.

В случае когда участки I = III и IV = VI (см. рис. 11.5), их величины соответственно

$$I = \frac{k_y \varphi_{уд}}{2} = III; \quad II = \frac{\varphi_{уд}}{2}(1 - 2k_y) \quad \text{и} \quad IV = k_c \frac{\varphi_{сб}}{2} = VI; \quad V = \frac{\varphi_{сб}}{2}(1 - 2k_c). \quad (11.6)$$

Величины $k_y, k_c \in [0; 0,5]$. При $k_y = k_c = 0$ получают параболический закон движения, т.е. прямоугольную кривую ускорения. Если $k_y = k_c = 0,5$, то $\varphi_{y1} = \varphi_{y2} = \frac{\varphi_{уд}}{4}$ и $\varphi_{c1} = \varphi_{c2} = \frac{\varphi_{сб}}{4}$. Диаграмма ускорения (аналога ускорения) имеет вид равнобедренных треугольников (рис. 11.6).

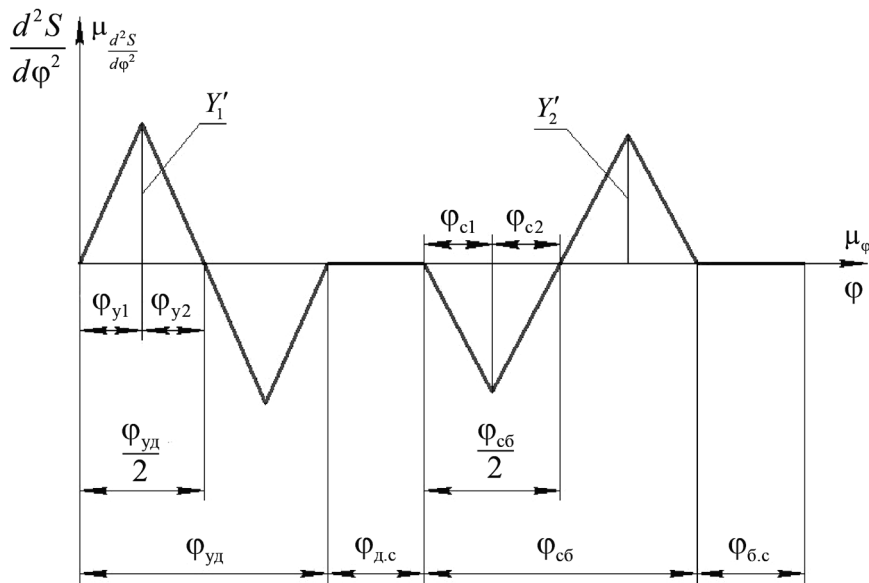


Рис. 11.6. Частный случай трапецеидального закона движения ($k_y = k_c = 0,5$)

При $k_y = k_c = 0,25$ получается достаточно удовлетворительный закон движения выходного звена.

Диаграммы трапецеидального закона движения удобно строить графическим интегрированием, используя различные методики.

Трапецеидальная кривая ускорения (см. рис. 11.5) имеет преимущества в сравнении с другими графиками движения: исчезает явление удара, ограничиваются износ и вибрации по сравнению с параболическим законом. При этом законе движения величина максимального ускорения может быть сделана меньшей, чем при синусоидальном законе.

Аналитическая форма представления закона движения

Двойным интегрированием по участкам линейных зависимостей аналога ускорения получают диаграммы аналога скорости и перемещения выходного звена. При этом учитываются граничные условия, обусловленные переходами между прямыми исходной диаграммы (см. рис. 11.5, а).

В случае **симметричности диаграммы** аналога ускорения на участках фаз удаления и сближения, когда выполнены условия (11.6) вводятся обозначения $a = \frac{k_y \varphi_{уд}}{2}$; $b = \frac{\varphi_{уд}}{2}(1 - 2k_y)$; $A = \frac{8h_{\max}}{k_y \varphi_{уд}^3 (1 - k_y)}$. Тогда закон движения, например, для фазы удаления представляется следующими соотношениями.

Участок [0; n]:

$$\begin{cases} S_I = \frac{A\varphi^3}{6}, \\ \frac{dS_I}{d\varphi} = \frac{A\varphi^2}{2}, \\ \frac{d^2S_I}{d\varphi^2} = A\varphi \end{cases}$$

при $0 \leq \varphi \leq a$.

$$\begin{cases} S_{II} = \frac{A \cdot a}{2} \left(\varphi^2 + a \cdot \varphi + \frac{a^2}{3} \right), \\ \frac{dS_{II}}{d\varphi} = \frac{A \cdot a}{2} (2\varphi + a), \\ \frac{d^2S_{II}}{d\varphi^2} = A \cdot a \end{cases},$$

при $0 \leq \varphi \leq b$.

$$\begin{cases} S_{III} = A \cdot \left(-\frac{\varphi^3}{6} + \frac{a}{2} \cdot \left(\varphi^2 + (\varphi_{уд} - 3a) \cdot \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{7}{3}a^2 - \frac{3}{4}a \cdot \varphi_{уд} + \frac{\varphi_{уд}^2}{8} \right) \right), \\ \frac{dS_{III}}{d\varphi} = A \cdot \left(-\frac{\varphi^2}{2} + \frac{a}{2} \cdot (2\varphi + \varphi_{уд} - 3a) \right), \\ \frac{d^2S_{III}}{d\varphi^2} = A \cdot (-\varphi + a) \end{cases}$$

при $0 \leq \varphi \leq a$.

Участок [n; m]

$$\begin{cases} S = h_{\max} - f_I \left(\frac{\varphi_{уд}}{2} - \varphi \right), \\ \frac{dS}{d\varphi} = f_I' \left(\frac{\varphi_{уд}}{2} - \varphi \right), \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = -f_I'' \left(\frac{\varphi_{уд}}{2} - \varphi \right) \end{cases}$$

при $0 \leq \varphi \leq a$.

$$\begin{cases} S = h_{\max} - f_{II} \left(\frac{\varphi_{уд}}{2} - \varphi \right), \\ \frac{dS}{d\varphi} = f_{II}' \left(\frac{\varphi_{уд}}{2} - \varphi \right), \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = -f_{II}'' \left(\frac{\varphi_{уд}}{2} - \varphi \right) \end{cases},$$

при $0 \leq \varphi \leq b$.

$$\begin{cases} S = h_{\max} - f_{III} \left(\frac{\varphi_{уд}}{2} - \varphi \right), \\ \frac{dS}{d\varphi} = f_{III}' \left(\frac{\varphi_{уд}}{2} - \varphi \right), \\ \frac{d^2S}{d\varphi^2} = -f_{III}'' \left(\frac{\varphi_{уд}}{2} - \varphi \right) \end{cases},$$

при $0 \leq \varphi \leq a$.

(11.7)

В соотношениях (11.7) $f_I(\varphi) = S_I$, $f_{II}(\varphi) = S_{II}$, $f_{III}(\varphi) = S_{III}$. Для фазы сближения соотношения получаются аналогичным образом.

Так же как и во всех вышерассмотренных законах движения, для аналогов скоростей $\left(\frac{Y_1}{Y_2}\right) = \left(\frac{\varphi_{сб}}{\varphi_{уд}}\right)$; для аналогов ускорений $\left(\frac{Y'_1}{Y'_2}\right) = \left(\frac{\varphi_{сб}}{\varphi_{уд}}\right)^2$, где Y_1, Y_2, Y'_1, Y'_2 – максимальные величины ординат на соответствующих фазах удаления и сближения.

Сравнительные характеристики законов движения, рассмотренных выше, представлены в табл. 11.1. При сравнении скоростей за базу принята величина $\frac{h_{\max}}{\varphi_{уд}} \omega_k^2$, при сравнении ускорений $\frac{h_{\max}}{\varphi_{уд}^2} \omega_k^2$.

Таблица 11.1

Максимальные скорости и ускорения
для некоторых законов движения

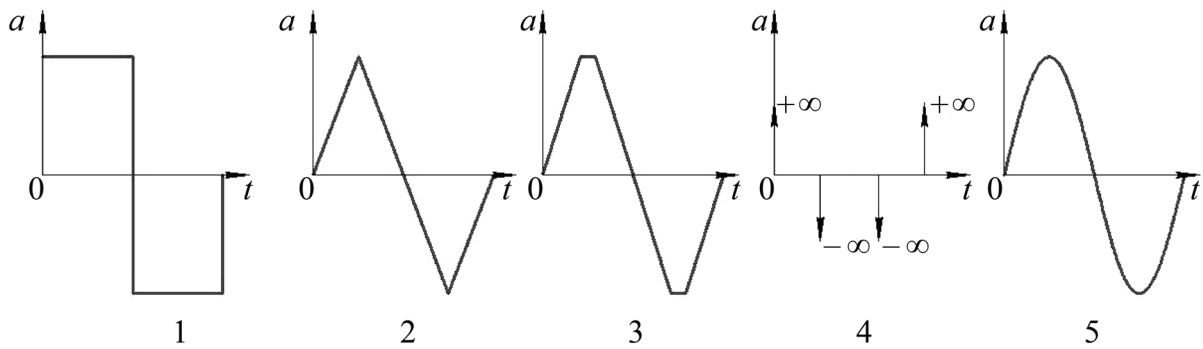
Законы движения	Максимальная скорость выходного звена		Максимальное ускорение выходного звена	
	в функции основных параметров	в относительных единицах	в функции основных параметров	в относительных единицах
Равноускоренный	$\frac{2h_{\max}}{\varphi_{уд}} \omega_k$	2.00	$\frac{4h_{\max}}{\varphi_{уд}^2} \omega_k^2$	4.00
Синусоидальный	$\frac{2h_{\max}}{\varphi_{уд}} \omega_k$	2.00	$\frac{2\pi h_{\max}}{\varphi_{уд}^2} \omega_k^2$	6.28
Косинусоидальный	$\frac{\pi h_{\max}}{2\varphi_{уд}} \omega_k$	1.57	$\frac{\pi^2 h_{\max}}{2\varphi_{уд}^2} \omega_k^2$	4.93

По табл. 11.1 можно выбрать тот или иной закон движения исходя из технологических и эксплуатационных условий, а также оценить их динамичность.

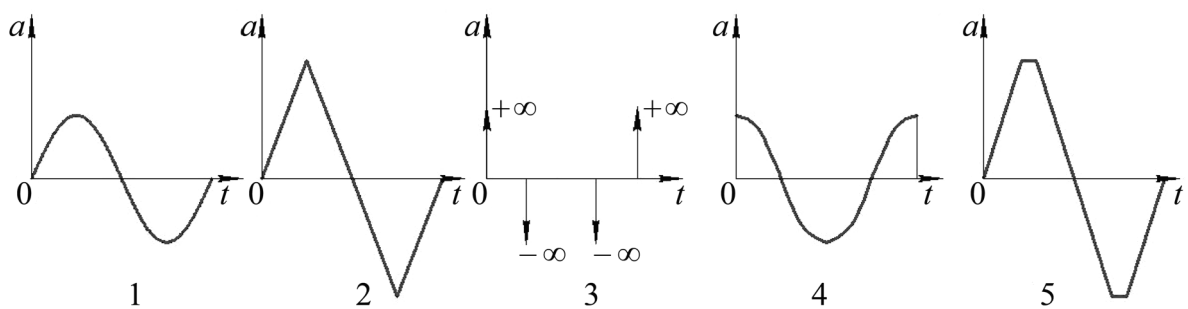
Контрольные вопросы и упражнения

1. Основные требования, предъявляемые к законам движения выходных звеньев кулачковых механизмов.
2. В чём сущность «мягких» и «жестких» ударов? Как они влияют на работу кулачковых механизмов?
3. В каких формах может задаваться закон движения выходного звена?
4. Охарактеризовать и дать сравнительную оценку типовых законов движения.

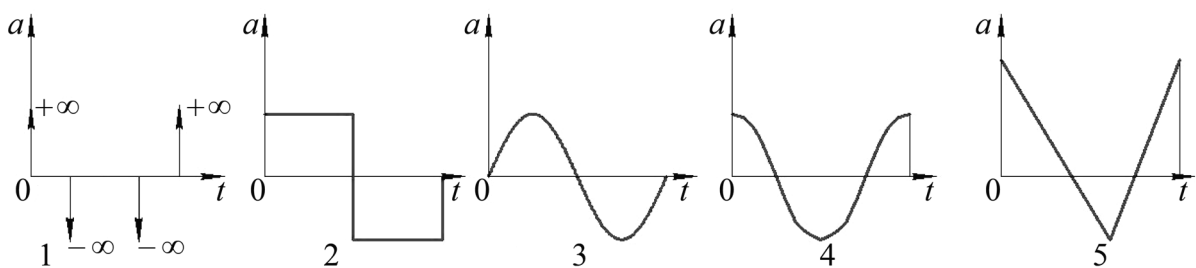
5. Какой из представленных законов движения характеризуется наличием «мягких» ударов?



6. Какой из представленных законов движения характеризуется «жесткими» ударами?



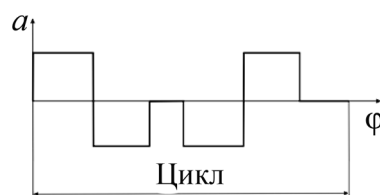
7. Какой из представленных законов движения характеризуется отсутствием ударов?



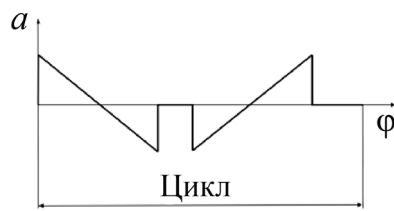
8. Какие законы движения выходного звена рекомендуют для тихоходных и малонагруженных машин?

9. Оценить влияние изменения направления вращения кулачка на закон движения толкателя.

10. Чему равно количество «мягких» ударов в течение цикла работы кулачкового механизма?



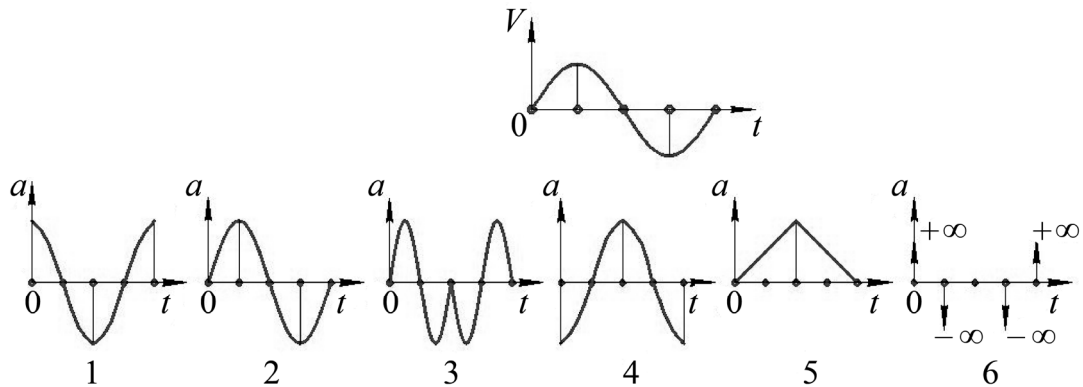
11. Чему равно количество «мягких» ударов в течение цикла работы кулачкового механизма?



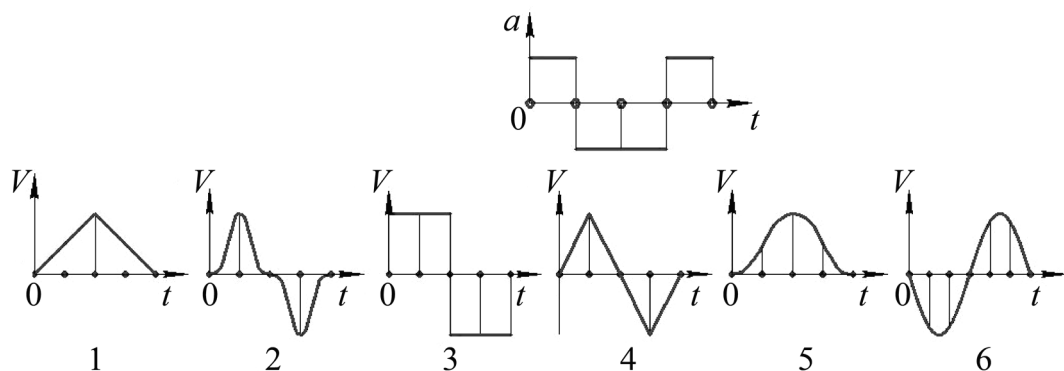
12. Чему равно количество «мягких» ударов в течение цикла работы кулачкового механизма?



13. Какой из графиков $a(t)$ соответствует заданному графику $V(t)$?



14. Какой из графиков $V(t)$ соответствует заданному графику ускорению $a(t)$?

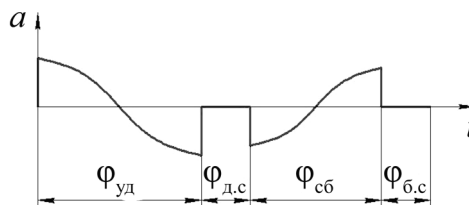


15. Закон движения поступательно движущегося толкателя – косинусоидальный. $\varphi_{уд} = 120^\circ$; $\varphi_{дс} = 40^\circ$; $\varphi_p = 260^\circ$; $\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)_{\max_{уд}} = 0,05$ м. Вычислить

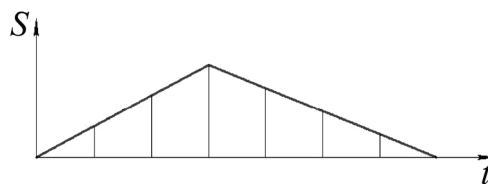
величину $\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)_{\max_{сб}}$.

16. График $S = f(\varphi)$ получен из графика $\left(\frac{dS}{d\varphi}\right) = f'(\varphi)$ графическим интегрированием, $\varphi_p = 300^\circ$. На оси $\mathbf{0\varphi}$ ему соответствует отрезок $X = 240$ мм. При каком базовом расстоянии H_1 выполняется условие $\mu_S = \mu_{\frac{dS}{d\varphi}}$?

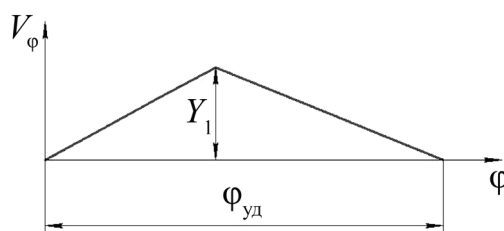
17. Охарактеризовать движение выходного звена.



18. В каком положении (положениях) механизма возникают «жёсткие удары»?



19. Определить перемещение толкателя за время фазы удаления.



$$\varphi_{уд} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\mu_{V_\varphi} = 0,012 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$$

$$\omega_k = 8 \frac{1}{\text{с}}$$

$$Y_1 = 10 \text{ мм}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: учебник для вузов. – М.: Альянс, 2012. – 639 с.
2. Тимофеев Г.А. Теория механизмов и машин: учеб. пособие для вузов. – 2-е изд. – М.: Юрайт, 2011. – 351 с.
3. Смелягин А.И. Структура механизмов и машин: учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2006. – 304 с.
4. Теория механизмов и машин. Терминология: учеб. пособие / Н.И. Левитский, Ю.А. Гуревич, В.Д. Плахтин [и др.]; под ред. К.В. Фролова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 80 с.
5. Теория механизмов и механика машин: учебник для вузов / К.В. Фролов [и др.]; под ред. К.В. Фролова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 662 с.
6. Теория механизмов и машин: учебное пособие для вузов / М.З. Коловский [и др.]. – М.: Академия, 2008. – 558 с.
7. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование: учеб. пособие для вузов / В.В. Кузенков [и др.]. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 170 с.
8. Артоболевский И.И., Эдельштейн Б.В. Сборник задач по теории механизмов и машин: учеб. пособие для вузов. – М.: Альянс, 2013. – 256 с.
9. Кобитянский А.Е. Анализ и синтез плоских кулачковых механизмов: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2012. – 118 с.
10. Шафранов А.В. Структурный анализ и синтез механизмов: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2012. – 68 с.

Учебное издание

Кобитянский Алексей Ефимович,
Шафранов Алексей Владимирович

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Конспект лекций

В двух частях

Часть 1

Редактор и корректор *И.А. Мангасарова*

Подписано в печать 26.01.2016. Формат 60×90/8.
Усл. печ. л. 17,25. Тираж 95 экз. Заказ № 8/2017.

Издательство
Пермского национального исследовательского
политехнического университета.
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, к. 113.
Тел.: + 7 (342) 219-80-33.