

Л.В. СТАРЦЕВА В.Г. АРХИПОВ А.А. СЕМЕНОВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

в примерах и задачах

Рекомендовано Федеральным государственным бюджетным образовательным учреждением высшего профессионального образования «Московский государственный строительный университет» в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по программе бакалавриата по направлению подготовки 270800 – «Строительство» профиль «Промышленное и гражданское строительство»



Издательство АСВ
Москва
2013

ББК 38.112
К12
УДК 624.04 (075.8)

Рецензенты:

Профессор кафедры «Строительные конструкции» Уфимского государственного нефтяного технического университета,
доктор технических наук *А.И. Габитов*,
ГУП «БашНИИстрой», зам. директора по научной работе
доктор технических наук, профессор *А.Л. Готман*

Рецензент из МГСУ?

Старцева Л.В., Архипов В. Г., Семенов А.А.

Строительная механика в примерах и задачах. Учебное издание.
– М.: Изд-во АСВ, 2013. – 224 с.

ISBN 978-5-93093-606-3

Учебное пособие составлено для бакалавров по направлению «Строительство» в качестве основного практического материала. Приведены типовые задачи и примеры их решения по основным разделам курса строительной механики, включая оболочки. Изложены основы применения вычислительного комплекса SCAD для решения задач строительной механики. На каждую тему разработан пакет задач с учетом группы в 30 чел. Результатом освоения данного материала является приобретение студентами профессиональных навыков.

Регистрационный номер рецензии 2502 от 22.08.2013

ББК 38.112
УДК 624.04 (075.8)

ISBN 978-5-93093-985-9

© Издательство АСВ, 2013
© Старцева Л.В., Архипов В.Г.,
Семенов А.А., 2013

ВВЕДЕНИЕ

Для подготовки бакалавров по направлению 270100 «Строительство» строительная механика является одной из основных профессиональных дисциплин. Задача строительной механики заключается в переходе от общих разделов физики, математики, теоретической механики, сопротивления материалов к непосредственному расчету строительных конструкций для проектирования.

Строительная механика – наука, в результате освоения которой бакалавр должен овладеть аналитическими и программными методами расчета сооружений на прочность, жесткость, устойчивость от температурных, силовых, статических и динамических воздействий с внедрением их в практику проектирования.

Умение решать задачи строительной механики – это есть профессиональные компетенции, позволяющие умело проектировать сооружения, анализировать напряженно-деформированное состояние (НДС) при различных внешних воздействиях в зависимости от различных факторов: изменения условий закрепления, изменения жесткостных характеристик, начальных несовершенств, как на стадии проектирования, так и при длительной их эксплуатации, оценивать их прочность, устойчивость, надежность и рациональность.

Задачи, представленные в данном пособии, направлены в основном на развитие творческого мышления студента и умение оценивать полученные результаты.

Глубокое освоение любого раздела данного предмета достигается только в процессе самостоятельной работы, как аудиторной, так и внеаудиторной.

По важнейшим разделам курса студент выполняет индивидуальные расчетно-графические работы с частичным выполнением их во время практических занятий. Каждый студент получает свое индивидуальное задание и работает в команде.

Главной задачей курса является определение внутренних усилий и перемещений в рассматриваемых системах с целью дальнейшего проектирования.

Приобретенные знания, умения, навыки позволяет студенту выполнять поставленные перед ним профессиональные задачи по расчету сооружений на внешние воздействия.

Оценка знаний по приобретенным компетенциям (знать, уметь, владеть) проходит по тестам на готовность перейти к проектированию конструкций, где он как минимум должен показать ядро знаний.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ.....	7
Тема 1. Кинематический анализ плоских стержневых систем	7
Задача 1.1. Кинематический анализ плоских систем	12
ГЛАВА 2. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ.....	16
Тема 2. Определение внутренних усилий в статически определимых стержневых системах.....	16
Задача 2.1. Простые балки.....	25
Задача 2.2. Многопролетные балки	26
Задача 2.3. Ломаные балки – рамы	28
Задача 2.4. Трехшарнирные системы – рамы	32
Задача 2.5. Многопролетные рамы	36
Тема 3. Статически определимые фермы	40
Задача 3.1. Расчет статически определимых ферм	42
Тема 4. Статически определимые арки.....	46
Задача 4.1. Расчет статически определимых арок	48
Тема 5. Определение перемещений в статически определимых системах	49
Задача 5.1. Определение перемещения точки в статически определимой раме от силового воздействия.....	55
Задача 5.2. Определение перемещения точки в статически определимой раме от температурного воздействия и смещения опор	55
Тема 6. Линии влияния в статически определимых балках.....	62
Задача 6.1. Построение линий влияния в статически определимых балках	64
ГЛАВА 3. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ.....	66
Тема 7. Расчет рам методом сил.....	66
Задача 7.1. Расчет статически неопределимых рам методом сил на силовое воздействие	76
Задача 7.2. Расчет статически неопределимых рам методом сил на температурное воздействие	76
Задача 7.3. Расчет статически неопределимых рам методом сил на смещения опор	76
Тема 8. Методы расчета неразрезных балок	86
Задача 8.1. Расчет неразрезных балок.....	93
Тема 9. Расчет статически неопределимых ферм методом сил.....	94
Задача 9.1. Расчет статически неопределимых ферм методом сил.....	95
Тема 10. Расчет арок методом сил	100
Задача 10.1. Расчет статически неопределимых арок методом сил.....	101
Тема 11. Расчет рам методом перемещений	102
Задача 11.1. Расчет рам методом перемещений на силовое воздействие ...	112

Задача 11.2. Расчет рам методом перемещений на температурное воздействие	113
Задача 11.3. Расчет рам методом перемещений на смещения опор	113
Тема 12. Комбинированный метод расчета симметричных систем	123
Задача 12.1. Расчет статически неопределимых симметричных рам комбинированным методом.....	124
Тема 13. Смешанный метод расчета	129
Задача 13.1. Расчет статически неопределимых рам смешанным методом	130
Тема 14. Приближенный расчет рам методом уравнивания узловых моментов.....	135
Задача 14.1. Расчет статически неопределимых рам приближенным методом уравнивания узловых моментов	136
Тема 15. Приближенный расчет рам на горизонтальную нагрузку	141
Задача 15.1. Расчет статически неопределимых рам приближенным методом на горизонтальную нагрузку.....	142
Тема 16. Выбор рационального метода расчета статически неопределимых систем.....	146
Задача 16.1. Расчет статически неопределимых рам рациональным методом	146
ГЛАВА 4. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.....	150
Тема 17. Расчет рам на устойчивость методом перемещений	150
Задача 17.1. Определение критической нагрузки в статически неопределимых рамах методом перемещений	152
Тема 18. Расчет многопролетных рам на устойчивость приближенным способом	157
Задача 18.1. Определение критической нагрузки в статически неопределимых многопролетных рамах приближенным способом	158
Тема 19. Энергетический метод расчета на устойчивость	159
Задача 19.1. Определение критической нагрузки центрально-сжатых стержней энергетическим методом	160
Тема 20. Расчет арок на устойчивость.....	161
Задача 20.1. Определение критической нагрузки для арок	161
ГЛАВА 5. ДИНАМИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ	162
Тема 21. Свободные колебания систем с несколькими степенями свободы.....	162
Задача 21.1. Определение собственной частоты колебаний рамы с одной степенью свободы.....	167
Задача 21.2. Определение собственной частоты колебаний рамы с двумя динамическими степенями свободы	167

Тема 22. Свободные колебания систем с бесконечным числом степени свободы	174
Задача 22.1. Определение собственной частоты колебаний рамы с бесконечным числом степеней свободы	175
Тема 23. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ	179
Задача 23.1. Определение внутренних усилий в рамах от действия вибрационной нагрузки.....	182
Задача 23.2. Определение внутренних усилий в рамах от действия импульсной нагрузки.....	182
ГЛАВА 6. ОСНОВЫ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ.....	189
Тема 24. Расчет оболочек по безмоментной теории	189
Задача 24.1. Расчет цилиндрической оболочки по безмоментной теории ...	190
Задача 24.2. Расчет сферической оболочки по безмоментной теории	191
Тема 25. РАСЧЕТ ОБЛОЧЕК ПО ПОЛУМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ..	193
Задача 25.1. Расчет оболочки по полумоментной теории.....	193
ГЛАВА 7. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА SCAD OFFICE ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ	199
Тема 26. Расчет плоских рам на силовое, температурное воздействие и смещения опор.....	200
Тема 27. Анализ работы плоской арки на силовое воздействие	203
Тема 28. Расчет рам на определение критической силы	208
Тема 29. Определение собственной частоты колебаний системы	211
Тема 30. Расчет тонкостенных оболочек.....	212
Литература.....	214
Приложение 1. Табличные эпюры метода перемещений	215
Приложение 2. Табличные эпюры для сжатоизогнутых стержней	216
Приложение 3. Табличные эпюры динамических реакций	220

ГЛАВА 1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

ТЕМА 1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Прежде чем перейти к расчету сооружения, необходимо представить рассматриваемое сооружение его расчетной схемой.

Расчетная схема – это упрощенная схема сооружения, где отброшены второстепенные факторы и оставлены только главные.

Расчетные схемы классифицируются:

- по геометрическому признаку (по типу элементов): массивы, тонкостенные и стержневые системы;
- по кинематической природе: геометрически неизменяемые системы (ГНС), геометрически изменяемые системы (ГИС), мгновенно изменяемые системы (МИС);
- по признаку статической определимости: статически определимые системы (СОС), статически неопределимые системы (СНС);
- по характеру внутренних связей: шарнирно-стержневые (фермы), рамные (с жесткими узлами), комбинированные;
- по направлению опорных реакций от вертикальной нагрузки: распорные системы, безраспорные системы;
- по расположению элементов и направлению нагрузок в пространстве: плоские системы, пространственные системы.

Соединения элементов между собой в расчетной схеме бывают жесткими (припайка) и шарнирными.

Опоры в расчетной схеме бывают:

- заземляющими, ограничивающими линейные перемещения и поворот узла (заделка, скользящая заделка (ползун), плавающая заделка);
- шарнирными, ограничивающими линейные перемещения и допускающими свободный поворот узла (шарнирно-неподвижная, шарнирно-подвижная).

Кроме того бывают податливые соединения и опоры.

Нагрузки и воздействия, действующие на расчетную схему, классифицируются:

- по физической природе: силовые, кинематические (смещения связей), температурные;
- по способу (месту) приложения: сосредоточенные, распределенные;
- по характеру изменения во времени: статические, динамические;
- по длительности воздействия: постоянные, временные.

В расчетной схеме должны учитываться нагрузки и воздействия при невыгодных комбинациях. Различают основные, дополнительные и особые сочетания нагрузок. В расчетах конструкций зданий и сооружений нагрузки определяются согласно СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия».

Перед любым расчетом расчетная схема должна быть исследована на степень свободы и на геометрическую неизменяемость. Таким образом, кинематический анализ состоит из двух этапов:

- I этап: определение степени свободы;
- II этап: анализ геометрической неизменяемости.

I этап. Определение степени свободы W выполняют по формулам:

- общая для любой системы: $W = 3D - 3\Pi - 2Ш_в - C_o$;
- для шарнирно-стержневой системы: $L = -W = C_\phi + C_o - 2У$;
- для рам: $L = -W = 3K - Ш$;
- для неразрезных балок: $L = -W = C_o - 3$.

где: W – степень свободы системы; D – диск; Π – припайка; $Ш_в$ – шарнир внутренний;

$Ш_о$ – шарнир опорный; $Ш = Ш_в + Ш_о$ – общее количество шарниров – освобожденных связей; $C_в$ – связь внутренняя; C_o – связь опорная; $C = C_в + C_o$ – общее количество внутренних и опорных связей; $У$ – узел фермы; C_ϕ – стержень фермы; $L = -W$ – «лишняя» связь; K – замкнутый контур в расчетной схеме.

Таблица 1.1. Шарниры и связи

Условное обозначение	Наименование	Шарниры $Ш$		Связи C		Припайка Π
		$Ш_в$	$Ш_о$	$C_в$	C_o	
	простой шарнир	1	–	2	–	–
	неполный (примыкающий) шарнир	1	–	2	–	–
	полный шарнир	2	–	4	–	–
	общий шарнирный узел	$C-1$	–	$2C-2$	–	–
	заделка	–	0	–	3	–
	шарнирно-неподвижная опора	–	1	–	2	–
	горизонтальный ползун	–	1	–	2	–
	вертикальный ползун	–	1	–	2	–
	горизонтально-подвижная шарнирная опора	–	2	–	1	–
	вертикально-подвижная шарнирная опора	–	2	–	1	–
	припайка (создается замкнутым контуром внутри одного диска)	–	–	–	–	1

Диском (D) в расчетной схеме обозначают неизменяемый фрагмент расчетной схемы, разделенный шарнирами и связями. Следует отдельно обозначать диск «земля» (D_0) – условно абсолютно-жесткое тело, объединяющее все неподвижные опоры системы. Диски допускается укрупнять, используя прави-

ла образования геометрически неизменяемых систем. В этом случае шарниры внутри диска уже не учитываются.

Припайка (**II**) в расчетных схемах встречается в случае, если элементы одного диска создают замкнутый контур. Подобные схемы трудоемки для ручного расчета, поэтому их упрощают. Например, из практики известно, что узлы ферм не имеют между собой шарнирного соединения. Получается, что каждый замкнутый контур фермы создает одну припайку. Количество неизвестных возрастает на **3II** и рассчитать ферму «вручную» становится практически невозможно. Поэтому, для «ручного» расчета расчетную схему фермы упрощают путем введения шарнирных узлов. Исключениями являются тяжелые фермы и фермы с малым углом наклона (менее 15°) между опорными элементами. В этих фермах пренебрегать изгибающим моментом недопустимо.

Внутренний шарнир (**III_в**) освобождает взаимодействие двух дисков в одном направлении, обычно от поворота. Полные шарниры освобождают взаимодействие трех или более дисков в нескольких направлениях, в данном случае от поворота. Количество шарниров в шарнирном узле определяется как: $III_{в} = C - 1$, где C – количество стержней, сходящихся в шарнирный узел.

Опорная связь (**C_о**) создает взаимодействие между диском «земля» и системой и рассчитывается как сумма одиночных связей, создаваемых опорами.

Узел фермы (**У**) определяется как общее количество шарнирных узлов фермы вне зависимости от количества сходящихся в узел стержней. Стержень фермы (**C_ф**) определяется как общее количество стержней фермы.

Контуром (**К**) системы является замкнутая ломаная, которой можно обвести диски, включая диск «земля».

Таким образом, используя приведенные формулы можно определить степень свободы **W**, значение которой показывает, что:

- $W > 0$ – система геометрически изменяемая;
- $W = 0$ – система статически определимая;
- $W < 0$ – система статически неопределимая.

Геометрически изменяемые системы (механизмы) не рассматриваются в рамках изучаемого курса строительной механики. При $W < 0$ абсолютное значение $|W|$ определяет степень статической неопределимости системы.

В случае, если $W \leq 0$, система должна быть дополнительно проверена на геометрическую неизменяемость.

II этап. Анализ геометрической неизменяемости заключается в необходимости доказательства правильности расположения внутренних и внешних связей, что определяет геометрическую неизменяемость системы.

Геометрически неизменяемой называется такая система, в которой отсутствуют перемещения отдельных ее элементов без их деформации.

Таблица 1.2. Принципы образования геометрически неизменяемых систем

Принцип	Геометрически неизменяемая схема	Геометрически мгновенно-изменяемая схема
1. Три диска соединяются тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой		
2. Два диска соединяются шарниром и стержнем, ось которого не проходит через этот шарнир		
3. Два диска соединяются тремя стержнями, не параллельными и не сходящимися в одной точке		
4. К диску присоединяется новый узел с помощью двух стержней (диады), не лежащих на одной прямой		
5. Три диска соединяются с помощью трех обычных или фиктивных шарниров, не лежащих на одной прямой		
6. Если два диска соединяются с помощью двух стержней (четырёхугольник), то на пересечении линий действия противоположных стержней можно ввести фиктивный шарнир		

Если в анализируемой системе нарушается один из принципов, то система становится мгновенно-изменяемой или механизмом. В рамках предложенного курса строительной механики мгновенно-изменяемые системы и механизмы не рассматриваются.

Анализ геометрической неизменяемости системы необходимо выполнять пошагово, путем последовательного укрупнения дисков. В примере 1.1 приводится алгоритм выполнения кинематического анализа плоской стержневой системы.

Пример 1.1. Кинематический анализ плоской стержневой системы

Условие задачи

Выполнить кинематический анализ представленной схемы

Решение

1. Этап 1. Определяем степень свободы системы:

$$W = 3D - 3П - 2Ш - C_0 =$$

$$= 3 \cdot 11 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 15 - 3 = 0 -$$

система статически определима, необходимо доказать ее геометрическую неизменяемость.

2. Этап 2. Укрупняем диски, используя принципы по табл.1.1:

- выделяем диск «земля» – D_0 ;
- находим диск D_1 (принцип 1);
- укрупняем диск D_0 , включив в его состав $Ш_1$ (принцип 4);
- используя только принципы 1...4 дальнейший анализ системы невозможен.

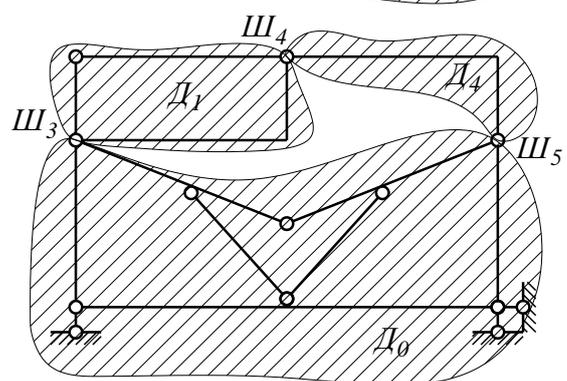
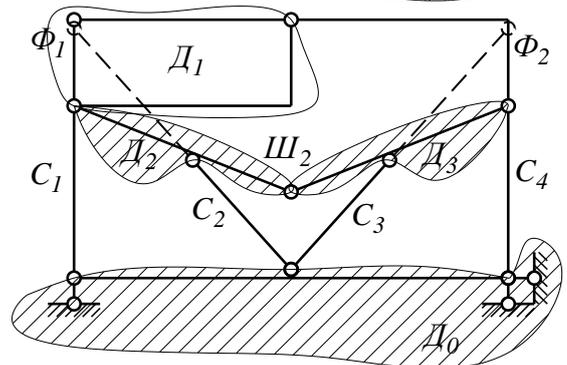
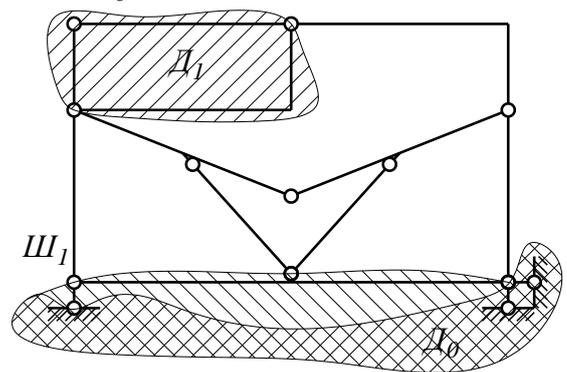
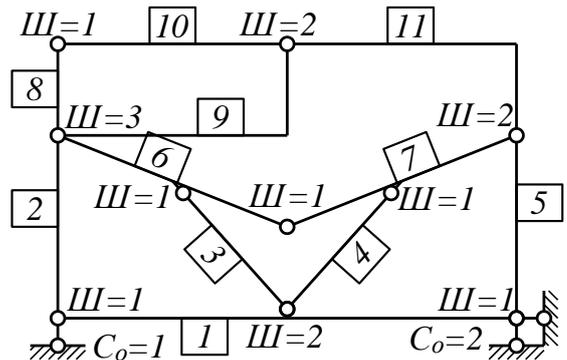
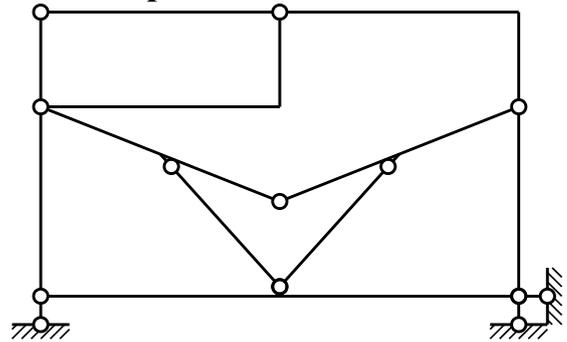
3. Переходим к поиску фиктивных шарниров согласно принципу 5:

- на пересечении линий действия стержней C_1 и C_2 вводим фиктивный шарнир Φ_1 , стержней C_3 и C_4 – шарнир Φ_2 ;
- диски D_0 , D_2 и D_3 соединены между собой с помощью трех шарниров $Ш_2$, Φ_1 и Φ_2 и создают неизменяемую систему (принцип 6);

4. Укрупняем диск «земля», продолжаем анализ оставшейся части:

- диски D_0 , D_1 и D_4 соединены между собой с помощью трех шарниров $Ш_3$, $Ш_4$ и $Ш_5$ и создают неизменяемую систему (принцип 1).

Вывод. Система является статически определимой и геометрически неизменяемой.



В итоге изучения данной темы студент должен приобрести следующие профессиональные компетенции:

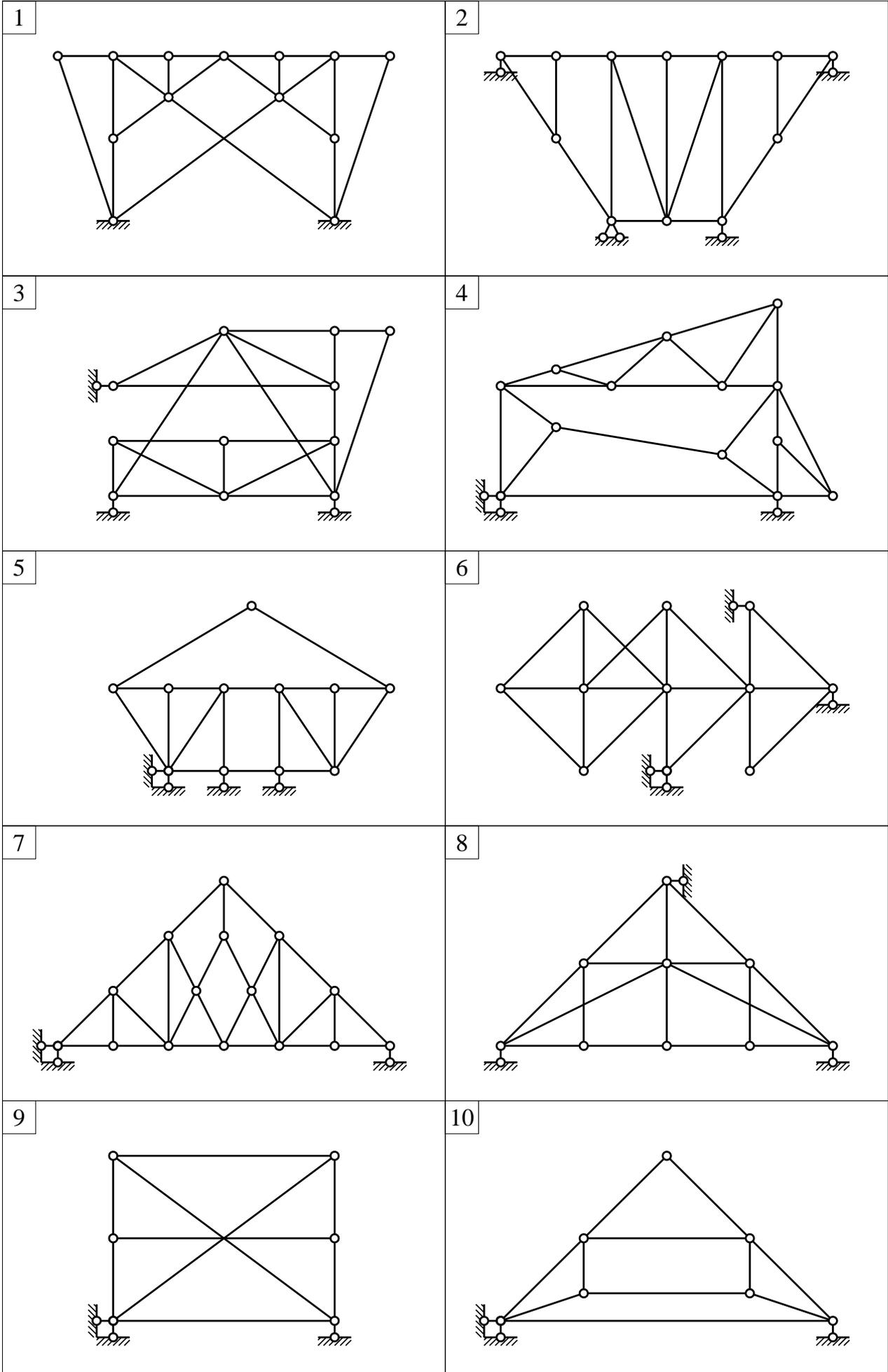
- **знать**, что собой представляет кинематический анализ сооружения, из каких этапов он состоит;
- **уметь** определять степень свободы сооружения (расчетной схемы) и анализировать геометрическую неизменяемость конструкций;
- **владеть** методами кинематического анализа с целью правильности расстановки опорных связей и внутренних соединений элементов системы друг с другом, обеспечив заданной системе статическую определенность или неопределенность и геометрическую неизменяемость;
- **понимать** различия между статически определенными и неопределенными, геометрически изменяемыми, мгновенно-изменяемыми и неизменяемыми системами;
- **суметь ответить** на следующие вопросы:
 1. Какие системы называются геометрически неизменяемыми, механизмами и мгновенно изменяемыми?
 2. Каков порядок кинематического анализа систем?
 3. Как классифицируются системы по степени свободы?
 4. Какие основные способы образования геометрически неизменяемых систем существуют?
 5. Какие связи накладываются на систему и их характеристики?
 6. К какому снеговому и ветровому району относится Ваш город согласно СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия» и какая их интенсивность.

Задача 1.1. Кинематический анализ плоских систем

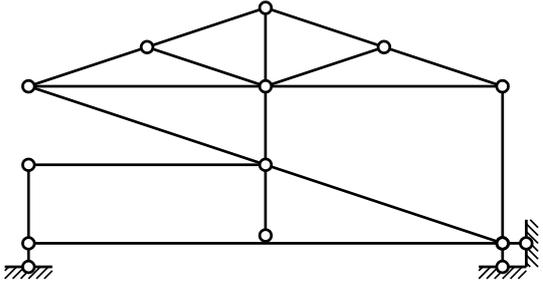
Выполнить кинематический анализ плоских систем, приведенных на стр.13...15. Номер варианта принимать по номеру варианта из списка группы. Уровень сложности задачи определить по табл.1.3.

Таблица 1.3. Уровень сложности задачи 1.1

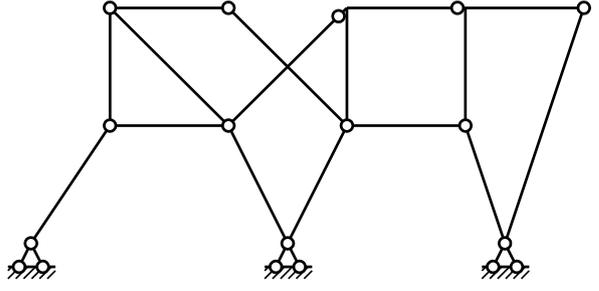
Сложность задачи, балл	Условие задачи
3 (очная)	определить W , доказать геометрическую неизменяемость системы
4 (очно-заочная)	дополнительно: в случае, если система геометрически изменяема, предложить варианты установки дополнительных внутренних или внешних связей
6 (заочная)	дополнительно: получить геометрически изменяемую систему путем удаления одной связи, показать кинематическую схему «разрушения» системы



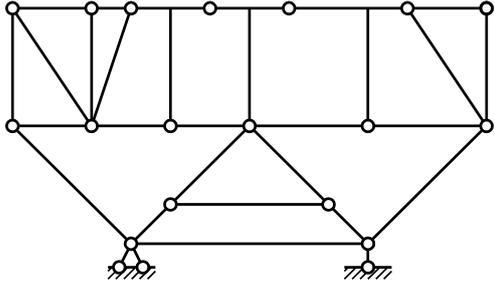
11



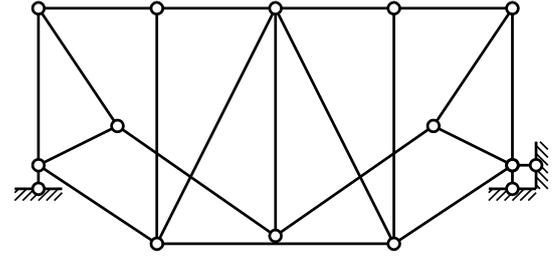
12



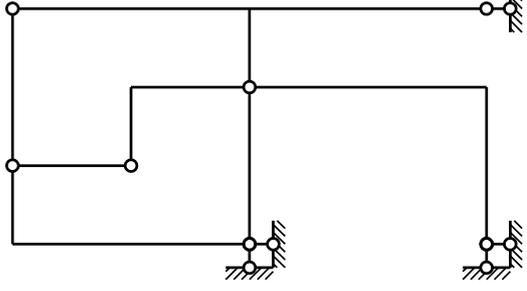
13



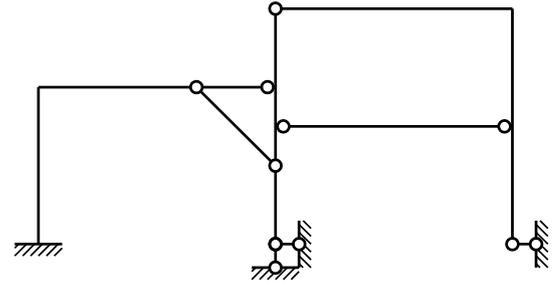
14



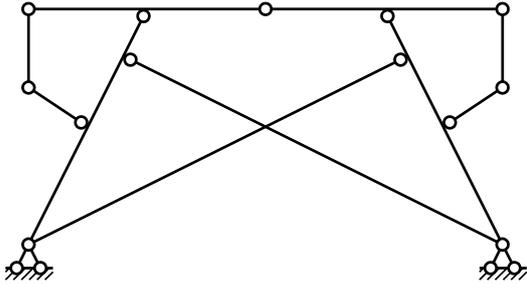
15



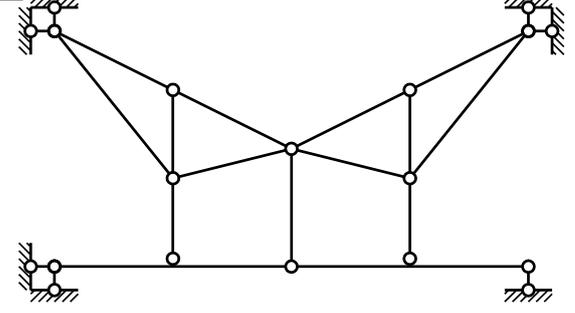
16



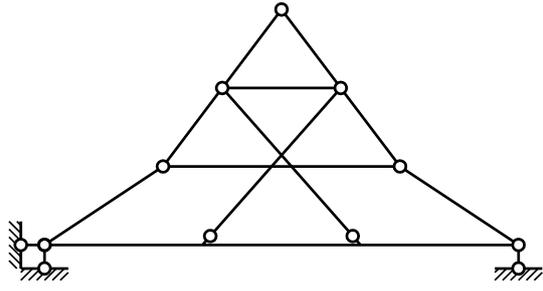
17



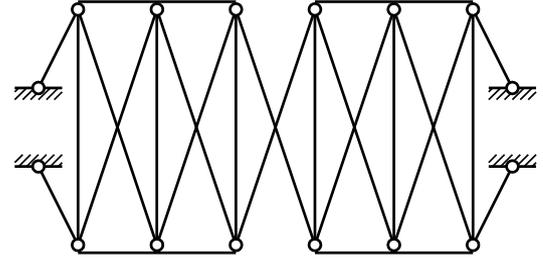
18



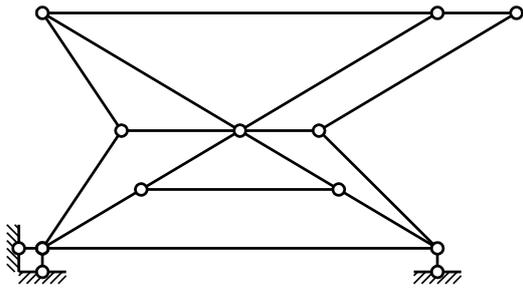
19



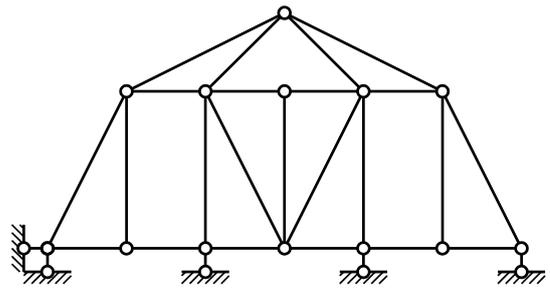
20



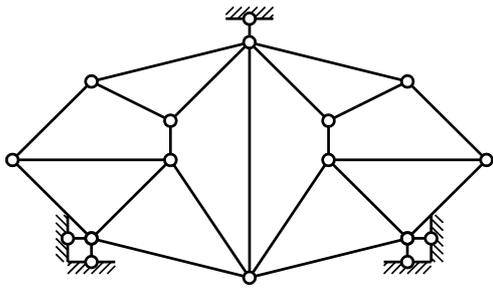
21



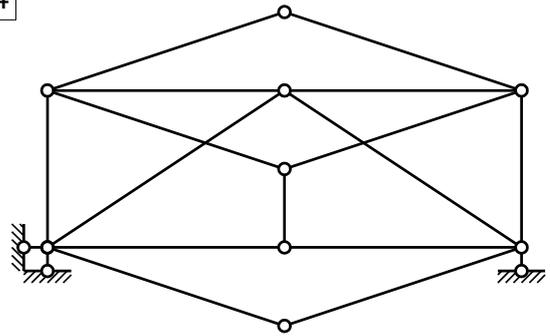
22



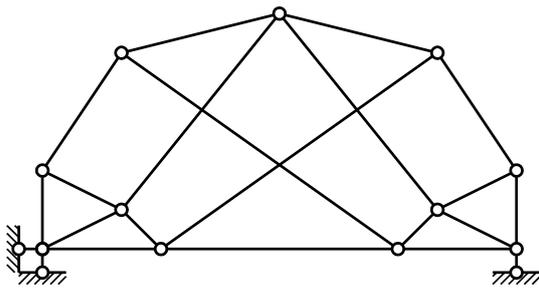
23



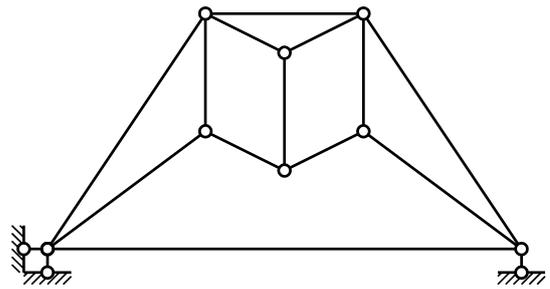
24



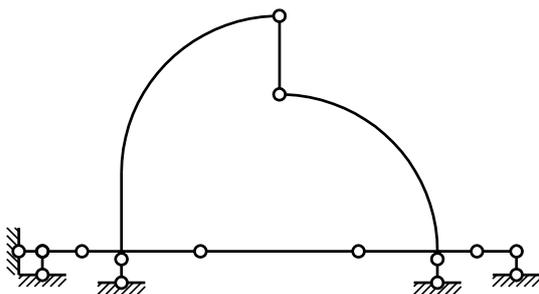
25



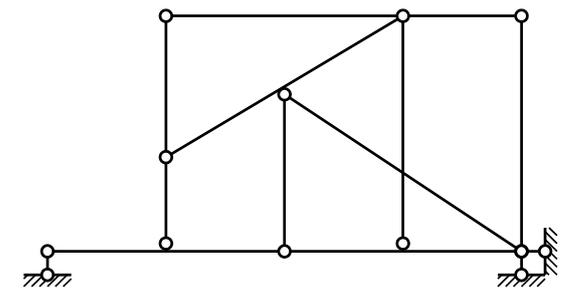
26



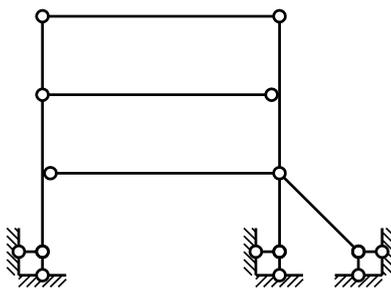
27



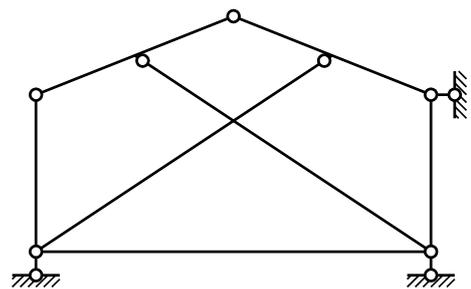
28



29



30



ГЛАВА 2. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

ТЕМА 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

Система является статически определимой, если ее степень свободы $W = 0$ и она геометрически неизменяема.

Расчетные схемы стержневых систем весьма разнообразны (балки, рамы, трехшарнирные системы, фермы, многопролетные системы и т.д.). Для всех статически определимых систем существует общий принцип расчета – определение опорных реакций и внутренних усилий основано на уравнениях равновесия системы в целом и любой отсеченной ее части.

Внешние воздействия на статически определимые системы бывают:

- силовыми в виде распределенной нагрузки q сосредоточенной силы P и сосредоточенного момента m ;
- температурными в виде равномерного и неравномерного нагрева;
- смещения опор в виде осадки, сдвига или поворота опор.

От внешнего воздействия система деформируется и возникают реакции опор и внутренние усилия – изгибающий момент M , поперечная сила Q , продольное усилие N . В статически определимых системах температурное воздействие и смещения опор приводят лишь к деформациям и не создают опорных реакций и внутренних усилий.

Опорные реакции в строительной механике обозначаются латинскими буквами H – горизонтальная реакция, V – вертикальная реакция, M – изгибающий момент, и определяются из уравнений статики:

- сумма моментов сил относительно характерных точек;
- сумма проекций сил относительно осей OX и OY , причем одно из уравнений проекций сил оставляют для проверки.

При составлении уравнений статики используют Декартову местную и общую системы координат.

Уравнения моментов сил необходимо составлять таким образом, чтобы каждое из них содержало только одну неизвестную. Для этого удобнее всего использовать способ моментной точки – точки пересечения линий действия неизвестных опорных реакций, кроме искомой (см.табл.2.1).

После нахождения и проверки правильности определения опорных реакций приступают к построению эпюр внутренних усилий.

Внутренние усилия принято изображать в виде эпюр. Эпюра – это схематический чертеж с графическим изображением и со значениями в характерных точках распределения внутренних усилий, выполненный на контуре расчетной схемы. Эпюра штрихуется линиями, перпендикулярными контуру. Для эпюр Q и N проставляется знак и обводится в круг, на эпюре M знак не ставится. Эпюра M строится со стороны растянутых волокон.

Таблица 2.1. Порядок определения опорных реакций для некоторых видов расчетных схем

Вид расчетной схемы	Особенности вида расчетной схемы	Примеры расчетных схем (нагрузки условно не показаны)	Последовательность нахождения реакций
1. Консольные балки, рамы	три опорные связи создаются заделкой		$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A;$ $\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A;$ $\Sigma M_A = 0 \rightarrow M_A;$
2. Шарнирно-оперные балки, рамы, фермы	три опорные связи создаются шарнирными опорами		$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A;$ $\Sigma M_A = 0 \rightarrow V_B;$ $\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A;$ для схем с опорами на разной высоте: $\Sigma M_C = 0 \rightarrow V_A$ Проверка: $\Sigma Y = 0;$
3. Трехшарнирные системы с затяжкой	два диска соединяются с помощью шарнира и затяжки, и закрепляются с «землей» с помощью трех связей		$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A;$ $\Sigma M_A = 0 \rightarrow V_B;$ $\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A;$ $\Sigma M_C^{np} = 0 \rightarrow N;$ Проверка: $\Sigma M_C^{лев} = 0;$
4. Трехшарнирные рамы, арки	два диска соединяются с помощью ключевого шарнира C и опираются на опорные шарниры A и B		$\Sigma M_A = 0 \rightarrow V_B;$ $\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A;$ $\Sigma M_C^{np} = 0 \rightarrow H_B;$ для схем с опорами на разной высоте: $\begin{cases} \Sigma M_A = 0 \\ \Sigma M_C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_B \\ H_B \end{cases}$ $\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A;$ $\Sigma X = 0 \rightarrow H_A;$ Проверка: $\Sigma M_C^{лев} = 0;$
5. Многопролётные балки, рамы	несколько дисков соединяются с помощью шарниров и закрепляются опорными связями; для рам характерно наличие горизонтальных реакций		строят поэтажную схему и ведут расчет по этажам «сверху вниз», последовательно определяя: $V_B; V_C; V_A; M_A;$ $V_D; V_E; V_F; V_G.$ Проверка: $\Sigma Y = 0;$

Для определения внутренних усилий в сечении k необходимо разделить расчетную схему по сечению и рассматривать одну из отсеченных частей (см.рис.2.1). Составляя уравнения статики, находят неизвестные.

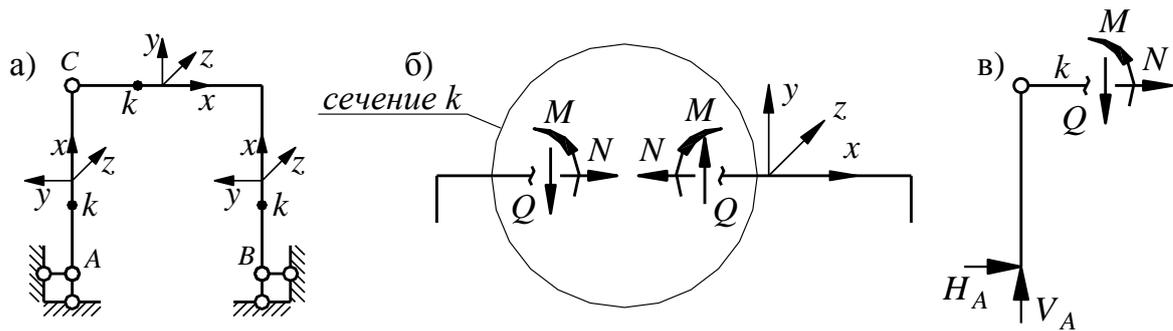


Рисунок 2.1. Схема определения внутренних усилий в произвольной точке (а – направления осей элементов в местной системе координат; б – положительные направления внутренних усилий в точке k ; в – фрагмент отсеченной части).

Сформулируем определения внутренних усилий и правила знаков для них:

- **Изгибающий момент M** в сечении k представляет собой алгебраическую сумму моментов всех сил относительно оси Oz , приложенных к отсечённой части. Общего правила знака для изгибающего момента нет. Обычно изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растяжение нижних или правых волокон для вертикальных стержней. Эпюра M строится со стороны растянутых волокон.
- **Поперечная сила Q** в сечении k представляет собой алгебраическую сумму проекций всех сил на местную ось Oy , приложенных к отсеченной части. Значение поперечной силы Q определяется по дифференциальной зависимости Журавского $Q = dM/dx$ как первая производная эпюры изгибающих моментов, что равняется тангенсу угла наклона касательной к эпюре M . Поперечная сила считается положительной, если она вызывает вращение отсеченной части по часовой стрелке. Знак определяется по эпюре моментов – если ось стержня необходимо повернуть по часовой стрелке до совмещения с эпюрой M , то поперечная сила имеет положительный знак.
- **Продольная сила N** в сечении k представляет собой алгебраическую сумму проекций всех внешних сил, приложенных к отсеченной части на ось Ox . Значение продольной силы определяют по эпюре поперечных сил путем вырезания узлов с учетом приложенной узловой нагрузки. Продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение отсеченной части.

При изучении курса строительной механики студент должен стремиться реже использовать уравнения статики для построения эпюр и чаще прибегать к использованию табличных балочных эпюр (см.табл.2.2)

Таблица 2.2. Табличные балочные эпюры

Консольная балка			
Шарнирно-опертая балка			
Шарнирно-опертая балка			

Используя табличные балочные эпюры удастся легко построить эпюру изгибающих моментов для простых балок даже без определения опорных реакций (см.рис.2.2). Этот метод можно назвать как «консольно-пролетным».

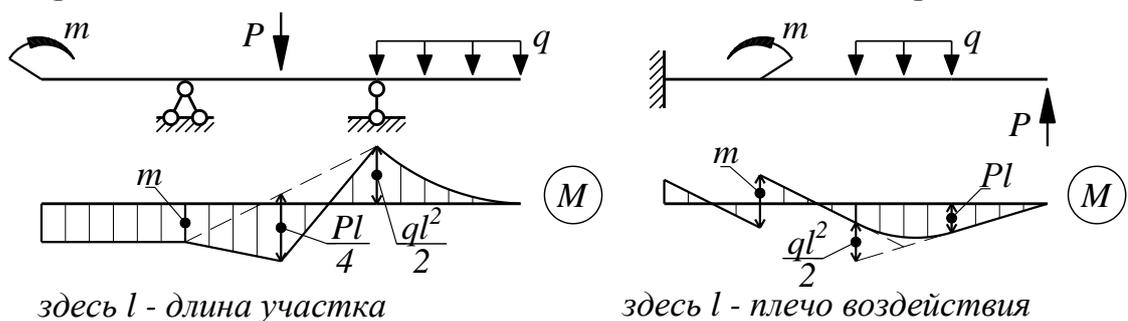


Рисунок 2.2. Схема построения эпюры M для простых балок

Для более сложных рам можно значительно облегчить решение задач при использовании принципа независимости действия сил и «консольного метода» построения эпюр.

Рассмотрим принципы распределения изгибающего момента для ломаных балок (рам). По определению – изгибающий момент равняется произведению силы на плечо, т.е. чем дальше сечение от линии действия силы, тем больше значение изгибающего момента.

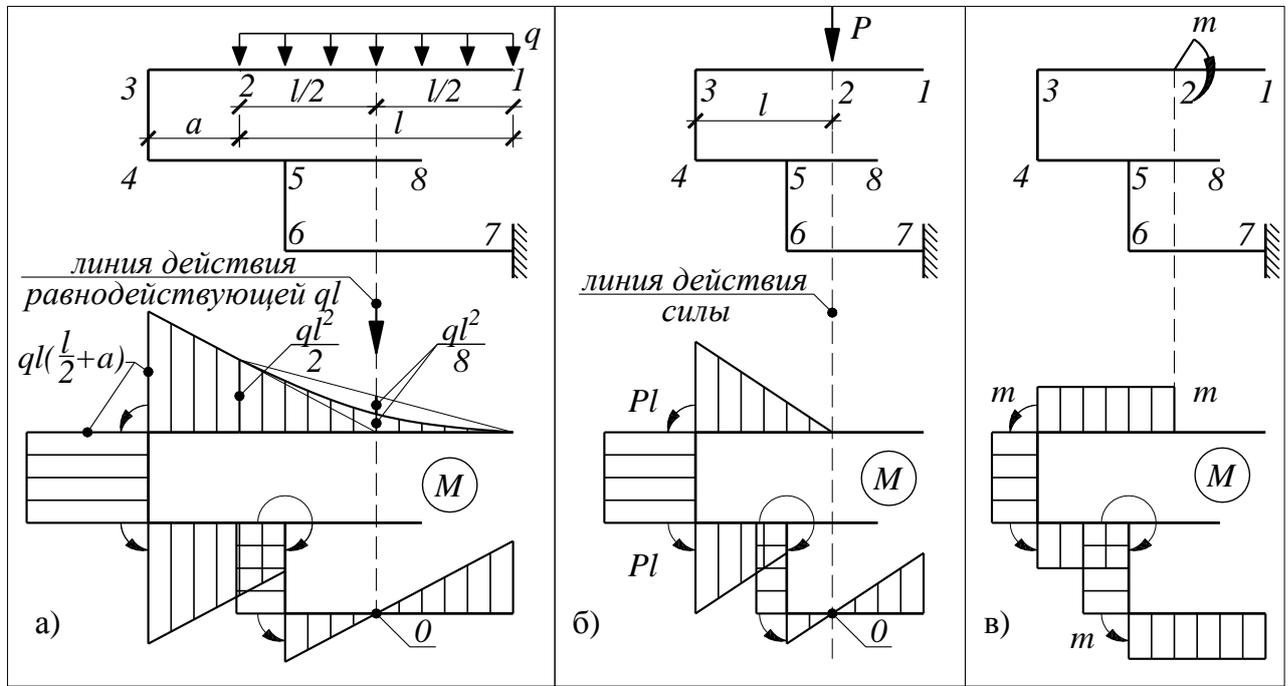


Рисунок 2.3. Принципы распределения изгибающих моментов в консольных рамах

Проведем анализ консольных рам, представленных на рис.2.3:

- изгибающий момент возникает на участке рамы от точки приложения нагрузки до заделки (а-т.1, б-т.2, в-т.2 к т.7);
- на свободных от нагрузки участках (т.5-т.8) момент отсутствует;
- на участках, параллельных линии действия сил, изгибающий момент имеет постоянное значение (т.3-т.4, т.5-т.6);
- в точке пересечения линии действия силы с осью балки значение изгибающего момента равняется нулю;
- от сосредоточенного момента изгибающий момент постоянен (в).

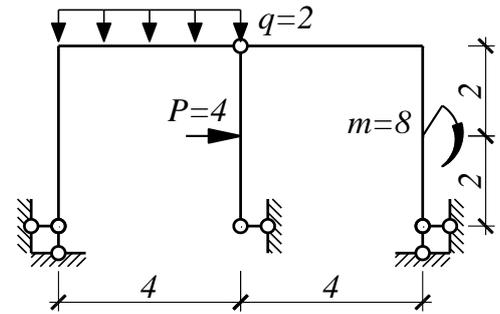
Рассмотрим порядок построения эпюр изгибающих моментов «консольным способом» на примере 2.1.

Пример 2.1. Построение эпюры моментов «консольным способом»

Условие задачи

Построить эпюру изгибающих моментов «консольным способом» для приведенной схемы.

Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).



1. Кинематический анализ:

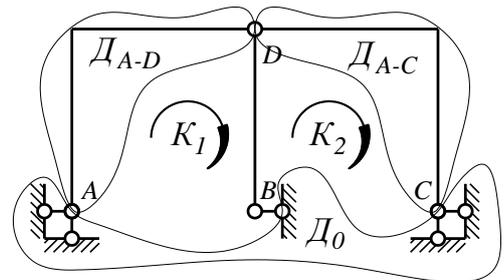
1 этап:

$W = -L = -(3K - III - C_0) = -(3 \cdot 2 - 2 - 4) = 0$ – система статически определима при условии ее геометрической неизменяемости.

2 этап:

– диски D_{A-D} , D_{D-C} , D_0 соединены с помощью шарниров A , D , C и образуют ГНС (принцип 1);

– диск D_{B-D} прикрепляется с помощью шарнира D и стержня B и образуют ГНС (принцип 2).



2. Определение опорных реакций:

$$\Sigma M_A = 0; q \cdot 4 \cdot 2 + P \cdot 2 + m - V_C \cdot 8 = 0 \rightarrow V_C = 4$$

$$\Sigma M_C = 0; V_A \cdot 8 - q \cdot 4 \cdot 6 + P \cdot 2 + m = 0 \rightarrow V_A = 4$$

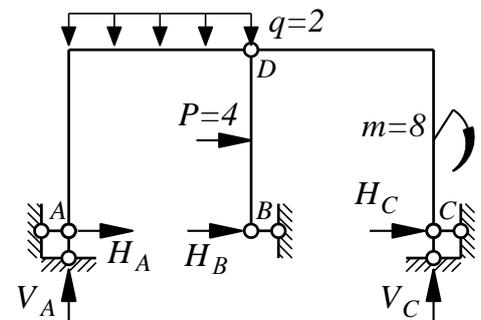
$$\Sigma M_D^{D-C} = 0; m - V_C \cdot 4 - H_C \cdot 4 = 0 \rightarrow H_C = -2$$

$$\Sigma M_D^{D-B} = 0; -P \cdot 2 - H_B \cdot 4 = 0 \rightarrow H_B = -2$$

$$\Sigma M_D^{A-D} = 0; V_A \cdot 4 - H_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0 \rightarrow H_A = 0$$

Проверка:

$$\Sigma X = H_A + H_B + H_C + P = 0 - 2 - 2 + 4 = 0$$



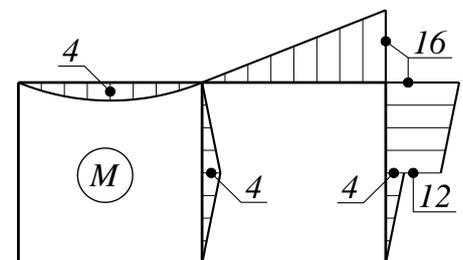
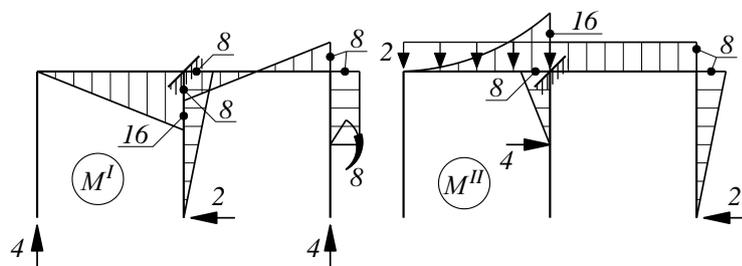
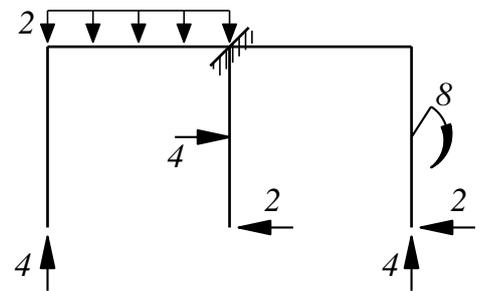
3. Построение консольной схемы:

– строим контур рамы без опор и шарниров;

– прикладываем силовое воздействие и реакции опор в виде нагрузок;

– закрепляем раму условной заделкой в любой удобной точке, например, в точке D .

4. Построение эпюры M ведем для каждой из трех консольных рам независимо, используя принципы распределения изгибающих моментов в консольных рамах (см. рис. 2.3) и принцип независимости действия сил.



5. Окончательную эпюру M получаем путем сложения промежуточных эпюр M^I – эпюры от первой группы нагрузок и M^II – эпюры от второй группы нагрузок или учитывая действие всех сил одновременно.

6. Проверкой правильности построения эпюры M является равновесие узла, к которому приложили условную заделку: $\Sigma M_D = 0$.

По эпюре изгибающих моментов M строят эпюру поперечных сил Q для каждого характерного участка.

Сформулируем правила построения эпюры поперечных сил:

- на участке, где значение изгибающего момента равно нулю или имеет постоянную величину, значение поперечной силы равно нулю (см.рис.2.3а);
- на участке, где изгибающий момент меняется по линейному закону, значение поперечной силы постоянное (см.рис.2.3б,в);
- если совмещение оси стержня с эпюрой M происходит по часовой стрелке, то поперечная сила имеет положительный знак (см.рис.2.3б), и наоборот (см.рис.2.3в);
- на участке, где изгибающий момент меняется по параболическому закону (действует распределенная нагрузка), значение поперечной силы меняется по линейному закону (см.рис.2.3г) и определяется по формуле:

$$Q_n^l = \pm \frac{ql}{2} + \frac{M_n - M_l}{l}.$$

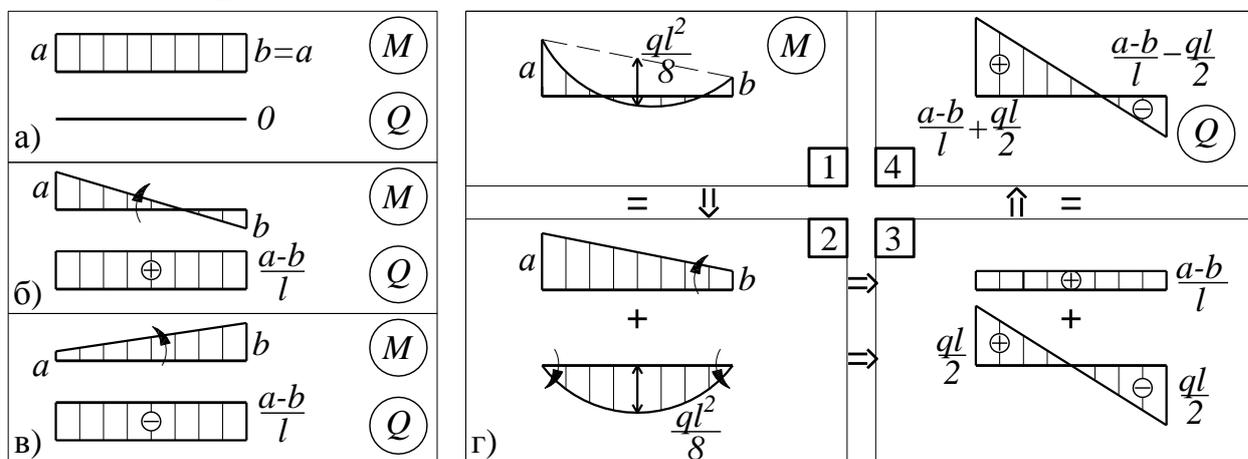


Рисунок 2.4. Правила построения эпюры поперечных сил

На рис.2.4г приведен алгоритм построения эпюры поперечных сил на участках, где действует распределенная нагрузка:

- эпюру изгибающих моментов на рассматриваемом участке (1) представляют в виде суммы двух эпюр (2);
- для каждой эпюры (2) строят эпюры поперечных сил (3);
- путем сложения эпюр (3) получают результирующую эпюру поперечных сил (4).

По эпюре поперечных сил Q строят эпюру продольных усилий N методом вырезания узлов. Необходимо вырезать узел, в котором сходятся не более двух стержней с неизвестными усилиями. Продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение отсеченной части.

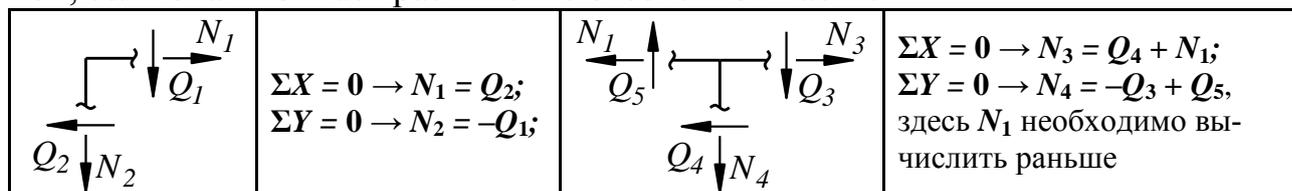


Рисунок 2.5. Схемы вырезания узлов при построении эпюры N .

Есть характерные особенности эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, которые позволяют легко проверить правильность их построения.

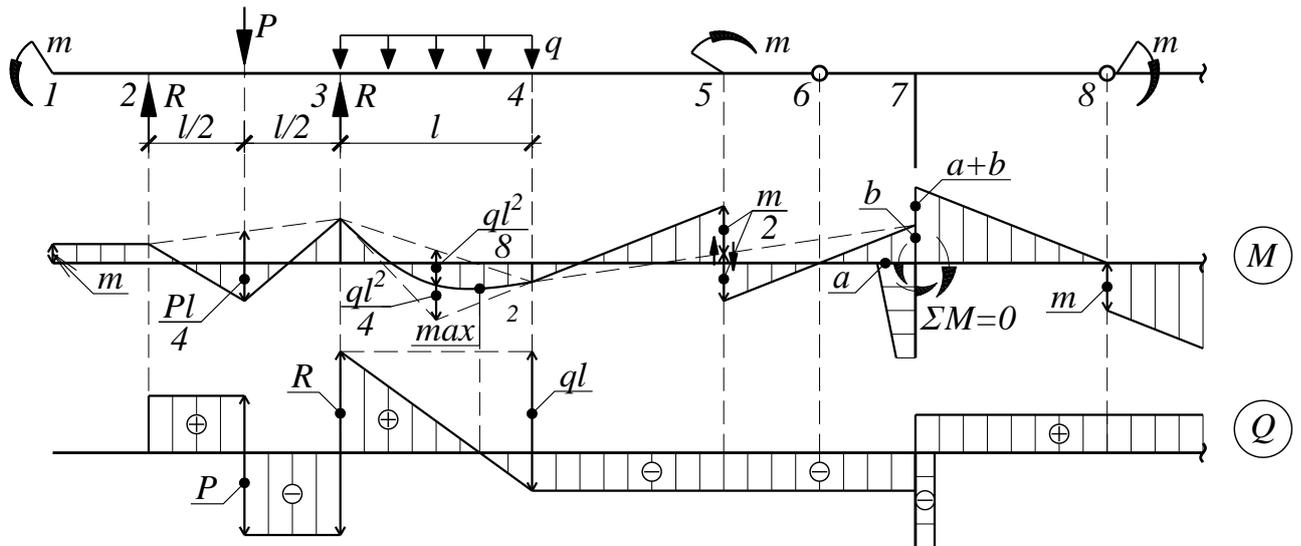


Рисунок 2.6. Особенности при построении эпюр M и Q .

Таблица 2.3. Особенности эпюр M и Q

Участок	Характер эпюры M	Характер эпюры Q
1. Чистый изгиб (1-2)	– имеет постоянное значение;	– равняется нулю;
2. Незагруженный участок	– меняется по линейному закону; – наличие шарнира (6) не влияет на эпюры;	– имеет постоянное значение;
3. Загружен распределённой нагрузкой (3-4)	– меняется по параболическому закону; – выпуклость в сторону действия нагрузки; – выгиб от середины линии опорных моментов на $ql^2/8$; – касательные с концов сходятся от середины линии опорных моментов на $ql^2/4$;	– меняется по линейному закону;
4. Загружен сосредоточенной силой (2-3)	– в точке приложения силы имеется перелом в сторону действия силы; – выгиб от середины линии опорных моментов на $Pl/4$;	– в точке приложения нагрузки скачок на величину P ;
5. Загружен сосредоточенным моментом (5, 8)	– до и после точки приложения момента линии эпюры параллельны; – в точке приложения момента имеет скачок на величину момента; – эпюра откладывается от середины линии опорных моментов на $m/2$ в сторону действия силы от пары сил;	– имеет постоянное значение;
6. Примыкает стержень рамы (7)	– имеет скачок на величину момента от примыкающего стержня;	– имеет скачок на величину продольной силы от примыкающего стержня;
7. Шарнир (6, 8)	– момент в шарнире всегда равен нулю, из этого условия принято использовать шарнир при составлении уравнений моментов; – сосредоточенной момент может быть применен только слева или справа от шарнира.	– без характерных особенностей.

Запишем последовательность определения и построения эпюр внутренних усилий M , Q и N в статически определимых системах:

- 1) Проводим кинематический анализ сооружения и убеждаемся, что $W = 0$ и система геометрически неизменяема.
- 2) Определяем опорные реакции из уравнений статики.
- 3) Строим эпюру M с использованием табличных балочных эпюр, «консольного метода», принципа независимости действия сил.
- 4) Выполняем проверку правильности построения эпюры M из условия равновесия узлов ($\sum M_{уз} = 0$) и характерных особенностей эпюры изгибающих моментов (см.рис.2.6).
- 5) На основе эпюры M строим эпюру Q , используя формулу Журавского.
- 6) На основе эпюры Q строим эпюру N путем вырезания узлов и с учетом узловых нагрузок.
- 7) Выполняем статическую проверку правильности построения эпюр путем вырезания опорных узлов и составления для них уравнений статики.

Изучив данную тему студент должен приобрести следующие профессиональные компетенции:

- **знать**, какие бывают внутренние усилия в статически определимых системах в зависимости от расчетной схемы и приложенной нагрузки, и с помощью каких уравнений статики их можно определить;
- **уметь** определить внутренние усилия и строить их эпюры, используя соответствующие методы расчета, анализируя при этом поведение системы в зависимости от приложенного силового воздействия и опорных связей;
- **владеть** правилами построения эпюр M , Q , N для различных систем с выбором рационального метода расчета и приложенной внешней нагрузки;
- **понимать** отличие работы статически определимых систем: балок, рам, трехшарнирных систем, ферм, арок, многопролетных систем;
- суметь **ответить** на следующие вопросы:
 1. Внутренние силовые факторы M , Q и N . Правило знаков.
 2. Табличные эпюры M , Q для простейших балок.
 3. Порядок расчета статически определимых систем.
 4. Как рациональным способом определить опорные реакции?
 5. Какие особенности имеют эпюры M и Q ?
 6. Какая взаимосвязь существует между M и Q ?
 7. Как строится эпюра Q с прямолинейным и с криволинейным характером эпюры M ?
 8. Как строится эпюра N ?
 9. В чем состоит отличие расчета трехшарнирных систем от балочных и многопролетных систем?
 10. Как строится поэтажная схема? Чем отличаются основные элементы от вспомогательных в поэтажной схеме?

Задача 2.1. Простые балки

Для приведенных на рис.2.7 схем простых балок построить эпюры внутренних усилий M и Q : 1) сначала от каждого воздействия в отдельности; 2) затем от суммы всех внешних воздействий; 3) провести анализ НДС выполненных расчетов и сделать выводы о характере изменения внутренних усилий под нагрузкой. Исходные параметры принимать по табл.2.4, где L – количество десятков, F – количество единиц в номере варианта по списку группы. Например, для студента с номером варианта по списку группы 15, параметры будут равны: $L = 1, F = 5$.

Схемы построения эпюры M для простых балок показаны на рис.2.1, 2.2, правила построения эпюры поперечных сил Q – на рис.2.4.

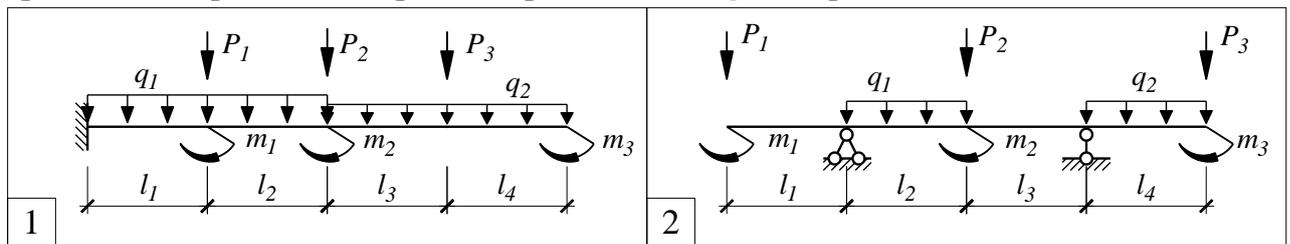


Рисунок 2.7. Расчетная схема к задаче 2.1

Таблица 2.4. Исходные параметры к задаче 2.1

Сложность задачи, балл	6, с выводом	4	3
Расчетные схемы	1, 2	2	1

Номер группы	Пролеты, м				m , кН·м			P , кН			q , кН/м	
	l_1	l_2	l_3	l_4	m_1	m_2	m_3	P_1	P_2	P_3	q_1	q_2
1	2	$2+L$	4	2	3				$6+F$			2
2	2	$2+L$	4	4	4					$5+F$	3	
3	2	4	$2+L$	2		5		$4+F$				3
4	4	4	$2+L$	2			4	$3+F$			4	
5	2	$2+L$	2	2	4			$1+F$			4	-3

Задача 2.2. Многопролетные балки

Для приведенных на стр.27 схем многопролетных балок построить эпюры внутренних усилий M и Q : 1) сначала от каждого воздействия в отдельности; 2) затем от суммы всех внешних воздействий; 3) провести анализ НДС выполненных расчетов и сделать выводы о характере изменения внутренних усилий под нагрузкой. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.2.5, где L – количество десятков, F – количество единиц в номере варианта по списку группы.

Таблица 2.5. Исходные параметры к задаче 2.2

Сложность задачи, балл	6, с выводом		4	3
Переменные параметры	при F – нечетное	$q=2; P=F, F+2, F+4$	$P = F+2$	$P = F$
	при F – четное	$P=4; q=F, F+2, F+4$	$q = F$	$q = 0$

Номер группы	Пролеты, м					m , кН·м		P , кН			q , кН/м	
	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	m_1	m_2	P_1	P_2	P_3	q_1	q_2
1	$L+4$	2	4	4	2	10			P			q
2	2	$L+4$	4	4	2		15			P	q	
3	2	4	$L+2$	2	2	20		P				q
4	2	4	2	$L+2$	2		25		P		q	
5	2	4	4	4	$L+2$	30				P		q

Пример 2.2. Построение эпюр M и Q для многопролетных балок

Условие задачи: Построить эпюру внутренних усилий для приведенной схемы. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны)

1. Кинематический анализ:

1 этап: $W = 3D - 3П - 2Ш - C_0 =$

$3 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$ – система статически определима.

2 этап: D_1 и D_0 соединены с помощью стержней C_1, C_2, C_3 и образуют ГНС (принцип 3).

2. Строим поэтажную схему и определяем реакции опор (начиная с верхнего участка):

$$\Sigma M_A^{A-B} = 0; P \cdot 2 + V_B \cdot 5 = 0 \rightarrow V_B = -2.4;$$

$$\Sigma M_B^{A-B} = 0; V_A \cdot 5 - P \cdot 3 = 0 \rightarrow V_A = 3.6;$$

$$\Sigma M_C^{B-D} = 0; V_B \cdot 5 + m + q \cdot 4 \cdot 2 - V_D \cdot 4 = 0 \rightarrow V_D = 2;$$

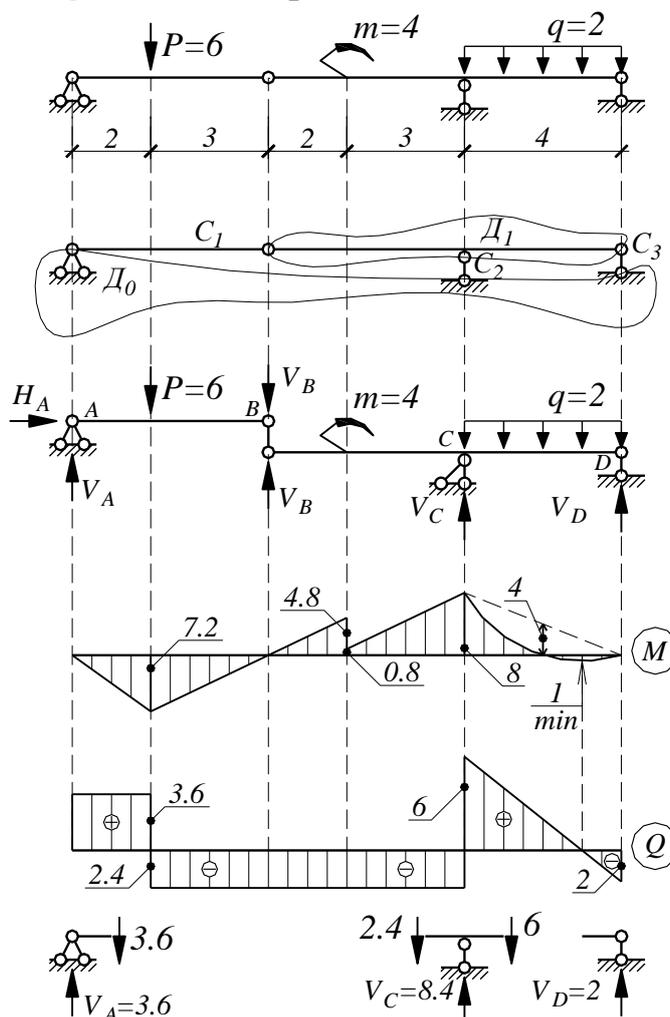
$$\Sigma M_D^{D-C} = 0; V_B \cdot 9 + m + V_C \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0 \rightarrow V_C = 8.4$$

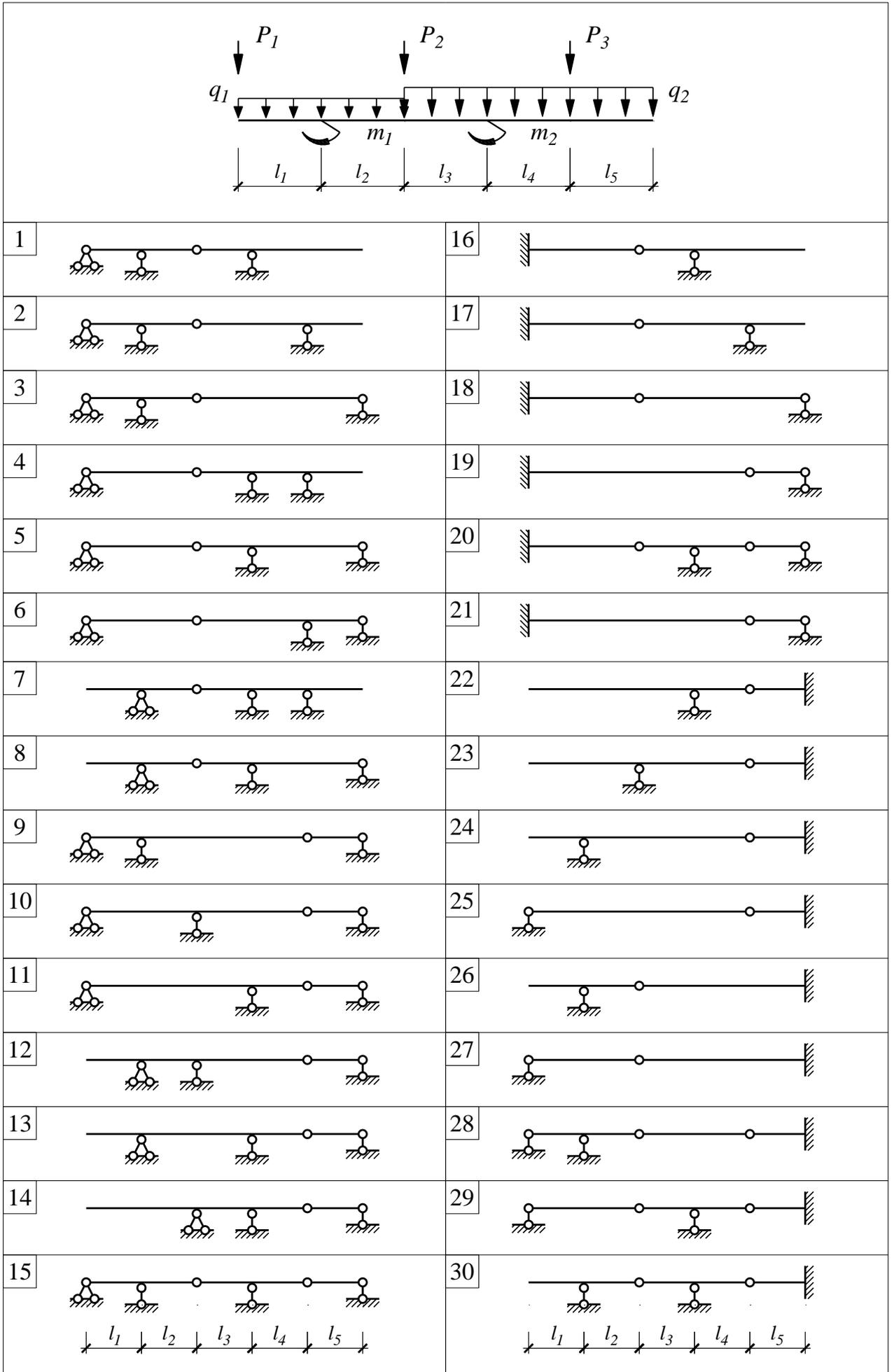
$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = 0$$

Проверка: $\Sigma Y = V_A - P + V_C - q \cdot 4 + V_D = 3.6 - 6 + 8.4 - 2 \cdot 4 + 2 = 0$

3. Строим эпюру M , используя табличные балочные эпюры. Выполняем проверку построения эпюры по рис.2.5.

4. Строим эпюру Q . Выполняем проверку путем вырезания опорных узлов.





Задача 2.3. Ломаные балки – рамы

Для рам, приведенных на стр.29...31, построить эпюры внутренних усилий M , Q и N по условиям задачи 2.2. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.2.6.

Таблица 2.6. Исходные параметры к задаче 2.3

номер группы	$l_p, \text{м}$	$l_c, \text{м}$	$m, \text{кН}\cdot\text{м}$	$P, \text{кН}$	$q, \text{кН/м}$	Сложность задания	Переменные параметры	
1	2	$L + 2$	F	2	2	6, с анализом	$L = 2$	$F = 2$
2	2	$L + 3$	F	2	3			$F = 4$
3	3	$L + 1$	F	3	4			$F = 6$
4	3	$L + 2$	F	3	2	4	$L = 1$	$F = 3$
5	3	$L + 3$	F	3	3	3	$L = 0$	$F = 0$

Пример 2.3. Построение эпюр внутренних усилий для ломаных балок

Условие задачи

Построить эпюру внутренних усилий для приведенной схемы. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны)

1. Кинематический анализ:

1 этап: $W = 3D - 3\Pi - 2Ш - Co = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 3 = 0$ – система статически определима.

2 этап: D_1 и D_0 соединены с помощью стержней C_A, C_B, C_C и образуют ГНС (принцип 3).

2. Определяем реакции опор:

$$\Sigma M_B = 0; q \cdot 2 \cdot 1.5 + m -$$

$$- V_C \cdot 6 + P \cdot 2 = 0 \rightarrow V_C = 4$$

$$\Sigma M_C = 0; V_A \cdot 6 -$$

$$- q \cdot 3 \cdot 4.5 + m + P \cdot 2 = 0 \rightarrow V_A = 2$$

$$\Sigma X = 0; H_B - P = 0 \rightarrow H_B = 6$$

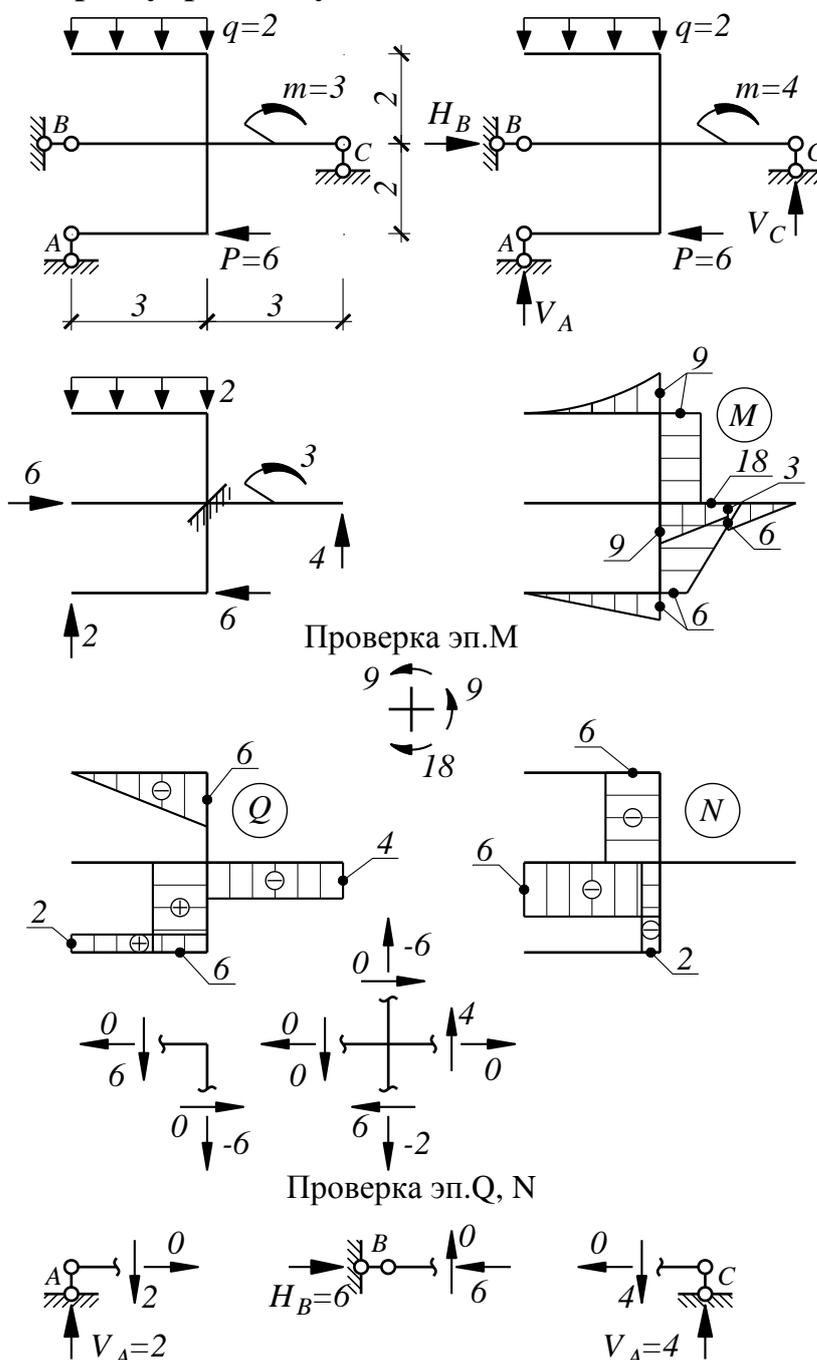
Проверка:

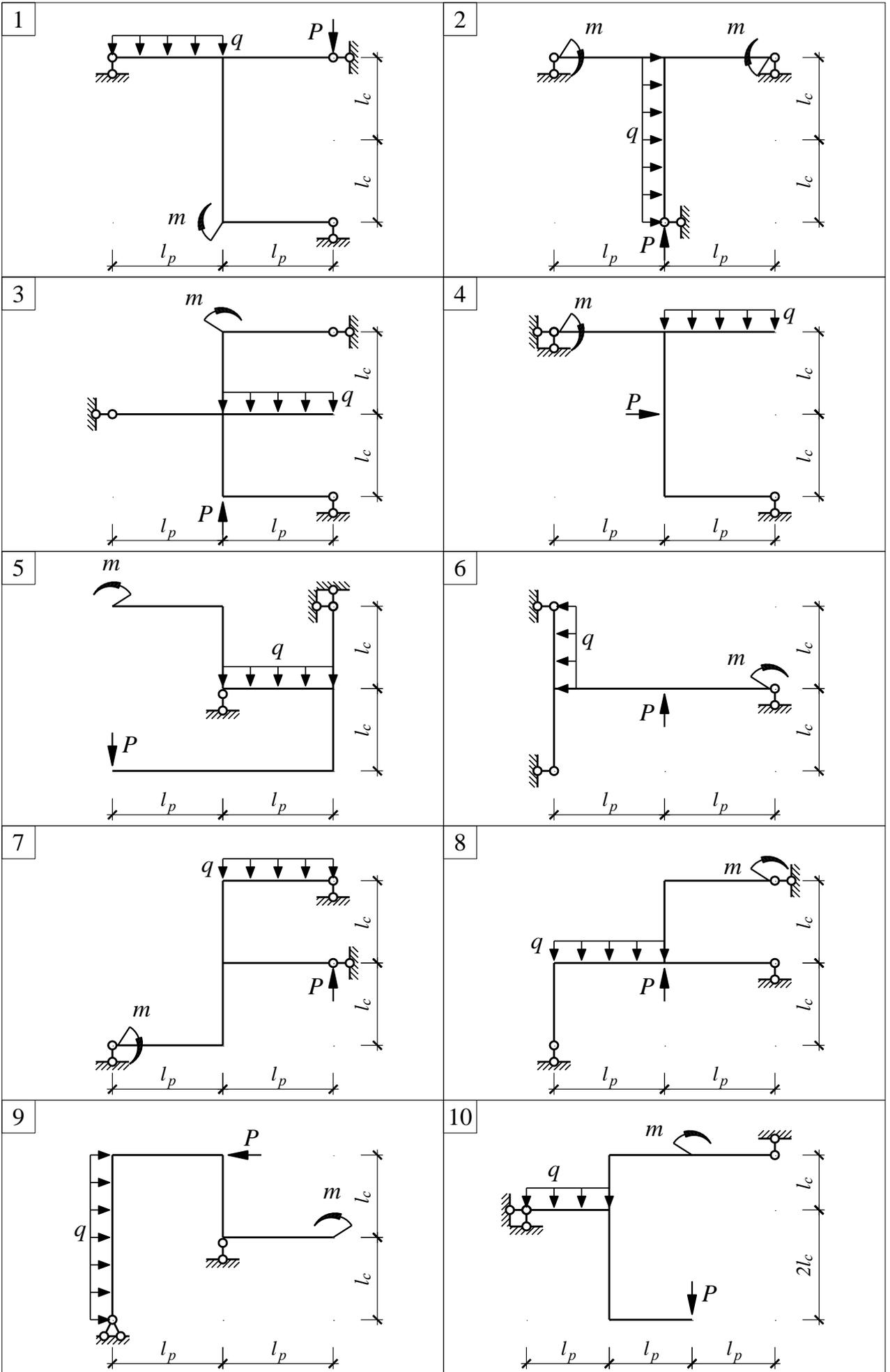
$$\Sigma Y = V_A - q \cdot 3 + V_C = 2 - 2 \cdot 3 + 4 = 0$$

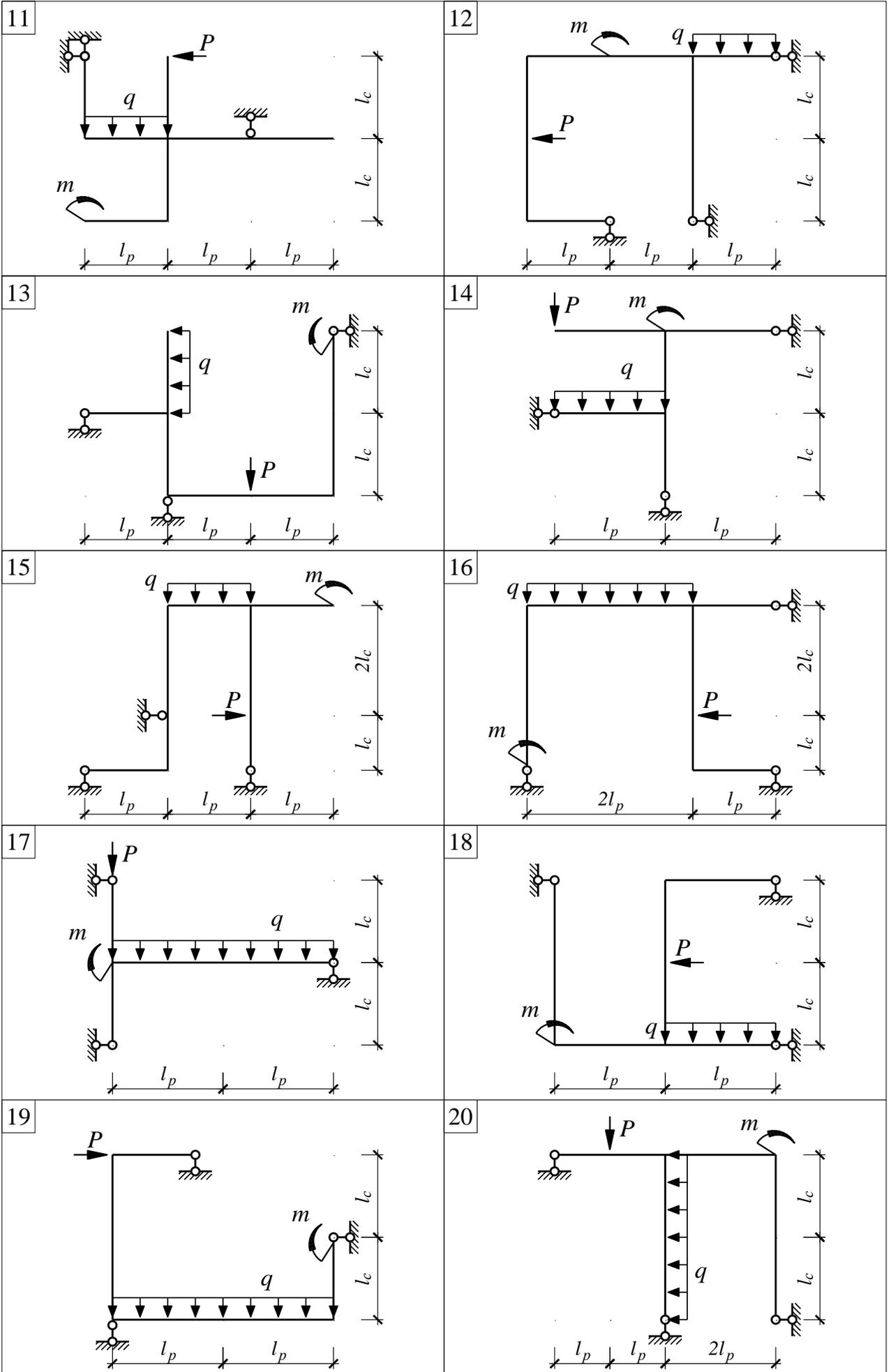
3. Строим консольную систему. Исключаем опоры и заменяем их опорными реакциями. Прикладываем условную заделку в точке пересечения стержней.

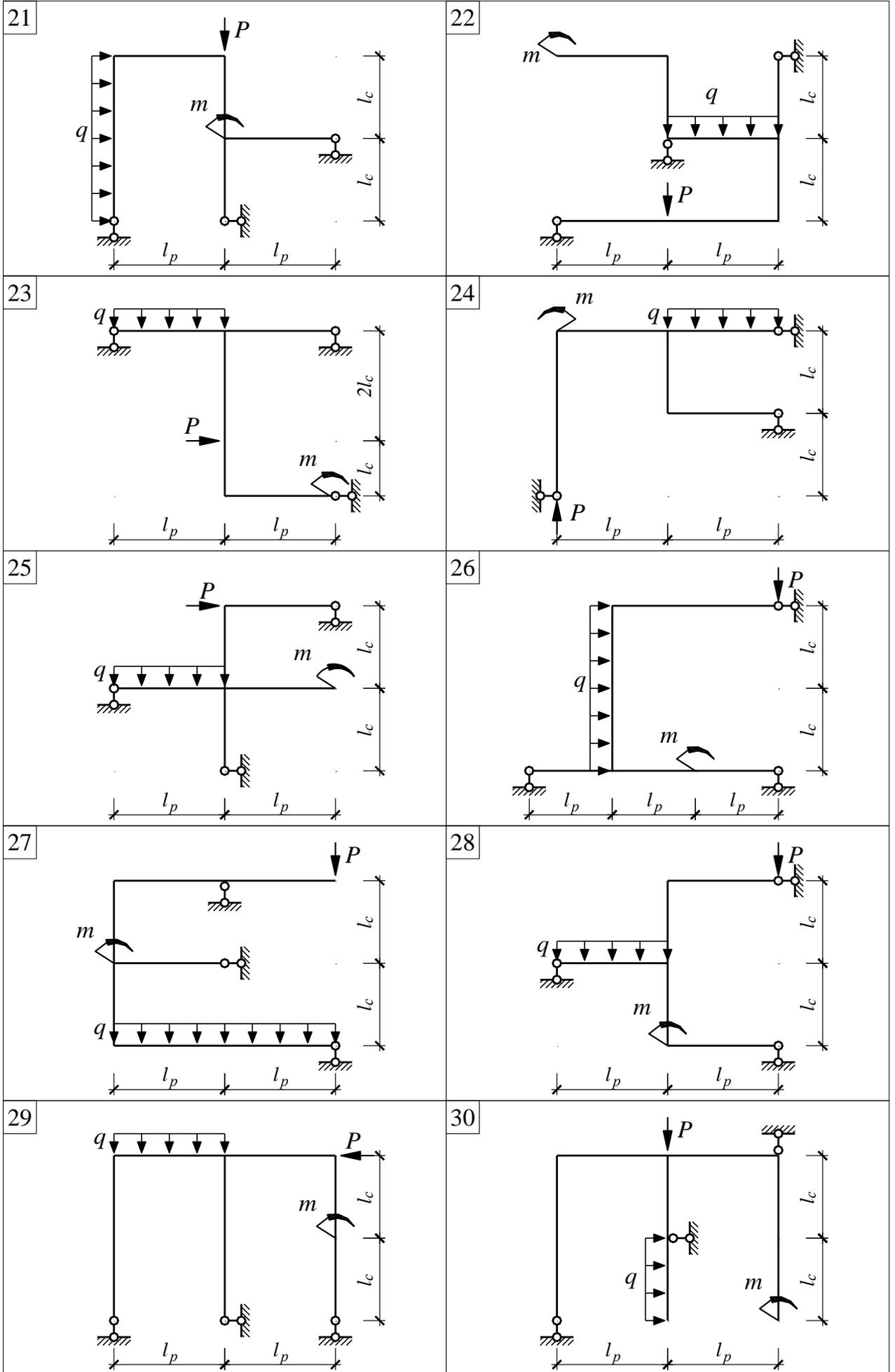
4. Строим эпюру M «консольным способом». Выполняем проверку построения эпюры из условия равновесия узла.

5. Строим эпюры Q и N . Выполняем проверку путем вырезания опорных узлов









Задача 2.4. Трехшарнирные системы – рамы

Для рам, приведенных на стр.33...35, построить эпюры внутренних усилий M , Q и N по условиям задачи 2.2. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.2.7.

Таблица 2.7. Исходные параметры к задаче 2.4

номер группы	$l_p, \text{ м}$	$l_c, \text{ м}$	$m, \text{ кН}\cdot\text{м}$	$P, \text{ кН}$	$q, \text{ кН/м}$	Сложность задания	Переменные параметры	
1	3	$L + 3$	2	F	2	6, с анализом	$L = 0$	$F = 4$
2	3	$L + 2$	2	F	3		$L = 2$	
3	3	$L + 1$	3	F	4		$L = 4$	
4	2	$L + 3$	3	F	2	4	$L = 1$	$F = 3$
5	2	$L + 2$	3	F	3	3	$L = 0$	$F = 0$

Пример 2.4. Построение эпюры M, Q, N для трехшарнирных рам

Условие задачи

Построить эпюру внутренних усилий для приведенной схемы. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны)

1. Кинематический анализ:

1 этап: $W = 3D - 3П - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$ – система статически определима.

2 этап: D_0, D_{A-C} и D_{C-B} соединены с помощью шарниров A, B и C и образуют ГНС (принцип 1).

2. Определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0; -P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 + m - V_B \cdot 6 = 0;$$

$$\sum M_B = 0; V_A \cdot 6 - P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 + m = 0;$$

$$\sum M_C^{C-B} = 0; m - V_B \cdot 3 + H_B \cdot 4 = 0;$$

$$\sum M_C^{A-C} = 0; V_A \cdot 3 - H_A \cdot 4 + P \cdot 2 -$$

$$-q \cdot 4 \cdot 2 = 0;$$

$$V_A = -2; H_A = -2.5; V_B = 2; H_B = -0.5$$

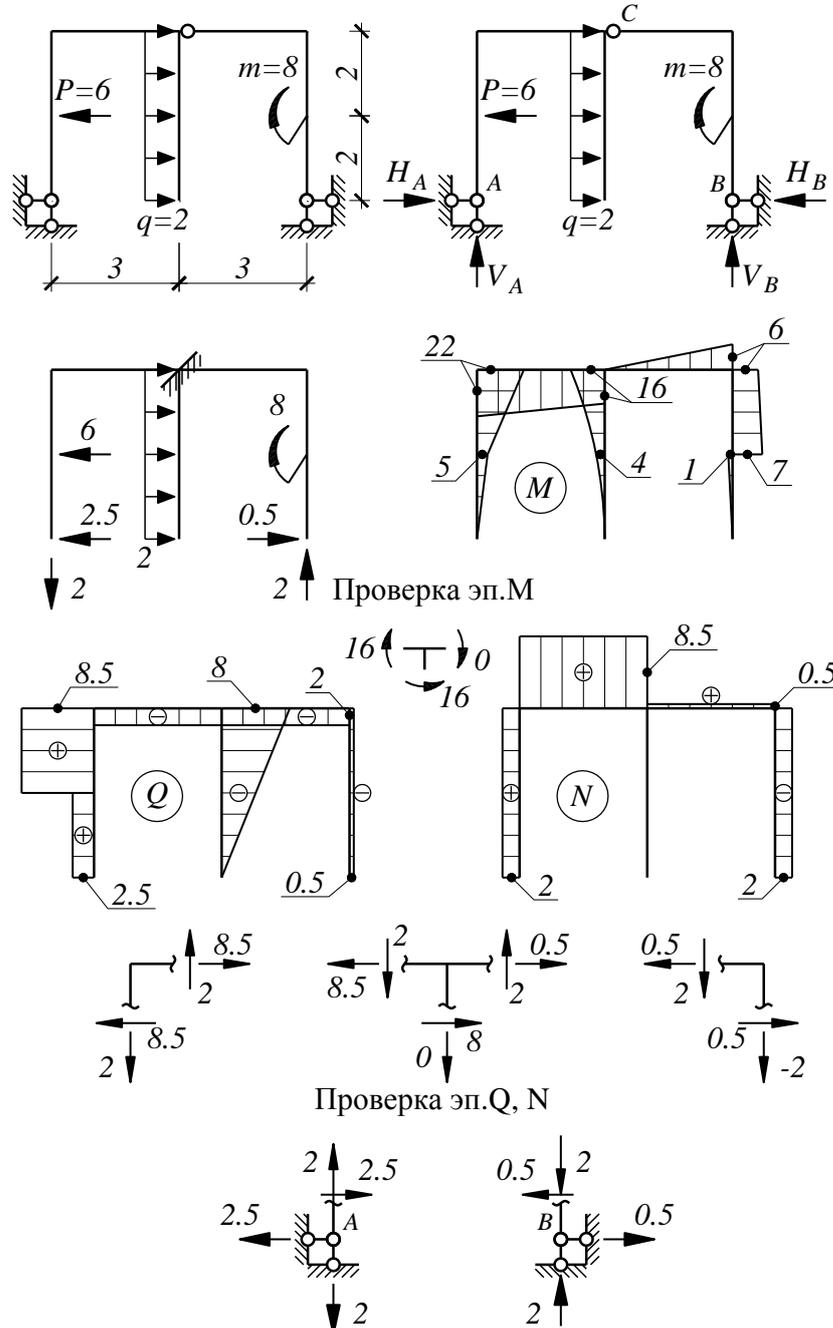
Проверка:

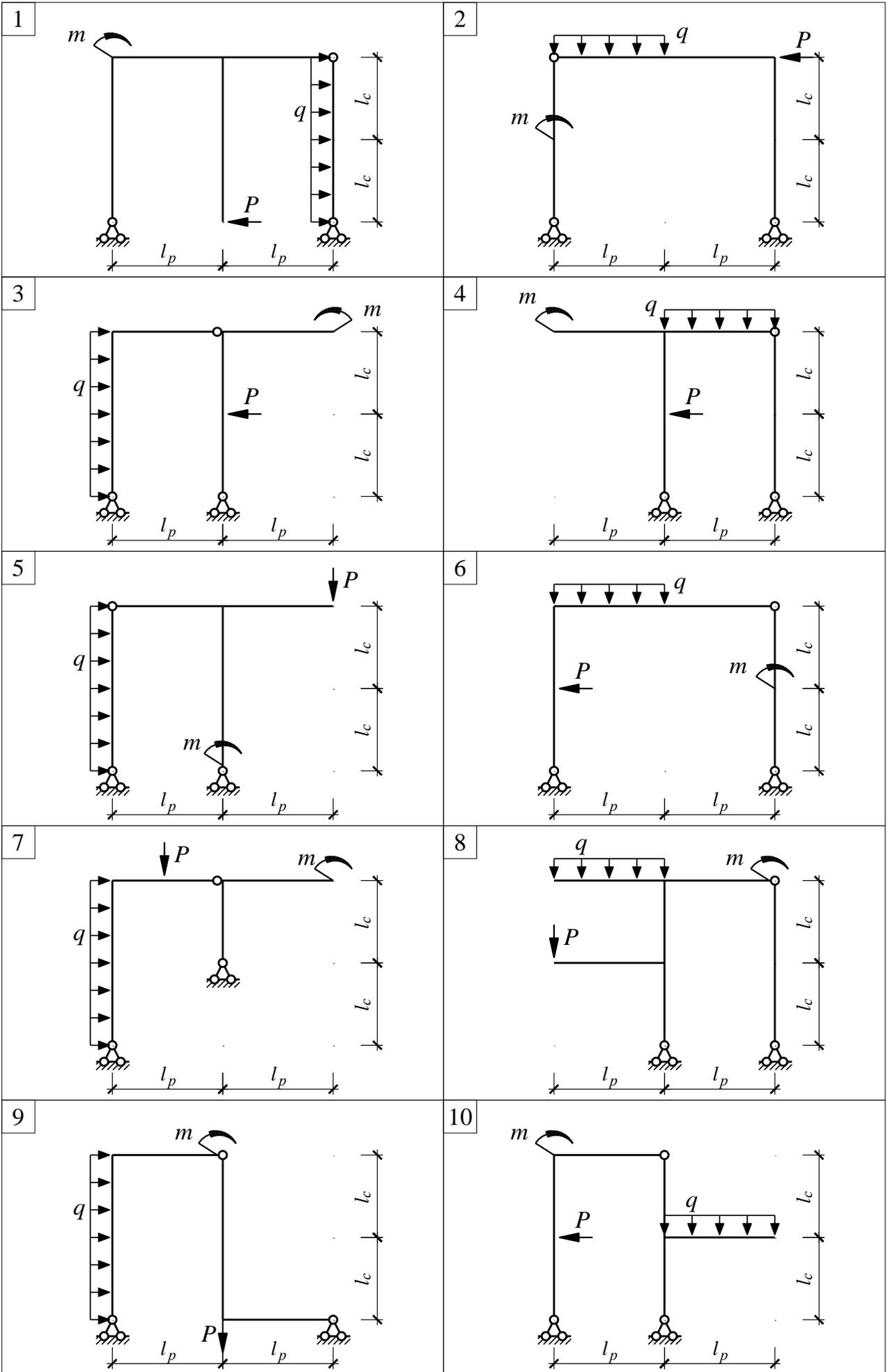
$$\sum X = H_A - P + q \cdot 4 - H_B = 0$$

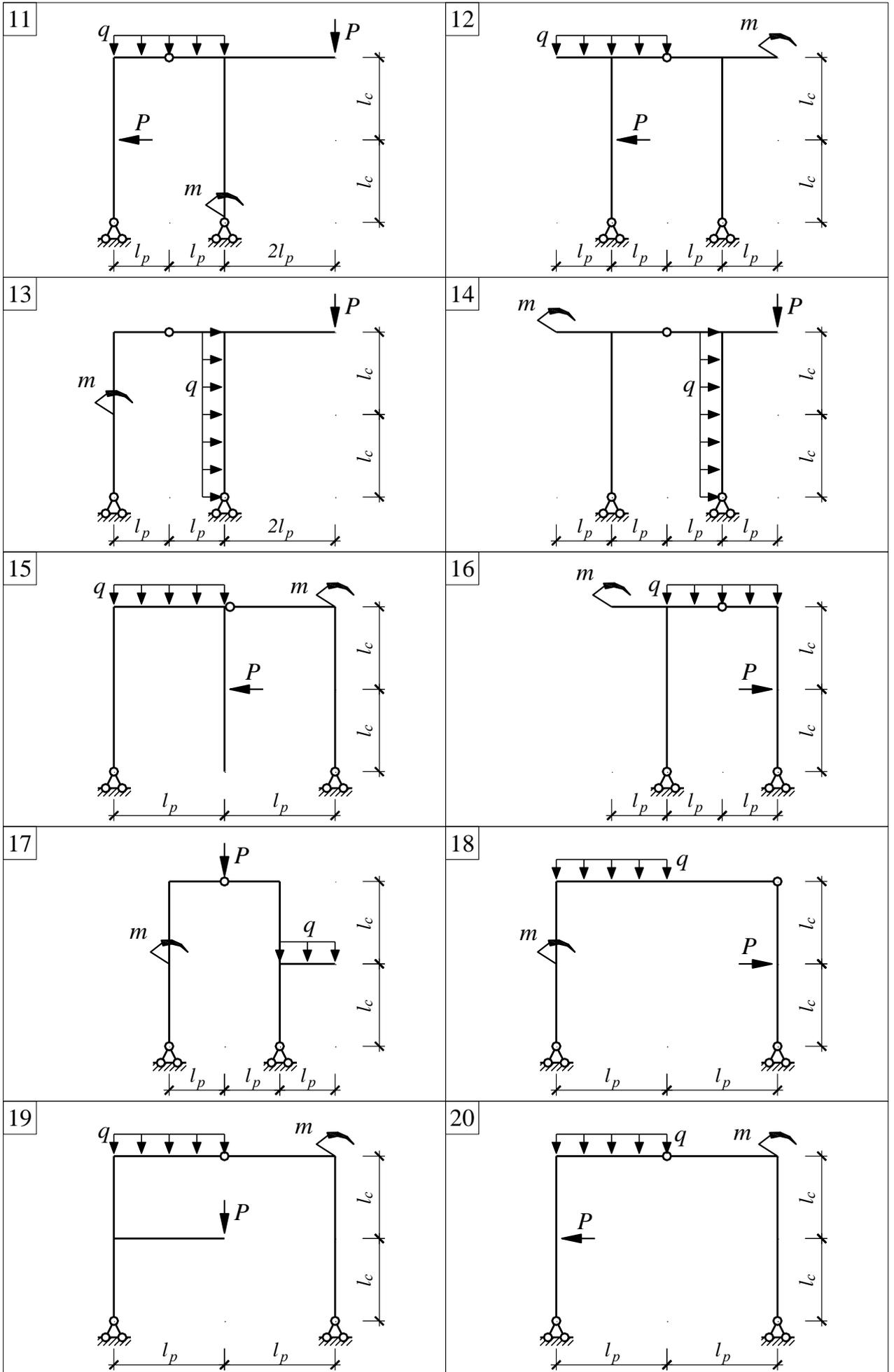
3. Строим консольную систему: исключаем опоры и заменяем их опорными реакциями, прикладываем условную заделку в точке пересечения стержней.

4. Строим эпюру M «консольным способом». Выполняем проверку построения эпюры из условия равновесия узла.

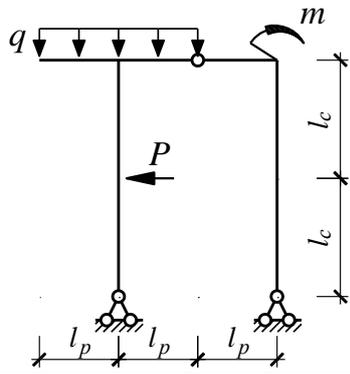
4. Строим эпюры Q и N . Выполняем проверку путем вырезания опорных узлов



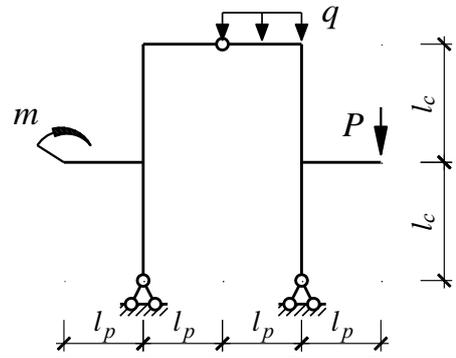




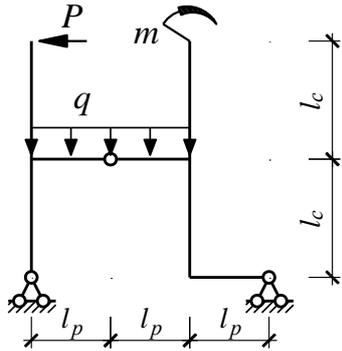
21



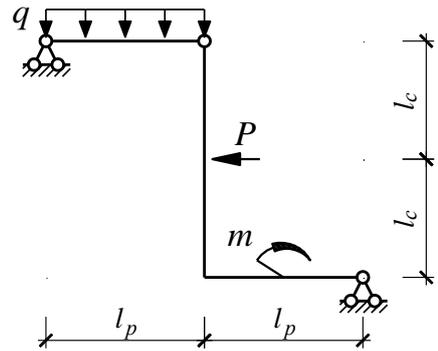
22



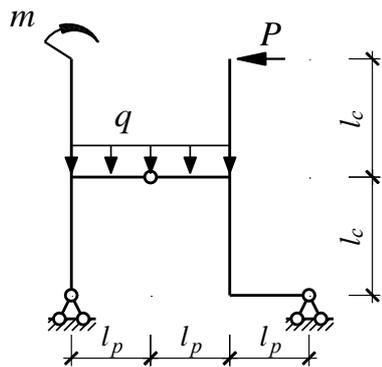
23



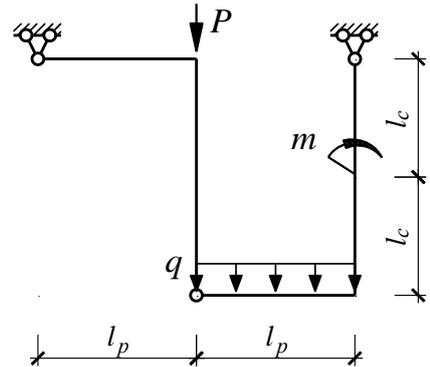
24



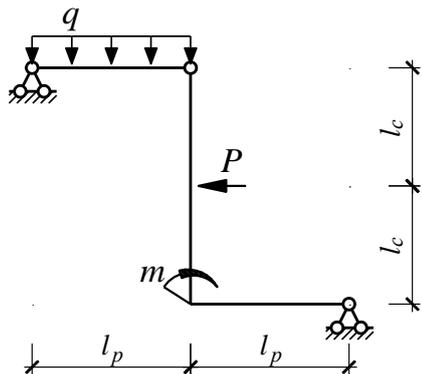
25



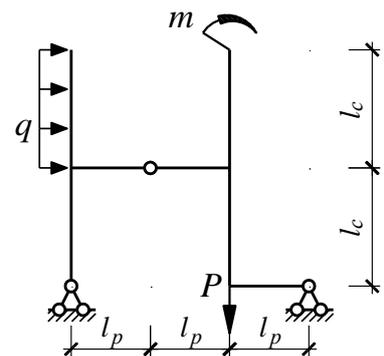
26



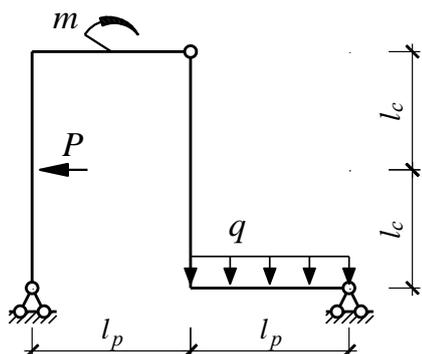
27



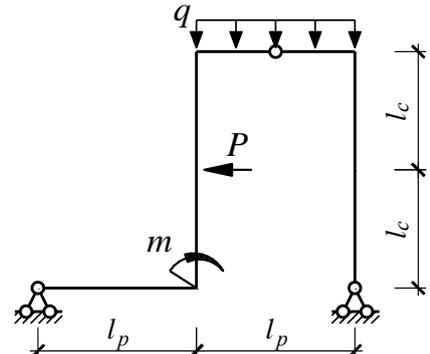
28



29



30



Задача 2.5. Многопролетные рамы

Для рам, приведенных на стр.37...39, построить эпюры внутренних усилий M , Q и N по условиям задачи 2.2. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.2.8.

Таблица 2.8. Исходные параметры к задаче 2.5

номер группы	$l_p, \text{м}$	$l_c, \text{м}$	$m, \text{кН}\cdot\text{м}$	$P, \text{кН}$	$q, \text{кН/м}$	Сложность задания	Переменные параметры
1	2	$L + 2$	F	2	2	6, с анализом	$F = 2$
2	2	$L + 3$	F	2	3		$F = 4$
3	3	$L + 1$	F	3	4		$F = 6$
4	3	$L + 2$	F	3	2	4	$L = 1$ $F = 3$
5	3	$L + 3$	F	3	3	3	$L = 0$ $F = 0$

Пример 2.5. Построение эпюры M для многопролетных рам

Условие задачи

Построить эпюру внутренних усилий для приведенной схемы. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны)

1. Кинематический анализ:

1 этап: $W = 3D - 3П - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 - 7 = 0$ – система статически определима.

2 этап: самостоятельно доказываем, что система геометрически неизменяема.

2. Строим поэтажную схему.

3. Определяем реакции опор, начиная с верхнего этажа. Составляем уравнения равновесия и определяем внутренние и опорные реакции:

участок $G-H$: $\sum M_G = 0 \rightarrow V_H = 2$;

$\sum Y = 0 \rightarrow V_G = -2$; $\sum X = H_G = 0$;

участок $E-G$: $\sum M_E = 0 \rightarrow V_F = 1$;

$\sum Y = 0 \rightarrow V_E = -1$; $\sum X = 0 \rightarrow H_E = 6$;

участок $C-E$: $\sum M_C = 0 \rightarrow H_D = -3$;

$\sum Y = 0 \rightarrow V_C = 9$; $\sum X = 0 \rightarrow H_C = 3$;

участок $C-B$: $\sum M_C = 0 \rightarrow H_B = 0$;

участок $A-B-C$: $\sum M_A = 0 \rightarrow V_B = 9$;

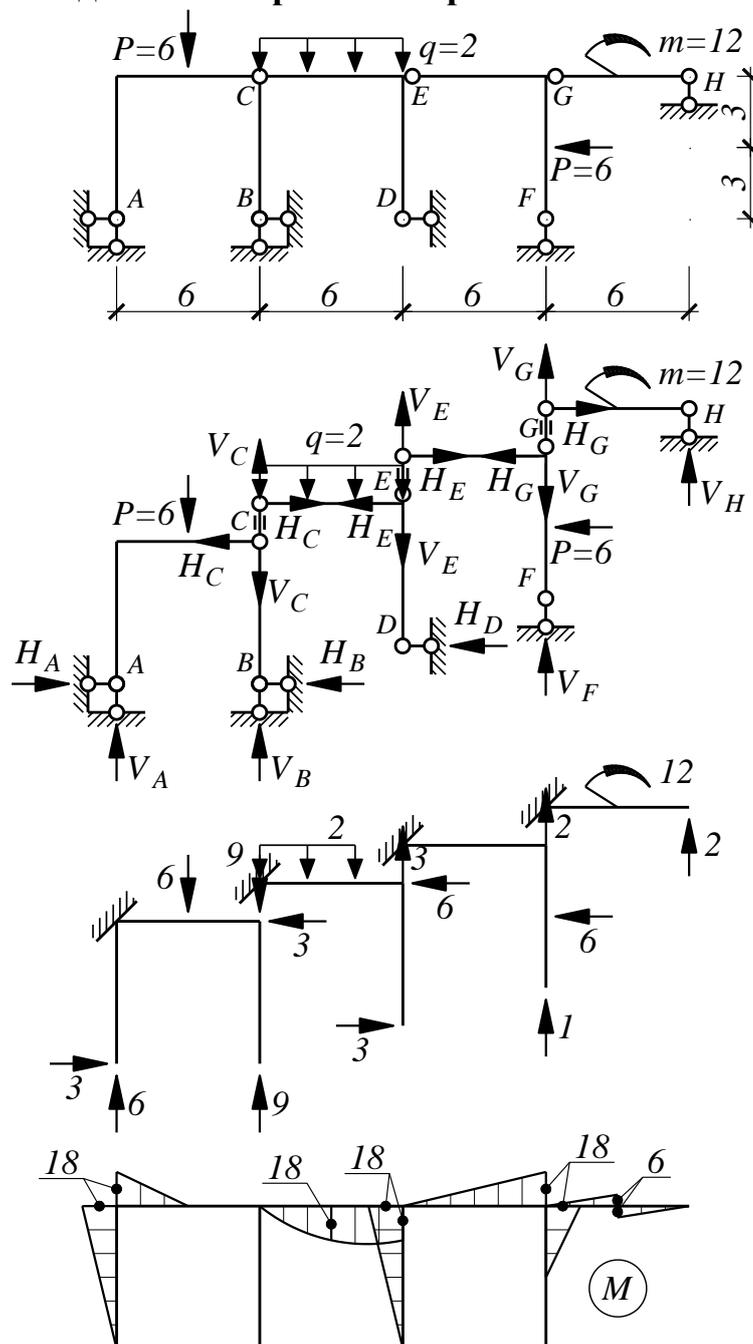
$\sum Y = 0 \rightarrow V_A = 6$; $\sum X = 0 \rightarrow H_A = 3$;

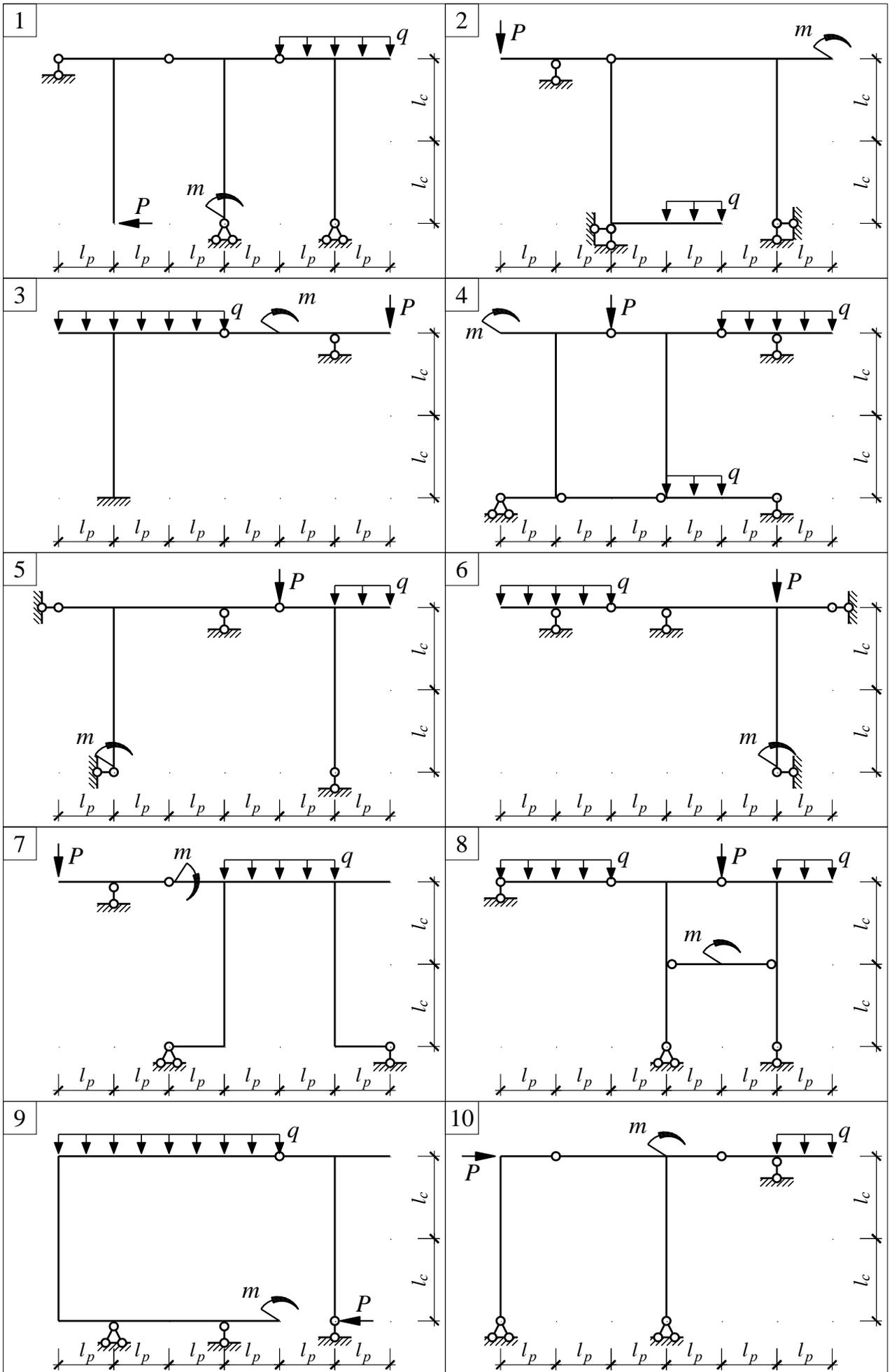
Проверка:

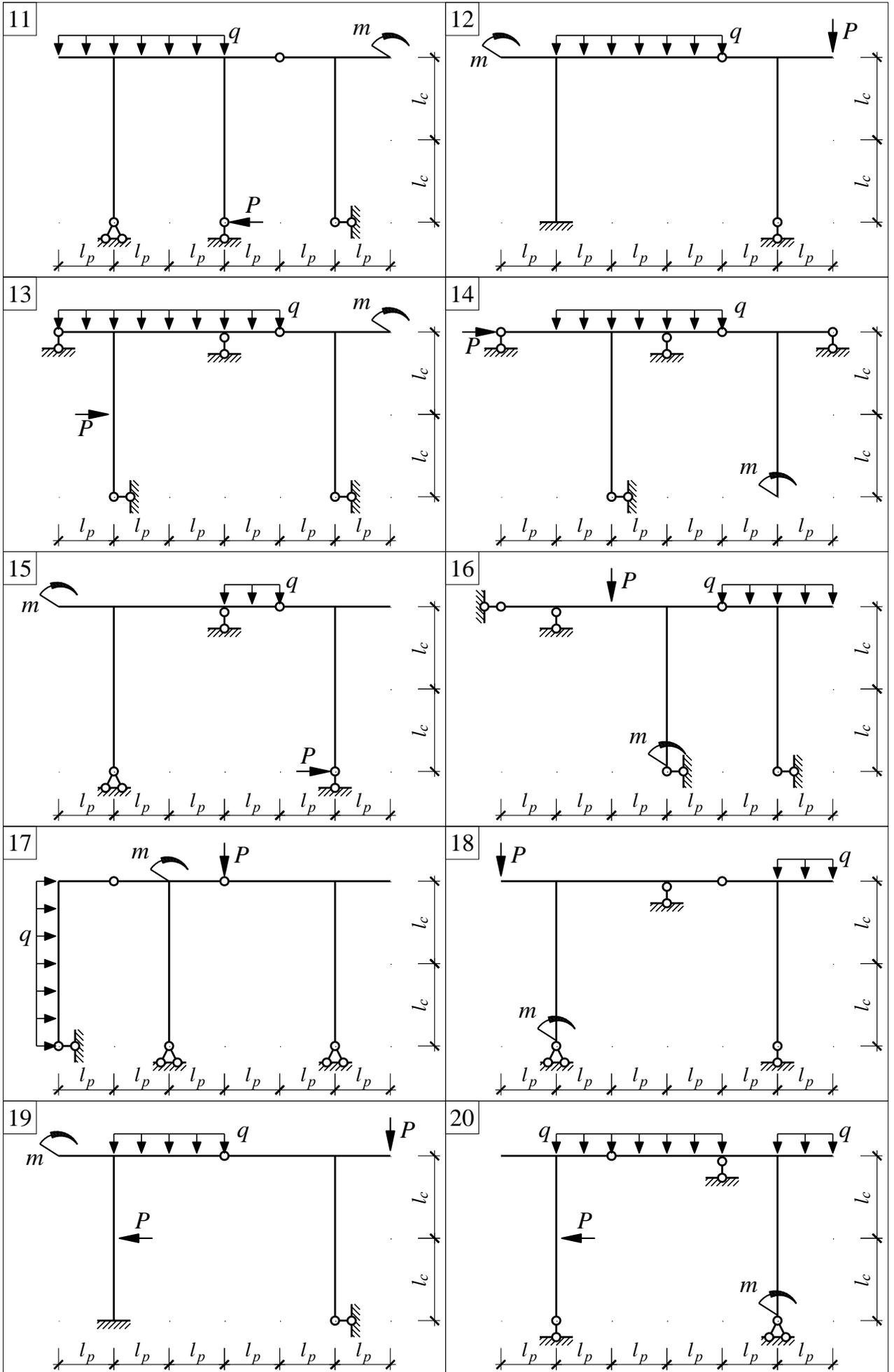
$\sum Y = V_A - P + V_B - q \cdot 6 + V_F - V_H = 0$

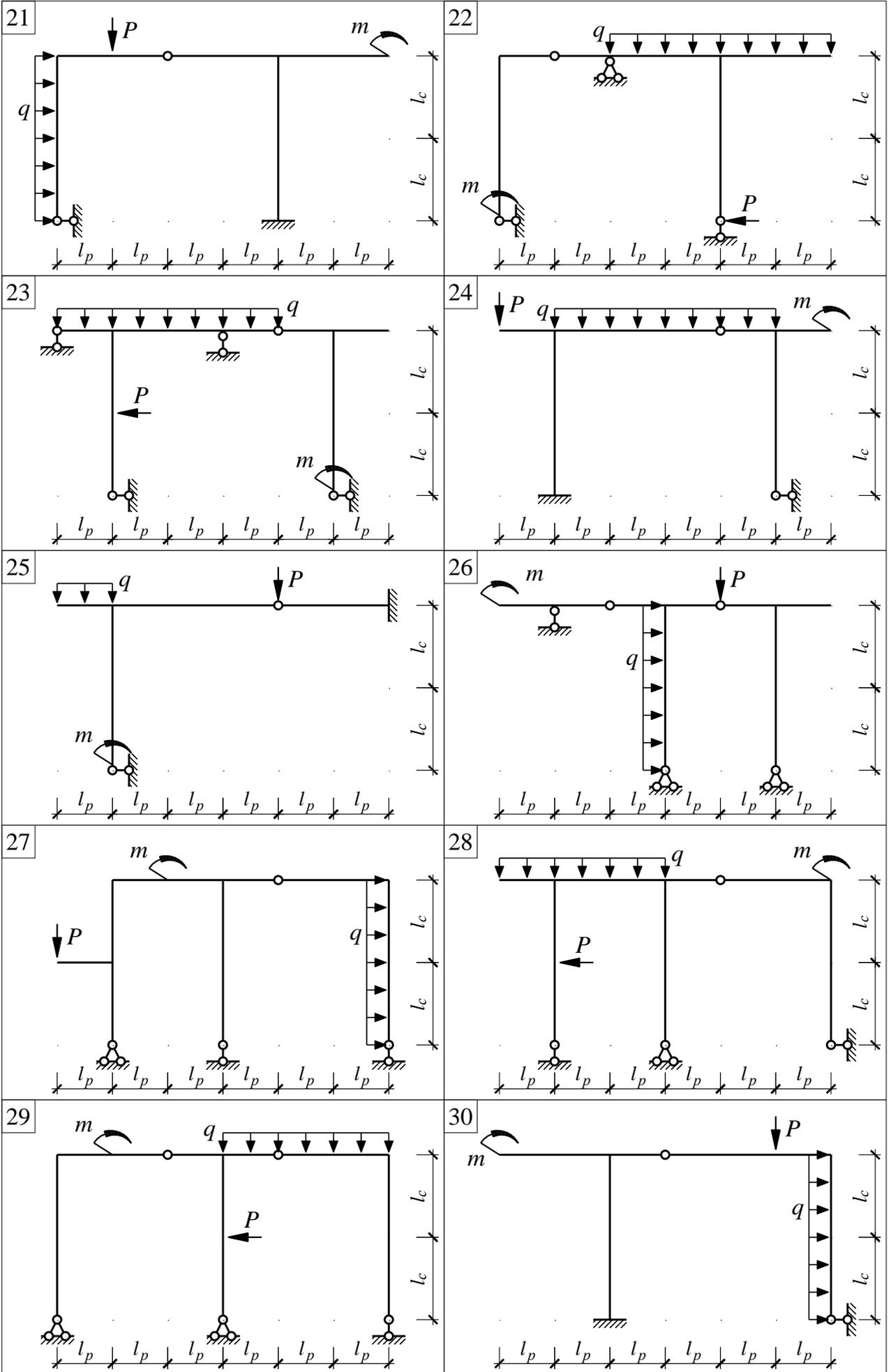
4. Строим эпюру изгибающих моментов «консольным способом», начиная с верхнего этажа. Самостоятельно выполняем проверку построения эпюры из условия равновесия узлов.

4. Самостоятельно строим эпюры Q и N . Выполняем проверку путем вырезания опорных узлов.









ТЕМА 3. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ФЕРМЫ

Фермой называется геометрически неизменяемая шарнирно-стержневая система, состоящая из прямолинейных стержней, соединённых между собой посредством шарниров. Стержни ферм можно разделить на элементы верхнего пояса, нижнего пояса, элементы решетки – стойки, раскосы и опорные раскосы, шпренгельные элементы. Шпренгельные элементы служат для уменьшения расчетной длины элементов и восприятия внеузловых нагрузок.

При расчете усилий в стержнях фермы предполагают, что вес стержней пренебрежимо мал по сравнению с действующими на ферму силами и что эти силы приложены к ней только в узлах. В элементах фермы возникают только продольные усилия, направленные вдоль стержней. Растягивающие усилия считаются положительными.

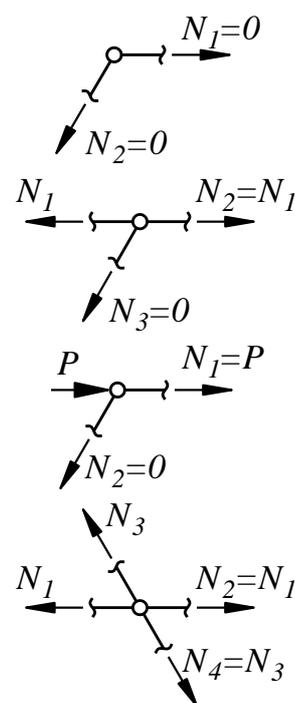
Первоначально определяют внешние опорные реакции как для простых или ломаных балок. Усилия в стержнях могут быть определены методами вырезания узлов, методом сквозных сечений, совместных сечений и т.д.

Метод вырезания узлов заключается в последовательном рассмотрении равновесия узлов фермы. Вырезается узел, где сходятся не более двух стержней, усилия в которых неизвестны. Для каждого узла составляют по два уравнения равновесия и из них определяют усилия в стержнях.

При использовании метода сечений ферму разделяют на две части таким образом, чтобы в сечение попало не более трёх стержней, усилия в которых неизвестны. Для одной из частей составляют уравнения равновесия таким образом, чтобы в каждом уравнении было только одно неизвестное усилие.

Некоторые усилия в элементах ферм могут быть определены сразу с использованием лемм о нулевых стержнях:

1. Если в узле сходятся два стержня и узел не загружен, то усилия в этих двух стержнях будут нулевыми.
2. Если в узле сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой и узел не загружен, то усилие в третьем будет нулевым.
3. Если в узле сходятся два стержня, а приложенная нагрузка действует вдоль одного из них, то усилие в другом будет нулевым.
4. Если в узле сходятся четыре стержня и оси стержней направлены по двум прямым, и узел не загружен, то усилия в стержнях, расположенных по прямым, равны между собой.



Пример 3.1. Расчет статически определимой фермы

Условие задачи

Определить внутренние усилия для приведенной фермы. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны)

1. Кинематический анализ:

1 этап: $W = 2Y - C_{\phi} - C_o = 2 \cdot 8 - 13 - 3 = 0$ – система статически определима.

2 этап: последовательно укрупняем диски по принципам 1 и 4; диски земля и укрупненный диск соединяются по принципу 2 и образуют геометрически-неизменяемую систему.

2. Определяем реакции опор:

$$\Sigma M_A = 0; P_1 \cdot 3 + P_2 \cdot 9 - V_B \cdot 12 = 0 \rightarrow V_B = 17.5;$$

$$\Sigma M_B = 0; V_A \cdot 12 - P_1 \cdot 9 - P_2 \cdot 3 = 0 \rightarrow V_A = 12.5;$$

$$\Sigma X = 0; H_A = 0;$$

$$\text{Проверка: } \Sigma Y = V_A - P_1 - P_2 + V_B = 0$$

3. Находим нулевые стержни и отмечаем их.

4. С использованием метода вырезания узлов (в, е) и сечений (г, д) последовательно составляем уравнения статики и определяем усилия в элементах, результаты заносим в таблицу:

$$(в) \Sigma Y = 0; V_A + N_{A-4} \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\Sigma X = 0; H_A + N_{A-1} + N_{A-4} \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$(г) \Sigma M_A = 0; -H_A \cdot 4 + V_A \cdot 3 - N_{A-1} \cdot 4 = 0;$$

$$\Sigma M_1 = 0; V_A \cdot 3 + N_{4-5} \cdot 4 = 0; \Sigma Y = V_A - N_{1-4} - P_1 = 0;$$

$$(д) \Sigma M_1 = 0; -V_B \cdot 9 + P_2 \cdot 6 - N_{5-6} \cdot 4 = 0;$$

$$\Sigma M_6 = 0; -V_B \cdot 3 + N_{2-3} \cdot 4 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; V_B - N_{1-6} \cdot \sin \beta - P_2 = 0;$$

$$(е) \Sigma Y = 0; V_B + N_{B-6} \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\Sigma X = 0; -N_{3-B} - N_{B-6} \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sin \alpha = 0.8; \cos \alpha = 0.6; \sin \beta = 0.5547; \cos \beta = 0.832$$

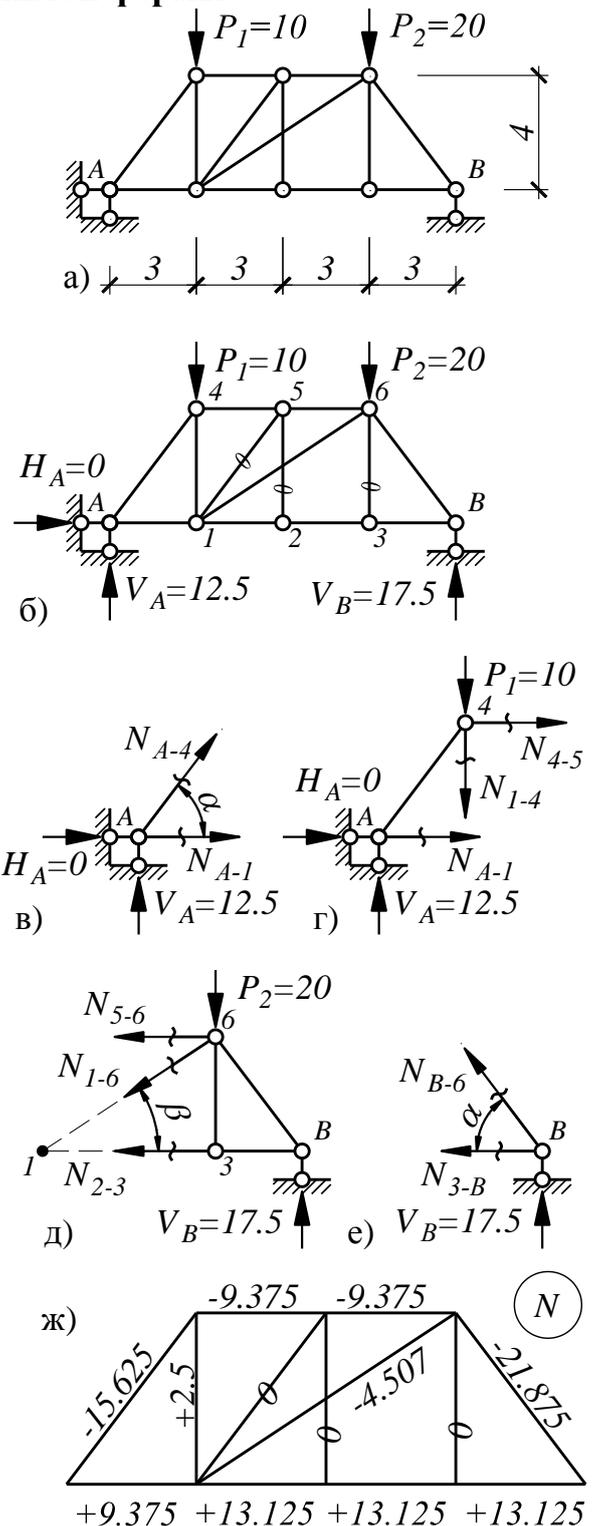
Усилия в элементах фермы

нижний пояс	N_{A-1}	N_{1-2}	N_{2-3}	N_{3-B}
	+9.375	+13.125	+13.125	+13.125
верхний пояс	N_{4-5}	N_{5-6}		
	-9.375	-9.375		
стойки	N_{1-4}	N_{2-5}	N_{3-6}	
	+2,5	0	0	
раскосы	N_{A-4}	N_{1-5}	N_{1-6}	N_{B-6}
	-15.625	0	-4.507	-21.875

5. Строим эпюру продольных усилий N . Для ферм чаще используется эпюра в виде нанесения значений продольных сил над элементами.

6. Выполняем проверку правильности построения эпюры методом вырезания узла, ранее не использованного при нахождении продольных усилий, например, узла 6:

$$\Sigma Y = -P_2 - N_{1-6} \cdot \sin \beta - N_{3-6} - N_{B-6} \cdot \sin \alpha = 0.$$



В итоге студент должен обладать следующими компетенциями:

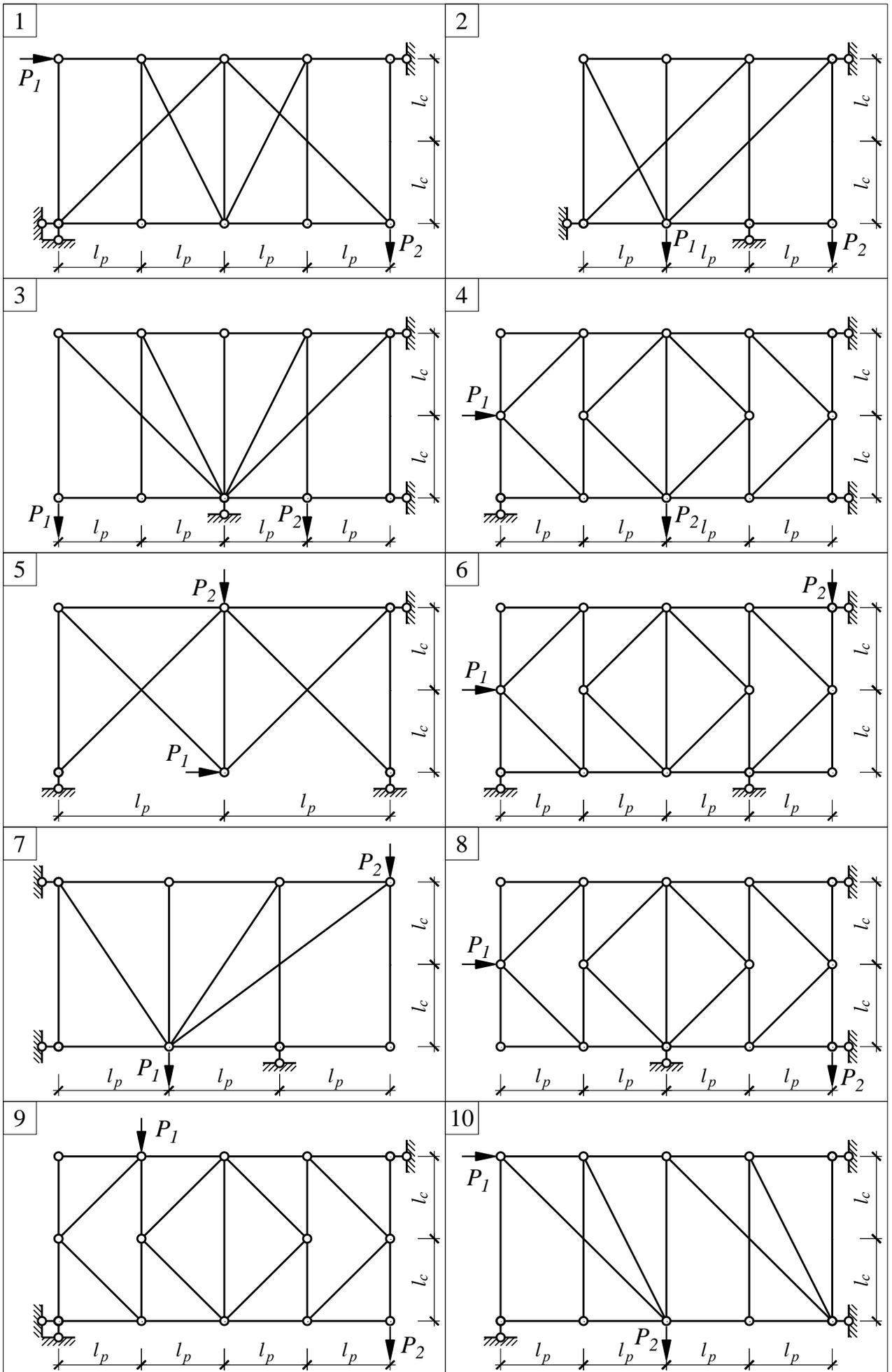
- **знать** методы определения внутренних усилий в элементах ферм;
- **уметь** определять усилия в любом элементе фермы;
- **владеть** приемами расчета ферм, чтобы суметь оценить усилия в элементах фермы с целью их дальнейшего проектирования;
- суметь **ответить** на следующие вопросы:
 1. Как называются элементы ферм?
 2. Какой способ является рациональным при определении усилия в элементе фермы?
 3. Назовите леммы о нулевых стержнях?
 4. Как определяются опорные реакции ферм?
 5. Чем отличаются восходящие раскосы от нисходящих?

Задача 3.1. Расчет статически определимых ферм

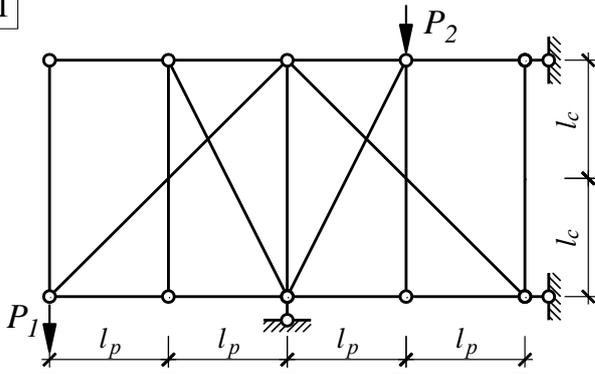
Для ферм, приведенных на стр.43...45, определить усилия в стержнях. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.3.1. Выполнить анализ работы фермы при других значениях нагрузки.

Таблица 3.1. Исходные параметры к задаче 3.1

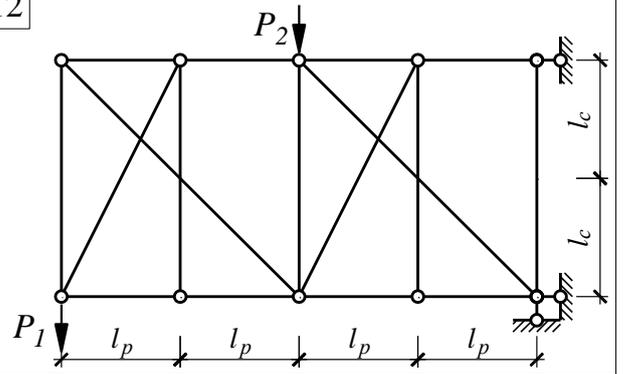
номер группы	$l_p, \text{ м}$	$l_c, \text{ м}$	$P_1, \text{ кН}$	$P_2, \text{ кН}$	Сложность задания	Переменные параметры	
1	$L + 2$	2	2	F	6, с анализом	$L = 2$	$F = 2$
2	$L + 3$	2	F	$F = 4$			
3	$L + 1$	3	3	$F = 6$			
4	$L + 2$	3	F	3	3	$L = 0$	$F = 0$
5	$L + 3$	3	4	F	4	$L = 1$	$F = 3$



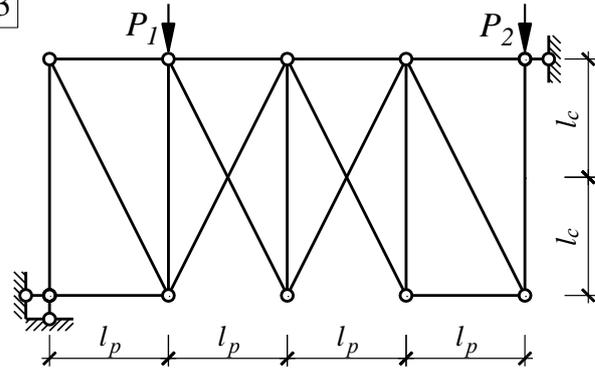
11



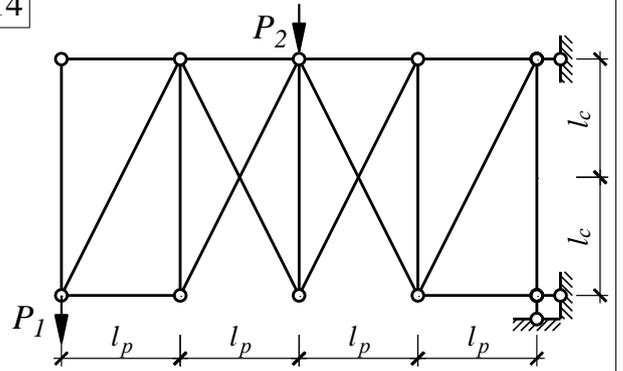
12



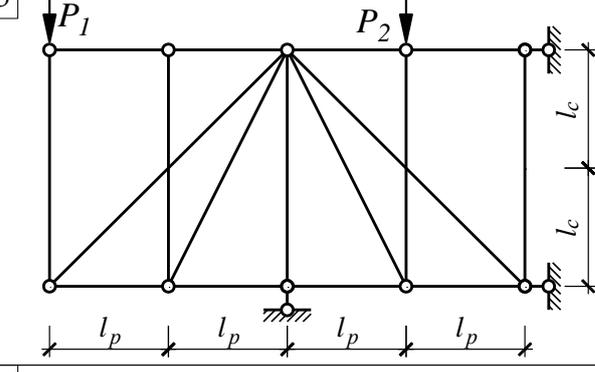
13



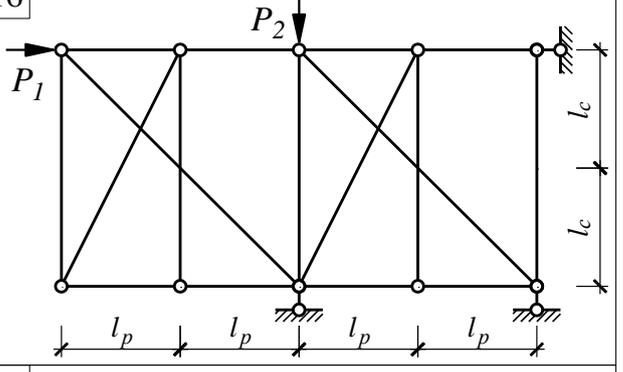
14



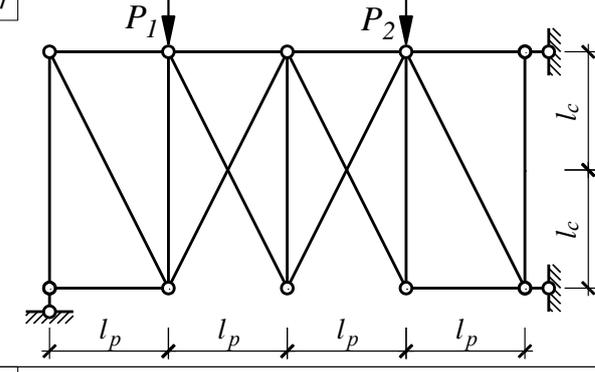
15



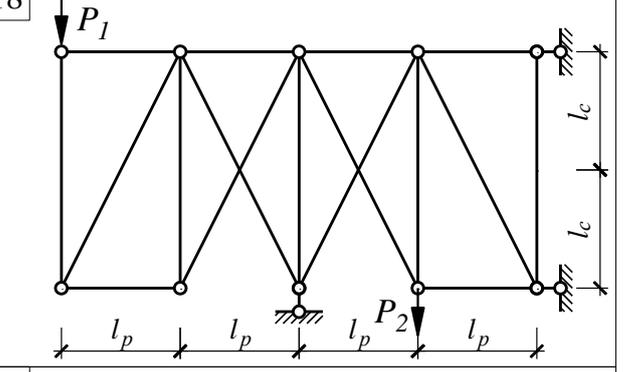
16



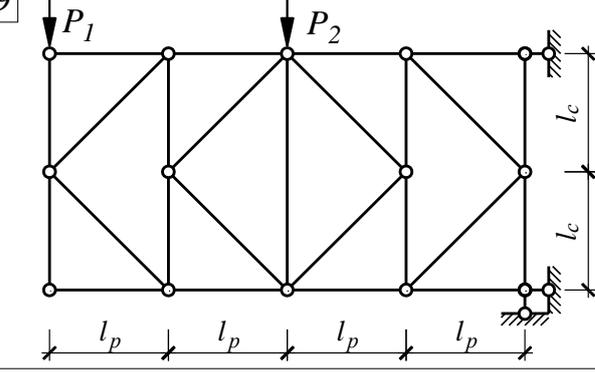
17



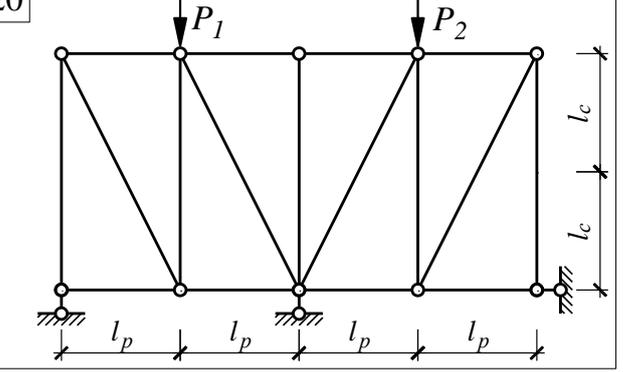
18

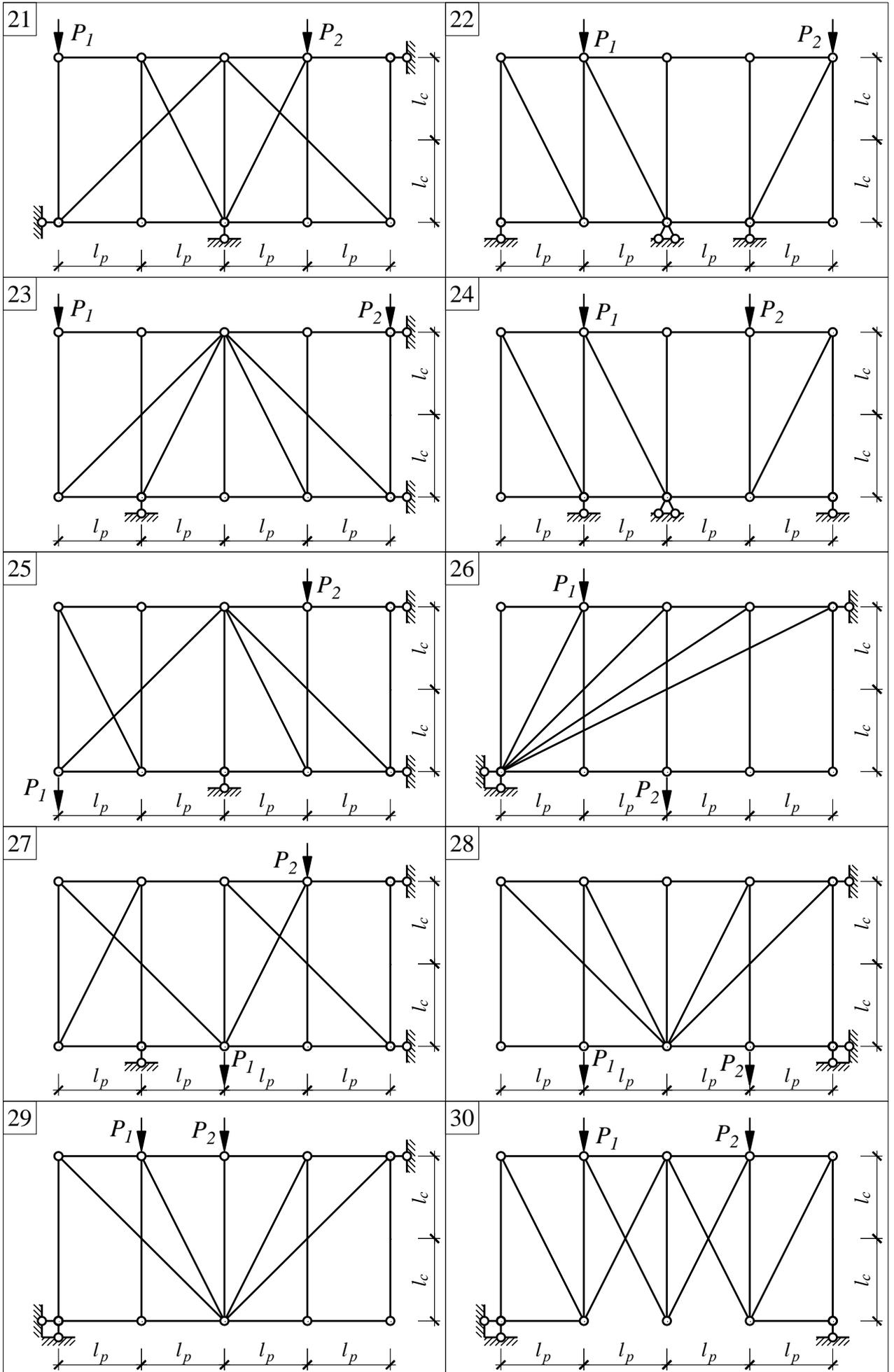


19



20





ТЕМА 4. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ АРКИ

Аркой называется распорная система, имеющая вид криволинейной балки различного очертания (кругового, параболического, синусоидального, эллиптического и т.д.) с односторонним выгибом против действия нагрузки. Статически определимые арки являются трехшарнирными, закрепленными на крайних опорах и имеющими один, обычно центральный, шарнир. Расстояние между опорами называется пролетом арки, высота арки – стрелой подъема, опоры и промежуточный шарнир еще называют пятой и замком арки, соответственно.

От вертикальной нагрузки в арке возникают горизонтальные распорные усилия, воспринимаемые шарнирно-неподвижными опорами или затяжкой. В последнем случае одна из опор арки должна быть шарнирно-подвижной.

Эпюры внутренних усилий для балок нелинейного очертания имеют функцию 2...4 порядка. Поэтому, для построения эпюр, арку разбивают на небольшие участки, например 8, и, определив усилия в каждой точке, соединяют их плавной линией. В точках примыкания затяжки и приложения сосредоточенной нагрузки поперечные и продольные усилия определяют слева и справа от этой точки. Расчет арок обычно ведут в табличной форме.

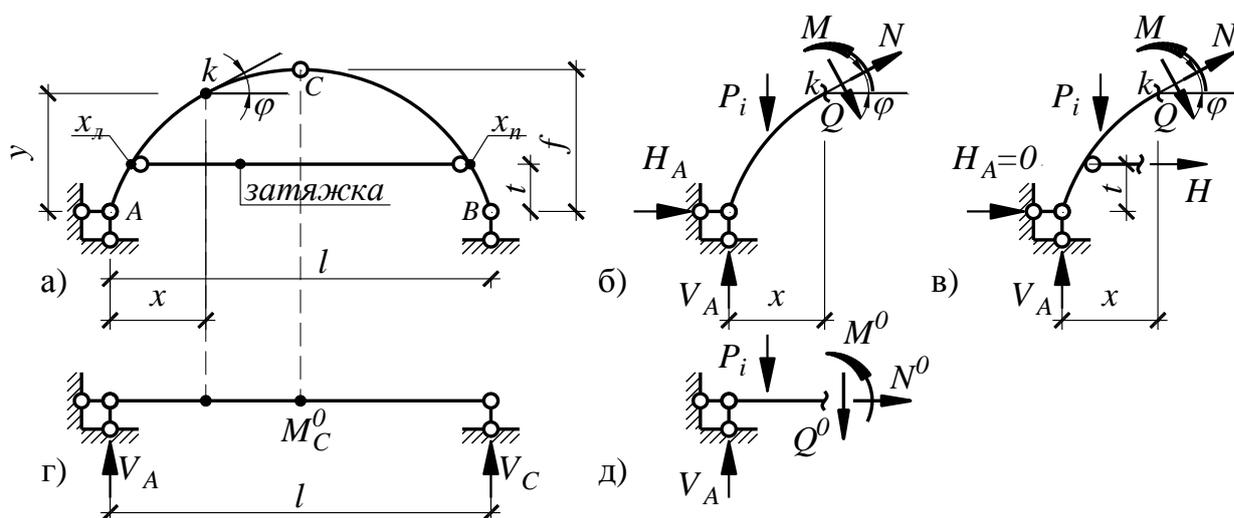


Рисунок 4.1. Статически определимая арка

Таблица 4.1. Формулы, описывающие геометрические параметры арки

Параметр	Очертание		
	параболическое	круговое	синусоидальное
функция, описывающая ось арки	$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$	$y = \sqrt{R^2 - (l/2 - x)^2} - R + f$ $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}$ - радиус	$y = f \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$
угол наклона оси арки $\operatorname{tg} \varphi = y'(x)$	$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{4f(l-2x)}{l^2}\right)$	$\varphi = \operatorname{arcsin}\left(\frac{l-2x}{2R}\right)$	$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi f}{l} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right)$
координата примыкания затяжки слева	$x_l = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{t}{f}}$	$x_l = \frac{l}{2} - \sqrt{R^2 - (t-f)^2}$	$x_l = \frac{l}{\pi} \operatorname{arcsin}\left(\frac{t}{f}\right)$
координата примыкания затяжки справа	$x_n = l - x_l$		
усилие в затяжке	$H = M_C^0 / (f - t)$		
распорное усилие в опорах	$H_A = H_B = M_C^0 / f$		

Таблица 4.2. Формулы для определения внутренних усилий в арке

Параметр	без затяжки рис.4.1б	с затяжкой	
		ниже затяжки по рис.4.1б	выше затяжки рис.4.1в
изгибающий момент M	$M = M^0 - H_A \cdot y$	$M = M^0$	$M = M^0 - H(y - t)$
поперечная сила Q	$Q = Q^0 \cos \varphi - H_A \sin \varphi$	$Q = Q^0 \cos \varphi$	$Q = Q^0 \cos \varphi - H \sin \varphi$
продольное усилие N	$N = -Q^0 \sin \varphi - H_A \cos \varphi$	$N = -Q^0 \sin \varphi$	$N = -Q^0 \sin \varphi - H \cos \varphi$

Пример 4.1. Определение внутренних усилий в элементах статически определимой арки

Условие задачи

Построить эпюры внутренних усилий для арки параболического очертания.

1. Кинематический анализ.

2. Построение балочной схемы.

3. Определение опорных реакций.

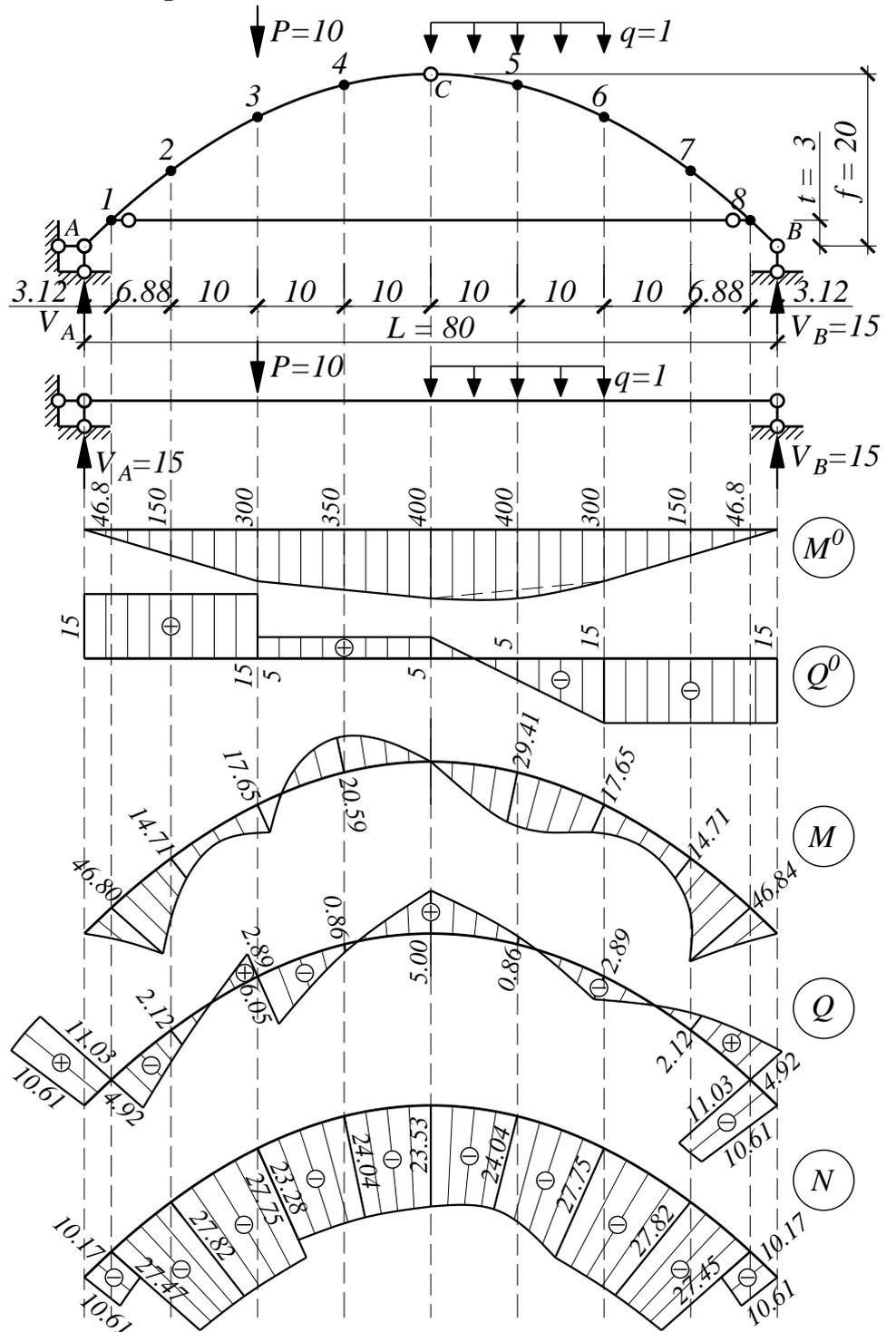
4. Построение эпюр M^0 и Q^0 для балочной схемы.

Определение усилия в затяжке: $H = 23.53$.

5. Определение геометрических параметров и внутренних усилий в арке согласно формулам из табл.4.1 и 4.2, заполнение таблицы.

6. Построение эпюр M , Q и N по полученным значениям.

7. Проверка правильности построения эпюры, используя особенности построения эпюр M и Q согласно рис.2.6.



Расчет геометрических параметров и внутренних усилий (к примеру 4.1)

Номер сечения	координаты		φ	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$M^0, \text{кН}\cdot\text{м}$	$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	$Q^0, \text{кН}$	$Q, \text{кН}$	$N, \text{кН}$
	x	y								
A	0	0	45.00	0.707	0.707	0	0.00	15	10.61	-10.61
1	3.12	3	42.67	0.678	0.735	46.8	46.80	15	11.03	-10.17
								15	-4.92	-27.47
2	10	8.75	36.87	0.600	0.800	150	14.71	15	-2.12	-27.82
3	20	15	26.57	0.447	0.894	300	17.65	15	2.89	-27.75
								5	-6.05	-23.28
4	30	18.75	14.04	0.243	0.970	350	-20.59	5	-0.86	-24.04
C	40	20	0.00	0.000	1.000	400	0.00	5	5.00	-23.53
5	50	18.75	-14.04	-0.243	0.970	400	29.41	-5	0.86	-24.04
6	60	15	-26.57	-0.447	0.894	300	17.65	-15	-2.89	-27.75
7	70	8.75	-36.87	-0.600	0.800	150	14.71	-15	2.12	-27.82
8	76.88	3	-42.68	-0.678	0.735	46.8	46.84	-15	4.92	-27.47
								-15	-11.03	-10.17
B	80	0	-45.00	-0.707	0.707	0	0.00	-15	-10.61	-10.61

В итоге студент должен обладать следующими компетенциями:

- **знать** отличие работы арки от балки;
- **уметь** определять опорные реакции и внутренние усилия в трехшарнирных арках;
- **владеть** приемами расчета и характером эпюр M, Q, N от вертикальной нагрузки;
- суметь **ответить** на следующие вопросы:
 1. Что называется аркой?
 2. Чем отличается расчет арки с затяжкой и без?
 3. Как определяется распор арки?
 4. Как определяются усилия M, Q, N в арках?

Задача 4.1. Расчет статически определимых арок

Для приведенных на рис.4.2 расчетных схем арок построить эпюры внутренних усилий M, Q и N . Исходные параметры принимать по табл.4.3, где Γ – номер группы, D – количество десятков, E – количество единиц в номере варианта по списку группы. Выводы сделать по отдельно построенным эпюрам для арок I и II типа.

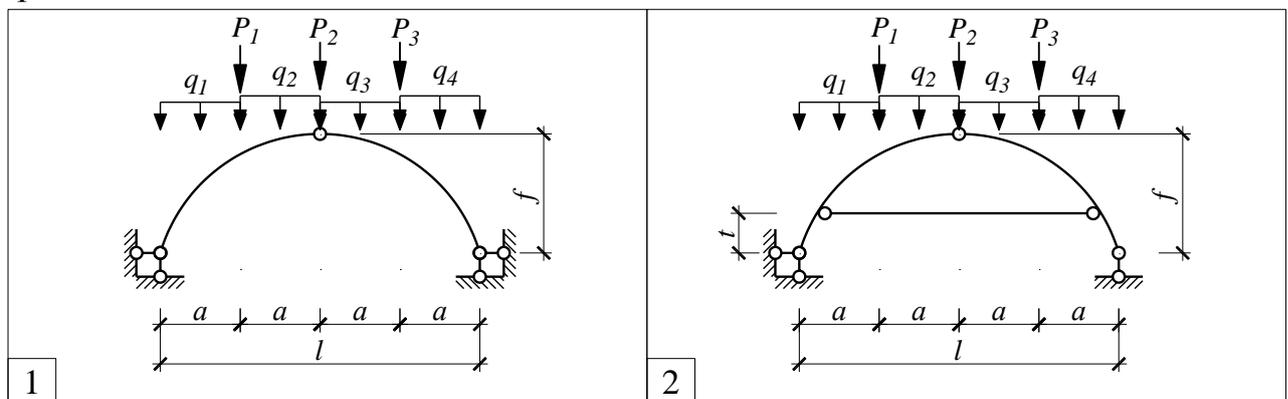


Рисунок 4.2. Расчетные схемы к задаче 4.1

Таблица 4.3. Исходные параметры к задаче 4.1

Сложность задачи, балл	6, с выводом	4	3
Схема	1, 2	2	1
Параметры	$L = \Gamma, F = E$	$L = \Gamma, F = E$	$L = \Gamma, F = 0$

Параметр D	Очертание	Размеры, м			P , кН			q , кН/м			
		l	f	t	P_1	P_2	P_3	q_1	q_2	q_3	q_4
1	параболическое	$16 \cdot L$	$4 \cdot L$	1	10	30				F	F
2	круговое	$12 \cdot L$	$3 \cdot L$	1	10	20			F	F	
3 и более	синусоидальное	$8 \cdot L$	$2 \cdot L$	1		10	20	F	F		

ТЕМА 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

Одной из важных задач строительной механики является определение перемещений от различных внешних воздействий.

Для нахождения перемещения точки расчетной схемы к ней прикладывают единичную силу $X_i = 1$ в искомом направлении или единичный момент при нахождении угла поворота. В общей постановке перемещение точки определяется согласно обобщенной формуле Мора, которая имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_i = & \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_P}{EI} dx + \sum \int \mu \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_P}{GA} dx + \sum \int \frac{\bar{N}_i \bar{N}_P}{EA} dx + \\ & + \sum \int \frac{\bar{M}_i \alpha t'}{h_{сеч}} dx + \sum \int \bar{N}_i \alpha t_{cp} dx - \sum \bar{R}_i \bar{c}_j \end{aligned}$$

Формула является векторной, т.е. в ней учитываются направления перемещения или поворота точки, сторона растягиваемых волокон при изгибе, знак поперечных и продольных сил, температурного воздействия и направление смещения опор.

Таблица 5.1. Определение перемещений точки расчетной схемы

Вид воздействия	Разновидность расчетной схемы	
	системы, испытывающие деформации изгиба (рамы, балки, арки и т.д.)	шарнирно-стержневые системы (фермы)
от силового воздействия	$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{M_i M_P}{EI} dx$	$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{N_i N_P}{EA} dx = \sum \frac{N_i N_P}{EA_j} l_j$
от температурного воздействия	$\begin{aligned} \Delta_{it} &= \sum \int \frac{M_i \alpha t'}{h_{сеч}} dx + \sum \int N_i \alpha t_{cp} dx = \\ &= \sum \Omega_{M_i} \frac{\alpha t'}{h_{сеч}} + \sum \Omega_{N_i} \alpha t_{cp} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \Delta_{it} &= \sum \int N_i \alpha t_{cp} dx = \\ &= \sum N_i l_j \alpha t_{cp_j} \end{aligned}$
от смещения опор	$\Delta_{ic} = -\sum R_i c_j$	

Подынтегральные функции в формуле Мора вычисляется отдельно для каждого участка расчетной схемы. В пределах каждого участка функции перемножаемых эпюр должны быть непрерывны. Участки делятся опорами, узлами, точками приложения сосредоточенных сил и моментов, началом и концом действия распределенной нагрузки.

Для удобства практических расчетов формулу Мора можно упростить и «разложить» (см.табл.5.1). Деформации от поперечных усилий значительно меньше деформаций изгиба, поэтому ими можно пренебречь. Знак «вектора» из формул условно исключен для удобства записи.

Обозначения, принятые в формуле Мора и в табл.5.1:

- Δ_{iP} , Δ_{it} , Δ_{ic} – перемещение точки в направлении воздействия единичной силы $X_i = 1$ от силового, температурного воздействия и смещения опор, соответственно;
- M_i , Q_i , N_i – эпюры изгибающих моментов, поперечных сил и продольных усилий, соответственно, от единичной силы $X_i = 1$;
- M_P , Q_P , N_P – эпюры моментов, поперечных сил и продольных усилий, соответственно, от силового воздействия;
- EI , GA/μ , EA – изгибная, сдвиговая и продольные жесткости элемента, соответственно;
- l_j – длина стержня фермы;
- $h_{сеч}$ – высота сечения элемента балки или рамы;
- $t' = |t_1 - t_2|$ – значение температурного перепада;
- $t_{cp} = \frac{t_1 + t_2}{2}$ – средняя температура элемента;
- α – коэффициент линейного расширения материала элемента;
- Ω_{Mi} , Ω_{Ni} – площадь участка эпюры моментов M_i и продольных сил N_i , соответственно;
- c_k – смещение опоры;
- R_i – реакция на опоре в направлении смещения c_j от единичной силы X_i .

При вычислениях произведение принимается со знаком «плюс», если векторы множителей на рассматриваемом участке совпадают:

- эпюры M_i и M_P отложены с одной стороны;
- эпюры N_i и N_P имеют одинаковый знак;
- воздействие положительного значения перепада температуры $+t'$ происходит со стороны растянутых волокон на эпюре M_i ;
- знак средней температуры t_{cp} совпадает со знаком на эпюре N_i ;
- направление реакции на опоре R_i от единичной силы X_i совпадает с направлением смещения опоры c_k .

Особенности определения компоненты от силового воздействия.

Для упрощения вычисления подынтегральных функций перемножения эпюр используют **правило Верещагина**: произведение двух эпюр на прямолинейном участке с постоянной жесткостью определяется как произведение первой эпюры на значение второй эпюры в точке под центром тяжести первой

эпюры. При этом первая эпюра может иметь любое очертание, вторая эпюра должна быть прямолинейной.

Рассмотрим общий случай перемножения эпюр, когда на участок балки пролетом l действует распределенная нагрузка интенсивностью q .

$\sum \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \Omega Y =$ $= \frac{1}{EI} \left[\frac{l}{6} (2a_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 a_2 + 2b_1 b_2) + \frac{ql^3}{12} \frac{a_2 + b_2}{2} \right]$	
<p>Пример: необходимо найти произведение эпюр M_P и M_1, приведенных на схеме справа.</p> $\sum \int \frac{M_1 M_P}{EI} dx =$ $= \frac{1}{EI} \left[\frac{4}{6} (2 \cdot (-3.5) \cdot 3 + (-3.5) \cdot (-2.5) + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot (-2.5)) + \right.$ $\left. + \frac{2 \cdot 4^3}{12} \frac{3 - 2.5}{2} \right] = -\frac{73}{6EI}$	

Рисунок 5.1. Общий случай перемножения эпюр методом Верещагина

Обратите внимание, что формула перемножения эпюр, приведенная на рис.5.1, соответствует сумме произведений трапециевидной и параболической эпюры M_1 на трапециевидную эпюру M_2 . При перемножении эпюр справедлив принцип независимости действия сил.

При решении большинства задач изучаемого курса встречаются менее сложные схемы перемножения эпюр, которые приведены в табл.5.2.

Таблица 5.2. Произведения эпюр $M_1 \times M_2$

эпюра M_2	эпюра M_1			
	$\frac{a_1 l}{2} \times \frac{2a_2}{3}$	$\frac{a_2 l}{2} \times \frac{2a_1 + b_1}{3}$	$\frac{ql^3}{12} \times \frac{a_2}{2}$	$\frac{ql^3}{6} \times \frac{3a_2}{4}$
	$\frac{a_1 l}{2} \times \frac{b_2}{3}$	$\frac{b_2 l}{2} \times \frac{a_1 + 2b_1}{3}$	$\frac{ql^3}{12} \times \frac{b_2}{2}$	$\frac{ql^3}{6} \times \frac{b_2}{4}$
	$\frac{a_1 l}{2} \times \frac{2a_2 + b_2}{3}$	$\frac{l}{6} (2a_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 a_2 + 2b_1 b_2)$	$\frac{ql^3}{12} \times \frac{a_2 + b_2}{2}$	$\frac{ql^3}{6} \times \frac{3a_2 + b_2}{4}$
	$\frac{a_1 l}{2} \times a_2$	$\frac{a_1 + b_1}{2} \cdot l \times a_2$	$\frac{ql^3}{12} \times a_2$	$\frac{ql^3}{6} \times a_2$

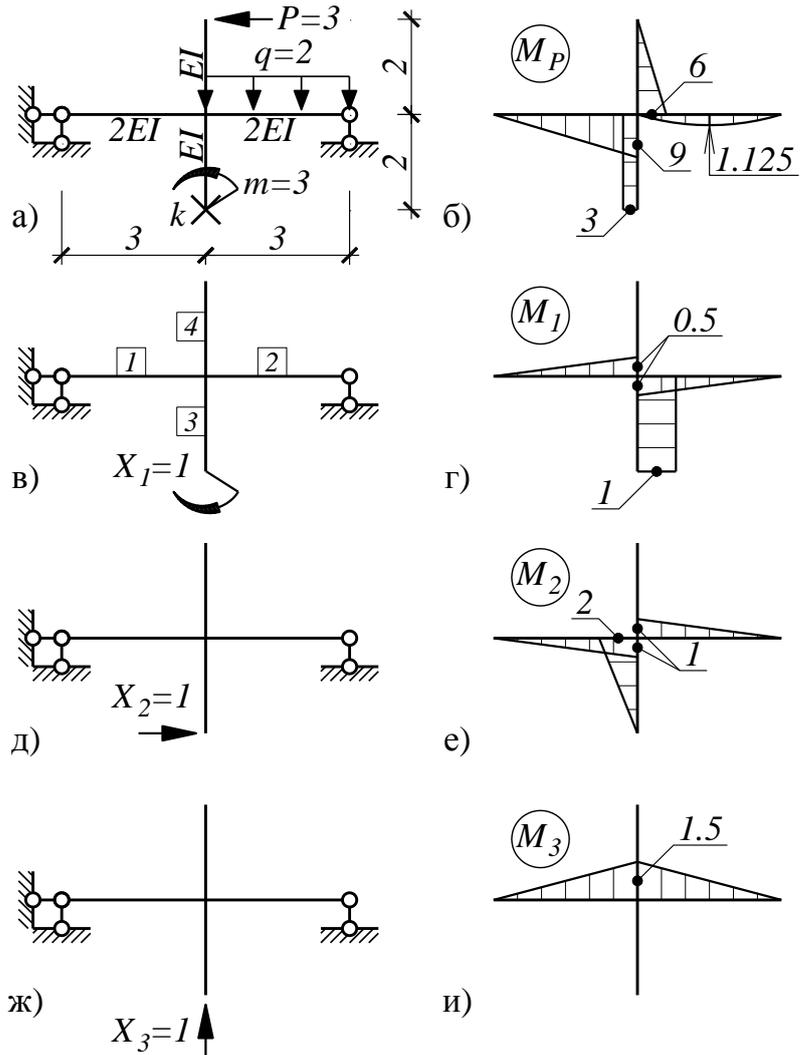
Пример 5.1. Определение перемещения точки в статически определимой раме от силового воздействия

Условие задачи: Определить перемещение точки k от силового воздействия. Жесткость ригелей $2EI$, стоек – EI . Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

Решение.

1. Выполняем кинематический анализ.
2. Определяем опорные реакции.
3. Строим грузовую эпюру изгибающих моментов.
4. К точке k , для которой необходимо определить перемещение, прикладываем поочередно единичный момент и силу.
5. Строим эпюры от приложенных единичных сил $X_i = 1$.
6. Определяем перемещение точки путем перемножения грузовой M_P и единичных эпюр M_1, M_2, M_3 как сумму произведений эпюр на участках 1, 2, 3 и 4:

$$\Delta_i = \sum \int \frac{M_i M_P}{EI} dx.$$



$$\Delta_1 = \sum \int \frac{M_1 M_P}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 \times \frac{2}{3} \cdot (-0.5) + \frac{2 \cdot 3^3}{12} \times \frac{1}{2} \cdot 0.5 \right] + \frac{1}{EI} [3 \cdot 2 \times (-1)] = -\frac{123}{16EI} - \text{поворот};$$

$$\Delta_2 = \sum \int \frac{M_2 M_P}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 \times \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2 \cdot 3^3}{12} \times \frac{1}{2} \cdot (-1) \right] + \frac{1}{EI} [3 \cdot 2 \times \frac{1}{2} \cdot 2] = \frac{111}{8EI} - \text{сдвиг по } X;$$

$$\Delta_3 = \sum \int \frac{M_3 M_P}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 \times \frac{2}{3} \cdot (-1.5) + \frac{2 \cdot 3^3}{12} \times \frac{1}{2} \cdot (-1.5) \right] = -\frac{135}{8EI} - \text{сдвиг по } Y.$$

При отрицательном Δ смещение происходит против направления единичной силы X_i .

Для практических расчетов полезно знать прогибы простых балок от силового воздействия.

Таблица 5.3. Прогибы простых балок от силового воздействия

$f = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI}$	$f = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI}$	$f = \frac{5}{348} \frac{ql^4}{EI}$	$f = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI}$

Особенности определения компоненты температурного воздействия.

При расчете рам на температурное воздействие принято разделять температуру на среднюю составляющую и перепад (см.рис.5.2). Средняя составляющая приводит к продольным деформациям, перепад – к изгибу элемента.

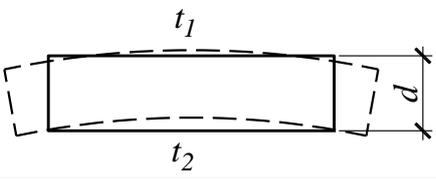
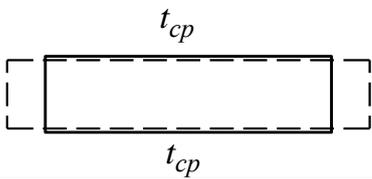
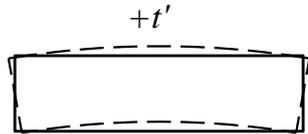
деформирование элемента от температурного воздействия	продольное деформирование элемента от средней составляющей	изгибная деформация элемента от перепада
		
$t_1 = t_{cp} + t'$; $t_2 = t_{cp} - t'$ $t_1 > t_2$	$t_{cp} = \frac{t_1 + t_2}{2}$	$t' = t_1 - t_2 $

Рисунок 5.2. Составляющие температурного воздействия

Перепад температуры вычисляется по абсолютному значению и прилагается со знаком «плюс» со стороны более нагретых волокон. Волокна растягиваются с менее нагретой стороны элемента.

Пример 5.2. Определение перемещения точки в статически определимой раме от температурного воздействия и смещения опор

Условие задачи: Определить перемещение точки k от температурного воздействия и смещения опор для схемы (а). Изгибная EI и продольная EA жесткость элементов постоянна. Толщина элемента $d = 0.1$ м, коэффициент температурного расширения $\alpha = 10^{-5}$ (1/град.). Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

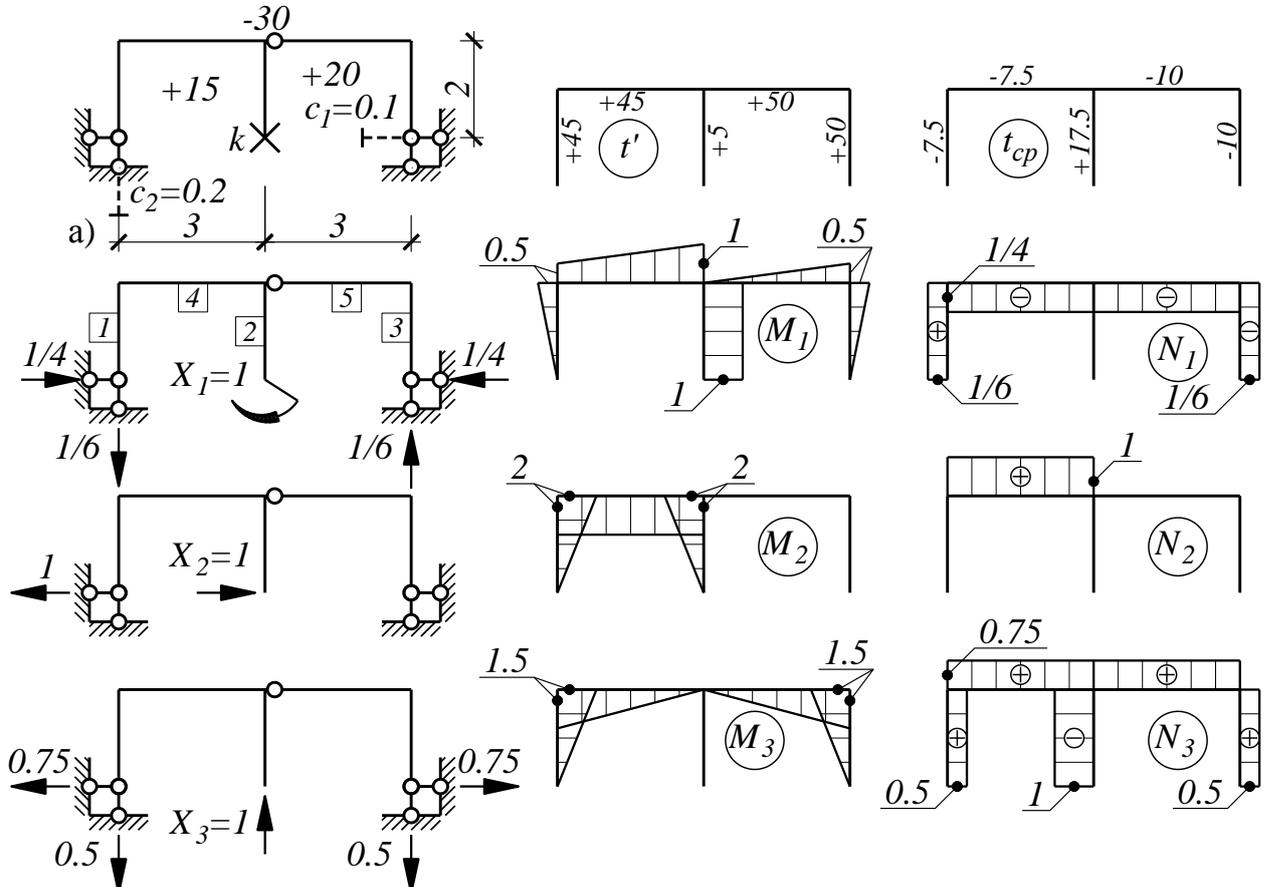


Рисунок 5.3. Схемы к примеру 5.2.

Решение:

1. Выполняем кинематический анализ.
2. Вычисляем и показываем на схеме перепад и значение средней температуры t' и t_{cp} .
3. К точке k , для которой необходимо определить перемещение, прикладываем поочередно единичный момент и силы $X_i = 1$.
4. Определяем опорные реакции, строим эпюры изгибающих моментов M_i и продольных усилий N_i от поочередно приложенных единичных сил $X_i = 1$.
5. Определяем перемещения от температурного перепада путем перемножения площади эпюры M_i на значение t' :

$$\Delta_{1t'} = \frac{\alpha}{h_{сеч}} \left[\frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 2 \times (-45) + 1 \cdot 2 \times 5 + \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 2 \times (-50) + \frac{0.5+1}{2} \cdot 3 \times (-45) + \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 3 \times (-50) \right] = -\frac{705\alpha}{4h_{сеч}};$$

$$\Delta_{2t'} = \sum \Omega_{M_2} \frac{\alpha t'}{h_{сеч}} = \frac{\alpha}{h_{сеч}} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \times 45 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \times (-5) + 2 \cdot 3 \times 45 \right] = \frac{350\alpha}{h_{сеч}};$$

$$\Delta_{3t'} = \sum \Omega_{M_3} \frac{\alpha t'}{h_{сеч}} = \frac{\alpha}{h_{сеч}} \left[\frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot 2 \times 45 + \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot 2 \times 50 + \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot 3 \times 45 + \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot 3 \times 50 \right] = \frac{1425\alpha}{4h_{сеч}}.$$

6. Определяем перемещения от средней температуры путем перемножения площади эпюры N_i на значение t_{cp} :

$$\Delta_{1t_{cp}} = \sum \Omega_{N_1} \alpha t_{cp} = \alpha \left[\frac{1}{6} \cdot 2 \times (-7.5) + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 2 \times (-10) + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 3 \times (-7.5) + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 3 \times (-10) \right] = \frac{335\alpha}{24};$$

$$\Delta_{2t_{cp}} = \sum \Omega_{N_2} \alpha t_{cp} = \alpha [1 \cdot 3 \times (-7.5)] = -\frac{45\alpha}{2};$$

$$\Delta_{3t_{cp}} = \alpha [0.5 \cdot 2 \times (-7.5) + (-1) \cdot 2 \times 17.5 + 0.5 \cdot 2 \times (-10) + 0.75 \cdot 3 \times (-7.5) + 0.75 \cdot 3 \times (-10)] = -\frac{735\alpha}{8}.$$

7. Определяем перемещения от смещения опор как сумму произведений реакций опор R_i на величину смещения c_j :

$$\Delta_{1c} = -\sum R_1 c_k = -[(-1/6) \times (-0.2) + (-1/4) \times (-0.1)] = -\frac{7}{120};$$

$$\Delta_{2c} = -\sum R_2 c_k = 0;$$

$$\Delta_{3c} = -\sum R_3 c_k = -[(-0.5) \times (-0.2) + 0.75 \times (-0.1)] = -\frac{1}{40}.$$

8. Определяем суммарные смещения узлов как сумму перемещений от температурного воздействия и смещения опор:

Перемещения		смещение точки k по направлению единичных сил		
		X_1	X_2	X_3
– перемещения от перепада температуры	$\Delta_{it'}$	-0.017625	0.035000	0.035625
– перемещения от средней температуры	$\Delta_{it_{cp}}$	0.000130	-0.000919	-0.003675
– перемещения от смещения опор	Δ_{ic}	-0.058333	0	-0.025000
Суммарные перемещения:	Δ_i	-0.075828	0.034081	0.00695

После изучения данной темы студент должен обладать следующими компетенциями:

- **знать** формулу определения любого перемещения от внешнего воздействия;
- **уметь** выбрать единичное состояние и построить для него единичные эпюры M , Q , N и эпюру M_p^0 от внешней нагрузки;

- *владеть* приемами перемножения эпюр и получением искомого перемещения;
- суметь *ответить* на следующие вопросы:
 1. Для чего определяется перемещение сечений сооружения?
 2. Чем отличается определение перемещений в рамах, балках от ферм?
 3. Какие две основные деформации учитываются при определении перемещений от изменения температуры?
 4. Каков смысл каждого слагаемого при определении перемещений в раме?
 5. Каково правило знаков при определении перемещений от P , t и c ?

Задача 5.1. Определение перемещения точки в статически определимой раме от силового воздействия

Для рам, приведенных на стр.56...58, определить горизонтальное, вертикальное перемещение и угол поворота точки k от силового воздействия. Изгибная EI и продольная EA жесткость элементов постоянна. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.5.4. Выполнить анализ полученных перемещений в зависимости от геометрических характеристик.

Таблица 5.4. Исходные параметры к задаче 5.1

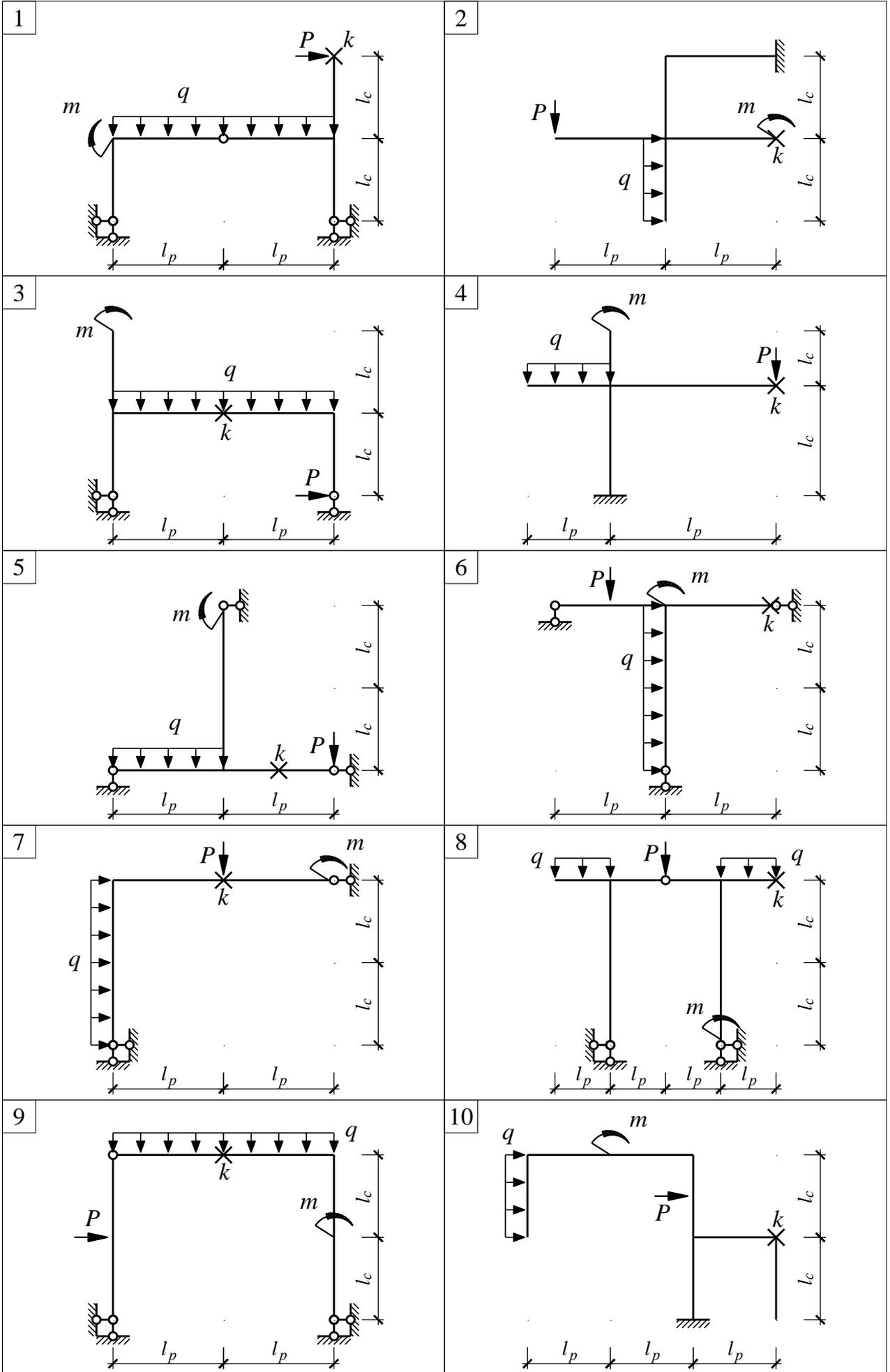
номер группы	l_p , м	l_c , м	m , кН·м	P , кН	q , кН/м	Сложность задания	Переменные параметры	
1	2	$L + 2$	F	2	2	3	$L = 0$	$F = 0$
2	2	$L + 3$	F	2	3	4	$L = 1$	$F = 3$
3	3	$L + 1$	F	3	4	6, с анализом	$L = 0$	$F = 4$
4	3	$L + 2$	F	3	2		$L = 2$	
5	3	$L + 3$	F	3	3		$L = 4$	

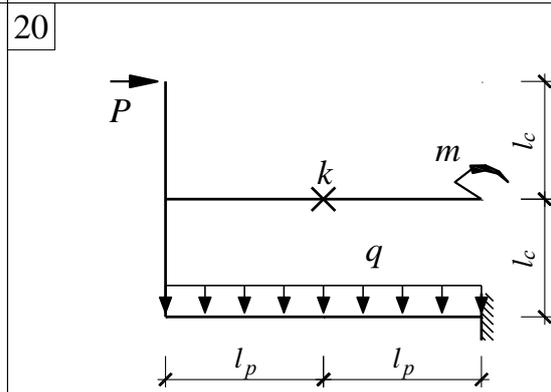
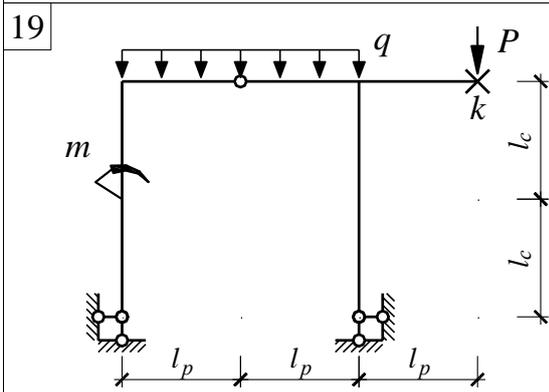
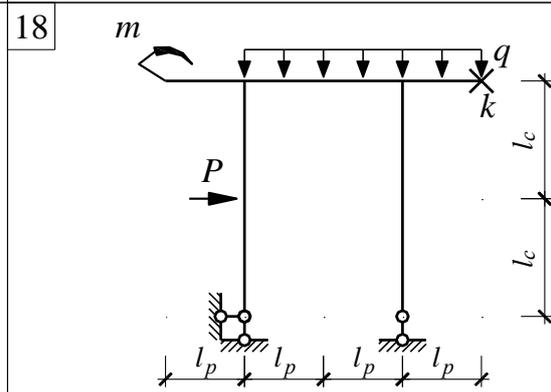
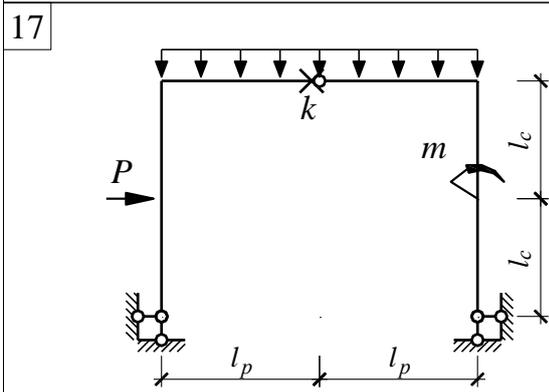
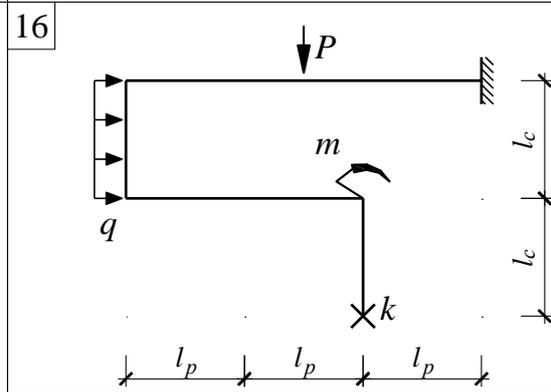
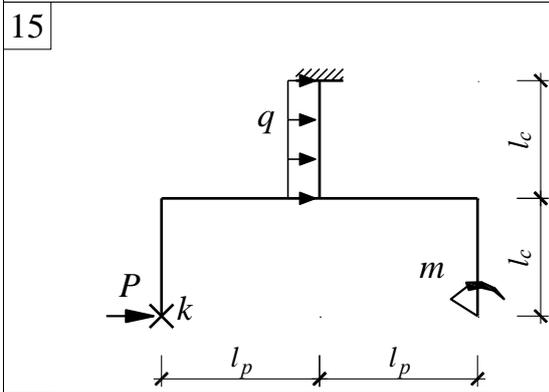
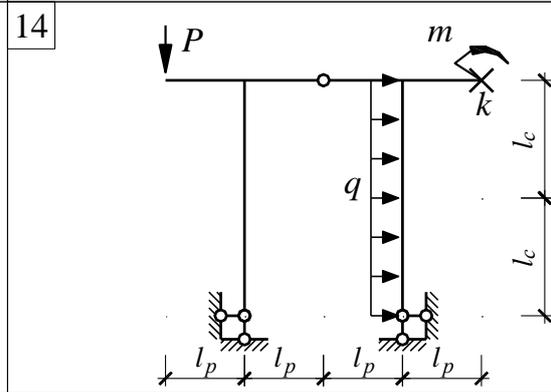
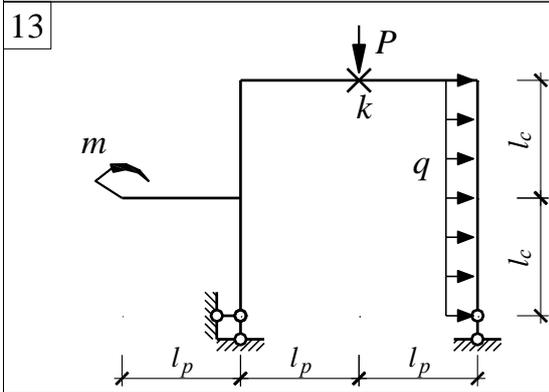
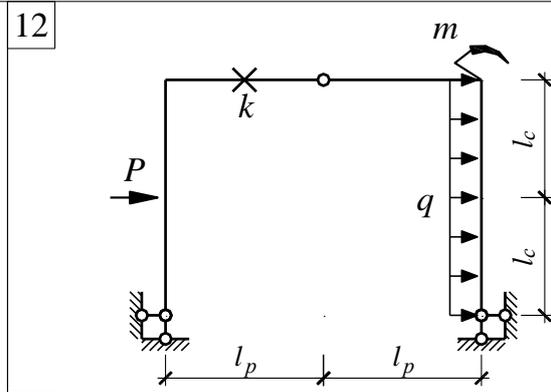
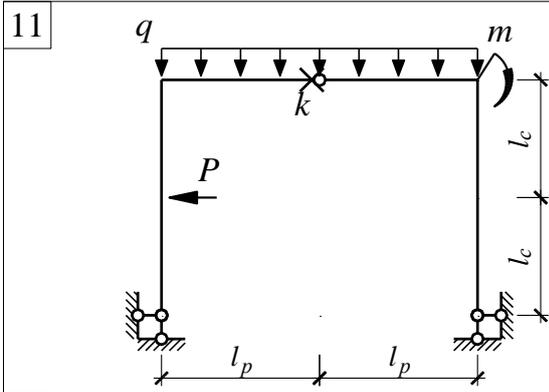
Задача 5.2. Определение перемещения точки в статически определимой раме от температурного воздействия и смещения опор

Для рам, приведенных на стр.59...61, определить перемещения точки k от температурного воздействия и смещения опор. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.5.5. Значение коэффициента линейного расширения принимать равным $\alpha = 10^{-5}$ 1/град, высоту сечения балок $h_{сеч.} = 0.1$ м. Выполнить анализ полученных результатов в зависимости от внешнего температурного воздействия.

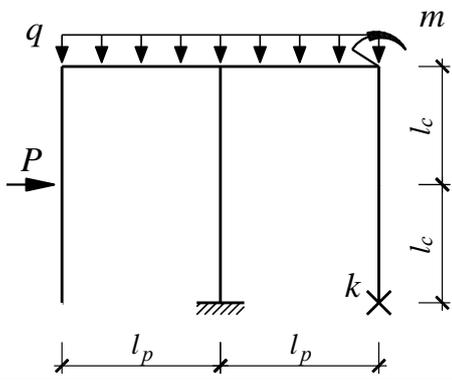
Таблица 5.5. Исходные параметры к задаче 5.2

номер группы	l_p , м	l_c , м	t_1 , град.	t_2 , град.	t_3 , град.	c_1 , мм	c_2 , мм	Сложность задания	Переменные параметры	
1	3	$L + 3$	+20	F	-20	10	5	3	$L = 0$	$F = 0$
2	3	$L + 2$	+20	F	-30	10	10	4	$L = 1$	$F = +20$
3	3	$L + 1$	+30	F	-10	10	15	6 с анализом		$F = -10$
4	2	$L + 3$	+30	F	-20	15	5		$L = 2$	$F = -20$
5	2	$L + 2$	+30	F	-30	15	10			$F = -30$

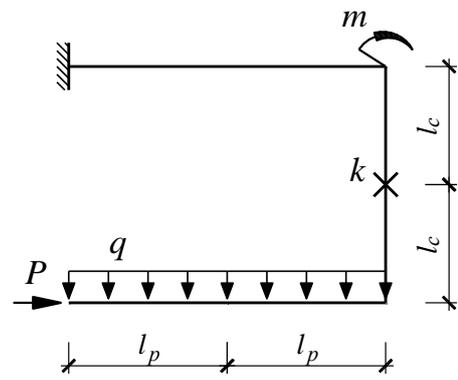




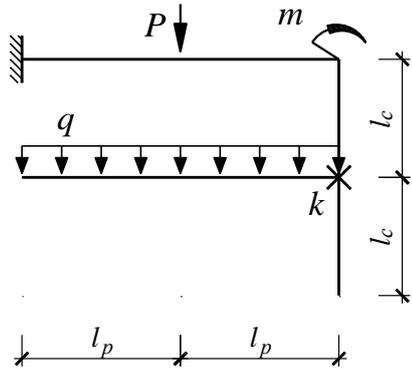
21



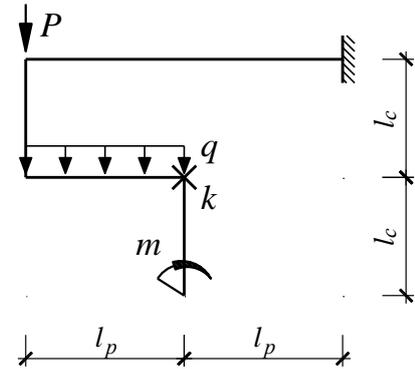
22



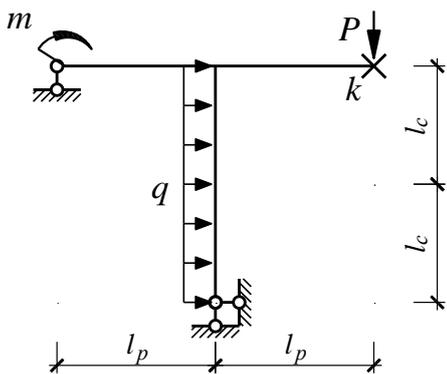
23



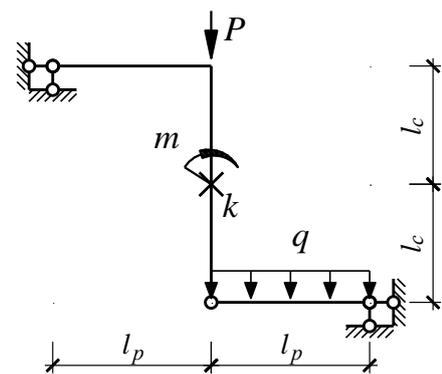
24



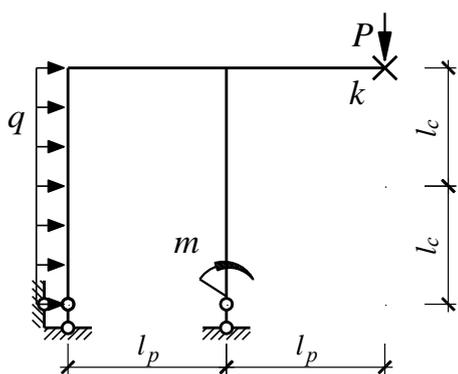
25



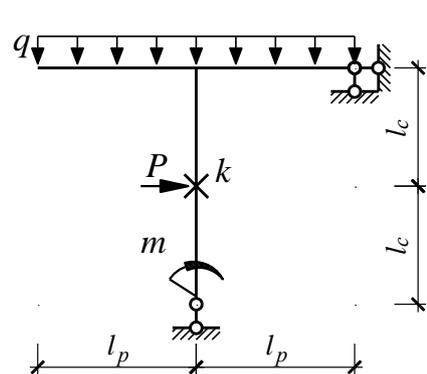
26



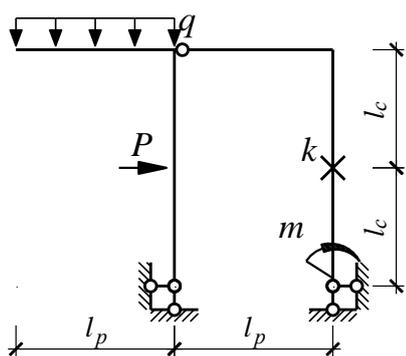
27



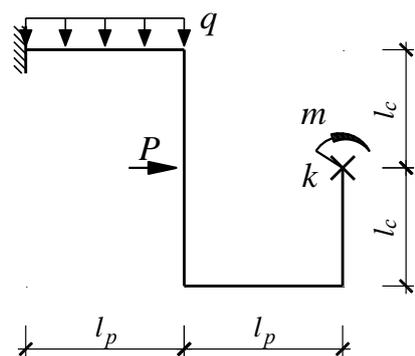
28

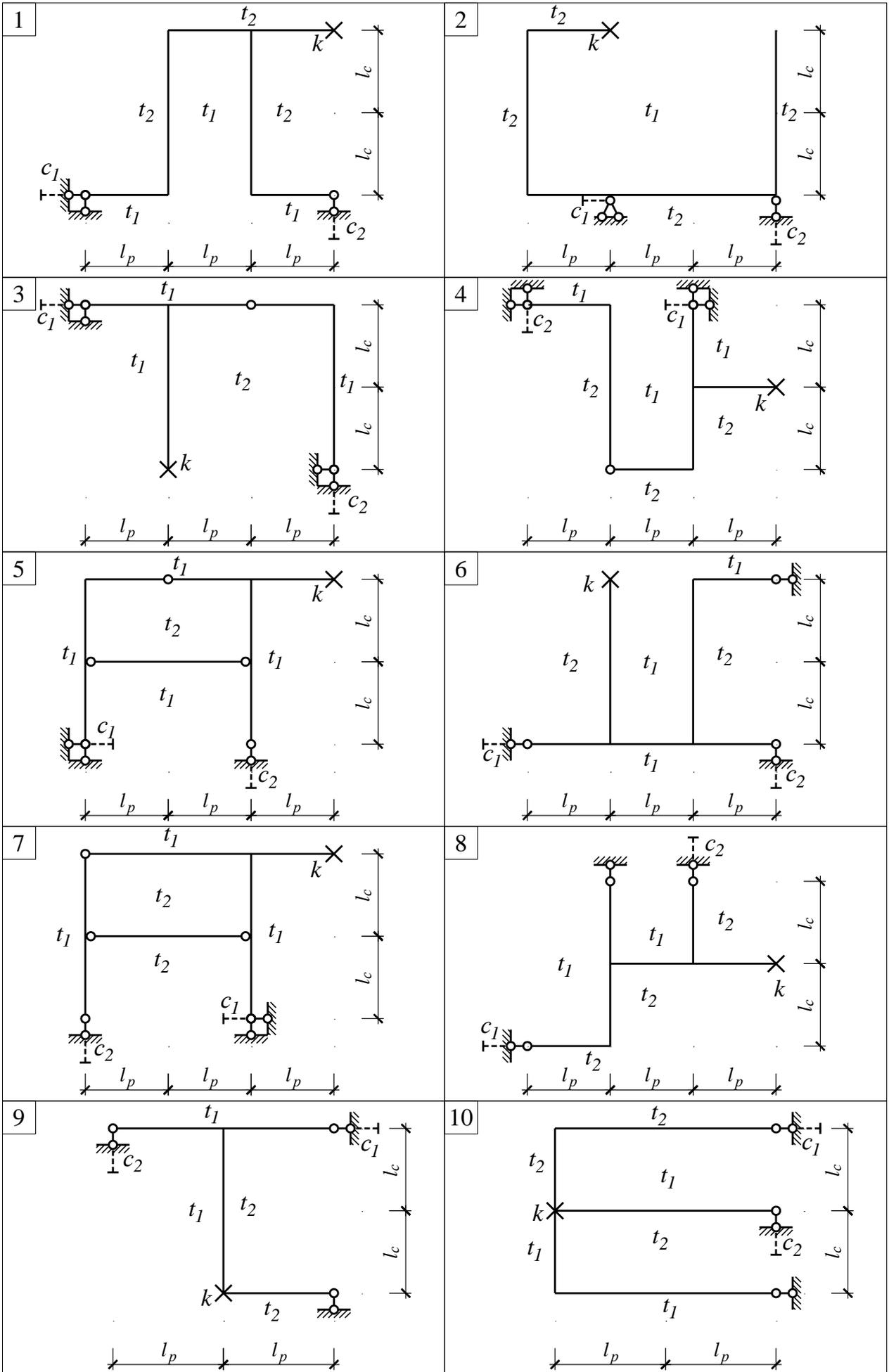


29

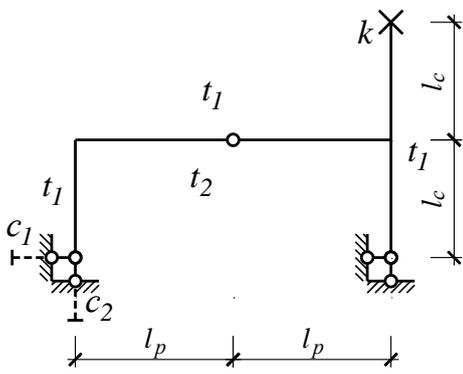


30

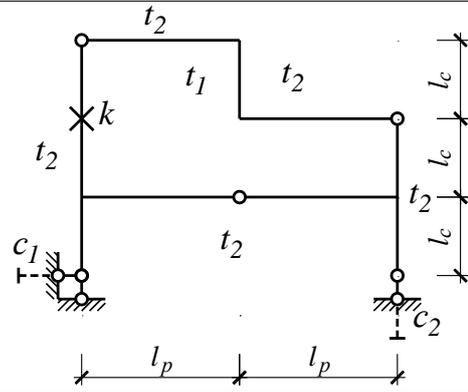




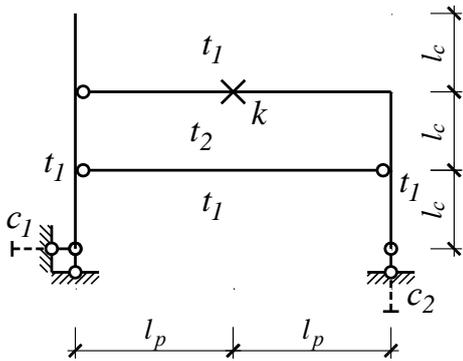
11



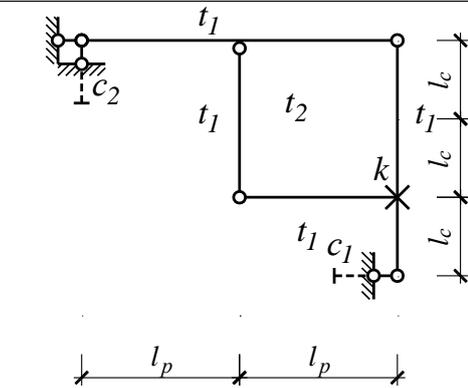
12



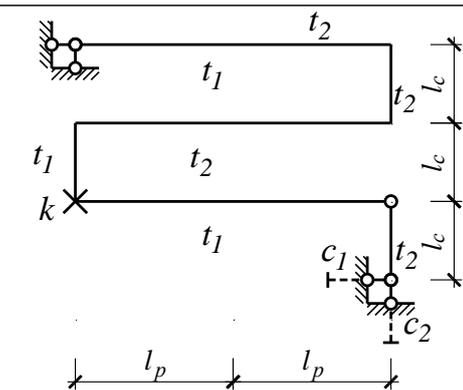
13



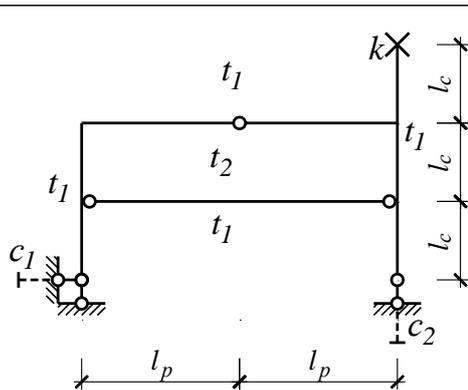
14



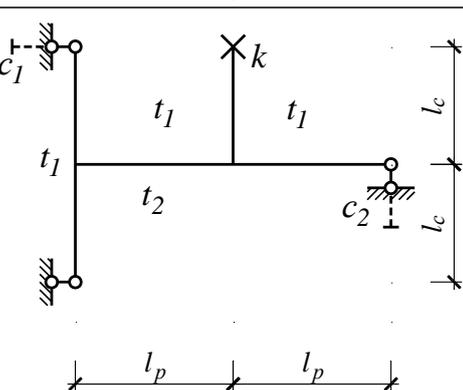
15



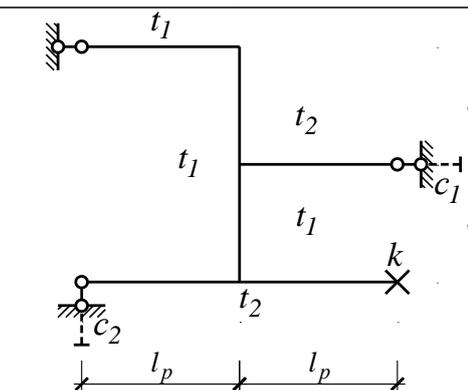
16



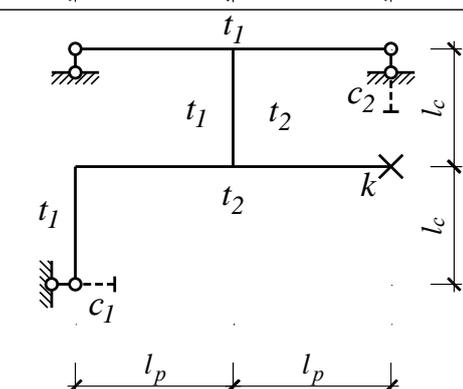
17



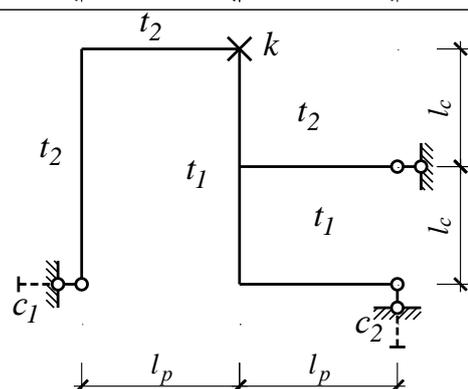
18



19



20



ТЕМА 6. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ

Кроме статического воздействия, конструкции могут быть подвержены воздействиям подвижных нагрузок (автомобильный или железнодорожный транспорт, погрузочно-разгрузочное или крановое оборудование и т.д.). Многообразие возможного местоположения подвижной нагрузки сводит к большой трудоемкости поиска критических усилий, так как приходится строить эпюры внутренних усилий или определять опорные реакции для каждого возможного местоположения нагрузки. В то же время, положение максимальных усилий в системе может быть однозначно определено, например: в середине пролёта или над опорами могут возникать максимальные усилия.

Для более удобного анализа систем, которые подвержены воздействию подвижной нагрузки, используют линии влияния. Линия влияния – графическое изображение множества значений исследуемого фактора (изгибающий момент, поперечная сила, опорная реакция и т.д.) в определенной точке, возникающее от произвольного положения однонаправленной единичной силы и откладываемое в точке ее приложения. При построении линии влияния используют статический, кинематический методы и метод замены связей.

При использовании статического метода определяют закон изменения усилия в определенной точке от положения единичной силы на исследуемом участке. По этому закону на контуре расчетной схемы строят график – линию влияния. Метод представляет определенные трудности в связи с необходимостью вывода формул для каждого участка.

Кинематический метод основан на принципе возможных перемещений (принцип Лагранжа). Линия влияния строится по контуру деформированного состояния механизма, полученного после удаления связи и приложения единичного перемещения в направлении искомого усилия. Для опорных реакций – перемещение или поворот опоры, изгибающего момента – поворот относительно врезанного шарнира, поперечных сил – сдвиг концов стержней по сечению.

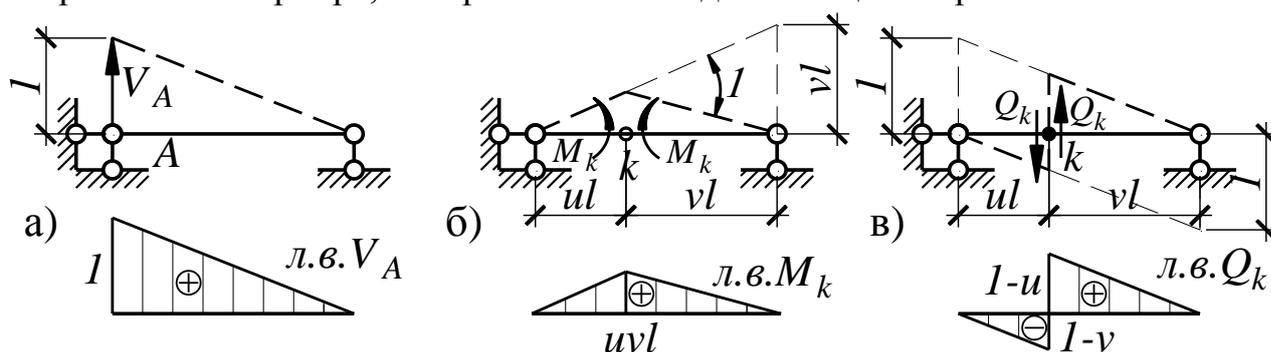


Рисунок 6.1. Схема построения линий влияния кинематическим методом

Балка произвольно может быть загружена определенной группой нагрузок, включающей действия сосредоточенных сил и моментов, распределенных нагрузок. Усилие S от действия произвольной нагрузки по линиям влияния определяется следующей зависимостью:

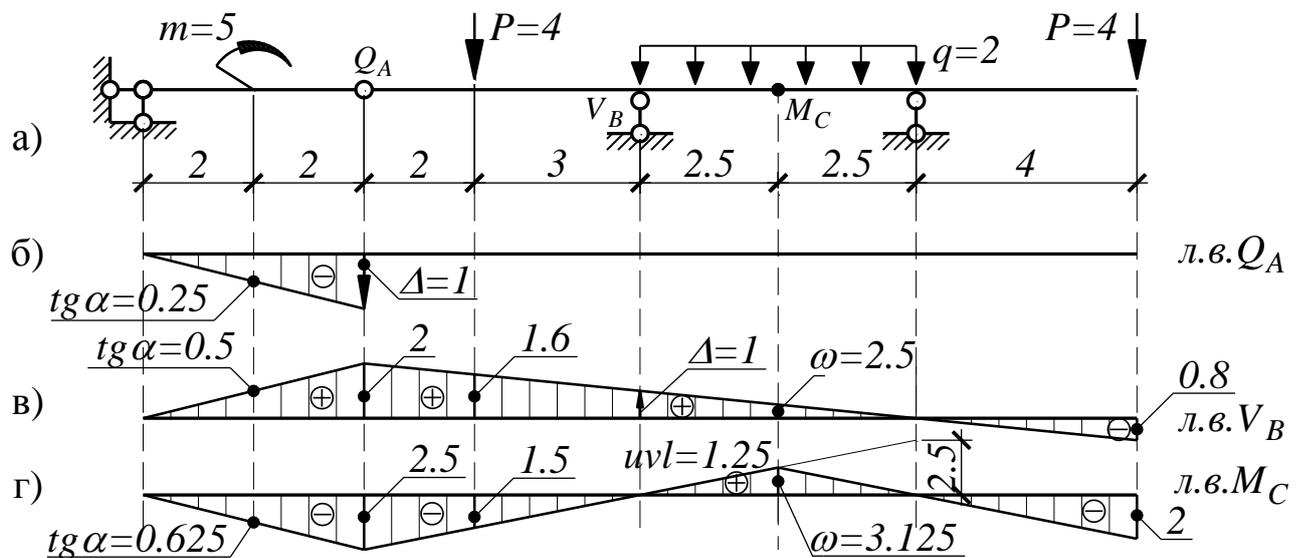
$$S_{л.в.} = \sum P_i y_i + \sum q_j \omega_j + \sum m_k \operatorname{tg} \alpha_k,$$

где y_i – ординаты линии влияния под силой P_i ; ω_i – площадь линии влияния на загруженном участке от распределенной нагрузки интенсивностью q_i ; $\operatorname{tg} \alpha_i$ – тангенс угла наклона линии влияния в точке приложения сосредоточенного момента m_i .

Знак на линии влияния проставляется по знаку исследуемого усилия, возникающего от приложения положительно направленной единичной силы в исследуемой точке. Сила и распределенная нагрузка положительные, если их направление совпадает с направлением единичной силы. Изгибающий момент положителен, если направлен против совмещения с контуром линии влияния.

Пример 6.1. Построение линий влияния в статически определимой балке и определение усилий от произвольной нагрузки

Для схемы (а) построить линии влияния Q_A , V_B , M_C кинематическим способом и определить по ним значение усилия от заданной нагрузки.



Определение значения усилий по линиям влияния:

$$Q_A = m \cdot (-0.25) = -1.25;$$

$$V_B = m \cdot 0.5 + P \cdot 1.6 + q \cdot 2.5 - P \cdot 0.8 = 10.7;$$

$$M_C = m \cdot (-0.625) - P \cdot 1.5 + q \cdot 3.125 - P \cdot 2 = -10.875.$$

После изучения данной темы студент должен обладать следующими компетенциями:

- **знать** методы построения линий влияния и возможность их использования в дальнейшем;
- **уметь** строить линии влияния в балочных системах;
- **владеть** использованием линий влияния для определения максимальных усилий от различных силовых факторов;
- суметь **ответить** на следующие вопросы:
 1. Что такое линии влияния?
 2. Где можно использовать линии влияния?
 3. Какие методы построения линии влияния Вы знаете?

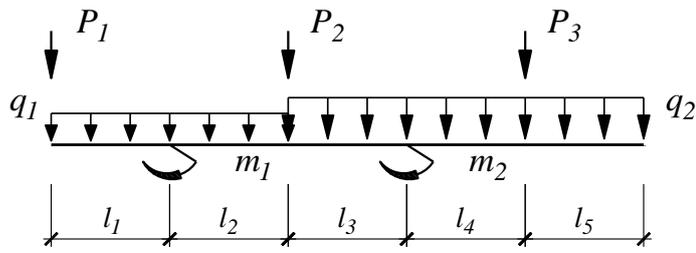
Задача 6.1. Построение линий влияния в статически определимых балках

Для приведенных на стр.65 расчетных схем многопролетных балок построить линии влияния вертикальной реакции опоры R , изгибающего момента M , поперечной силы Q в указанных сечениях. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.6.1. Сопоставить значения усилий, вычисленных по линиям влияния, с соответствующими значениями усилий, определенных аналитическим способом.

Таблица 6.1. Исходные параметры к задаче 6.1

Сложность задачи, балл	6	4	3
Переменные параметры	$m = 4$	$m = 2$	$m = 0$
	$P = 6$	$P = 4$	$P = 2$
	$q = 2$	$q = 0$	$q = 0$

Номер группы	Пролеты, м					m , кН·м		P , кН			q , кН/м	
	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	m_1	m_2	P_1	P_2	P_3	q_1	q_2
1	2	4	4	4	2	m			P			q
2	2	2	4	4	2		m			P	q	
3	2	4	2	2	2	m		P				q
4	2	4	4	2	2		m		P		q	
5	2	4	4	4	2	m				P		q



1		16	
2		17	
3		18	
4		19	
5		20	
6		21	
7		22	
8		23	
9		24	
10		25	
11		26	
12		27	
13		28	
14		29	
15		30	

ГЛАВА 3. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Статически неопределимыми называют такие системы, которые невозможно рассчитывать с использованием только уравнений статики. Степень свободы таких систем $W < 0$ и определяет количество «лишних» связей $L = -W$.

Статически неопределимые системы имеют ряд отличий от статически определимых систем:

- внутренние усилия и перемещения зависят от количества «лишних» связей и соотношения жесткостей элементов;
- распределение усилий в элементах зависит от соотношения их жесткостей;
- температурное воздействие и смещения опор приводят к появлению внутренних усилий, чего не наблюдается в статически определимых системах;
- системы обладают большим запасом надежности, т.к. разрушение даже всех «лишних» связей не превращает ее в механизм.

Существуют два основных метода расчета статически неопределимых систем – метод сил и метод перемещений. На основе этих методов созданы комбинированный, смешанный и приближенные методы расчета, которые будут рассмотрены далее.

Тема 7. Расчет рам методом сил

Объясним сущность метода сил на примере системы с одним неизвестным $L = 1$.

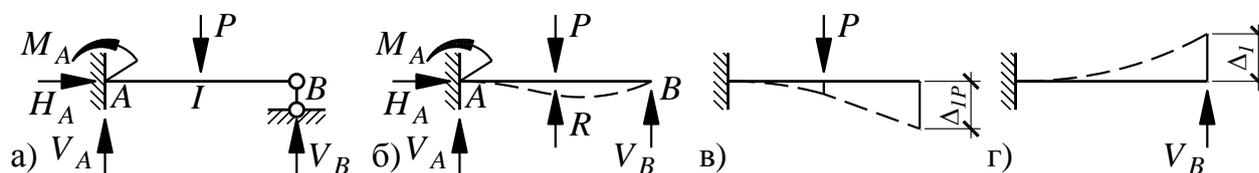


Рисунок 7.1. Анализ системы с одним неизвестным

Очевидно, что для схемы (а) невозможно определить опорные реакции, используя только уравнениями статики. В то же время балка будет деформироваться от приложенной к ней внешней нагрузки P и остановится в определенном равновесном состоянии (б), когда действие силы P компенсируется сопротивлением балки $R = P$, т.е. точка равновесия существует и опорные реакции при этом будут иметь определенные значения.

Согласно принципа независимости действия сил, конечное деформированное состояние балки (б) будет определяться как сумма деформаций от силы P и одной из неизвестных реакций, например, V_B . Из начального условия – наличия вертикальной связи в точке B , сумма перемещений для точки B должна равняться нулю, т.е. $\Delta_{IP} + \Delta_1 = 0$.

Заметим, что схемы (в) и (г) являются статически определимыми и перемещения точки B легко определить с помощью формулы Мора. Из условия ра-

венства перемещений можно найти одно из неизвестных V_B , далее и остальные опорные реакции. Задача будет решена.

Данный подход можно применить также к системам с двумя и более «лишними» связями. Ознакомимся с основными положениями, принятыми при расчете систем методом сил.

«Лишние» связи удаляют до тех пор, пока система не станет статически определимой, но сохранит при этом геометрическую неизменяемость. Реакции удаленных связей заменяют на неизвестные усилия X_1, X_2, \dots, X_n и последовательно находят перемещения от $X_i = 1$. Значение δ_{ij} означает перемещение точки i в направлении силы X_i от действия единичной силы $X_j = 1$, приложенной к точке j . Значение Δ_{iP} означает перемещение точки i в направлении силы X_i от действия внешней нагрузки.

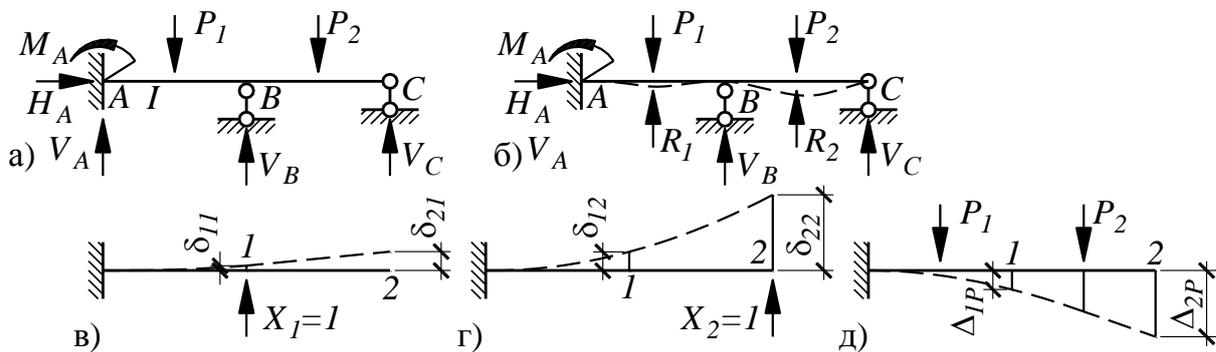


Рисунок 7.2. Анализ системы с двумя неизвестными

Используя приведенную схему, запишем систему канонических уравнений метода сил с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

решение которой позволяет определить значения реакций удаленных связей $V_B = X_1$ и $V_C = X_2$ и решить задачу. При этом, по теореме Максвелла о взаимности обобщенных единичных перемещений, справедлива зависимость $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Решение системы канонических уравнений с двумя неизвестными можно выполнить следующим способом:

$$X_1 = -\frac{\delta_{12}\Delta_{2P} - \delta_{22}\Delta_{1P}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{21}\delta_{12}}; \quad X_2 = -\frac{\delta_{11}\Delta_{2P} + \Delta_{1P}}{\delta_{12}}$$

Существует ряд удобных приемов при решении задач методом сил, которые позволяют систематизировать и упростить ход решений. Рассмотрим порядок расчета статически неопределимых рам методом сил:

1. Выполняется кинематический анализ системы и определяется количество «лишних» связей $L = 3K - III$.
2. Строится основная система метода сил путем отбрасывания «лишних» связей и замены их неизвестными реакциями X_i . Основных систем в методе сил может быть несколько, однако выбранная должна быть статиче-

ски определяемой, геометрически неизменяемой и удобной для расчета. Схемы удаления лишних связей приведены в табл.7.1, 7.2, 7.3.

3. Записывают систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} + \Delta_{1c} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} + \Delta_{2t} + \Delta_{2c} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} + \Delta_{nt} + \Delta_{nc} = 0 \end{cases}$$

Например, при решении рам на силовое воздействие с одним неизвестным $L = 1$, система канонических уравнений запишется в виде:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

4. Строят единичные эпюры изгибающих моментов $M_1, M_2 \dots M_n$ в основной системе метода сил от поочередного приложения неизвестных реакций, изначально принятых равными единице $X_1 = 1, X_2 = 1 \dots X_n = 1$.
5. Строят грузовую эпюру изгибающих моментов M_P^0 в основной системе метода сил при решении задач от силового воздействия или схемы распределения температур t' и t_{cp} при решении задач на температурное воздействие или от заданных смещений опор.
6. Способом Верещагина определяют коэффициенты при неизвестных:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum \int \frac{M_i M_j}{EI} dx; \quad \delta_{ii} = \sum \int \frac{M_i^2}{EI} dx.$$

При $L > 1$ строят суммарную единичную эпюру от действия всех единичных сил $M_\sigma = M_1 + M_2 + \dots + M_n$ и проводят проверку коэффициентов:

$$\sum \delta = \sum \int \frac{M_\sigma^2}{EI} dx = \sum \delta_{ii} + 2 \sum \delta_{ij}.$$

Определяют свободные члены системы канонических уравнений:

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{M_i M_P^0}{EI} dx \quad \text{— от силового воздействия;}$$

$$\Delta_{it} = \sum \Omega_{M_i} \frac{\alpha t'}{h_{ceч}} + \sum \Omega_{N_i} \alpha t_{cp} \quad \text{— от температурного воздействия;}$$

$$\Delta_{ic} = - \sum_k R_i c_k \quad \text{— от смещения опор.}$$

7. Решают систему канонических уравнений и определяют неизвестные усилия в отброшенных связях $X_1, X_2 \dots X_n$.

8. Строят промежуточные эпюры путем перемножения единичных эпюр с полученными значениями реакций $M_1 \cdot X_1, M_2 \cdot X_2 \dots M_n \cdot X_n$ и окончательную эпюру путем сложения промежуточных и грузовой эпюр:

$$M_P = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + \dots + M_n \cdot X_n + M_P^0 - \text{от силового воздействия};$$

$$M_t = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + \dots + M_n \cdot X_n - \text{от температурного воздействия};$$

$$M_c = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + \dots + M_n \cdot X_n - \text{от смещения опор};$$

9. Проводят проверки правильности построения окончательной эпюры M :
- статическую проверку – путем проверки равновесия моментов, приложенных к узлам;
 - кинематическую проверку – путем перемножения одной из единичных эпюр с окончательной эпюрой изгибающих моментов:

$$\Delta_i = \sum \int \frac{M_i M_P}{EI} dx = 0 - \text{для эпюры от силового воздействия};$$

$$\Delta_i = \sum \int \frac{M_i M_t}{EI} dx + \Delta_{it} = 0 - \text{для эпюры от температурного воздействия};$$

$$\Delta_i = \sum \int \frac{M_i M_c}{EI} dx + \Delta_{ic} = 0 - \text{для эпюры от смещения опор}.$$

10. По эпюре изгибающих моментов M строят эпюру поперечных сил Q , используя дифференциальную зависимость Журавского: $Q = dM/dx$.

11. По эпюре Q строят эпюру продольных усилий N , рассматривая равновесие узлов с учетом возможной узловой нагрузки P .

12. Проводят статическую проверку правильности построения эпюр Q и N путем составления уравнений проекций сил на оси X и Y для всей системы после определения опорных реакций из вырезанных опорных узлов.

При выборе основных систем метода сил необходимо знать схемы удаления «лишних» связей в опорах и внутри системы (см. табл. 7.1, 7.2).

Таблица 7.1. Схемы удаления «лишних» связей в опорах

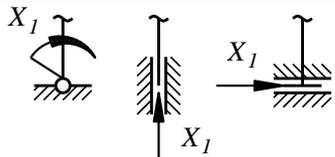
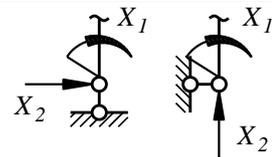
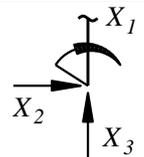
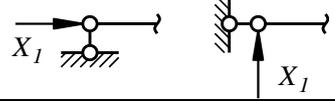
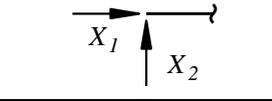
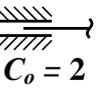
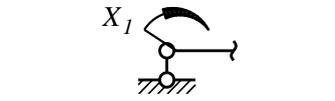
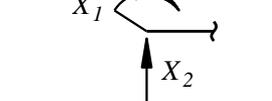
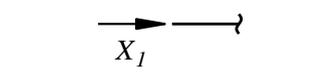
Связь существующая	Число отбрасываемых связей и неизвестные реакции, приложенные по направлению связей		
	одна	две	три
 $C_o = 3$			
 $C_o = 2$			–
 $C_o = 2$			–
 $C_o = 1$		–	–

Таблица 7.2. Схемы удаления «лишних» внутренних связей

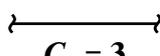
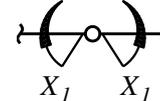
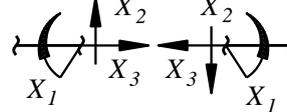
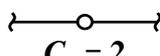
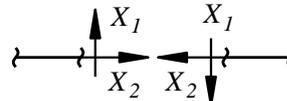
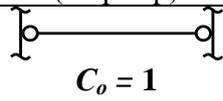
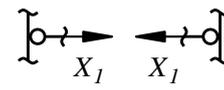
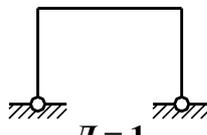
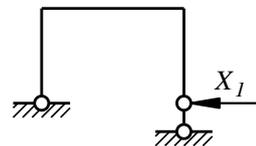
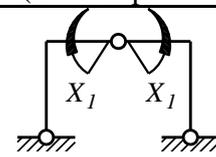
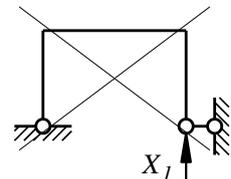
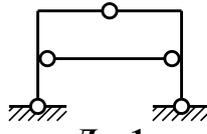
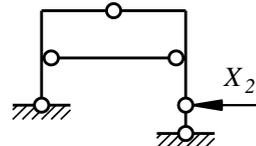
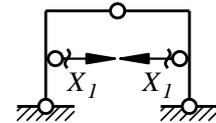
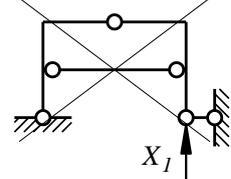
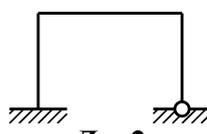
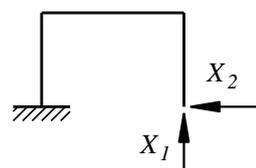
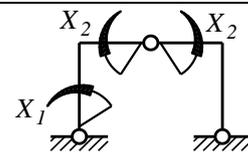
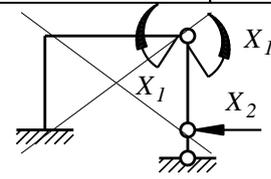
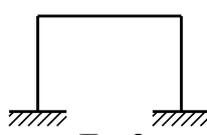
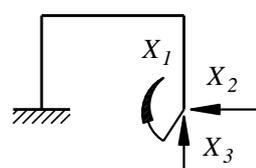
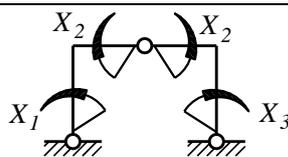
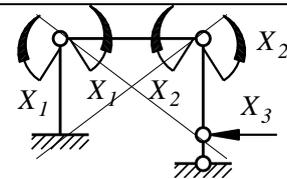
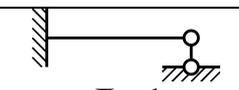
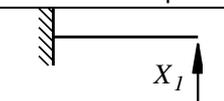
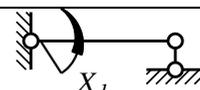
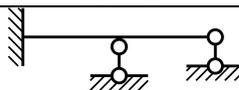
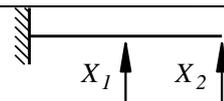
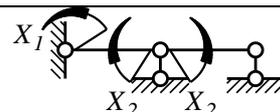
Связь существующая	Число отбрасываемых связей и неизвестные реакции, приложенные по направлению связей		
	одна	две	три
 $C_0 = 3$ (припайка)	 X_1 X_1	—	 X_1 X_2 X_3
 $C_0 = 2$ (шарнир)	—	 X_1 X_2	—
 $C_0 = 1$ (затяжка)	 X_1 X_1	—	—

Таблица 7.3. Некоторые примеры удаления «лишних» связей в системах

Вид схемы	Примеры основной системы метода сил		
	1 (произвольная)	2 (симметричная)	неправильно!
 $L = 1$			
 $L = 1$			
 $L = 2$			
 $L = 3$			
 $L = 1$			—
 $L = 2$			—

При расчете симметричных рам методом сил производят группировку неизвестных, представляющие собой парные неизвестные – симметричные или кососимметричные составляющие неизвестных усилий. При симметричном нагружении кососимметричные неизвестные будут равны нулю, при кососимметричном нагружении – симметричные. Следует учесть, что любое нагружение

также может быть разложено на симметричную и кососимметричную составляющие.

	<p>схема разложения на составляющие:</p> $\begin{cases} X_1 = X_1^c + X_1^{kc} \\ X_1' = X_1^c - X_1^{kc} \end{cases}$	<p>кососимметричная основная система: кососимметричные составляющие загрузки и неизвестные</p>	<p>симметричная основная система: симметричные составляющие загрузки и неизвестные</p>
<p>неизвестных 4</p>		<p>неизвестных 2</p>	<p>неизвестных 2</p>

Рисунок 7.3. Схема группировки неизвестных метода сил

После изучения данной темы студент должен обладать следующими компетенциями:

- **знать** порядок расчета статически неопределимых систем методом сил на силовое, температурное воздействия и смещение опор;
- **уметь** пользоваться методом сил для расчета статически неопределимых систем (балок, рам, арок, ферм и др. стержневых систем), а главное – научиться правильно выбирать основную систему, строить единичные, грузовые и окончательные эпюры внутренних усилий;
- **владеть** правилами расчета статически неопределимых систем методом сил, проверкой расчета, умело использовать характер внешнего воздействия на расчетную схему, пользоваться группировкой неизвестных, рациональными приемами расчета неразрезных балок, бесшарнирных арок и ферм;
- суметь **ответить** на следующие вопросы:
 1. Как определить число лишних связей в статически неопределимой системе?
 2. Каким требованиям должна удовлетворять основная система?
 3. Физический смысл канонических уравнений?
 4. В чем отличие физического смысла коэффициентов от свободных членов?
 5. Какая основная система считается рациональной?
 6. Чем отличается основная система от заданной?
 7. На основе какого метода основано построение окончательной эпюры **M**?
 8. Назовите проверки расчета систем методом сил?
 9. Как строятся эпюры поперечных и продольных сил?
 10. Чем отличается расчет систем на температурное воздействие?
 11. Чем отличается расчет систем на смещение опор?

Пример 7.1. Построение эпюр внутренних усилий для однажды статически неопределимой рамы от силового воздействия

Условие задачи: Для схемы (а) построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от силового воздействия. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

Решение.

1. Выполняем кинематический анализ.
 $\Pi = 3K - \text{III} = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ – система однажды статически неопределима и геометрически неизменяема.

2. Строим основную систему метода сил (б).

3. Записываем каноническое уравнение:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

4. Строим единичную эпюру моментов M_1 от единичной силы $X_1 = 1$, приложенной к основной системе метода сил (в).

5. Строим грузовую эпюру M_P^0 от нагрузки, приложенной в основной системе метода сил (г).

6. Определяем коэффициенты при каноническом уравнении:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} [4 \cdot 3 \times 4] + \\ &+ \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \times \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = \frac{48}{EI} + \frac{32}{3EI} = \frac{176}{3EI} \\ \Delta_1 &= \sum \int \frac{M_1 M_P^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[4 \cdot 3 \times \frac{2-10}{2} \right] + \\ &+ \frac{1}{2EI} \left[\frac{2 \cdot 4^3}{12} \times \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \times \left(\frac{1}{3} \cdot 12 - \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \right] = \\ &= -\frac{48}{EI} + \frac{16}{EI} = -\frac{32}{EI} \end{aligned}$$

7. Решаем каноническое уравнение:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-32}{EI} \div \frac{176}{3EI} = \frac{6}{11}$$

8. Строим промежуточную $M_1 \cdot X_1$ и окончательную эпюры $M_P = M_1 \cdot X_1 + M_P^0$ (д).

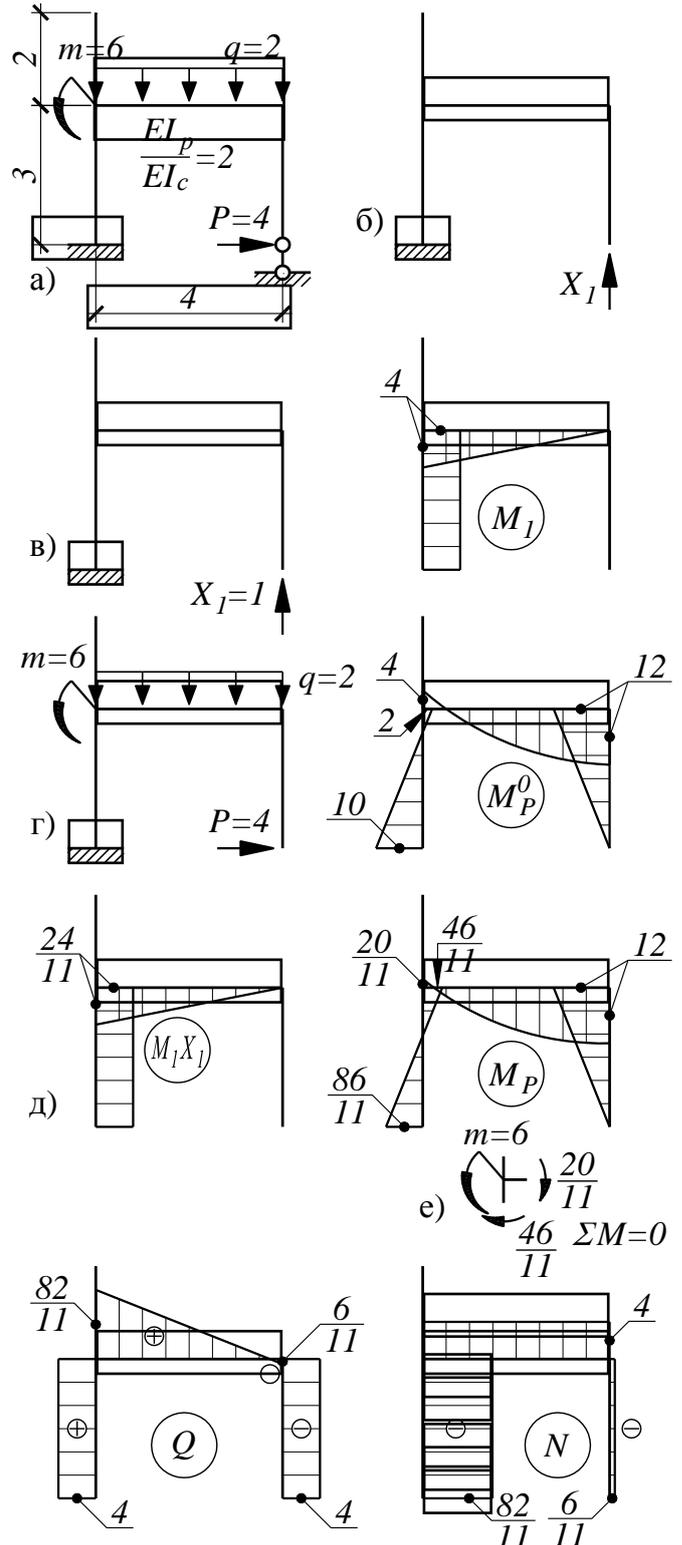
9. Выполняем статическую проверку правильности построения эпюры M_P (е).

Выполняем кинематическую проверку правильности построения эпюры M_P :

$$\Delta_1 = \sum \int \frac{M_1 M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[4 \cdot 3 \times \frac{86-46}{11 \cdot 2} \right] + \frac{1}{2EI} \left[\frac{2 \cdot 4^3}{12} \times \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \times \left(\frac{1}{3} \cdot 12 - \frac{2}{3} \cdot \frac{20}{11} \right) \right] = 0$$

10. Строим эпюру Q , N .

11. Из эпюр определяем опорные реакции и выполняем статическую проверку.



Пример 7.2. Построение эпюр изгибающих моментов M_P для дважды статически неопределимой рамы от силового воздействия

Условие задачи: К предыдущей схеме добавить одну «лишнюю» связь и построить эпюру изгибающих моментов M от силового воздействия. Единицы измерения: м, кН.

Решение.

Закрепляем верхний узел от горизонтального смещения.

1. Выполняем кинематический анализ.

$L = 3K - 3I = 3 \cdot 1 - 2 = 2$ – система дважды статически неопределима и геометрически неизменяема.

2. Строим основную систему метода сил (б).

3. Записываем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

4. Строим единичные эпюры M_1 M_2 .

5. Строим грузовую эпюру M_P^0 .

6. Определяем коэффициенты при каноническом уравнении:

$$\delta_{11} = \frac{176}{3EI}; \quad \Delta_{1P} = -\frac{32}{EI} \quad \text{– см. пример 7.1}$$

$$\delta_{12} = \sum \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[4 \cdot 4 \times \frac{-2-5}{2} \right] = -\frac{56}{EI}$$

$\delta_{21} = \delta_{12}$ – по теореме Максвелла;

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \times \frac{2}{3} \cdot 5 \right] = \frac{125}{3EI}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} &= \sum \int \frac{M_2 M_P^0}{EI} dx = \frac{51}{EI} = \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{3}{6} (2 \cdot 5 \cdot 10 + 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \cdot (-2)) \right] \end{aligned}$$

7. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{176}{3EI} X_1 - \frac{56}{EI} X_2 - \frac{32}{EI} = 0 \\ -\frac{56}{EI} X_1 + \frac{125}{3EI} X_2 + \frac{51}{EI} = 0 \end{cases}$$

Умножаем все члены на $3EI$ и получим:

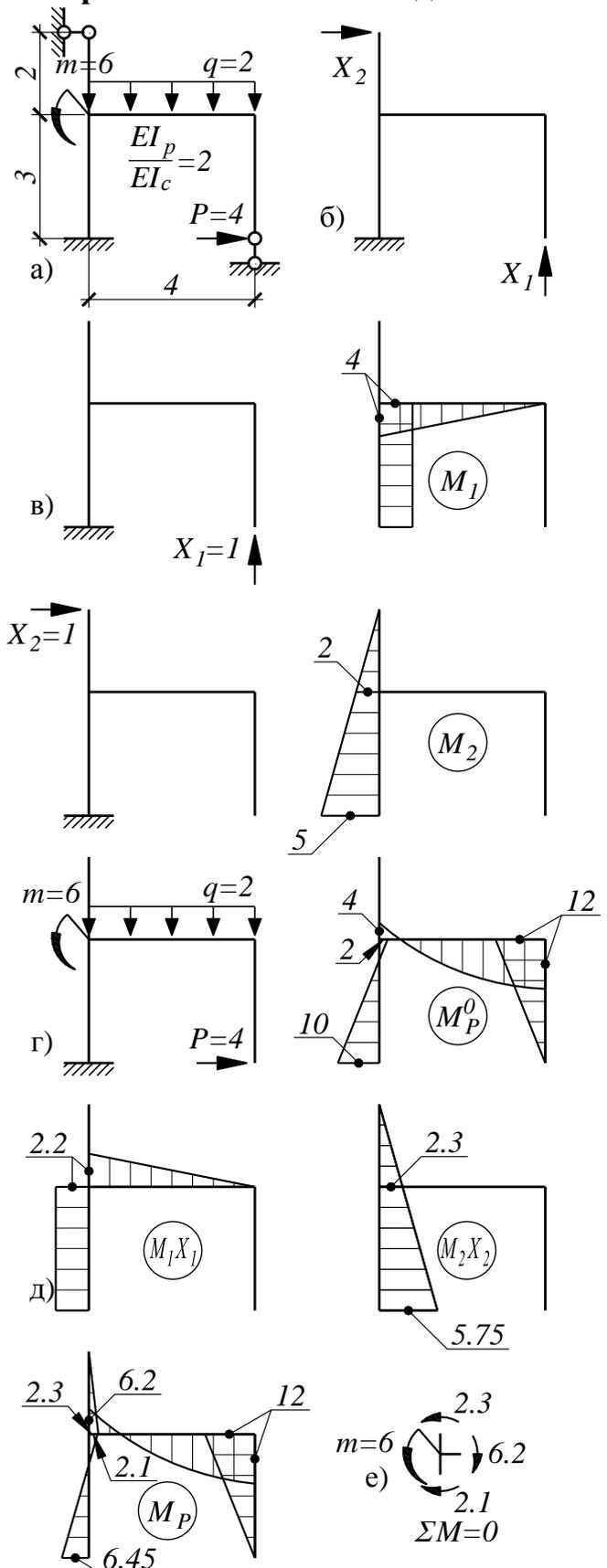
$$\begin{cases} 176X_1 - 168X_2 - 96 = 0 \\ -168X_1 + 125X_2 + 153 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -0.55 \\ X_2 = -1.15 \end{cases}$$

8. Строим промежуточные $M_1 \cdot X_1$, $M_2 \cdot X_2$ и окончательную эпюры:

$$M_P = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_P^0.$$

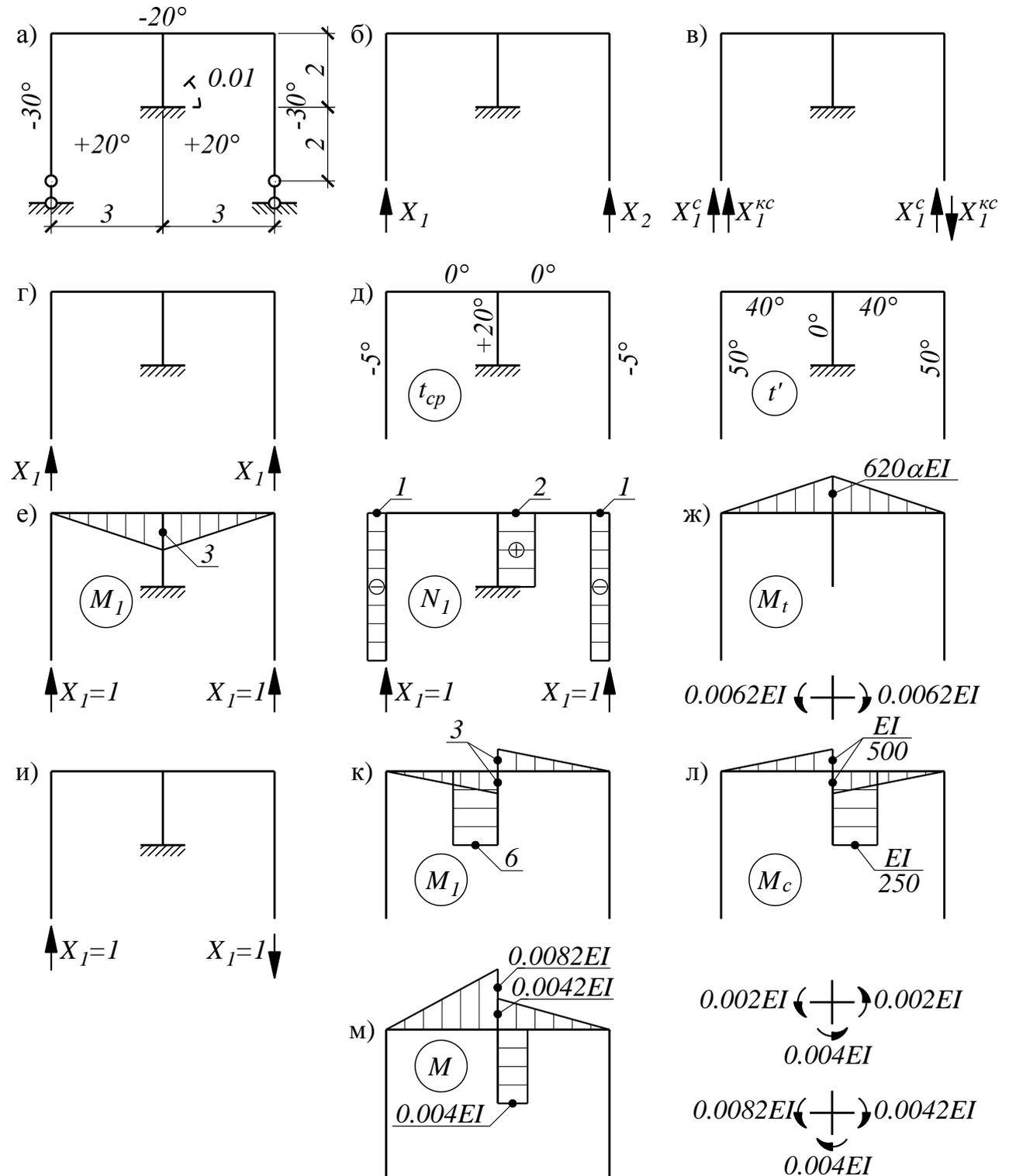
9. Выполняем статическую (е) и кинематическую проверки правильности построения эпюры M_P .

10. Строим эпюры Q , N . Выполняем проверку. Сравниваем эпюры.



Пример 7.3. Построение эпюр внутренних усилий для симметричной рамы от температурного воздействия и смещения опор

Условие задачи: Для схемы (а) построить эпюры изгибающего момента M от температурного воздействия и смещения опор. Изгибная жесткость постоянная $EI = const$. Высота сечения балок $h_{сеч.} = 0.1$ м, коэффициент линейного расширения $\alpha = 10^{-5}$ 1/град. Единицы измерения: м (на схемах условно не показаны).



Решение.

1. Выполняем кинематический анализ: $L = 3K - III = 3 \cdot 2 - 4 = 2$ – система дважды статически неопределима и геометрически неизменяема.
2. Строим основную систему метода сил (б). Так как система симметричная, производим группировку неизвестных на симметричные и косимметричные составляющие (в). Температурное воздействие и смещение опор – симметричные воздействия, поэтому в основной системе (б) достаточно рассмотреть только симметричные составляющие (в).

ратурное воздействие приложено симметрично, значит, кососимметричные составляющие при расчете на температурное воздействие будут равны нулю (г), а симметричные составляющие будут равны нулю при расчете на кососимметричное смещение опор.

3. Построим эпюру изгибающих моментов от температурного воздействия:

3.1. Записываем систему канонических уравнений:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1t} = 0, \text{ где } \Delta_{1t} = \Delta_{1t'} + \Delta_{1t_{cp}}.$$

3.2. Строим схемы распределения средней t_{cp} и перепада t' температуры (д).

3.3. Строим единичные эпюры M_1 и N_1 от симметричной единичной силы $X_1 = 1$ (е).

3.4. Определяем коэффициенты канонического уравнения:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[2 \times \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \times \frac{2}{3} \right] = \frac{18}{EI}; \\ \Delta_{1t'} &= \sum \Omega_{M_1} \frac{\alpha t'}{h_{ceu}} = \frac{\alpha}{h_{ceu}} \left[2 \times \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \times 40 \right] = \frac{360\alpha}{h_{ceu}}; \\ \Delta_{1t_{cp}} &= \sum \Omega_{N_1} \alpha t_{cp} = \alpha [2 \times (-1) \cdot 4 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 \cdot 20] = 120\alpha; \\ \Delta_{1t} &= \Delta_{1t'} + \Delta_{1t_{cp}} = \frac{360\alpha}{0.1} + 120\alpha = 3720\alpha.\end{aligned}$$

3.5. Решаем каноническое уравнение:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = -\frac{3720}{18} \alpha EI = -\frac{620}{3} \alpha EI.$$

3.6. Строим эпюру $M_t = M_1 \cdot X_1$ (ж).

3.7. Выполняем статическую проверку наиболее сложного узла:

$$620\alpha EI = 620\alpha EI.$$

3.8. Выполняем кинематическую проверку, используя симметричную эпюру M_1 :

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \sum \int \frac{M_1 M_t}{EI} dx = -\frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \times \frac{2}{3} \cdot 620\alpha EI \right] = -3720\alpha; \\ \Delta_{1t} &= \sum \Omega_{M_1} \frac{\alpha t'}{h_{ceu}} + \sum \Omega_{N_1} \alpha t_{cp} = 2 \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \times \frac{40\alpha}{0.1} \right] + [2 \times 4 \cdot (-1) \cdot (-5) + 2 \cdot 2 \times 20] \alpha = 3720\alpha; \\ \Delta_1 &= \sum \int \frac{M_1 M_t}{EI} dx + \Delta_{1t} = -3720\alpha + 3720\alpha = 0.\end{aligned}$$

4. Построим эпюру изгибающих моментов от смещения опор:

4.1. Для основной системы (и) записываем систему канонических уравнений:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1c} = 0.$$

4.2. Строим единичную эпюру M_1 от кососимметричной единичной силы $X_1 = 1$ (к).

4.3. Определяем коэффициенты канонического уравнения:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[2 \times \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \times \frac{2}{3} \cdot 3 + 2 \cdot 6 \times 6 \right] = \frac{90}{EI}; \\ \Delta_{1c} &= -\sum_k R_k c_k = -(-6 \cdot 0.01) = 0.06.\end{aligned}$$

4.4. Решаем каноническое уравнение:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1c}}{\delta_{11}} = -\frac{0.06}{90} EI = -\frac{EI}{1500}.$$

4.5. Строим эпюру $M_c = M_1 \cdot X_1$ (л) и выполним узловую проверку.

5. Выполняем кинематическую проверку, используя любую, например, симметричную единичную эпюру M_1 . В этом случае реакцию опоры R_{1c} также необходимо определять из симметричной эпюры:

$$\Delta_1 = \sum \int \frac{M_1 M_c}{EI} dx - R_{1c} c_k = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \times \frac{2}{3} (0.002EI - 0.002EI) \right] - [0 \times 0.01] = 0.$$

6. Строим окончательную эпюру $M = M_t + M_c$.

7. Далее самостоятельно строим эпюры Q, N традиционным образом, определяем опорные реакции и выполняем статическую проверку для всей системы.

Задача 7.1. Расчет статически неопределимых рам методом сил на силовое воздействие

Для рам, приведенных на стр.77...79, построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от силового воздействия. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. В расчетах учитывать соотношение жесткостей ригеля EI_p и стоек EI_c . Исходные параметры принимать по табл.7.4. Анализ выполнить сравнением эпюр изгибающих моментов, построенных для исходной схемы, и схемы, полученной путем самостоятельного добавления одной «лишней» связи.

Таблица 7.4. Исходные параметры к задаче 7.1

номер группы	l_p , м	l_c , м	$\frac{EI_p}{EI_c}$	m , кН·м	P , кН	q , кН/м	Сложность задания	Переменные параметры	
1	2	$L + 1$	k	4	3	2	3	$L = 0$	$k = 1$
2	2	$L + 2$	k	5	2	2	4	$L = 1$	$k = 2$
3	3	$L + 3$	k	4	3	2	6 с анализом	$L = 2$	$k = 0.5$
4	3	$L + 1$	k	5	2	2		добавить связь, решить и сопоставить эпюры	
5	3	$L + 2$	k	4	3	2			

Задача 7.2. Расчет статически неопределимых рам методом сил на температурное воздействие

Для рам, приведенных на стр.80...82, построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от температурного воздействия. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.7.5. Значение коэффициента линейного расширения $\alpha = 10^{-5}$ 1/град, высота сечения балок $h_{сеч.} = 0.1$ м.

Таблица 7.5. Исходные параметры к задаче 7.2

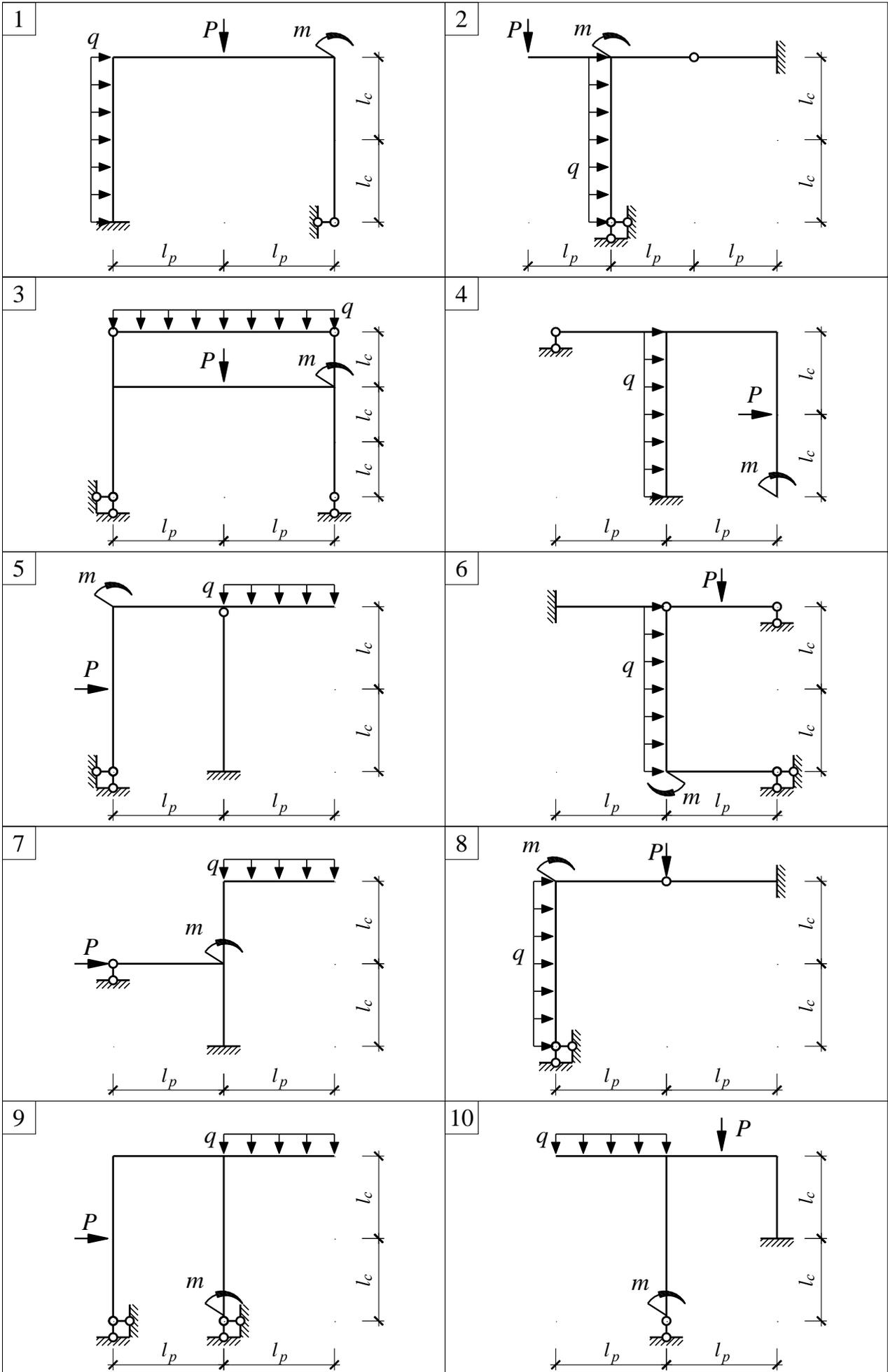
номер группы	l_p , м	l_c , м	$\frac{EI_p}{EI_c}$	t_1 , град.	t_2 , град.	t_3 , град.	Сложность задания	Переменные параметры	
1	3	$L + 3$	0.5	t	+30	-20	3	$L = 0$	$t = 0$
2	3	$L + 2$	2	+20	t	-30	4	$L = 1$	$t = +20$
3	3	$L + 1$	0.5	+30	+20	t	6 с анализом		$t = 0$
4	2	$L + 3$	2	+30	t	-20		$L = 2$	$t = +10$
5	2	$L + 2$	0.5	t	+20	-30			$t = +20$

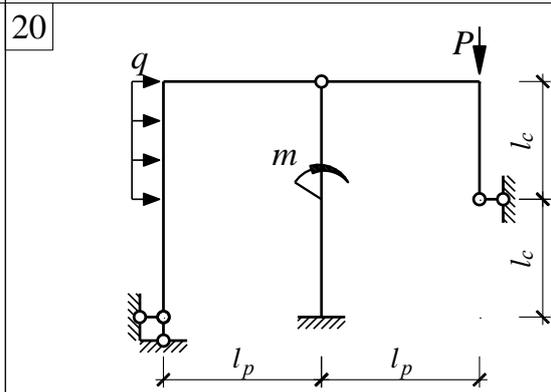
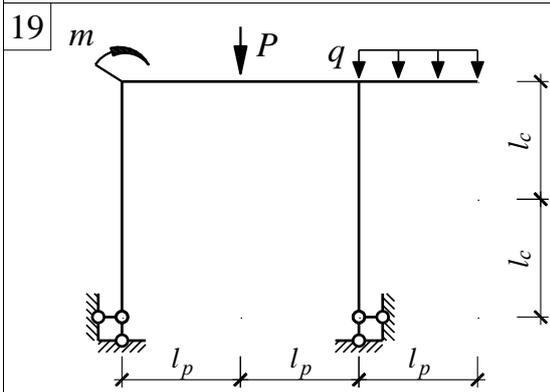
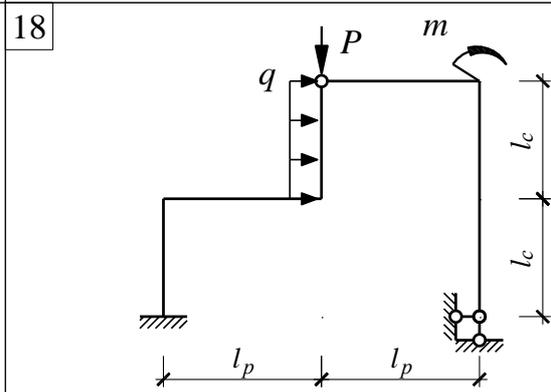
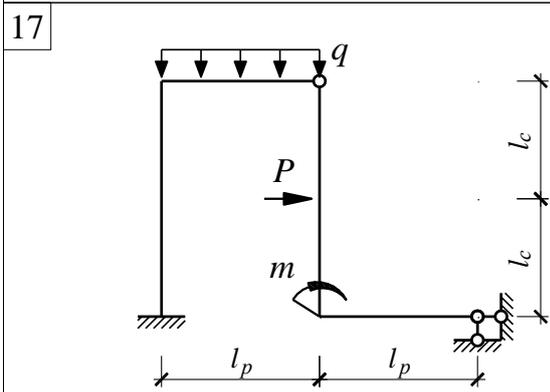
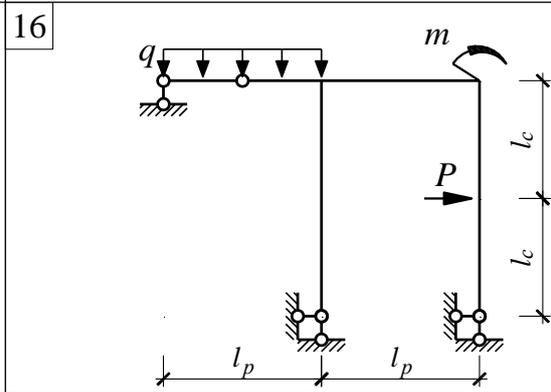
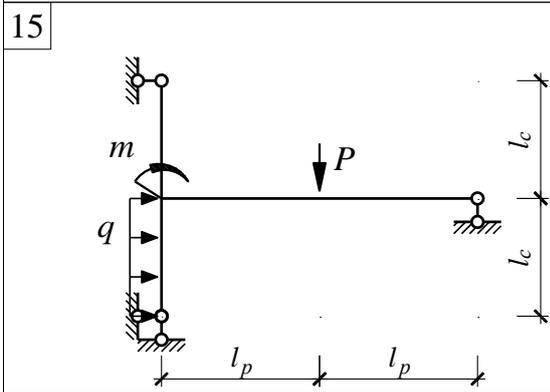
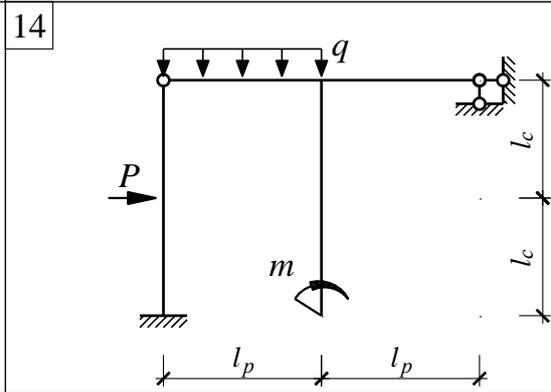
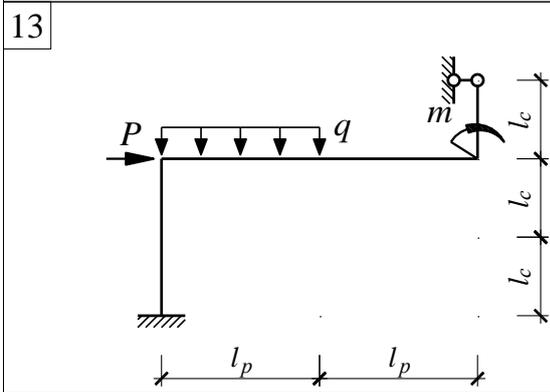
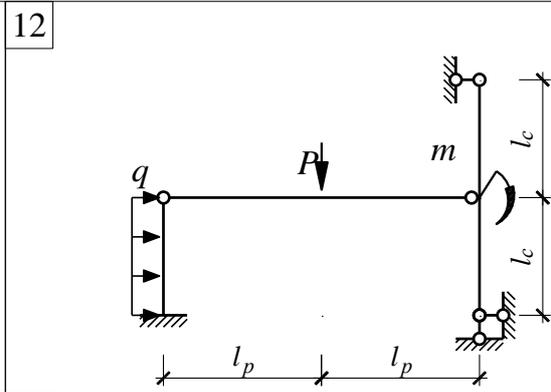
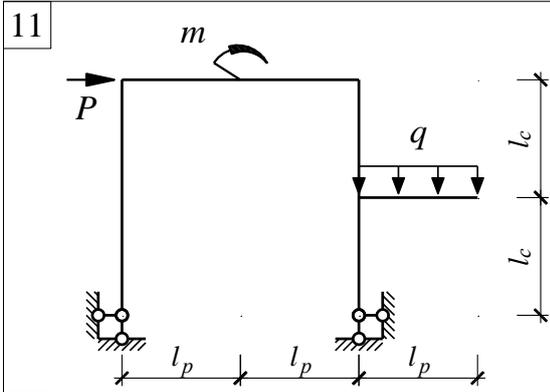
Задача 7.3. Расчет статически неопределимых рам методом сил на смещения опор

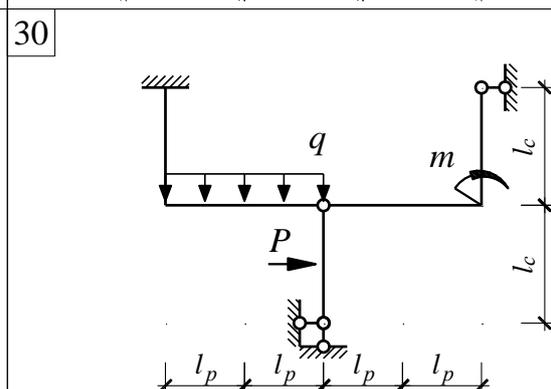
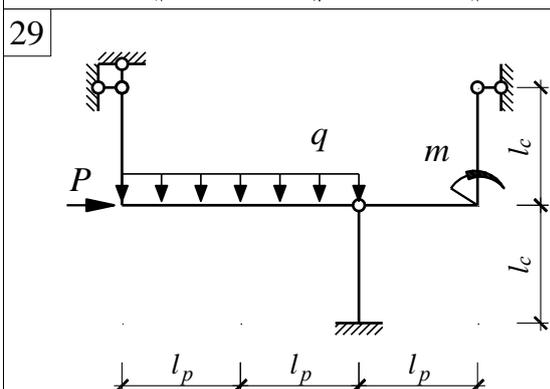
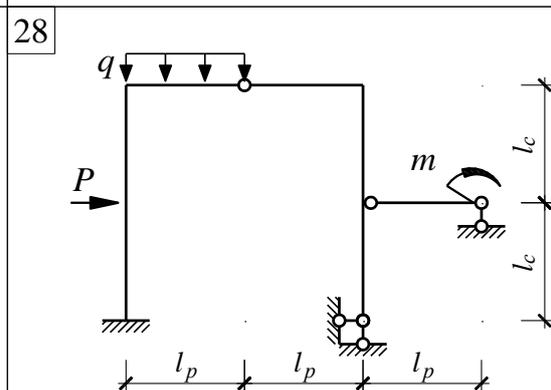
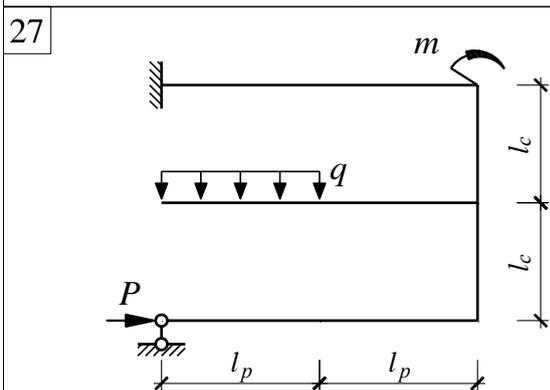
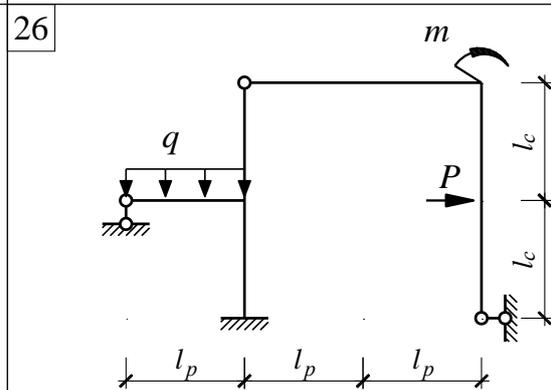
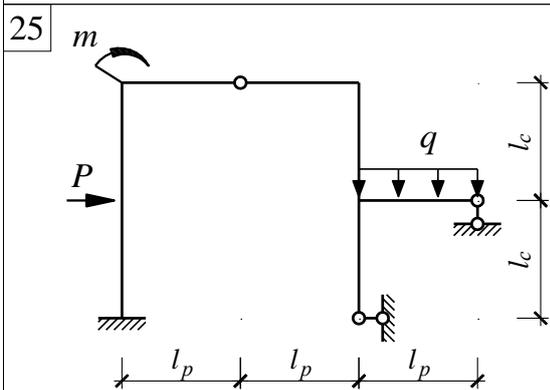
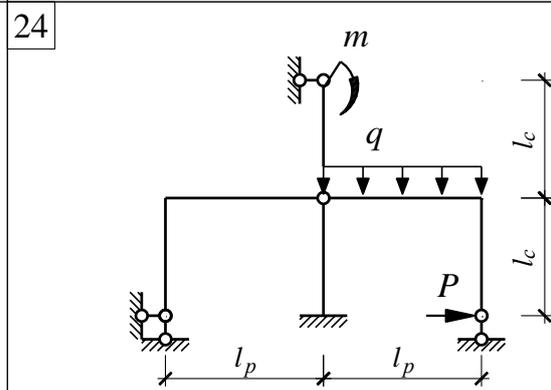
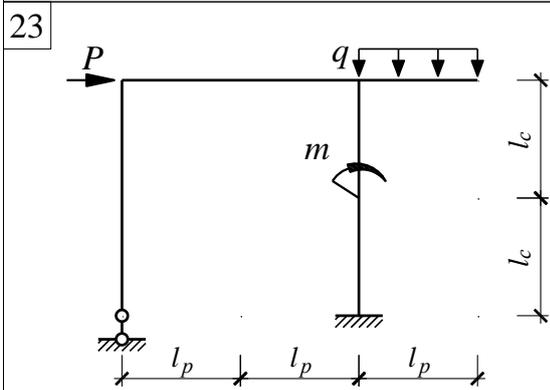
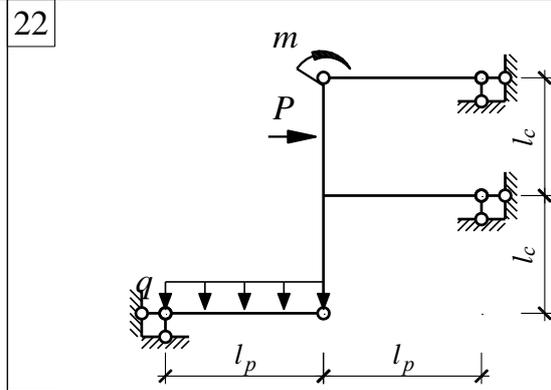
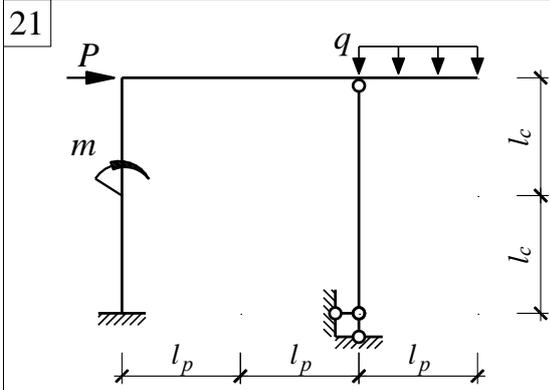
Для рам, приведенных на стр.83...85, построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от смещения опор. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.7.6.

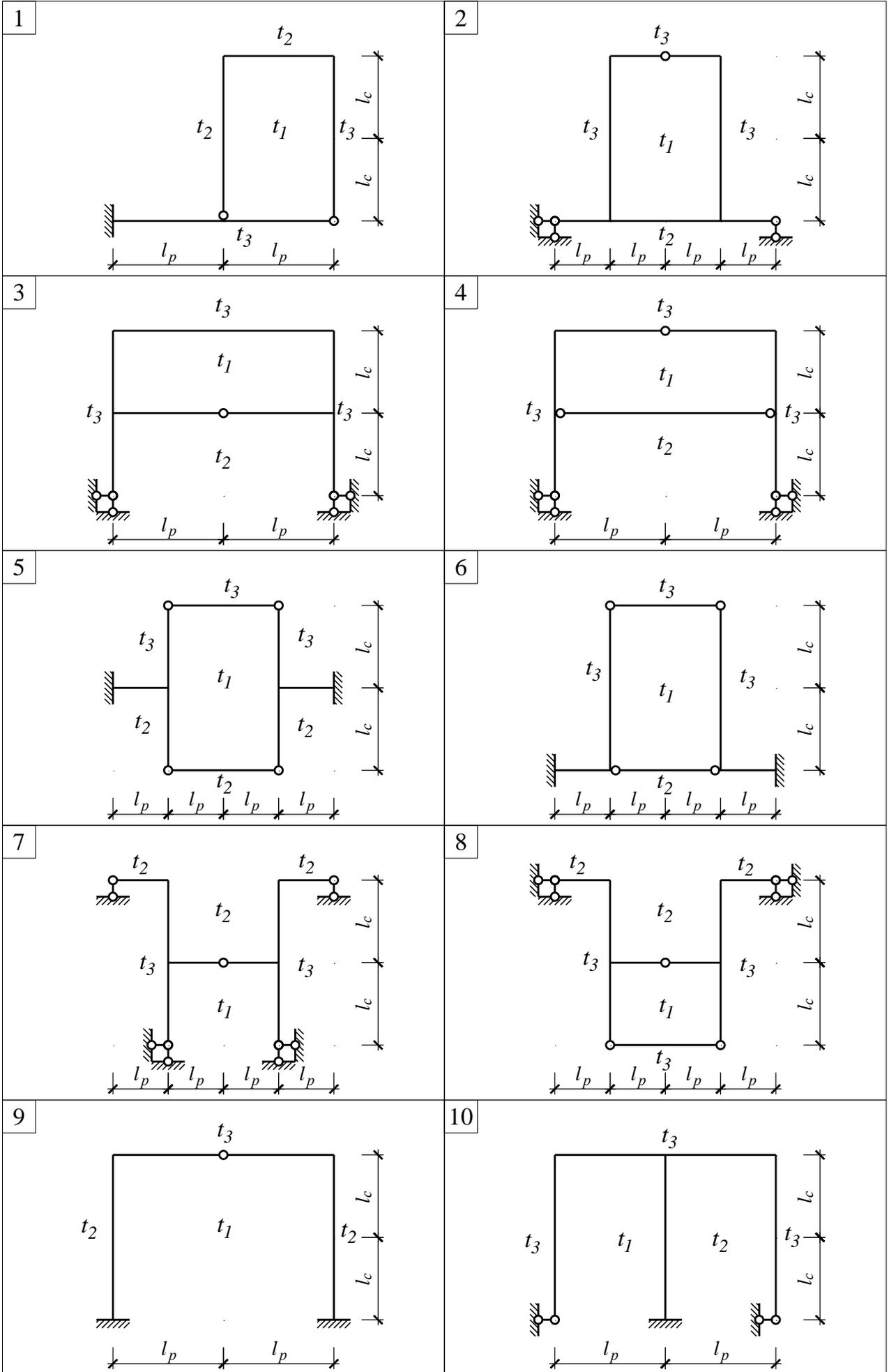
Таблица 7.6. Исходные параметры к задаче 7.3

номер группы	l_p , м	l_c , м	$\frac{EI_p}{EI_c}$	c_1 , мм	c_2 , мм	c_3 , рад.	Сложность задания	Переменные параметры	
1	$L + 3$	3	k	5	5	0.005	3	$L = 0$	$k = 1$
2	$L + 2$	3	k	10	5	0.005	4	$L = 1$	$k = 0.5$
3	$L + 1$	3	k	10	10	0.005	6 с анализом		$k = 0.5$
4	$L + 3$	2	k	10	10	0.010		$L = 2$	$k = 1$
5	$L + 2$	2	k	10	5	0.010			$k = 2$

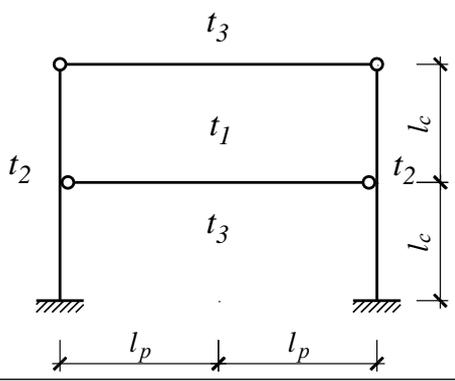




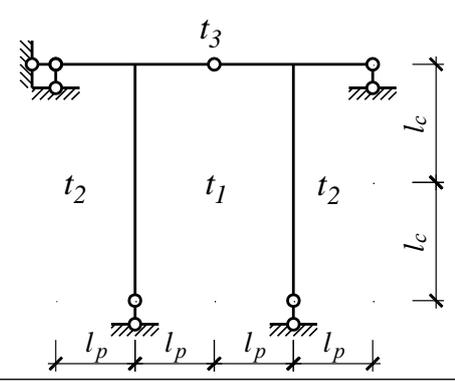




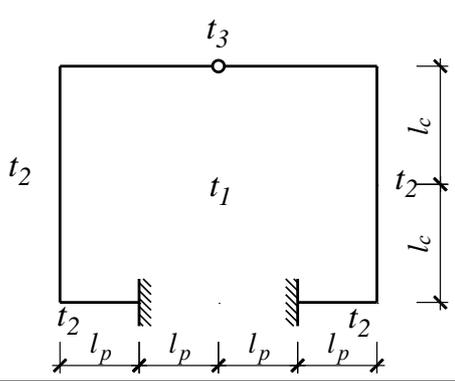
11



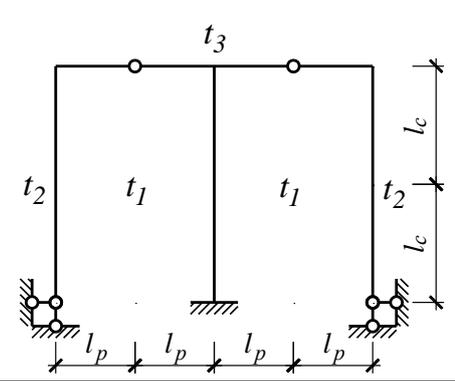
12



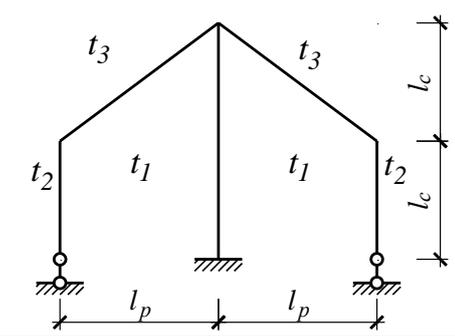
13



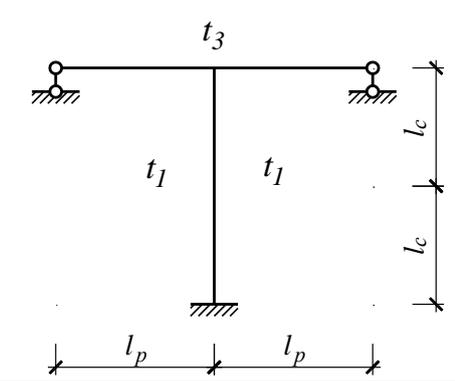
14



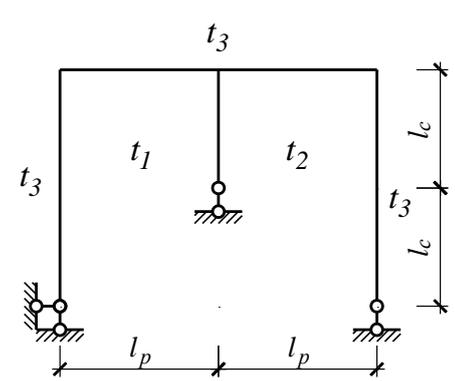
15



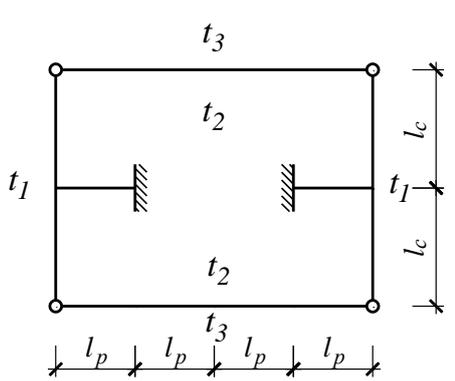
16



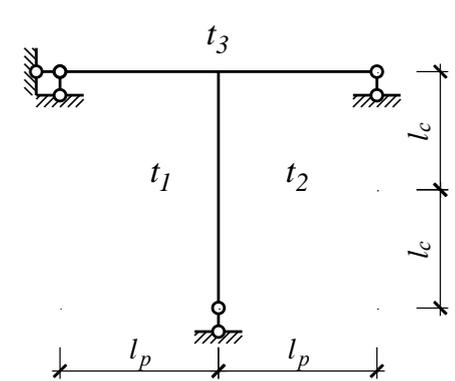
17



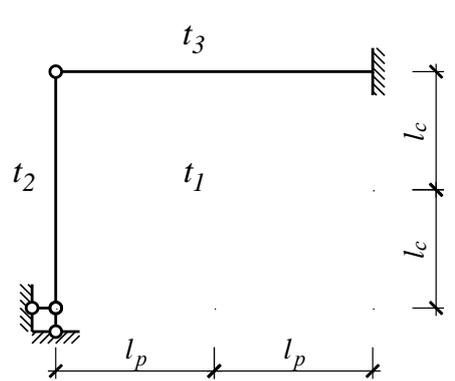
18



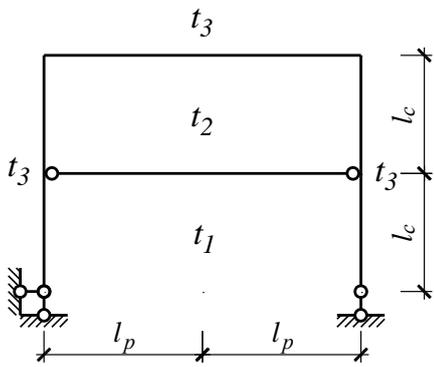
19



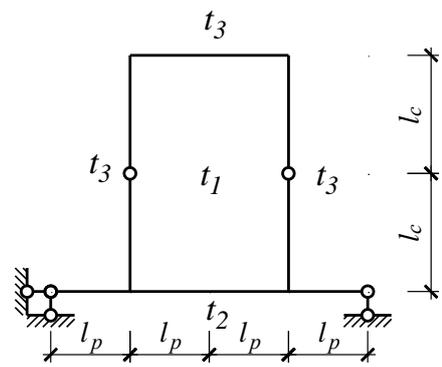
20



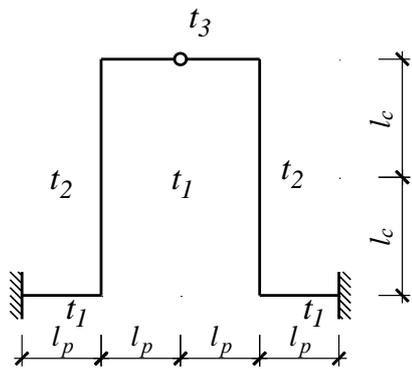
21



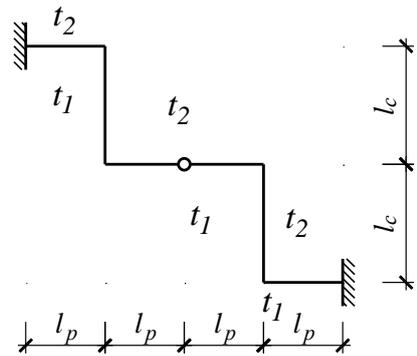
22



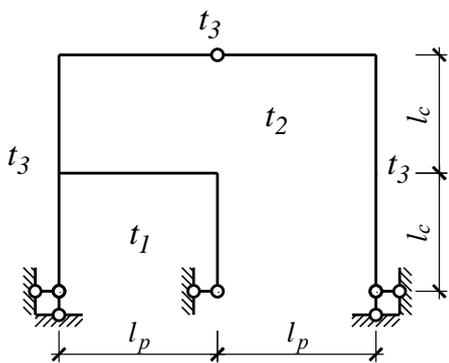
23



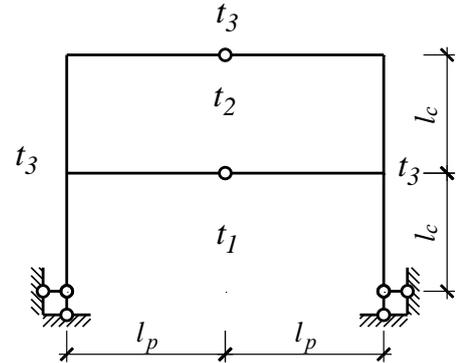
24



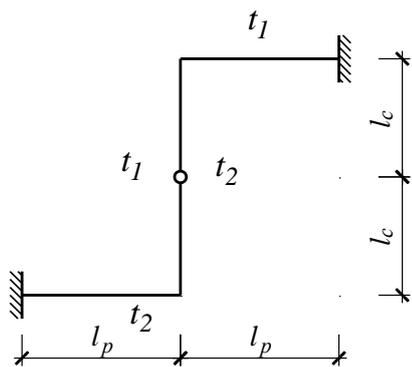
25



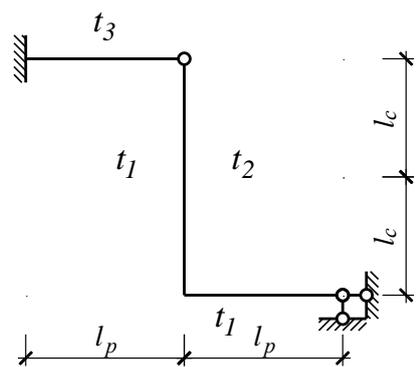
26



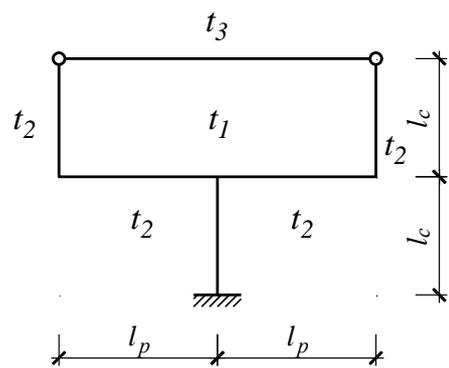
27



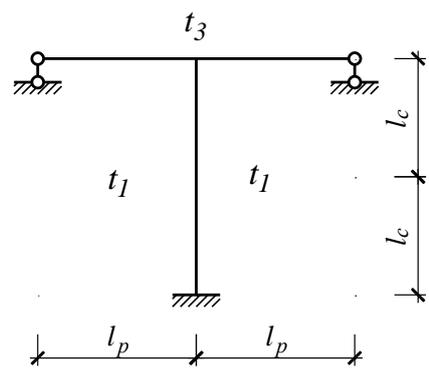
28

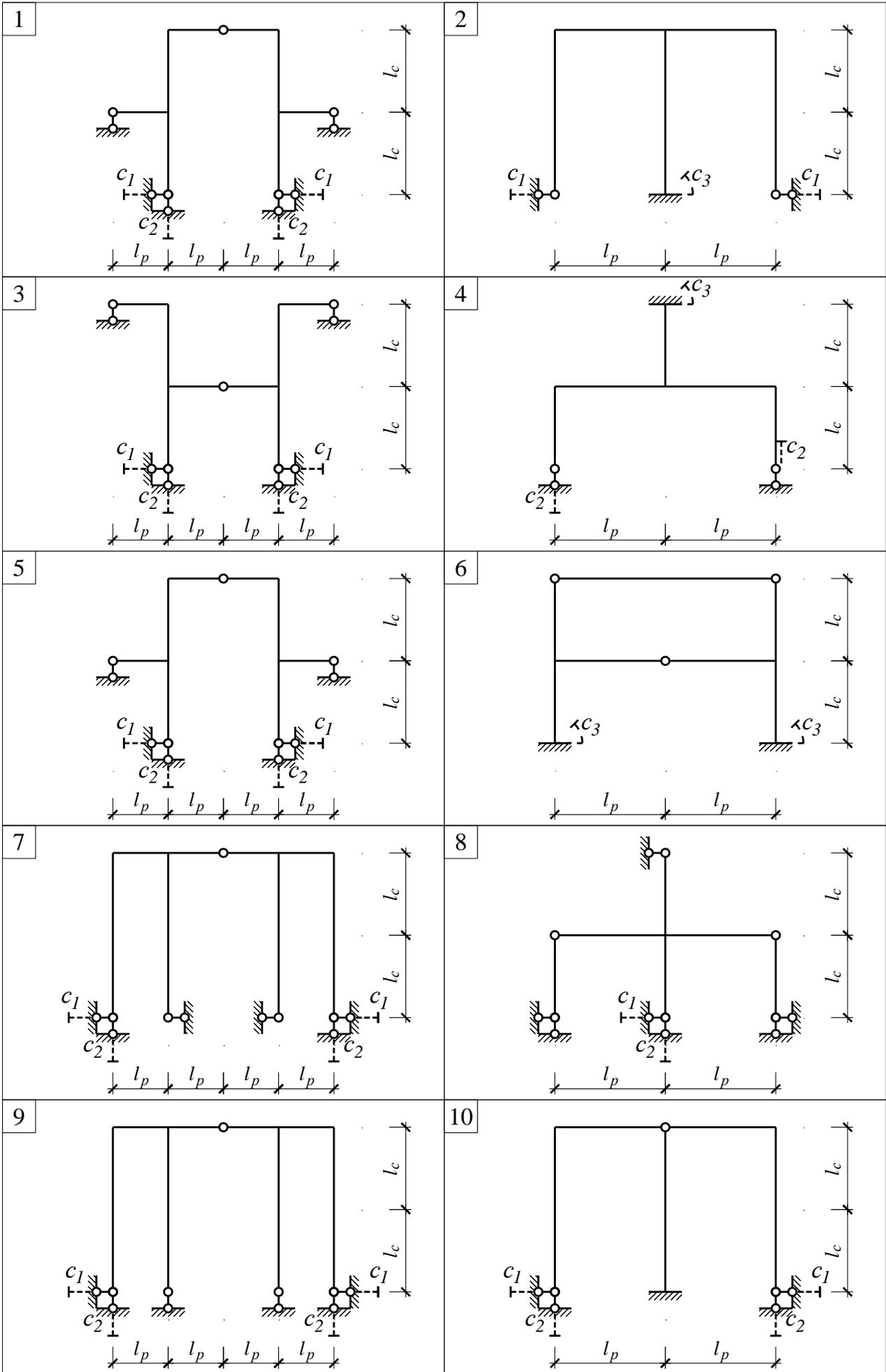


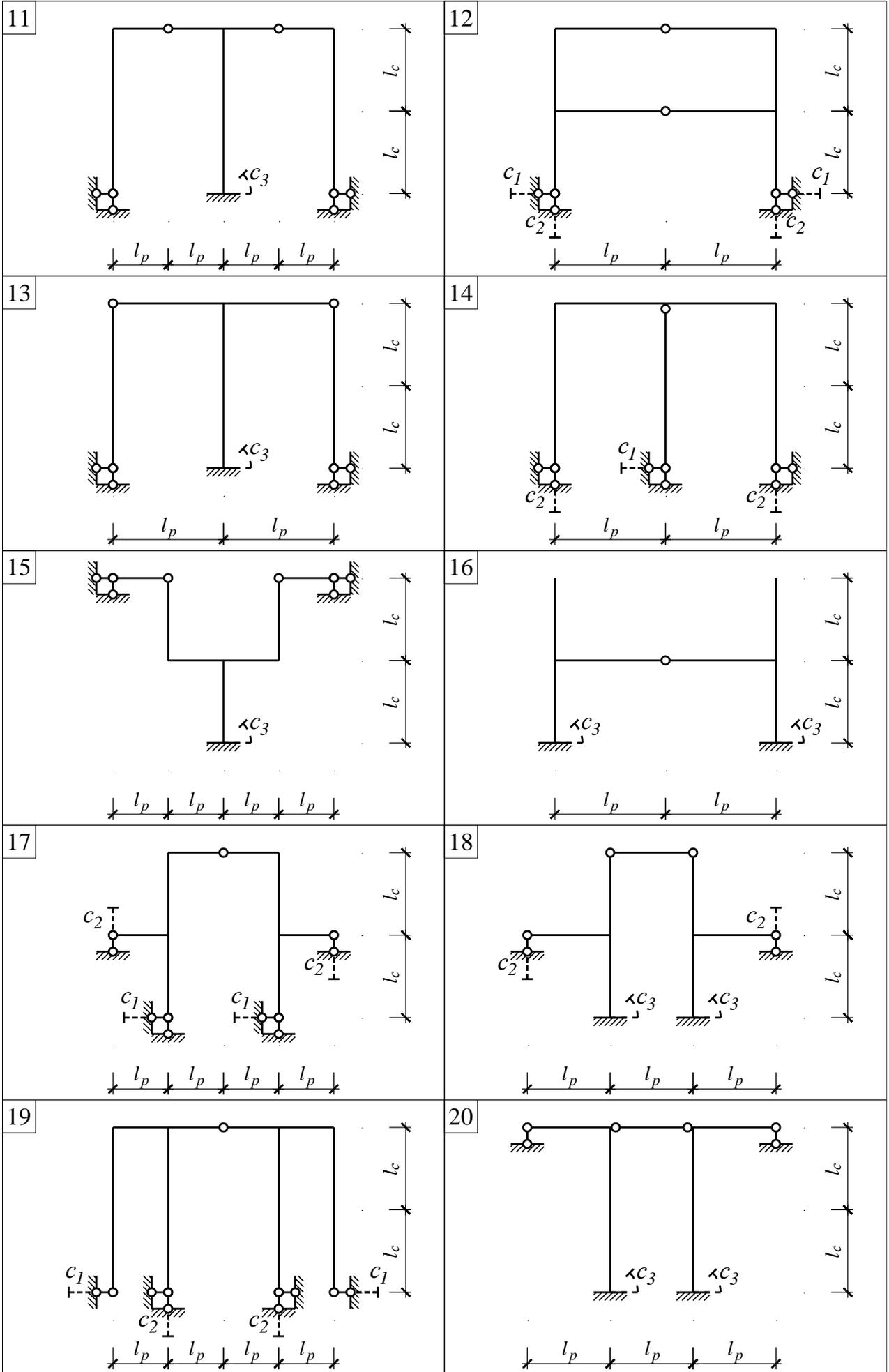
29

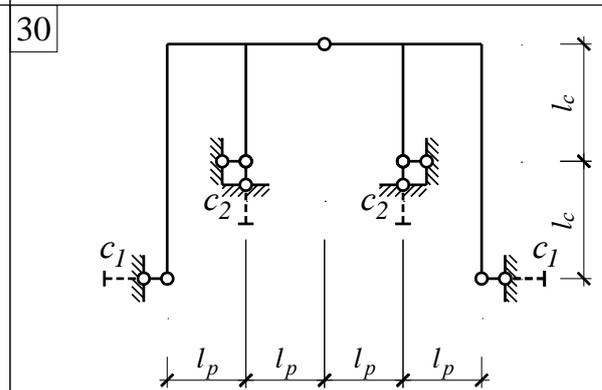
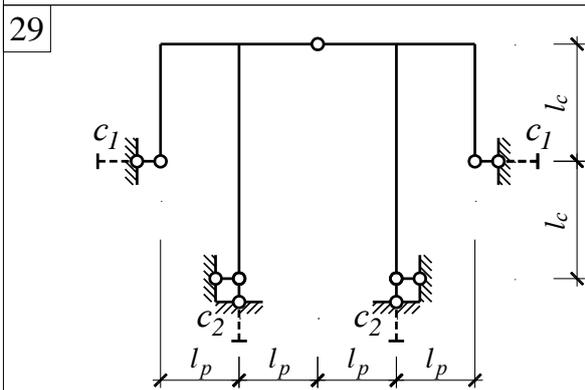
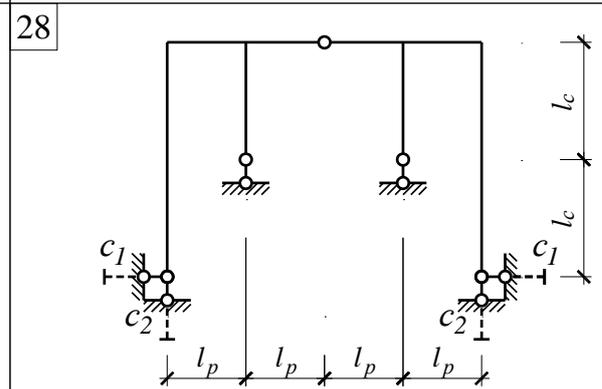
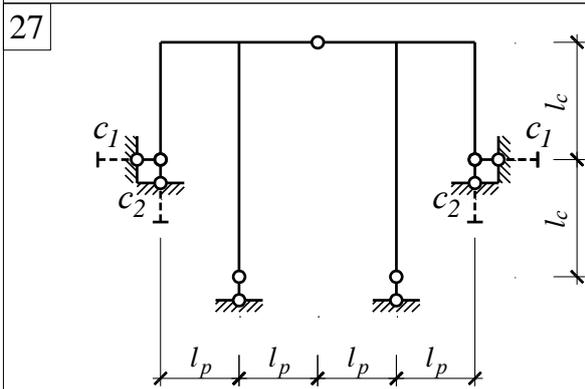
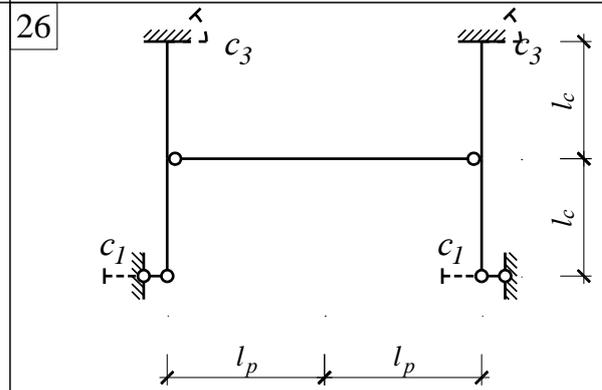
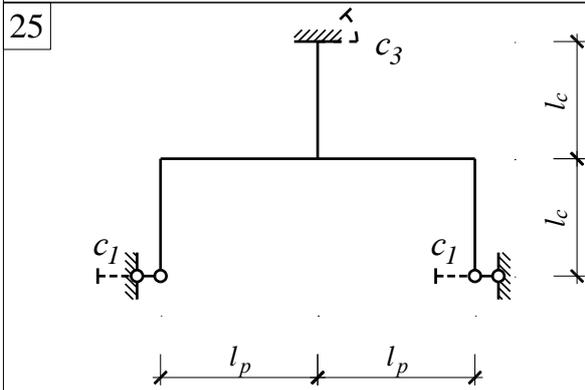
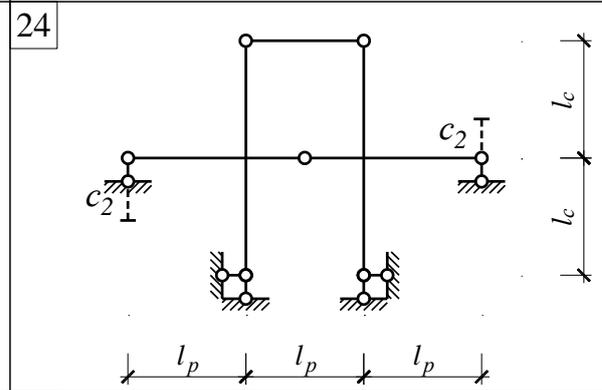
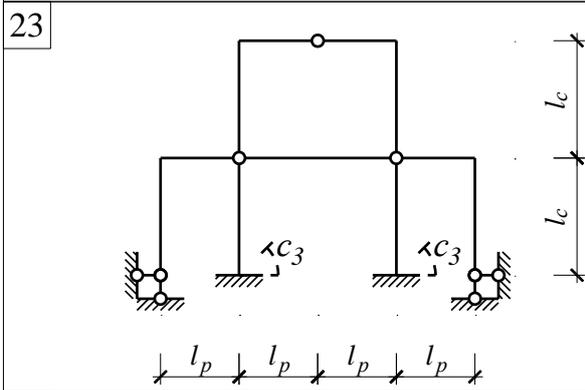
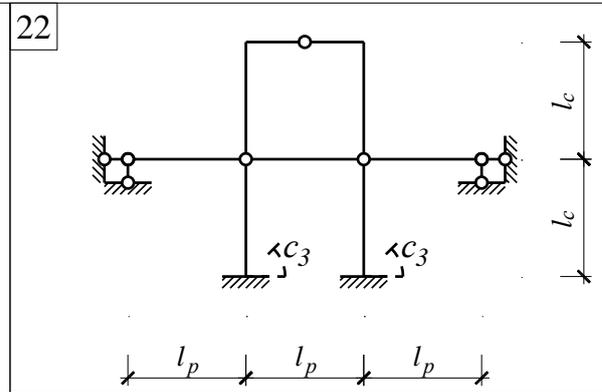
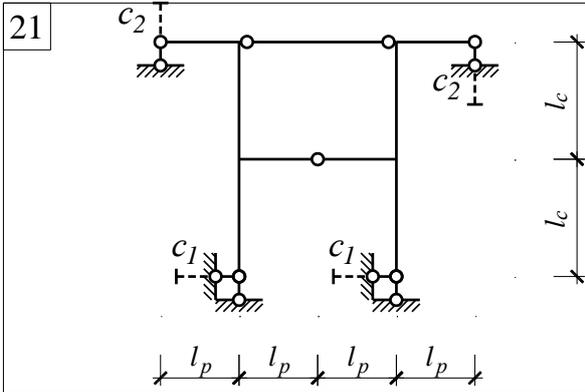


30









ТЕМА 8. МЕТОДЫ РАСЧЕТА НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

Неразрезной балкой называется статически неопределимая балка, опирающаяся в пролете на конечное число шарнирных опор. Крайние сечения неразрезной балки могут быть свободны, заделаны или шарнирно оперты. Рассмотрим два метода расчета неразрезных балок: метод трех моментов и метод моментных фокусных отношений. Метод трех моментов удобно использовать при расчете балки от произвольной нагрузки в каждом пролете. Метод моментных фокусных отношений требует последовательного нагружения балки нагрузкой только в одном пролете.

Метод трех моментов.

Основная система метода трех моментов получается путем врезания шарнира в промежуточные опоры, включая крайние защемляющие опоры. Каждое каноническое уравнение будет содержать не более трех неизвестных – отсюда и название метода.

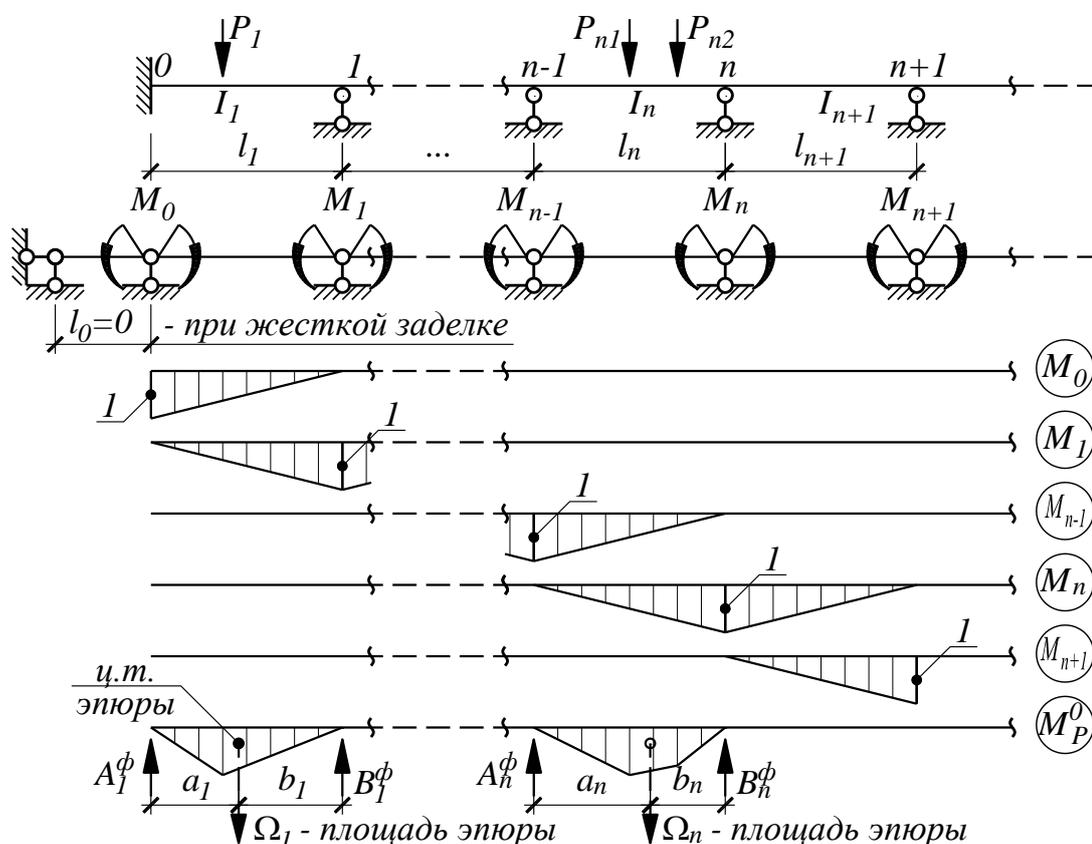


Рисунок 8.1. Расчетная схема метода трех моментов

Уравнение трех моментов, полученное после решения системы канонических уравнений, примет вид:

$$M_{n-1}l'_n + 2M_n(l'_n + l'_{n+1}) + M_{n+1}l'_{n+1} = -\frac{I_0}{I_n} 6B_n^\phi - \frac{I_0}{I_{n+1}} 6A_{n+1}^\phi,$$

здесь $l'_n = l_n \frac{I_0}{I_n}$ – приведенная длина элемента, отличающаяся от фактической длины на ко-

эффициент, равный отношению жесткости одного из стержней I_0 на жесткость стержня в рассматриваемом пролете I_n . A_n^ϕ, B_n^ϕ – фиктивные реакции в нагруженном пролете,

определяемые по табл.8.1. Фиктивные реакции определяются как реакции опор от фиктивной распределенной нагрузки, повторяющей контур балочной эпюры изгибающих моментов (M_P^0) в загруженном пролете.

Таблица 8.1. Фиктивные реакции для расчета неразрезных балок

Схемы фактического нагружения пролета						
Схемы нагружения фиктивной нагрузкой						
Значения фиктивных реакций	$6A^\phi$	$6B^\phi$	$6A^\phi$	$6B^\phi$	$6A^\phi$	$6B^\phi$
	$-ml(1-3v^2)$	$ml(1-3u^2)$	$Pl^2 uv(1+v)$	$Pl^2 uv(1+u)$	$\frac{ql^3}{4} u^2(2-u)^2$	$\frac{ql^3}{4} u^2(2-u)^2$
	при $u = v = 0.5$		при $u = v = 0.5$		при $u = 1, v = 0$	
	$-\frac{1}{4} ml$	$\frac{1}{4} ml$	$\frac{3}{8} Pl^2$	$\frac{3}{8} Pl^2$	$\frac{ql^3}{4}$	$\frac{ql^3}{4}$

Уравнение трех моментов составляется для каждого неизвестного опорного момента. Например, для решения задачи с тремя неизвестными составляется следующая система из уравнений трех моментов:

$$\begin{cases} 2M_0(l'_0 + l'_1) + M_1 l'_1 = -\frac{I_0}{I_1} 6A_1^\phi \\ M_0 l'_1 + 2M_1(l'_1 + l'_2) + M_2 l'_2 = -\frac{I_0}{I_1} 6B_1^\phi - \frac{I_0}{I_2} 6A_2^\phi \\ M_1 l'_2 + 2M_2(l'_2 + l'_3) + M_3 l'_3 = -\frac{I_0}{I_2} 6B_2^\phi - \frac{I_0}{I_3} 6A_3^\phi \end{cases}$$

Метод моментных фокусных отношений.

Напомним, что метод используется при нагружении только одного пролета неразрезной балки. Остальные участки являются незагруженными слева или справа от загруженного пролета. Метод основан на независимом положении нулевой точки на эпюре изгибающих моментов незагруженных слева или справа от загруженного пролета.

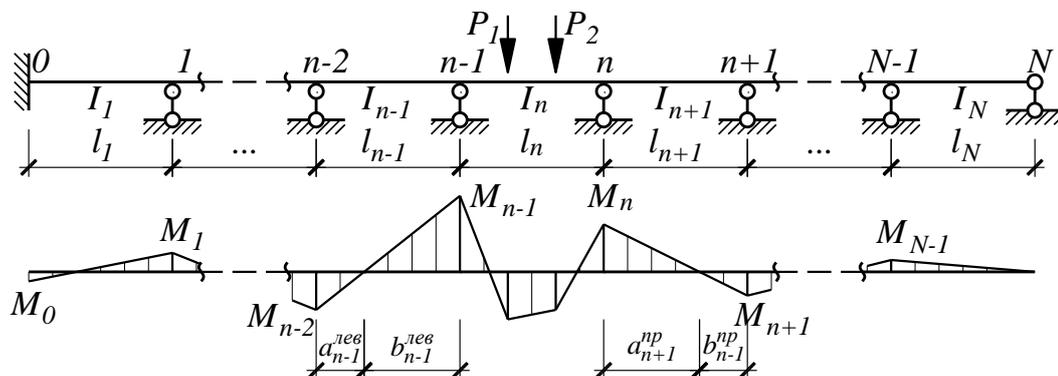
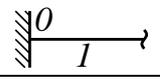
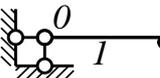
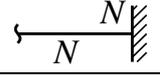
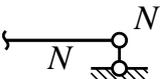


Рисунок 8.2. Расчетная схема метода моментных фокусных отношений

Вычисление значения моментных фокусных отношений ведут с крайних пролётов до нагруженного пролета включительно, причем для левых фокусных отношений вычисления начинают слева, для правых – справа.

Таблица 8.2. Моментные фокусные отношения

Фокусные отношения	Крайняя опора	Первоначальные значения k	Значения k для пролета n , вычисляются до нагруженного пролета включительно			
левые		$k_1^{лев} = 2$	$k_2^{лев}$	$k_3^{лев}$	$k_4^{лев}$...
		$k_1^{лев} = \infty$	$k_n^{лев} = 2 + \frac{l_{n-1}}{I_{n-1}} \frac{I_n}{l_n} \left(2 - \frac{1}{k_{n-1}^{лев}} \right)$			
правые		$k_N^{np} = 2$...	k_{N-3}^{np}	k_{N-2}^{np}	k_{N-1}^{np}
		$k_N^{np} = \infty$	$k_n^{np} = 2 + \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}} \frac{I_n}{l_n} \left(2 - \frac{1}{k_{n+1}^{np}} \right)$			

Опорные моменты для нагруженного участка (n) определяются с использованием значений фиктивных реакций по формулам:

$$M_{n-1} = -\frac{6A_n^\phi k_n^{np} - 6B_n^\phi}{l_n(k_n^{лев} k_n^{np} - 1)}; \quad M_n = -\frac{6B_n^\phi k_n^{лев} - 6A_n^\phi}{l_n(k_n^{лев} k_n^{np} - 1)}.$$

Моменты на опорах незагруженных пролетов вычисляются, начиная с нагруженного участка, как:

$$\text{левые: } M_{n-1} = -\frac{M_n}{k_n^{лев}}; \quad \text{правые: } M_{n+1} = -\frac{M_n}{k_{n+1}^{np}}.$$

Окончательная эпюра получается как векторная сумма эпюры опорных моментов и грузовой эпюры изгибающих моментов.

Построение объемлющих эпюр.

При решении неразрезных балок часто бывает необходимо определять максимальные и минимальные значения внутренних усилий от действия постоянных и временных нагрузок. Постоянная нагрузка является стационарной, например, от собственного веса, и создает внутренние усилия постоянного значения $M_{пост}$ и $Q_{пост}$. Временная нагрузка возникает от временного нагружения пролетов, например, подвижной нагрузкой, и создает временные внутренние усилия $M_{вр}$ и $Q_{вр}$.

Для построения объемлющей эпюры в каждом пролете неразрезной балки выделяют несколько сечений – над опорами, в середине пролетов и в точках приложения сосредоточенных сил. Определение экстремальных значений внутренних усилий производят в табличной форме.

Таблица 8.3. Форма таблицы для вычисления экстремальных значений внутренних усилий

Характерное сечение:		1	2	3	4	...	$n - 1$	n
Постоянное нагружение:	$M_{пост.}$							
Временные нагружения:	I							
	II							
	...							
Экстремальные усилия:	M_{max}							
	M_{min}							

Значения экстремальных усилий в сечении определяются по следующим формулам:

$$M_{max} = M_{пост.} + \sum M_{вр}^+ ; M_{min} = M_{пост.} + \sum M_{вр}^- ;$$

$$Q_{max} = Q_{пост.} + \sum Q_{вр}^+ ; Q_{min} = Q_{пост.} + \sum Q_{вр}^- ,$$

где $\sum M_{вр}^+$, $\sum Q_{вр}^+$ – сумма положительных значений изгибающего момента или поперечных сил, соответственно, от всех временных нагружений в рассматриваемом сечении;
 $\sum M_{вр}^-$, $\sum Q_{вр}^-$ – то же, отрицательных значений.

Расчет неразрезной балки на постоянную нагрузку проводят, обычно, методом трех моментов, на временную нагрузку – методом фокусных отношений.

После изучения данной темы студент должен:

- **знать**, основные формулы решения задач методом трех моментов и метода моментных фокусных отношений;
- **уметь** строить эпюры изгибающих моментов в основной системе и определять фиктивные реакции, моментные фокусные отношения, строить окончательную и объемлющую эпюры;
- **владеть** методом трех моментов и методом моментных фокусных отношений для расчета неразрезной балки с целью дальнейшего проектирования;
- суметь **ответить** на следующие вопросы:
 1. Преимущества и недостатки неразрезных балок перед разрезными.
 2. Почему уравнение трех моментов возможно лишь для рациональной основной системы?
 3. Как определяются фиктивные опорные реакции и чем они отличаются от обычных?
 4. Когда отдается предпочтение методу трех моментов, а когда методу моментных фокусных отношений?
 5. В чем разница определения левых и правых моментных фокусных отношений?

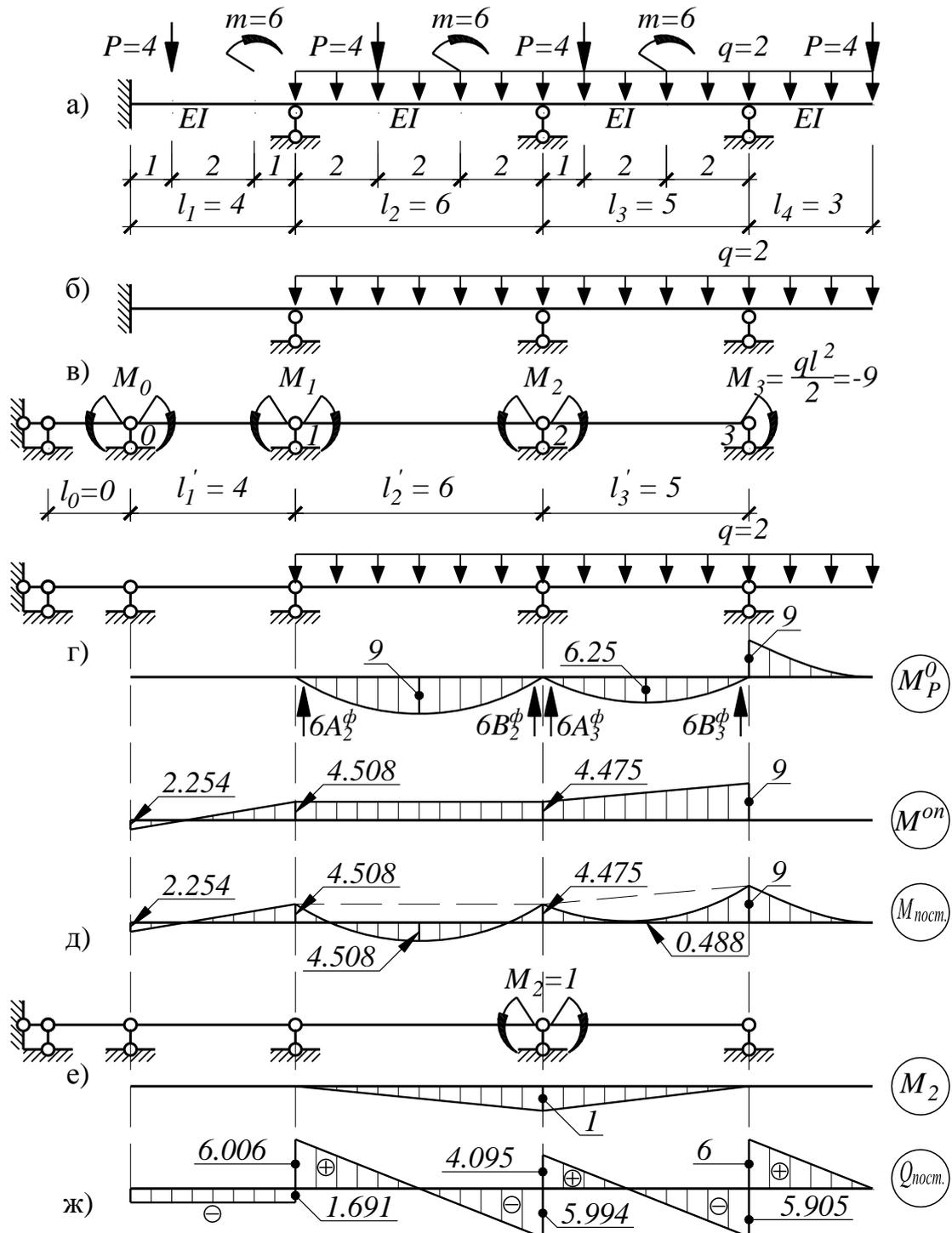
Пример 8.1. Расчет неразрезной балки

Условие задачи: Для неразрезной балки (а) построить эпюры M и Q методом трех моментов от действия постоянной нагрузки q и временных нагрузок P и m , приложенных последовательно к каждому пролету. Затем построить объемлющую эпюру M . Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

Решение.

1. Выполняем кинематический анализ: $L = C_o - 3 = 6 - 3 = 3$ – система трижды статически неопределима и геометрически неизменяема.

2. Построим эпюры M и Q от действия постоянной нагрузки методом трех моментов (б).



2.1. Строим основную систему метода сил и вычисляем приведенные длины элементов,

определяемые как $l'_n = l_n \frac{I_0}{I_n}$ (в). При $EI = const$, значения $l'_n = l_n$.

2.2. Строим грузовую эпюру в основной системе метода сил (г) и определяем значения фиктивных реакций при помощи формул, приведенных в табл.8.1:

пролет	1		2		3	
фиктивная реакция	$6A_1^\Phi$	$6B_1^\Phi$	$6A_2^\Phi$	$6B_2^\Phi$	$6A_3^\Phi$	$6B_3^\Phi$
	0	0	$\frac{ql^3}{4} = 108$	$\frac{ql^3}{4} = 108$	$\frac{ql^3}{4} = 62.5$	$\frac{ql^3}{4} = 62.5$

2.3. Записываем систему уравнений трех моментов для нашей системы и решаем ее:

$$\begin{cases} 2M_0(0+4) + M_1 4 = 0 \\ M_0 4 + 2M_1(4+6) + M_2 6 = -0 - 108 \\ M_1 6 + 2M_2(6+5) - 9 \cdot 5 = -108 - 62.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2M_0 + M_1 = 0 \\ 4M_0 + 20M_1 + 6M_2 = -108 \\ 6M_1 + 22M_2 = -125.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_0 = 2.254 \\ M_1 = -4.508 \\ M_2 = -4.475 \end{cases}$$

2.4. Строим эпюру опорных моментов M^0 (д) и окончательную эпюру $M_{носм} = M^0 + M_P^0$.

2.5. Выполняем кинематическую проверку с использованием одной из единичных эпюр метода сил (е), например, M_2 :

$$\Delta_2 = \sum \int \frac{M_2 M_{носм}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{2 \cdot 6^3}{12} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \times \left(\frac{1}{3} \cdot 4.508 + \frac{2}{3} \cdot 4.475 \right) \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{2 \cdot 5^3}{12} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \times \left(\frac{2}{3} \cdot 4.475 + \frac{1}{3} \cdot 9 \right) \right] = \frac{4.542}{EI} - \frac{4.542}{EI} = 0.$$

2.6. Строим эпюру поперечных усилий Q , используя зависимость Журавского (ж).

3. Построим эпюры M от действия временной нагрузки, прикладываемых поочередно к каждому пролету, методом моментных фокусных отношений (и).

3.1. Определяем значения изгибающих моментов и фиктивных реакций по табл.8.1:

Номер пролета	1		2		3	
приведенная длина l'_n	4		6		5	
действие сосредоточенной силы $P = 3$						
соотношения u, v	$u = 1/4$	$v = 3/4$	$u = 2/6$	$v = 4/6$	$u = 1/5$	$v = 4/5$
значение $M = uvPl$	2.25		4		2.4	
фиктивная реакция $6A_1^\Phi, 6B_1^\Phi$	15.75	11.25	40	32	21.6	14.4
действие сосредоточенного момента $m = 6$						
соотношения u, v	$u = 3/4$	$v = 1/4$	$u = 4/6$	$v = 2/6$	$u = 3/5$	$v = 2/5$
$M_{лев} = um; M_{пр} = vm$	-4.5	1.5	-4	2	-3.6	2.4
фиктивная реакция $6A_1^\Phi, 6B_1^\Phi$	19.5	16.5	24	12	15.6	2.4
результующая фиктивная реакция	$6A_1^\Phi$	$6B_1^\Phi$	$6A_2^\Phi$	$6B_2^\Phi$	$6A_3^\Phi$	$6B_3^\Phi$
	35.25	27.75	64	44	37.2	16.8

Грузовую эпюру в пролете желательно построить от каждого воздействия отдельно, а затем геометрически сложить полученные эпюры (к). Здесь M_g^P – грузовая эпюра от действия только временных сосредоточенных сил, M_g^m – то же, от моментов.

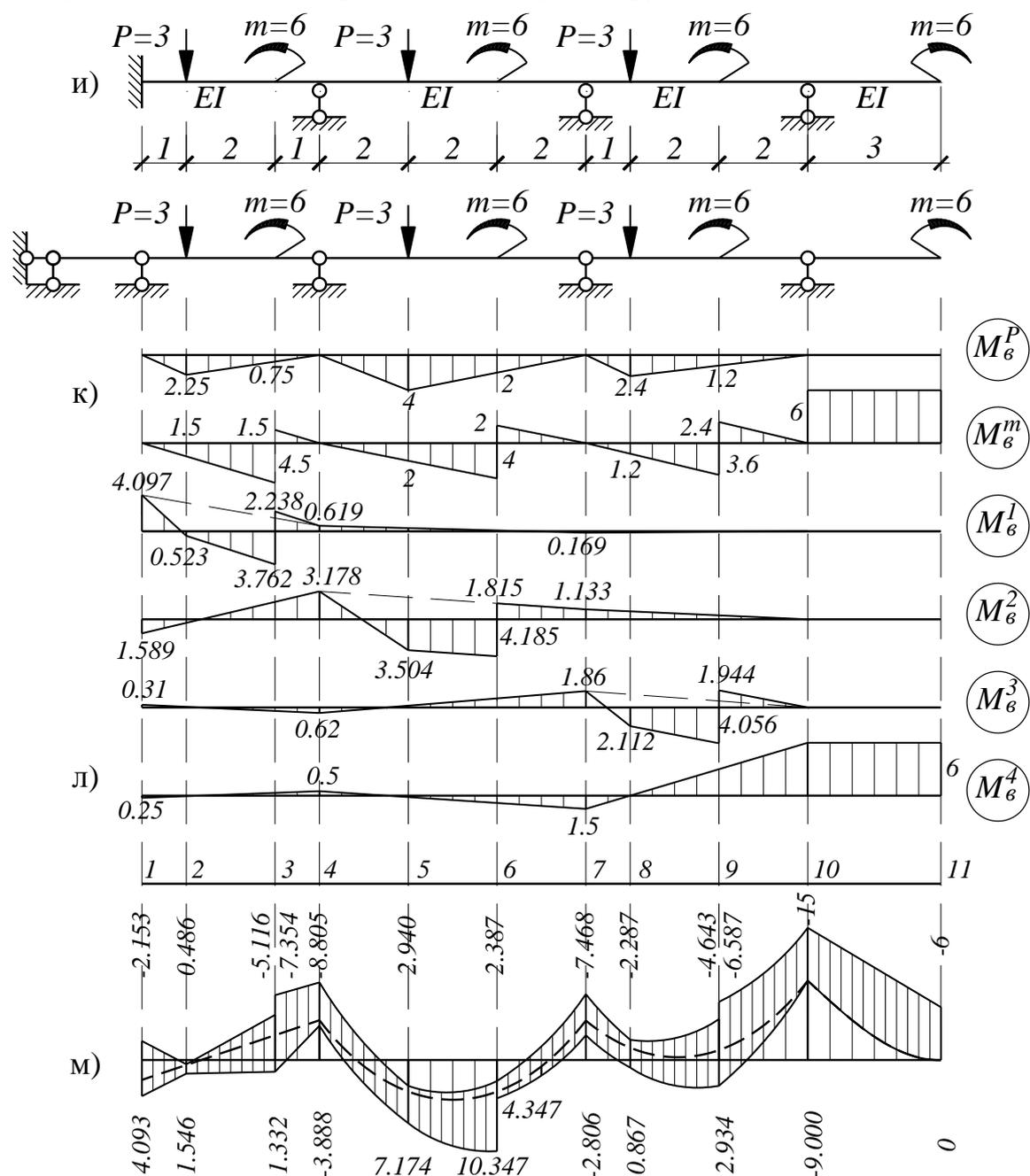
3.2. Вычисляем значения моментных фокусных отношений с помощью формул (табл.8.2).

Номер пролета		1	2	3
приведенная длина l'_n		4	6	5
$k^{лев}$	→	2	3	4
$k^{пр}$	←	101/22	11/3	∞
Номер опоры	0	1	2	3
Загруженный пролет №1	-4.097	-0.619	0.169	0
Загруженный пролет №2	1.589	-3.178	-1.133	0.000
Загруженный пролет №3	-0.310	0.620	-1.860	0
Загруженный пролет №4	0.250	-0.500	1.500	-6

4. Для каждой характерной точки определяем экстремальные значения изгибающего момента, используя для этого эпюры изгибающих моментов M_{nocm} – от постоянной нагрузки, M_e^1 , M_e^2 , M_e^3 , M_e^4 – от временной нагрузки, приложенной к 1-му, 2-му, 3-му и 4-му пролету, соответственно.

№ т.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
M_{nocm}	2.254	2.818	3.945	4.508	-3.503	-3.514	4.475	1.380	1.190	9.000	0.000
M_e^1	-4.097	0.523	3.762	-0.619	-0.356	-0.094	0.169	0.135	0.068	0.000	0.000
M_e^2	1.589	0.397	-1.986	-3.178	3.504	6.000	-1.133	-0.907	-0.453	0.000	0.000
M_e^3	-0.310	-0.077	0.387	0.620	-0.207	-1.033	-1.860	2.112	4.056	0.000	0.000
M_e^4	0.250	0.063	-0.313	-0.500	0.167	0.833	1.500	0.000	-3.000	-6.000	-6.000
M_{min}	-2.153	2.740	1.646	0.211	-4.066	-4.641	1.482	0.473	-2.263	3.000	-6.000
M_{max}	4.093	3.800	8.094	5.128	0.168	3.319	6.144	3.627	5.314	9.000	0.000

5. По полученным значениям строим объемлющую эпюру изгибающих моментов (м).



Задача 8.1. Расчет неразрезных балок

Выполнить расчет неразрезных балок, приведенных на рис.8.3 согласно исходным параметрам, приведенным в табл.8.5. Значение параметра L принимать по количеству десятков, F – по количеству единиц в номере варианта из списка группы. Жесткость балки $EI - const$. При нечетном значении F принимать схему №1, при четном – схему №2. Временная нагрузка прикладывается поочередно для каждого пролета. Выполнить анализ полученных объемлющих эпюр.

Таблица 8.4. Исходные параметры к задаче 8.1

Сложность задания	Задание
3	Построить эпюры M и Q от постоянной нагрузки q методом трех моментов. Построить эпюры M и Q от временной нагрузки P ($m = 0$), приложенной в одном пролете (по номеру группы), методом моментных фокусных отношений.
4	То же, дополнительно учесть действие изгибающего момента.
6	Построить эпюры M и Q от постоянной нагрузки q методом трех моментов. Построить эпюры M и Q от временных нагрузок P и m , прикладываемых последовательно к каждому пролету, методом моментных фокусных отношений. Построить объемлющую эпюру M .

номер группы	пролеты, м				постоянная		временная нагрузка	
	l_1	l_2	l_3	l_4	q_1	q_2	P	m
1	$3+L$	4	$4+L$	2	$3+F$		$1+F$	$5+F$
2	3	$4+L$	4	$2+L$		$3+F$	$2+F$	$4+F$
3	$3+L$	$4+L$	4	2	$3+F$		$3+F$	$3+F$
4	3	$4+L$	$4+L$	2		$3+F$	$4+F$	$2+F$
5	3	4	$4+L$	$2+L$	$3+F$		$5+F$	$1+F$

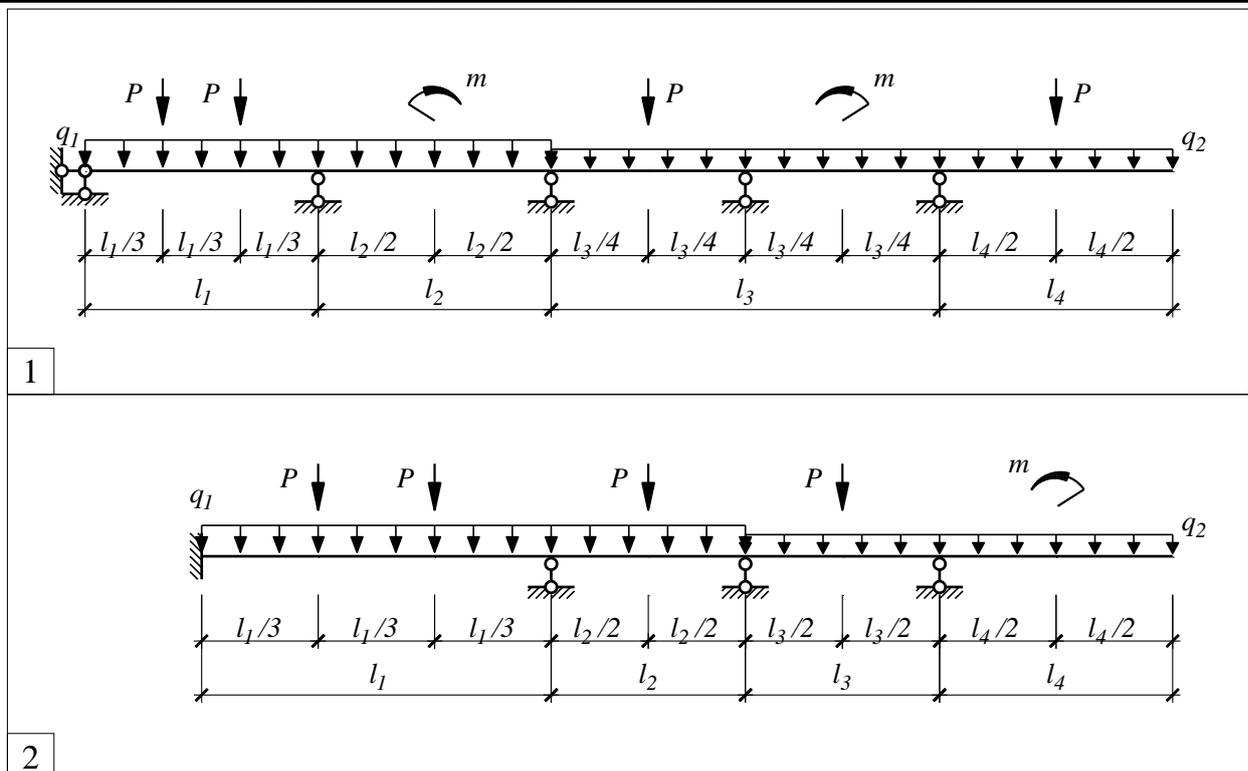


Рисунок 8.3. Расчетные схемы к задаче 8.1.

ТЕМА 9. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ МЕТОДОМ СИЛ

В отличие от статически неопределимых рам, при расчете статически неопределимых ферм учитываются не изгибные, а продольные деформации элементов. Так как по определению элементы фермы являются прямолинейными и шарнирно-закрепленными в узлах, в них будут возникать только продольные усилия от действия силового, температурного воздействия и смещения опор.

Ознакомимся с порядком расчета статически неопределимых ферм:

1. Выполняется кинематический анализ системы и определяется количество «лишних» связей: $L = -W = C_\phi + C_o - 2Y$;
2. Строится основная система метода сил путем отбрасывания «лишних» связей и замены их неизвестными усилиями X_i .
3. Система канонических уравнений записывается так же, как и при расчете рам. Приведем одно из них:

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{iP} + \Delta_{it} + \Delta_{ic} = 0.$$

Решение системы канонических уравнений и вычисление усилий в элементах фермы удобно проводить в табличной форме. Приведем пример заполнения таблиц для задачи с одним неизвестным при силовом воздействии.

Таблица 9.1. Форма таблицы для вычисления усилий в элементах ферм

Номер столбца	Номер стержней фермы	верхний пояс	нижний пояс	раскосы	стойки
	Значение	Пояснение			
1	l_k	– длина k -го стержня			
2	l'_k	– приведенная длина k -го стержня $l'_k = \frac{EA_0}{EA_k} l_k$			
3	N_1	– усилие в основной ферме от действия единичной силы $X_1 = 1$			
4	$N_1 l'_k$				
5	$N_1^2 l'_k$	– перемещение от $X_1 = 1$: $\sum_1 = EA_0 \delta_{11} = \sum N_1^2 l'_k$ – сумма столбца			
6	N_P^0	– усилие в основной ферме от нагрузки			
7	$N_P^0 N_1 l'_k$	– перемещение от нагрузки: $\sum_P = EA_0 \Delta_{1P} = \sum N_P^0 N_1 l'_k$			
		– вычисляется неизвестная реакция X_1 как: $X_1 = -\sum_P / \sum_1$			
8	$N_1 \times X_1$	– усилия в элементах фермы от реакции X_1 .			
9	N_P	– окончательные усилия от силового воздействия: $N_P = N_1 X_1 + N_P^0$			
10	$N_P N_1 l'_k$	– кинематическая проверка $\Delta_1 = \sum N_P N_1 l'_k = 0$			

При больших количествах неизвестных или других факторах воздействия таблица корректируется необходимым образом. Коэффициенты при неизвестных системы канонических уравнений при этом определяются как:

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{N_i^2}{EA} dx = \sum_k \frac{N_i^2}{EA_k} l_k; \quad \delta_{ij} = \sum \int \frac{N_i N_j}{EA} dx = \sum_k \frac{N_i N_j}{EA_k} l_k;$$

свободные члены канонического уравнения определяются как:

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{N_i N_P^0}{EA} dx = \sum_k \frac{N_i N_P^0}{EA_k} l_k \quad \text{— от силового воздействия;}$$

$$\Delta_{it} = \sum \int N_i \alpha t_{cp} dx = \sum_k N_i l_k \alpha t_{cpk} \quad \text{— от температурного воздействия;}$$

$$\Delta_{ic} = -\sum_k R_i c_j \quad \text{— от смещения опор.}$$

4. Проверку правильности результатов расчета фермы выполняют статическим способом путем вырезания узлов и составления уравнения статики, и кинематическим способом из условия равенства нулю перемещения Δ_i вдоль любой отброшенной связи:

$$\sum \int \frac{N_i N_P}{EA} dx = \sum_k \frac{N_i N_P}{EA_k} l_k = 0 \quad \text{— от силового воздействия;}$$

$$\sum_k N_i l_k \alpha t_{cpk} + \sum_k \frac{N_i N_t}{EA_k} l_k = 0 \quad \text{— от температурного воздействия;}$$

$$-\sum_k R_i c_j + \sum_k \frac{N_i N_c}{EA_k} l_k \quad \text{— от смещения опор.}$$

Таблица 9.2. Некоторые примеры удаления «лишних» связей в фермах

Вид схемы $L=1$	Примеры основной системы метода сил		
	1	2	неправильно!

Задача 9.1. Расчет статически неопределимых ферм методом сил

Для ферм, приведенных на стр.97...99, определить усилия в стержнях. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.9.3. Расчет с анализом выполнить в следующей последовательности: п.1) первоначально выполнить расчет для предлагаемой фермы; п.2) затем видоизменить ферму, превратив ее во внутренне или внешне статически неопределимую; п.3) полученные результаты сравнить и сделать выводы о рациональности рассмотренных ферм.

При выполнении данного задания опираться на пример расчета статически определимой фермы. Расчет допускается выполнить с использованием ЭВМ.

Таблица 9.3. Исходные параметры к задаче 9.1

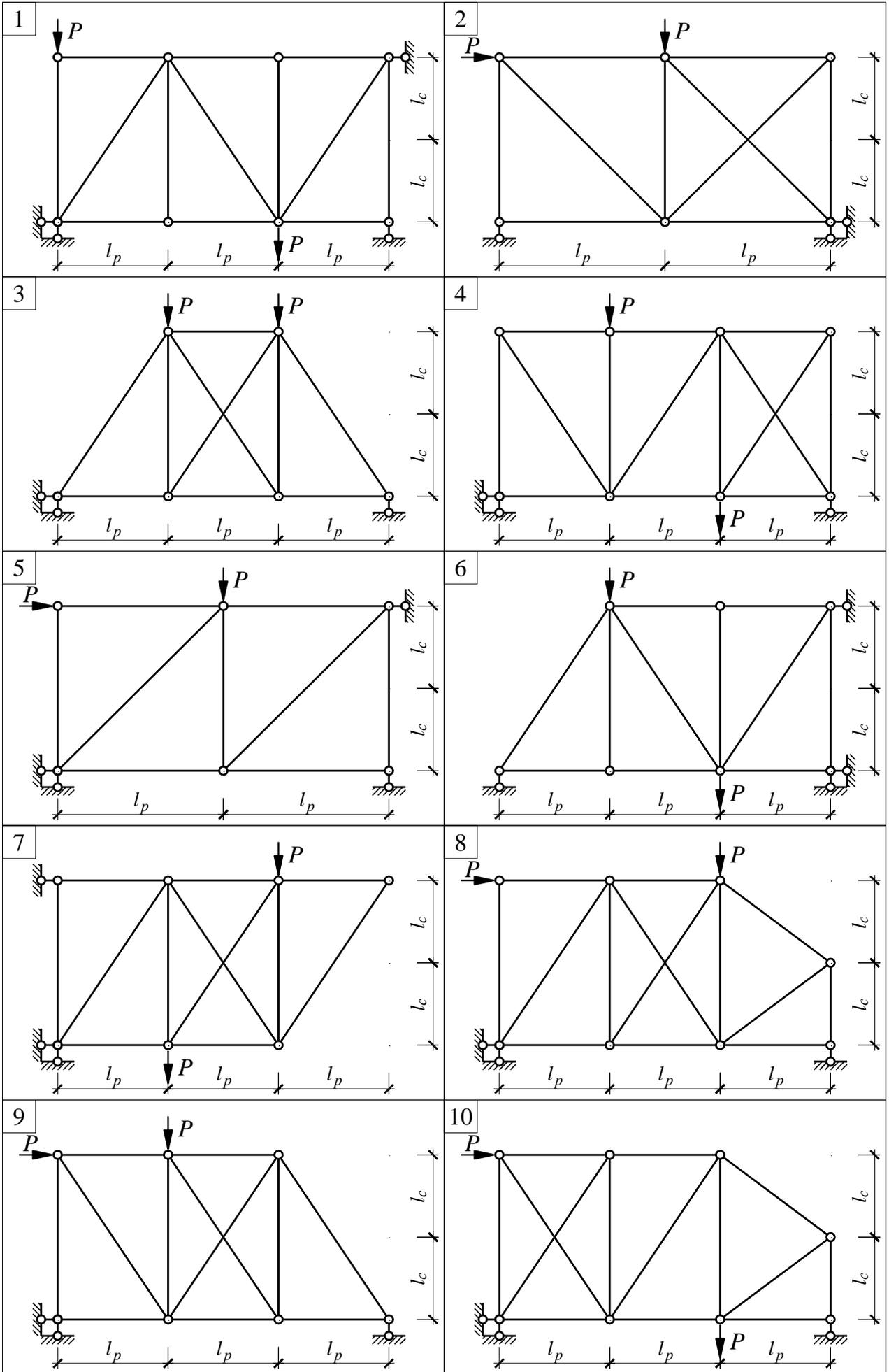
номер группы	l_p , м	l_c , м	P_1 , кН	P_2 , кН	Сложность задания	Переменные параметры	
						l	f
1	2	$l + 1$	10	f	3	$l = 0$	$f = 0$
2	2	$l + 2$	9	f	4	$l = 1$	$f = 5$
3	2	$l + 3$	8	f	6 с анализом	$l = 2$ $f = 3$	<i>n.1 (по условию)</i>
4	3	$l + 2$	7	f			<i>n.2</i>
5	3	$l + 3$	6	f			<i>n.3</i>

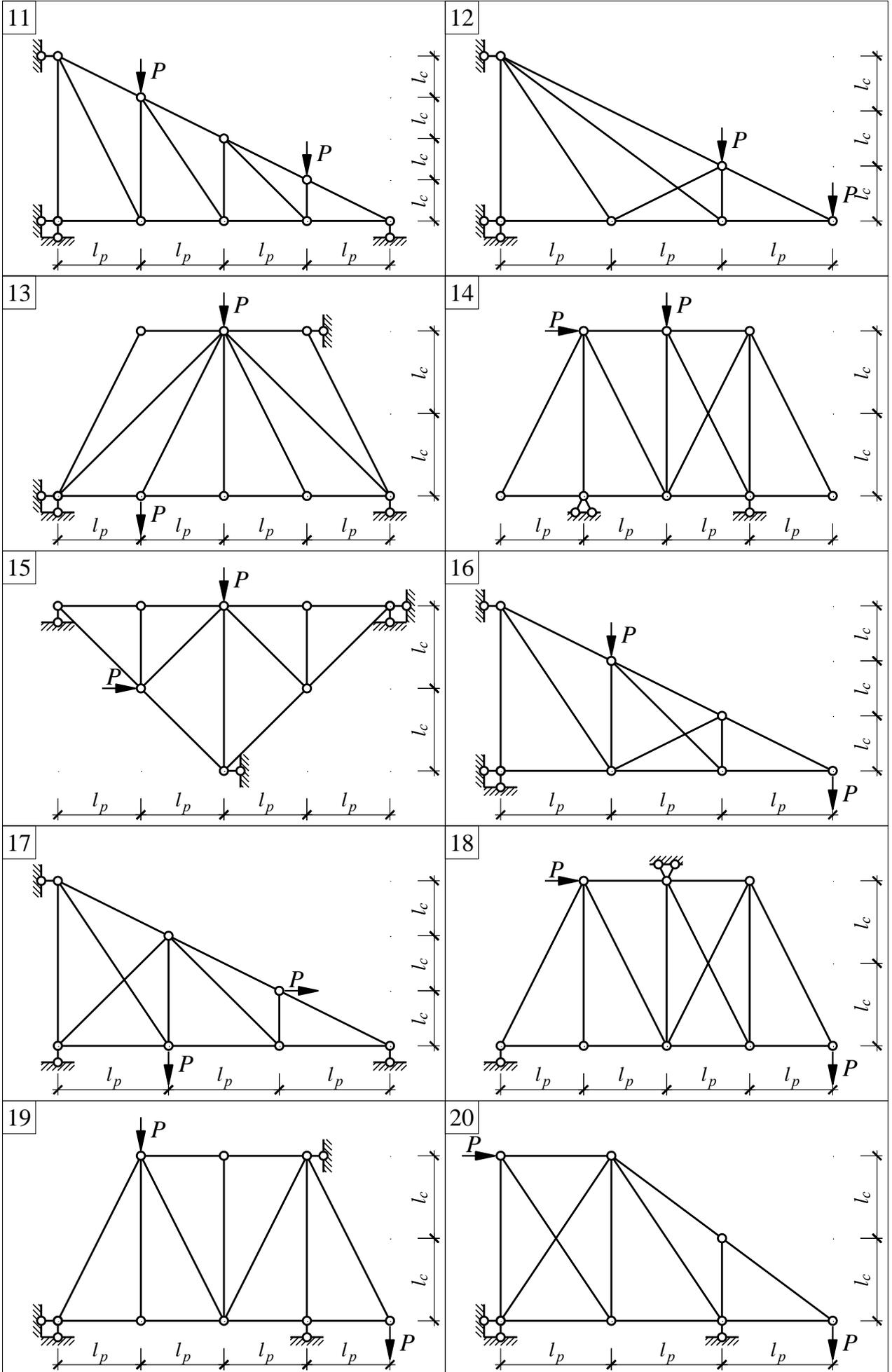
После изучения данной темы студент должен:

- **знать** порядок расчета статически неопределимых ферм методом сил в зависимости от расчетной схемы;
- **уметь** строить единичные, грузовые и окончательные эпюры продольных сил от приложенного воздействия;
- **знать** методы построения единичной и грузовой эпюр, определения коэффициентов и свободных членов, проверки расчета;
- **владеть** методами определения усилий в фермах методом сил;

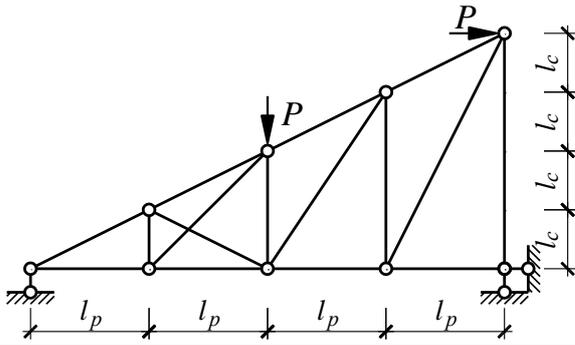
и суметь **ответить** на следующие вопросы:

1. Одинаково ли определяется число лишних связей в фермах и рамах?
2. Чем отличается определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений при расчете ферм от расчета в рамах?
3. Как определить приведенную длину элементов ферм?
4. Как определить окончательные усилия в элементах ферм?
5. Все ли усилия в элементах ферм зависят от неизвестных?
6. Можно ли определить усилия в некоторых стержнях фермы сразу без отыскания неизвестных?

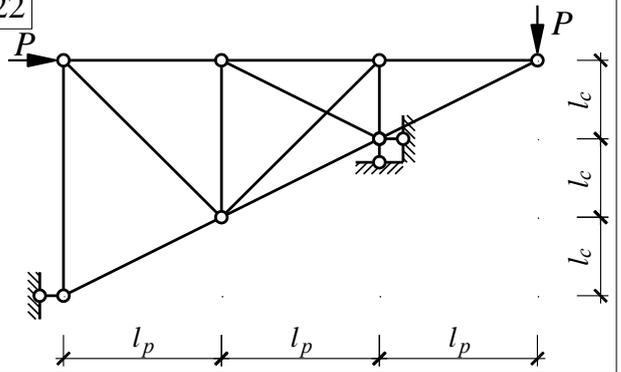




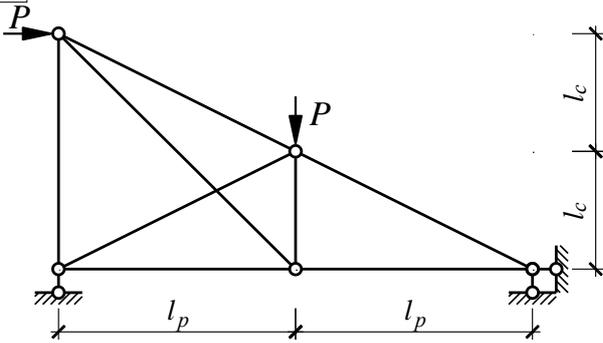
21



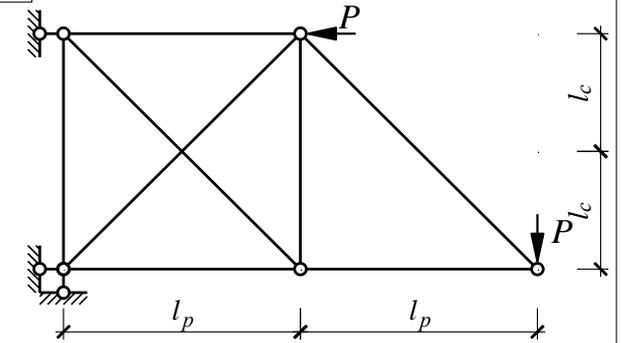
22



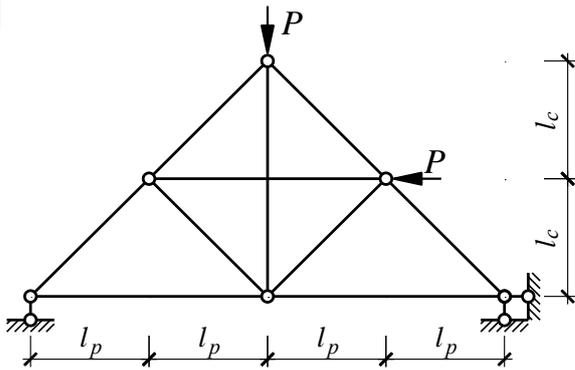
23



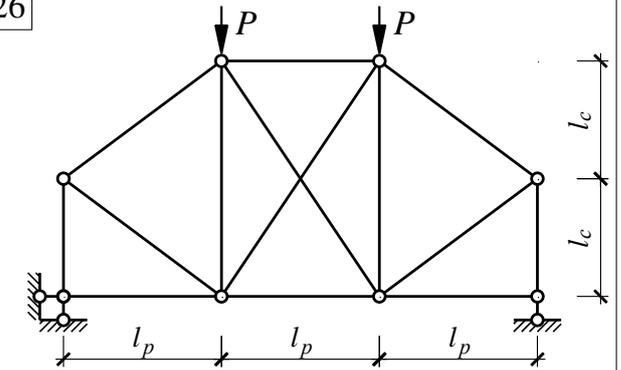
24



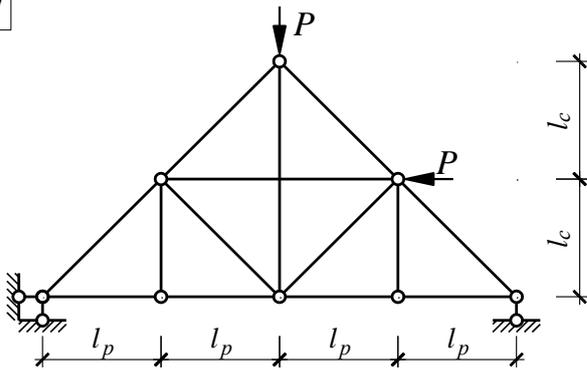
25



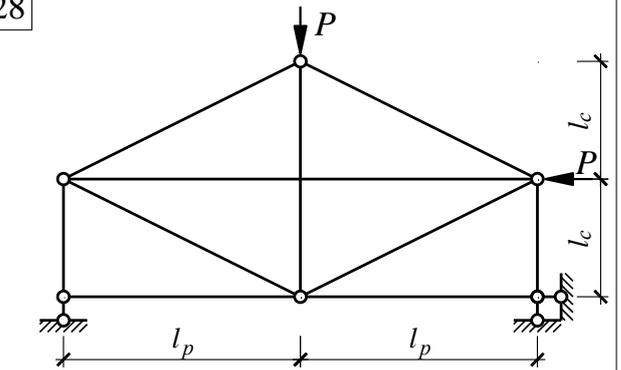
26



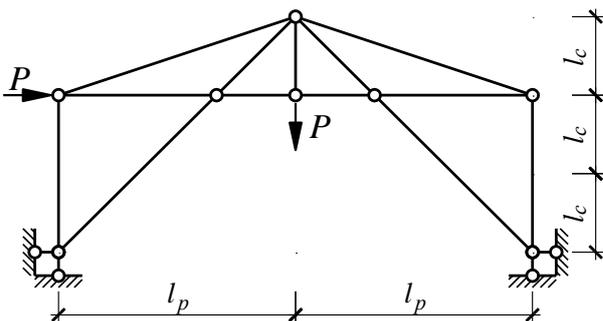
27



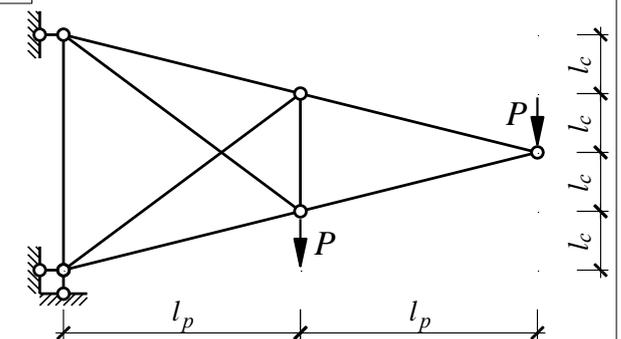
28



29



30



ТЕМА 10. РАСЧЕТ АРОК МЕТОДОМ СИЛ

Отличительной особенностью расчета статически неопределимых арок является наличие расчетной погрешности, связанное с необходимостью разделения арки на прямолинейные участки и упрощения функций перемножения эпюр. Данное допущение фактически превращает арку в ломаную балку определенного очертания с постоянным значением изгибающего момента в пределах каждого участка. Чем больше количество участков, на которые разбита арка, тем меньше погрешность расчета арки методом сил. Для рассматриваемых задач рекомендуется принимать количество участков не менее 8.

Рассмотрим порядок расчета однажды статически неопределимой арки:

1. Определяем количество лишних связей $L = 3K - III$ и выполняем проверку расчетной схемы на геометрическую неизменяемость. В данном случае $L = 1$.
2. В основной системе метода сил за неизвестную X_1 принимают распорное усилие или усилие в затяжке.

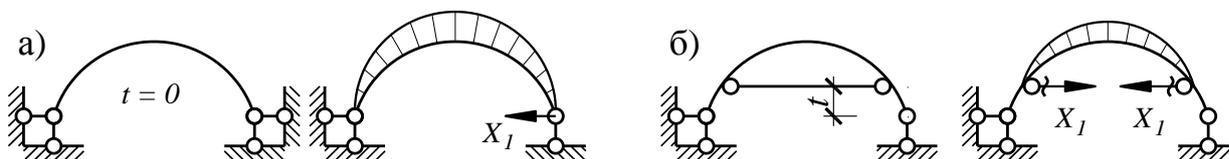


Рисунок 10.1. Расчетная схема и совмещенная схема основной системы и характера эпюры M_1 для арки без затяжки (а), с затяжкой (б)

3. Каноническое уравнение запишется в виде:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

коэффициенты уравнения определяются по формулам:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} ds = \sum \frac{y^2 \Delta s}{EI} \quad \text{— для арки без затяжки;}$$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} ds + \frac{l_{зам}}{EA_{зам}} = \sum \frac{y^2 \Delta s}{EI} + \frac{l_{зам}}{EA_{зам}} \quad \text{— для арки с затяжкой (дополнительно учитывается продольное удлинение затяжки);}$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{M_1 M_P}{EI} ds = - \sum \frac{y M_P^0 \Delta s}{EI}.$$

4. Усилия в основной системе арки от единичной силы равны:

$$M_1 = 0; Q_1 = 0; N_1 = 0 \quad \text{— ниже затяжки;}$$

$$M_1 = -(y - t); Q_1 = -\sin \varphi; N_1 = -\cos \varphi \quad \text{— выше затяжки.}$$

Усилия в основной системе арки от внешней нагрузки равны:

$$M_P^0 = M^0; Q_P^0 = Q^0 \cos \varphi; N_P^0 = -Q^0 \sin \varphi,$$

где M^0, Q^0 — значения изгибающего момента и поперечной силы для балочной схемы.

Таблица 10.1. Форма таблицы для вычисления усилий в арке

Номер столбца	Обозначение	Пояснение
1	k	– номер сечения (начинается с 0)
2	x	– координата x сечения
3	y	– координата y сечения
4	$\operatorname{tg} \varphi = y'$	– φ – угол между касательной в сечении и горизонталью
5	$\sin \varphi$	
6	$\cos \varphi$	
7	l'	– приведенная длина участка: $l' = \frac{I_0}{I_k} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$;
8	M_1	– значение изгибающего момента: $M_1 = y$ – для арки без затяжки, $M_1 = 0$ при $y < t$, $M_1 = (y - t)$ при $y > t$ – для арки с затяжкой
9	$M_1^2 l'$	– перемещение от $X_1 = 1$: $\sum_1 = \delta_{11} E I_0 = \sum M_1^2 l'$ – сумма столбца
10	M_0	– значение изгибающего момента в балочной схеме
11	$M_0 M_1 l'$	– перемещение от нагрузки: $\sum P = E I_0 \Delta_{1P} = \sum M_0 M_1 l'$ – сумма столбца
		неизвестное усилие X_1 определяется как: $X_1 = \sum P / \left(\sum_1 + \frac{l_{зам}}{E A_{зам}} \right)$
12	$M_1 \times X_1$	– изгибающий момент в арке от фактической реакции X_1 .
13	M_P	– окончательный изгибающий момент: $M_P = M_1 X_1 + M_0$
14	$N_P N_1 l'_k$	– кинематическая проверка $\Delta_1 = \sum N_P N_1 l'_k = 0$

После изучения данной темы студент должен:

- **знать** виды статически неопределимых арок и методы их расчета методом сил, отличие расчета арок с затяжкой и без нее;
- **уметь** определять коэффициенты канонического уравнения для различных расчетных схем арок;
- **владеть** правилами расчета статически неопределимых арок при различных внешних силовых воздействиях;

и суметь **ответить** на следующие вопросы:

1. Чем отличается расчет статически неопределимых арок от рам?
2. Чем отличается расчет двухшарнирной арки от трехшарнирной?
3. Чем отличается расчет двухшарнирных арок с затяжкой и без нее?
4. От чего зависит точность получаемого результата в арках (эп. M , Q , N)?
5. Нарисуйте возможный вид эпюры M от распределенной нагрузки (или сосредоточенной силы) в двухшарнирной арке.
6. Чем будет отличаться расчет бесшарнирной арки от двухшарнирной?

Задача 10.1. Расчет статически неопределимых арок методом сил

Для приведенных на рис.10.2 расчетных схем арок построить эпюры внутренних усилий M , Q и N . Исходные параметры принимать по табл.10.2, где Γ – номер группы, D – количество десятков, E – количество единиц в номере варианта по списку группы. Анализ выполнить путем сравнения результатов расчета арок для схемы 1 (без затяжки) и схемы 2 (с затяжкой) при одинаковых геометрических параметрах и загрузении. Допускается выполнить расчет на ЭВМ.

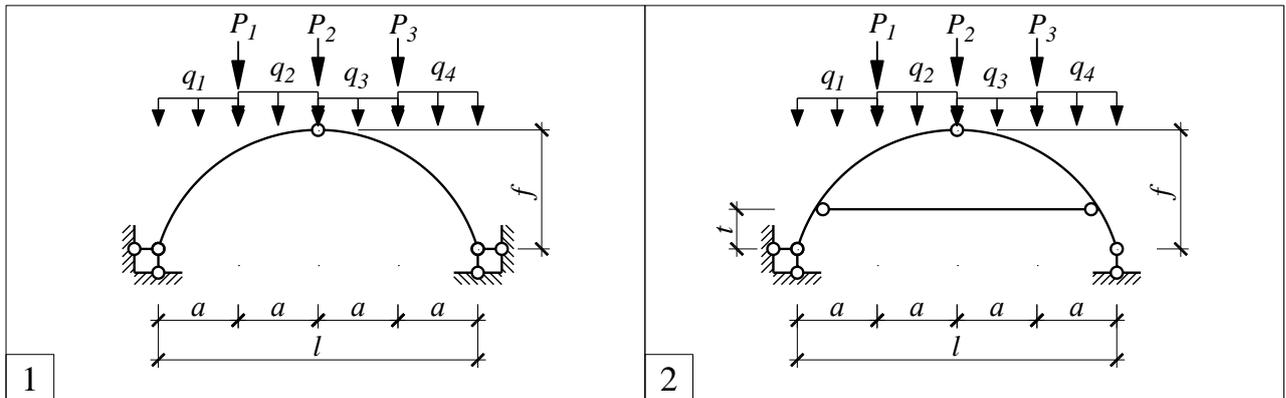


Рисунок 10.2. Расчетные схемы к задаче 10.1

Таблица 10.2. Исходные параметры к задаче 1.1

Сложность задачи, балл	6, с анализом	4	3
Схема	1, 2	2	1
Параметры	$L = \Gamma, F = E$	$L = \Gamma, F = E$	$L = \Gamma, F = 0$

Параметр D	Очертание	Размеры, м			P , кН			q , кН/м			
		l	f	t	P_1	P_2	P_3	q_1	q_2	q_3	q_4
1	параболическое	$16 \cdot L$	$4 \cdot L$	1	10	30				F	F
2	круговое	$12 \cdot L$	$3 \cdot L$	1	10	20			F	F	
3 и более	синусоидальное	$8 \cdot L$	$2 \cdot L$	1		10	20	F	F		

При выполнении данного задания опираться на пример расчета статически определимой арки.

ТЕМА 11. РАСЧЕТ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Метод перемещений является одним из важнейших методов расчета статически неопределимых систем и имеет симметричную аналогию с методом сил. В качестве неизвестных в методе перемещений принимаются упругие деформации узлов: поворот и линейные перемещения. Усилия определяются по результирующим значениям перемещений.

При расчете статически неопределимых систем методом перемещений вводятся следующие допущения:

- концы стержней, сходящиеся в жестком узле, поворачиваются на один и тот же угол;
- влияние поперечных Q и продольных N сил на перемещение узлов пренебрежимо малы и не учитываются за исключением задач на температурное воздействие, в которых учитываются продольные деформации;
- расстояние между концами стержней при изгибе остаются постоянным;
- углы поворота узлов и сечений из-за их малости принимаются равными тангенсам: $\varphi \sim tg \varphi$.

Рассмотрим *порядок расчета* рам методом перемещений:

1. Количество неизвестных метода перемещений Π , называемое степенью кинематической неопределимости, определяется как сумма неизвестных угловых Π_u и линейных Π_l перемещений:

$$\Pi = \Pi_y + \Pi_n$$

Количество неизвестных угловых перемещений определяется как общее количество узлов, поворот которых возможен и приведет к деформированию стержней. К ним относятся узлы без врезанного шарнира (жесткие), в которых сходятся два или более стержня (а).

Количество неизвестных линейных перемещений равняется степени свободы системы W при условном врезании шарниров во все ее узлы, в том числе в опорные (б). Свободные консоли при этом не учитываются.

Линейные перемещения вызывают изгиб стержней, нормально примыкающих к смещаемым узлам, однако деформациями растяжения или сжатия стержней принято пренебрегать, за исключением расчета на температурное воздействие. Консоли рассчитываются как статически определимые консольные балки.

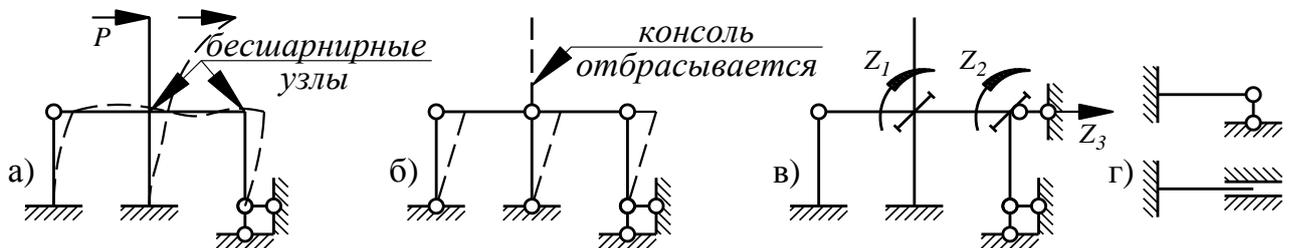


Рисунок 11.1. Схема определения неизвестных метода перемещений

- Основная система метода перемещений образуется путем введения одиночных связей против возможных перемещений (в) и представляет собой абсолютно неподвижную совокупность однопролетных статически неопределимых балок двух типов (рис.11.1г), решения которых известны и все усилия от различного рода воздействий сведены в таблицу (см.прил.1). Против угловых перемещений вводится подвижное защемление, против линейных перемещений – шарнирно-подвижные опоры. Неизвестные в методе перемещений обозначаются через Z_1, Z_2, \dots, Z_n .
- Система канонических уравнений метода перемещений записывается в виде:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} + R_{1t} + R_{1c} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} + R_{2t} + R_{2c} = 0 \\ \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} + R_{nt} + R_{nc} = 0 \end{cases}$$

Например, при решении рам с двумя неизвестным $\Pi = 2$ на силовое воздействие, система канонических уравнений будет следующей:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

- Путем последовательного приложения в основной системе метода перемещений единичных перемещений $Z_i = 1$, строят единичные эпюры изги-

бающих моментов M_i . При построении эпюр используют табличные эпюры метода перемещений, приведенные в прил. 1.

5. Эпюры M_P^0 , M_t^0 , $M_{t'}^0$, M_c^0 от внешнего воздействия также строят в основной системе метода перемещений с использованием табличных эпюр (прил.1), причем температурное воздействие разлагают на среднюю составляющую M_{tcp}^0 и перепад $M_{t'}^0$.

6. По единичным эпюрам изгибающих моментов определяют реактивные реакции системы в закрепленных узлах. Коэффициент r_{ij} означает реакцию в i -ой связи от единичного перемещения узла $Z_j = 1$.

По грузовым эпюрам определяют свободные члены R_{iP} , R_{it} , R_{ic} как реакции в i -ой связи от внешнего воздействия.

Реактивные реакции вычисляются методом вырезания узлов для угловых перемещений и методом сечения для линейных перемещений. Первоначально реакции считаются положительными и направляется по направлению перемещения Z_i . Реакции r_{ii} всегда положительные.

7. Решают систему канонических уравнений и определяют неизвестные перемещения в закрепленных узлах $Z_1, Z_2 \dots Z_n$.

8. Строят промежуточные эпюры моментов путем перемножения единичных эпюр с полученными значениями перемещений $M_1 \cdot Z_1, M_2 \cdot Z_2 \dots M_n \cdot Z_n$ и окончательную эпюру путем сложения промежуточных и грузовой эпюр:

$$M_P = M_1 \cdot Z_1 + M_2 \cdot Z_2 + \dots + M_n \cdot Z_n + M_P^0 - \text{от силового воздействия};$$

$$M_t = M_1 \cdot Z_1 + M_2 \cdot Z_2 + \dots + M_n \cdot Z_n - \text{от температурного воздействия};$$

$$M_c = M_1 \cdot Z_1 + M_2 \cdot Z_2 + \dots + M_n \cdot Z_n - \text{от смещения опор}.$$

9. Проводят статическую проверку правильности построения эпюры изгибающих моментов путем вырезания узлов: отсутствие неуравновешенных реакций в вырезанных узлах означает правильность построения эпюры.

10. Для выполнения кинематической проверки правильности построения эпюры M строят единичную эпюру моментов метода сил от одной, наиболее выгодной, неизвестной X_i и определяют перемещение по направлению отброшенной i -ой связи, которое должно равняться нулю.

11. По эпюре изгибающих моментов M строят эпюру поперечных сил Q , используя дифференциальную зависимость Журавского: $Q = dM/dx$.

12. По эпюре Q строят эпюру продольных усилий N , рассматривая равновесия узлов с учетом возможной узловой нагрузки P .

13. Проводят статическую проверку правильности построения эпюр Q и N путем составления уравнений проекций сил на оси X и Y для всей системы после определения опорных реакций из вырезанных опорных узлов.

При расчете *симметричных рам* методом перемещений производят группировку неизвестных, представляющих собой парные неизвестные – сим-

метричные и кососимметричные составляющие неизвестных перемещений. При симметричном нагружении кососимметричные неизвестные будут равны нулю, при кососимметричном нагружении – симметричные. Следует помнить, что любое нагружение может быть разложено на симметричную и кососимметричную составляющие.



Рисунок 11.2. Схема группировки неизвестных метода перемещений

После изучения данной темы студент должен обладать следующими компетенциями:

- **знать** порядок расчета статически неопределимых систем методом перемещений на силовое, температурное воздействия и смещение опор;
- **уметь** пользоваться методом перемещений для расчета статически неопределимых балок, рам, научиться определять основную систему, строить единичные, грузовые и окончательные эпюры внутренних усилий;
- **владеть** правилами расчета статически неопределимых систем методом перемещений, проверкой расчета, умело использовать характер внешнего воздействия на расчетную схему, пользоваться группировкой неизвестных;
- суметь **ответить** на следующие вопросы:
 1. В чем заключается идея метода перемещений?
 2. В чем состоит отличие определения числа угловых от числа линейных перемещений?
 3. Возможно ли многообразие основных систем в методе перемещений?
 4. В чем заключается физический смысл канонических уравнений метода перемещений?
 5. В чем заключается различие при определении свободных членов R_{ip} , R_{ii} , R_{ic} ?
 6. Какова проверка правильности построения эпюры M ?

Пример 11.1. Построение эпюр внутренних усилий для рамы от силового воздействия методом перемещений

Условие задачи: Для схемы (рис.11.3а) построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от силового воздействия. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

Решение.

1. Выполняем кинематический анализ и убеждаемся, что система статически неопределима и геометрически неизменяема: $L = 3K - 3I = 3 \cdot 3 - 4 = 5$ – неизвестных 5 при расчете рамы методом сил. Методом перемещений неизвестных два: $\Pi = \Pi_y + \Pi_l = 1 + 1 = 2$.

2. Строим основную систему метода перемещений (б). Обозначаем на ней приведенные жесткости стержней, выраженные через один коэффициент i :

$$i_c = \frac{EI_c}{l_c} = \frac{EI}{3} = 2i; \quad i_p = \frac{EI_p}{l_p} = \frac{2EI}{4} = \frac{EI}{2} = 3i.$$

3. Записываем систему канонических уравнений в общем виде:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} + R_{1t} + R_{1c} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} + R_{2t} + R_{2c} = 0 \end{cases}$$

4. Строим единичные эпюры моментов M_1 , M_2 от поочередно прикладываемых к основной системе единичных перемещений $Z_1 = 1$ и $Z_2 = 1$ (в). При построении эпюр пользуемся табличными эпюрами метода перемещений, приведенными в прил.1.

5. Строим грузовую эпюру M_P^0 от нагрузки, приложенной в основной системе метода перемещений (г).

6. Определяем свободные коэффициенты при каноническом уравнении методом вырезания узлов и сечений (д):

$$r_{11} = 6i + 9i + 8i + 12i = 35i; \quad r_{12} = r_{21} = 2i - 4i = -2i; \quad r_{22} = 2i/3 + 8i/3 + 2i/3 = 4i.$$

и определяем свободные члены системы канонических уравнений:

$$R_{1P} = 4 - 10 = -6; \quad R_{2P} = 4.5.$$

7. Решаем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} 35i Z_1 - 2i Z_2 - 6 = 0 \\ -2i Z_1 + 4i Z_2 + 4.5 = 0 \end{cases},$$

и определяем неизвестные:

$$Z_1 = -\frac{1}{i} \cdot \frac{(-2) \cdot 4.5 - 4 \cdot (-6)}{35 \cdot 4 - (-2) \cdot (-2)} = \frac{15}{136i} = \frac{0.11}{i}; \quad Z_2 = \frac{1}{2i} \left(35i \frac{15}{136i} - 6 \right) = -\frac{291}{272i} = -\frac{1.07}{i};$$

8. Строим промежуточные эпюры $M_1 \cdot Z_1$, $M_2 \cdot Z_2$ (ж) и окончательную эпюру изгибающих моментов $M_P = M_1 \cdot Z_1 + M_2 \cdot Z_2 + M_P^0$ (и).

9. Выполняем статическую проверку правильности построения эпюры M_P путем вырезания и уравнивания наиболее сложного узла (к).

10. Выполняем кинематическую проверку эпюры M_P с использованием любой единичной эпюры M_1 в основной системе метода сил (л):

$$\Delta_1 = \sum \int \frac{M_1 M_P}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[1 \cdot 2 \times \frac{-3.34 + 3.67}{2} + 1 \cdot 2 \times \frac{3.67 - 5.32}{2} \right] + \frac{1}{EI} \left[1 \cdot 3 \times \frac{5.16 - 4.72}{2} \right] = 0$$

11. Строим эпюры Q , N (м).

12. Из эпюр определяем опорные реакции и выполняем статическую проверку (н).

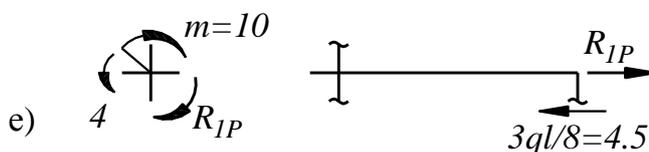
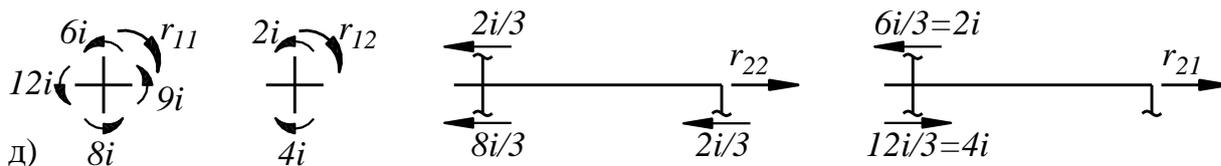
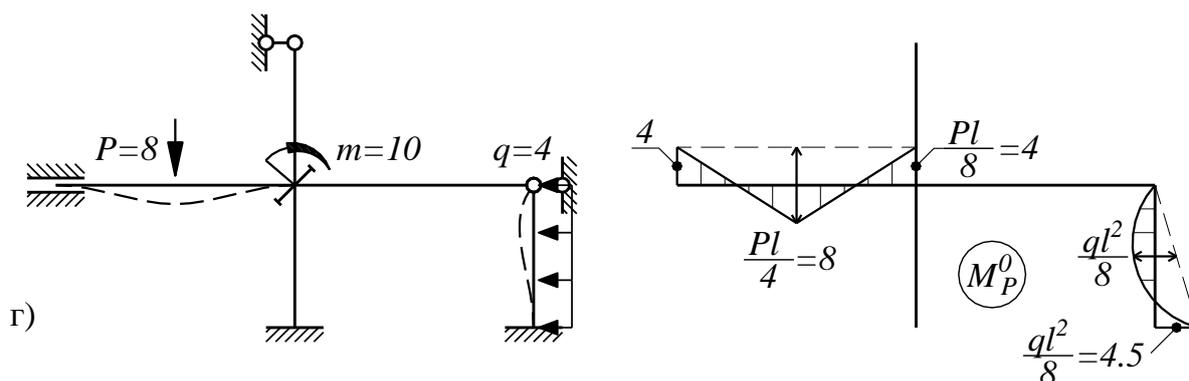
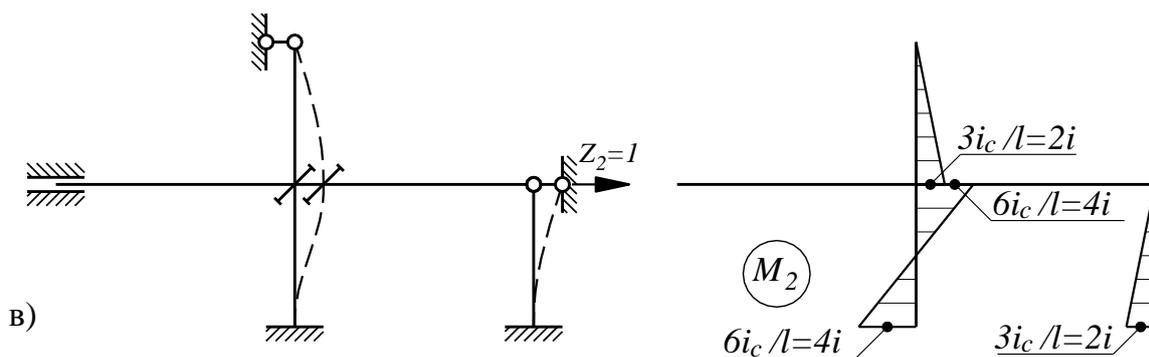
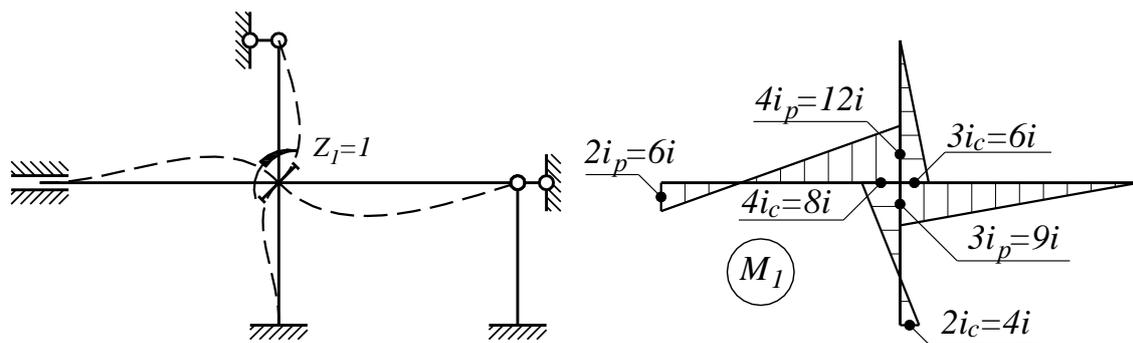
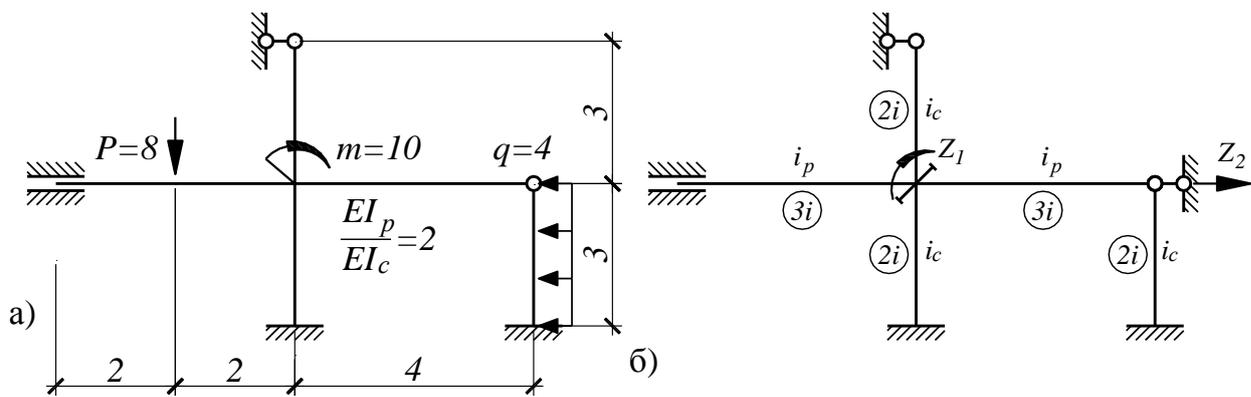


Рисунок 11.3. Схемы к примеру 11.1 (начало)

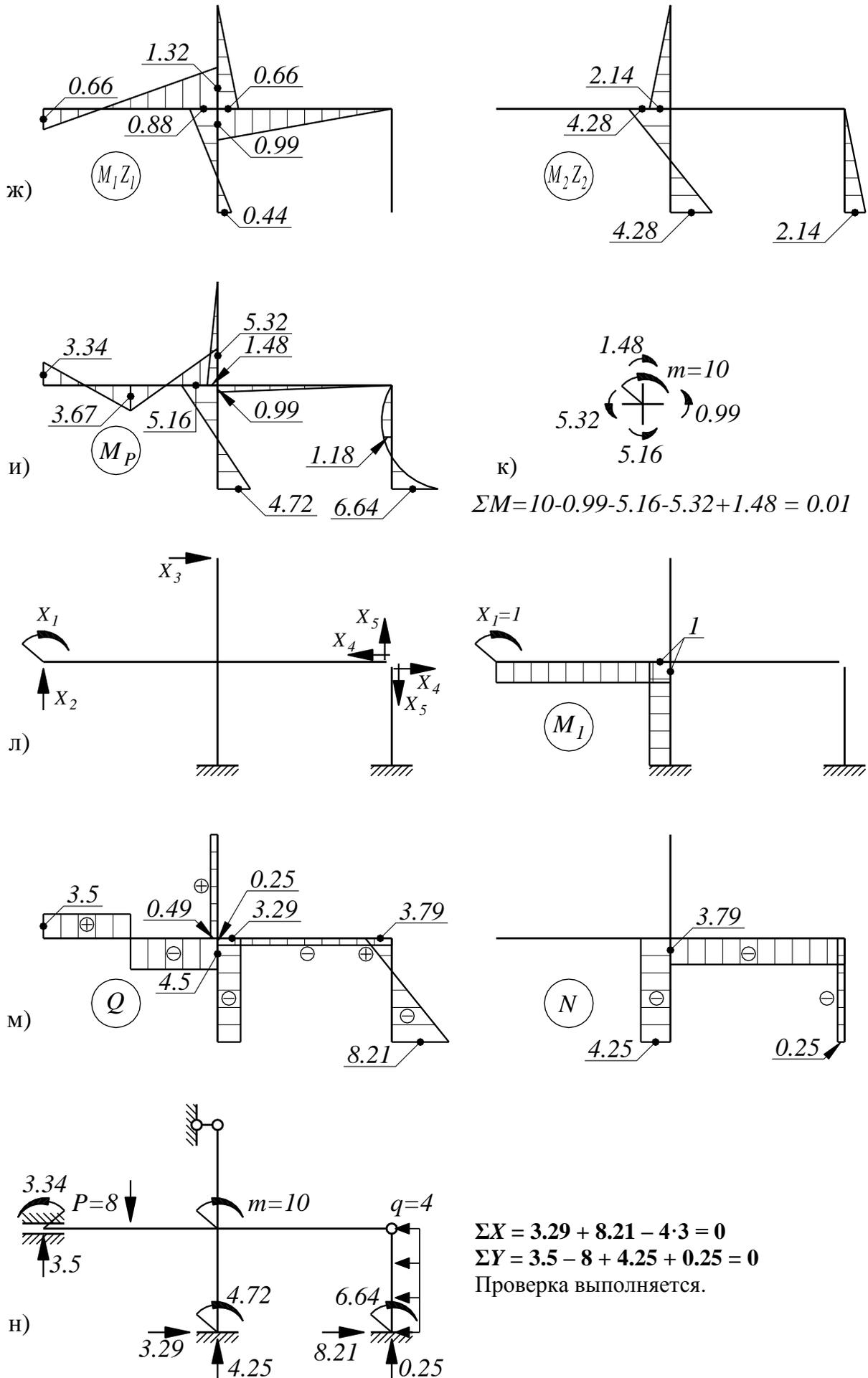


Рисунок 11.3. Схемы к примеру 11.1 (окончание)

Пример 11.2. Построение эпюр внутренних усилий от температурного воздействия и смещения опор методом перемещений

Условие задачи: Для схемы (рис.11.4а) построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от температурного воздействия и смещения опор. Изгибная жесткость постоянная $EI = const$. Высота сечения балок $h_{сеч.} = 0.1$ м, коэффициент линейного расширения $\alpha = 10^{-5}$ 1/град. Единицы измерения: м, град (на схемах условно не показаны).

Решение.

1. Выполняем кинематический анализ и убеждаемся, что система статически неопределима и геометрически неизменяема: $L = 3K - III = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ – неизвестных 2 при расчете рамы методом сил. Методом перемещений одно неизвестное: $\Pi = \Pi_y + \Pi_n = 1$.

2. Строим основную систему метода перемещений (б). Обозначаем на ней приведенные жесткости стержней, выраженные через один коэффициент i :

$$i_c = \frac{EI_c}{l_c} = \frac{EI}{3} = 4i; \quad i_p = \frac{EI_p}{l_p} = \frac{EI}{4} = 3i; \quad i = \frac{EI}{12}.$$

3. Записываем каноническое уравнение метода перемещений в общем виде:

$$r_{11}Z_1 + R_{1t} + R_{1c} = 0.$$

4. Строим единичную эпюру моментов M_1 от приложенного к основной системе единичного перемещения $Z_1 = 1$ (в) и определяем коэффициент при неизвестном:

$$r_{11} = 12i + 9i + 16i + 9i = 46i.$$

5. Выполним расчет только от температурного воздействия:

5.1. Строим схему распределения средней t_{cp} температуры (г), определяем деформации стержней с учетом закрепленных узлов. Перемещения определяются как: $\Delta_k = l_k \alpha t_{cpk}$.

$\Delta_1 = 4 \cdot (-10) = -40\alpha$; $\Delta_2 = 4 \cdot (-10) = -40\alpha$; $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$; $\Delta_5 = 3 \cdot (-10) = -30\alpha$; $\Delta_6 = 3 \cdot (-40) = -120\alpha$.

Строим эпюру $M_{t_{cp}}$, используя табличные эпюры прил.1 при фактических, а не единичных перемещениях точек системы, и определяем реакцию в защемленном узле от средней составляющей температуры.

$$R_{t_{cp}} = 160i\alpha - 67.5i\alpha - 320i\alpha = -227.5i\alpha.$$

5.2. Строим схему распределения перепада температуры t' , эпюру $M_{t'}$ также с помощью табличных эпюр прил.1, определяем реакцию в защемленном узле от составляющей перепада температуры (д):

$$R_{t'} = 10800i\alpha - 10800i\alpha = 0.$$

Стержень деформируется в сторону более нагретых волокон, однако эпюра откладывается со стороны менее нагретых волокон, т.к. температурное воздействие приводит к возникновению внутренних напряжений.

5.3. Решаем каноническое уравнение и определяем значение перемещения Z_1 .

$$Z_1 = -\frac{R_{1t_{cp}} + R_{1t'}}{r_{11}} = -\frac{-227.5i\alpha + 0}{46i} = 4.946\alpha \approx 5\alpha.$$

5.4. Строим промежуточную $M_1 \cdot Z_1$ и окончательную эпюру изгибающих моментов (е):

$$M_t = M_1 \cdot Z_1 + M_{t_{cp}} + M_{t'}.$$

5.5. Выполняем статическую проверку правильности построения эпюры M_t путем вырезания и уравнивания наиболее сложного узла (ж):

$$\Sigma M = 10822.5i\alpha + 240i\alpha - 10845i\alpha - 220i\alpha = -2.5i\alpha.$$

Погрешность составляет: $-2.5i\alpha / 10775i\alpha = 0.23\% < 5\%$ – что допустимо.

5.6. Выполняем кинематическую проверку эпюры M_t с использованием любых единичных эпюр в основной системе метода сил, например, M_2 и N_2 (и):

$$\sum \int \frac{M_2 M_t}{EI} dx = \frac{i\alpha}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \times \frac{2}{3} (-7440) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \times \left(\frac{2}{3} 280 - \frac{1}{3} 240 \right) \right] = -21960 \frac{EI\alpha}{12EI} = -1830\alpha$$

$$\Delta_{2t} = \sum \Omega_{M_2} \frac{\alpha t'}{h_{сеч}} + \sum \Omega_{N_2} \alpha t_{cp} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \times \frac{\alpha(40+0)}{0.1} + (-1) \cdot 4\alpha \cdot (-10) = 1840\alpha$$

$$\Delta_2 = \sum \int \frac{M_2 M_t}{EI} dx + \Delta_{2t} = -1830\alpha + 1840\alpha = 10\alpha - \text{проверка выполняется.}$$

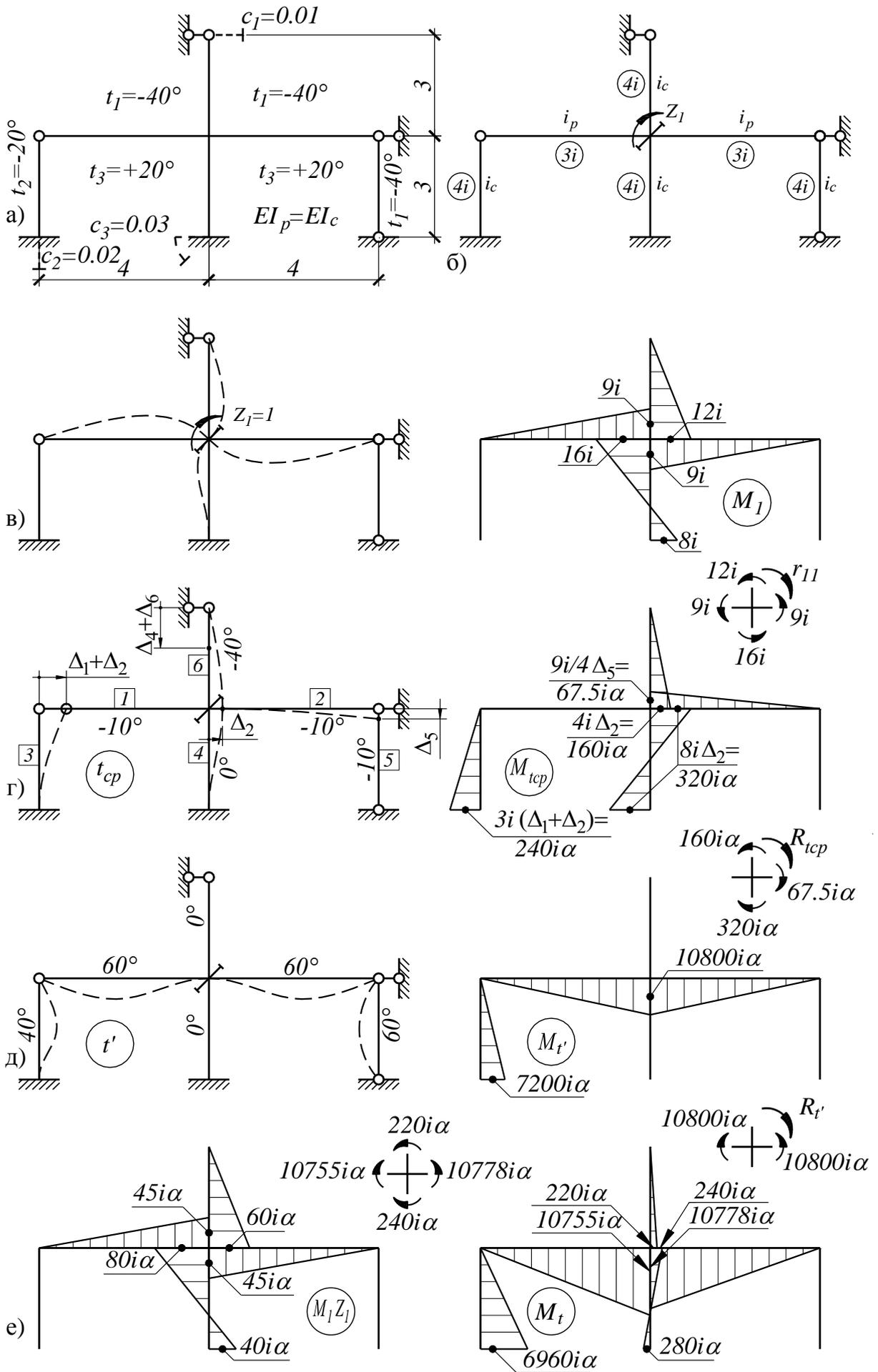


Рисунок 11.4. Схемы к примеру 11.2 (начало)

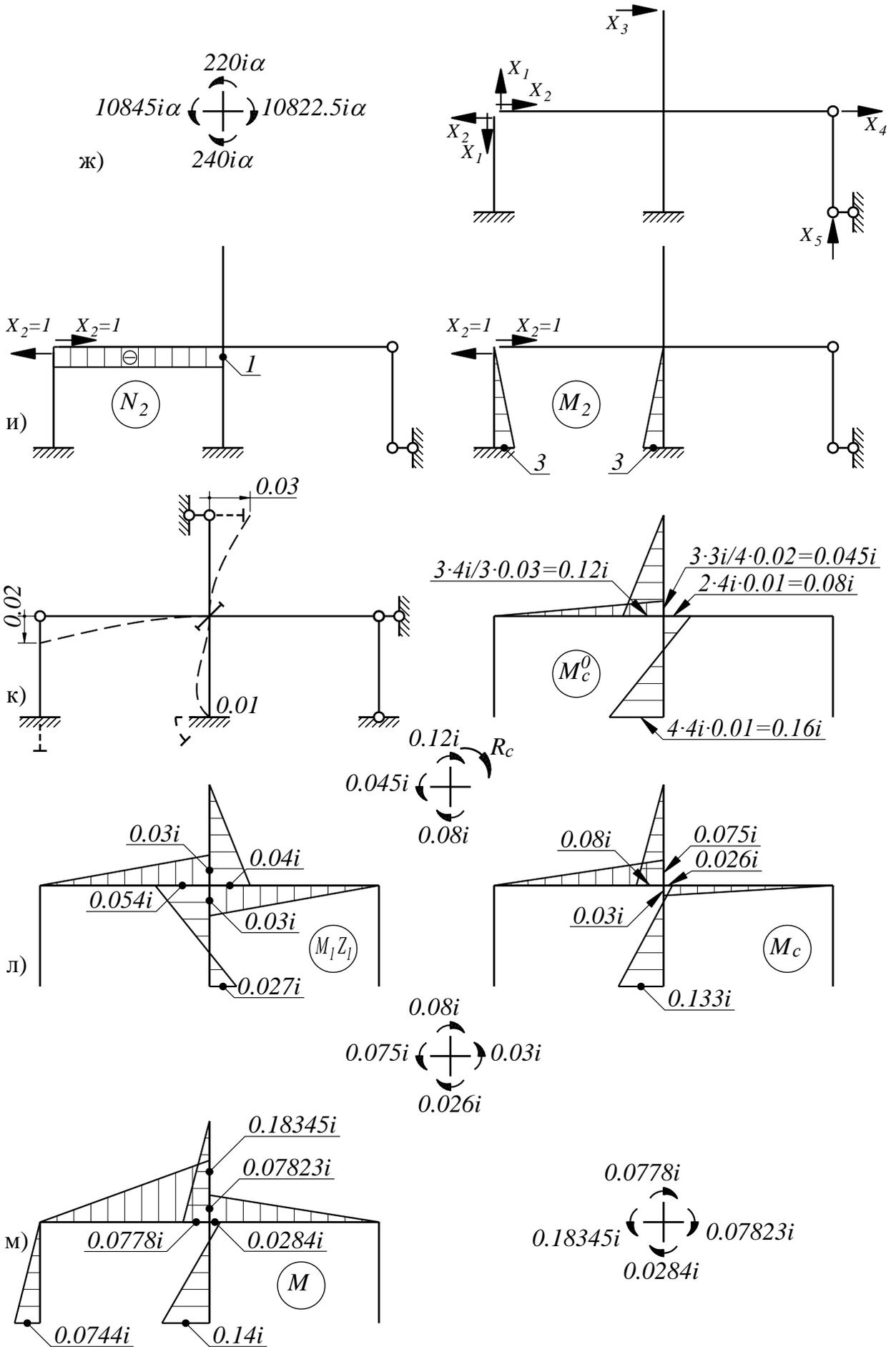


Рисунок 11.4. Схемы к примеру 11.2 (окончание)

6. Выполним расчет от смещения опор:

6.1. Строим схему деформирования (к), эпюру M_c^0 с помощью табличных эпюр прил.1 при фактических перемещениях точек системы, и определяем реакцию в защемленном узле:

$$R_c = -0.12i - 0.08i + 0.045i = -0.155i.$$

6.2. Решаем каноническое уравнение и определяем значение перемещения Z_1 .

$$Z_1 = -\frac{R_c}{r_{11}} = -\frac{-0.155i}{46i} = 0.00337.$$

6.3. Строим промежуточную $M_1 \cdot Z_1$ и окончательную эпюру изгибающих моментов (е):

$$M_t = M_1 \cdot Z_1 + M_c^0.$$

6.4. Выполняем статическую проверку правильности построения эпюры M_c путем вырезания и уравнивания наиболее сложного узла:

$$\Sigma M = 0.08i - 0.03i + 0.026i - 0.075i = 0.001i.$$

6.5. Выполняем кинематическую проверку эпюры M_c с использованием любой единичной эпюры изгибающих моментов в основной системе метода сил, например, M_2 (и):

$$\Sigma \int \frac{M_2 M_c}{EI} dx = \frac{i}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \times \left(\frac{2}{3} \cdot 0.133 - \frac{1}{3} \cdot 0.026 \right) \right] = 0.36 \frac{EI}{12EI} = 0.03.$$

$$\Delta_{2c} = -\sum_k R_i c_k = -3 \times 0.01 = -0.03$$

$$\Delta_2 = \Sigma \int \frac{M_2 M_c}{EI} dx + \Delta_{2c} = 0.03 - 0.03 = 0 \text{ - проверка выполняется.}$$

7. Строим окончательную эпюру M путем сложения эпюр изгибающих моментов от температурного воздействия и от смещения опор $M = M_t + M_c$. Учитываем значение коэффициента линейного расширения $\alpha = 10^{-5}$ 1/град. Выполняем узловую проверку:

$$\Sigma M = 0.0778i + 0.07823i + 0.0284i - 0.18345i = 0.001i.$$

8. Строим эпюры Q , N традиционным образом.

9. Из эпюр M , Q , N определяем опорные реакции и выполняем статическую проверку для всей системы.

Задача 11.1. Расчет рам методом перемещений на силовое воздействие

Для рам, приведенных на стр.114...116, построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от силового воздействия. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. В расчетах учитывать соотношение жесткостей ригеля EI_p и стоек EI_c . Исходные параметры принимать по табл.11.1. Анализ выполнить сравнением эпюр изгибающих моментов, построенных для исходной схемы ($\Pi = 2$) и схемы, полученной путем самостоятельного добавления связи в направлении возможного линейного перемещения ($\Pi = 1$). Сопоставить результаты ручного расчета с результатами расчета на ЭВМ.

Таблица 11.1. Исходные параметры к задаче 11.1

номер группы	$l_p, \text{ м}$	$l_c, \text{ м}$	$\frac{EI_p}{EI_c}$	$m, \text{ кН} \cdot \text{ м}$	$P, \text{ кН}$	$q, \text{ кН/м}$	Переменные параметры	
							Сложность задания	
1	2	$L + 2$	k	4	3	2	3	$L = 0$ $k = 1$
2	2	$L + 3$	k	5	2	2	4	$L = 1$ $k = 2$
3	3	$L + 1$	k	4	3	2	6 с анализом	$L = 2$ $k = 0.5$
4	3	$L + 2$	k	5	2	2		добавить связь, решить и сопоставить эпюры
5	3	$L + 3$	k	4	3	2		

Задача 11.2. Расчет рам методом перемещений на температурное воздействие

Для рам, приведенных на стр.117...119, построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от температурного воздействия. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.11.2. Значение коэффициента линейного расширения $\alpha = 10^{-5}$ 1/град, высота сечения балок $h_{сеч.} = 0.1$ м.

Анализ выполнить сравнением результаты ручного расчета с результатами расчета на ЭВМ.

Таблица 11.2. Исходные параметры к задаче 11.2

номер группы	$l_p, м$	$l_c, м$	$\frac{EI_p}{EI_c}$	$t_1,$ град.	$t_2,$ град.	$t_3,$ град.	Сложность задания	Переменные параметры	
								$L = 0$	$t = 0$
1	3	$L + 3$	0.5	t	+30	-20	3	$L = 0$	$t = 0$
2	3	$L + 2$	2	+20	t	-30	4	$L = 1$	$t = +20$
3	3	$L + 1$	0.5	+30	+20	t	6 с анализом		$t = 0$
4	2	$L + 3$	2	+30	t	-20		$L = 2$	$t = +10$
5	2	$L + 2$	0.5	t	+20	-30			$t = +20$

Задача 11.3. Расчет рам методом перемещений на смещения опор

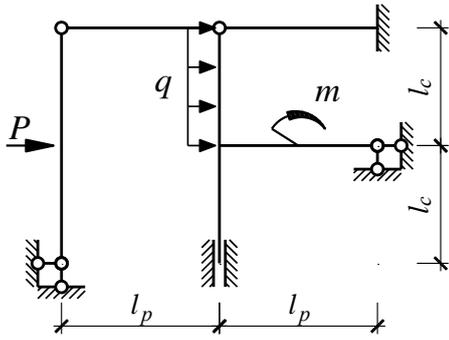
Для рам, приведенных на стр.120...122, построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от смещения опор. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.11.3.

Анализ выполнить сравнением результаты ручного расчета с результатами расчета на ЭВМ.

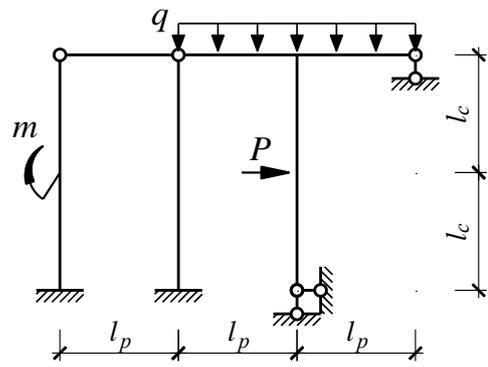
Таблица 11.3. Исходные параметры к задаче 11.3

номер группы	$l_p, м$	$l_c, м$	$\frac{EI_p}{EI_c}$	$c_1,$ мм	$c_2,$ мм	$c_3,$ рад.	Сложность задания	Переменные параметры	
								$L = 0$	$k = 1$
1	$L + 3$	3	k	5	5	0.005	3	$L = 0$	$k = 1$
2	$L + 2$	3	k	10	5	0.005	4	$L = 1$	$k = 0.5$
3	$L + 1$	3	k	10	10	0.005	6 с анализом		$k = 0.5$
4	$L + 3$	2	k	10	10	0.010		$L = 2$	$k = 1$
5	$L + 2$	2	k	10	5	0.010			$k = 2$

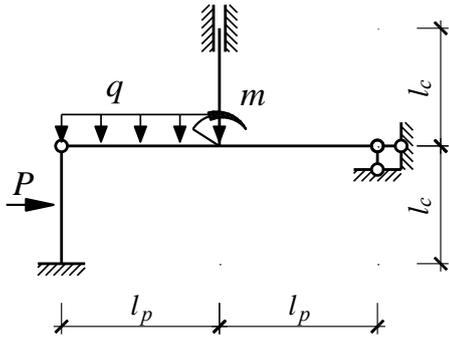
11



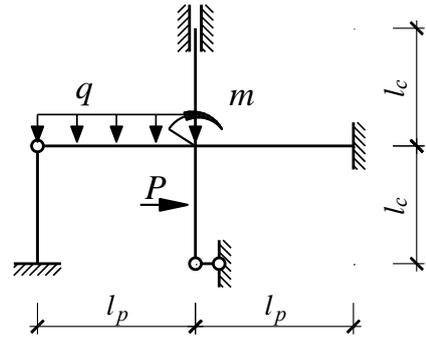
12



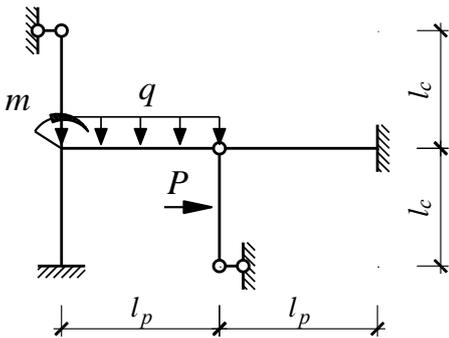
13



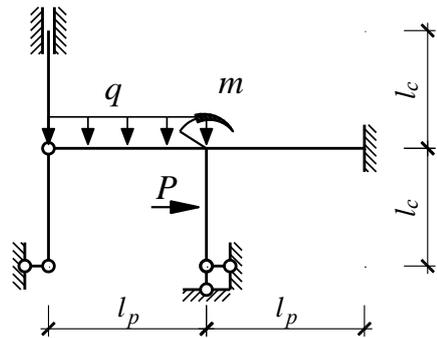
14



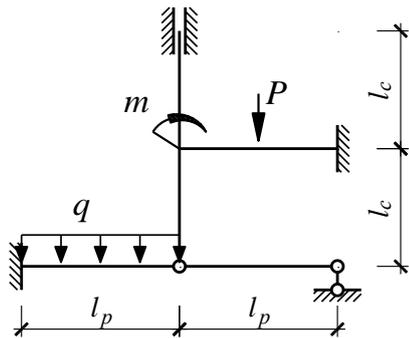
15



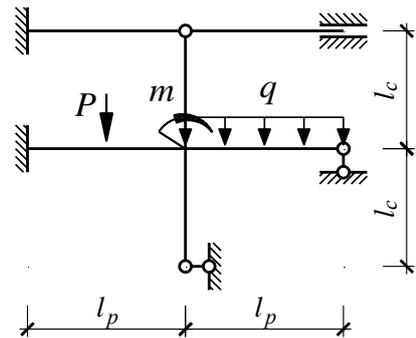
16



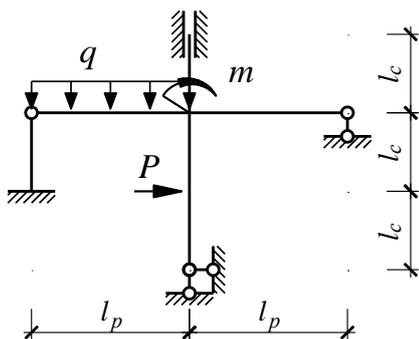
17



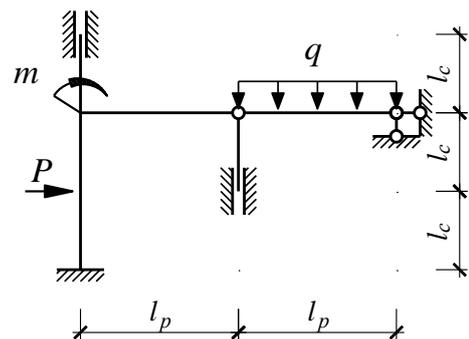
18



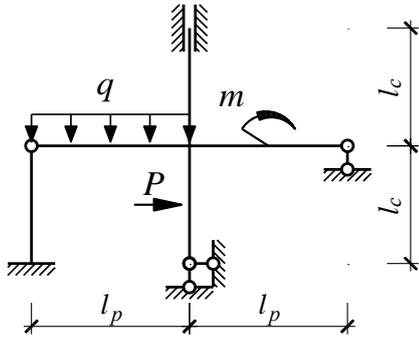
19



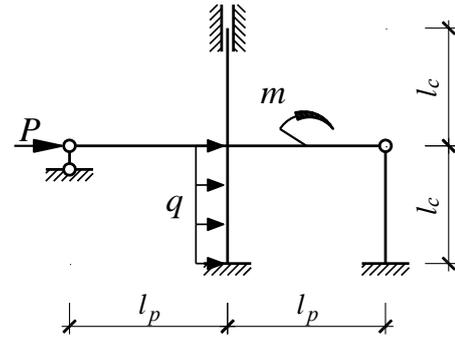
20



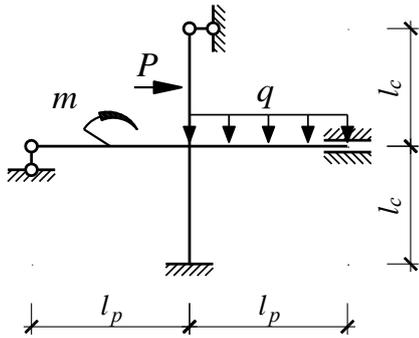
21



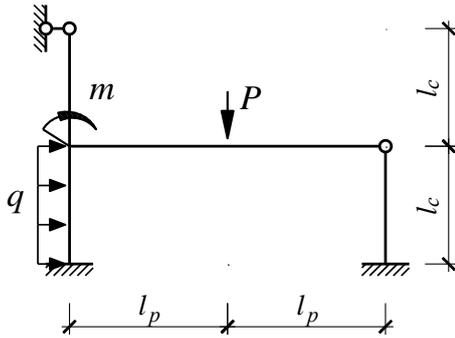
22



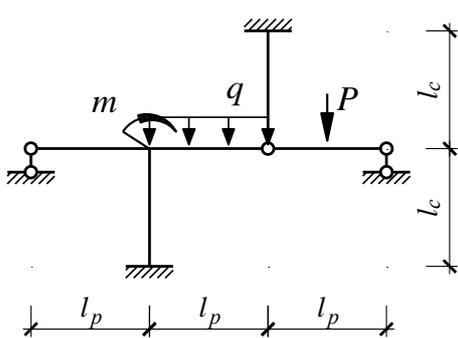
23



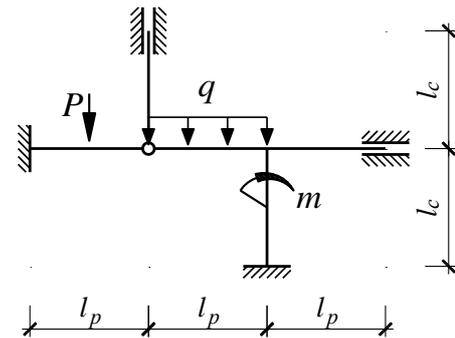
24



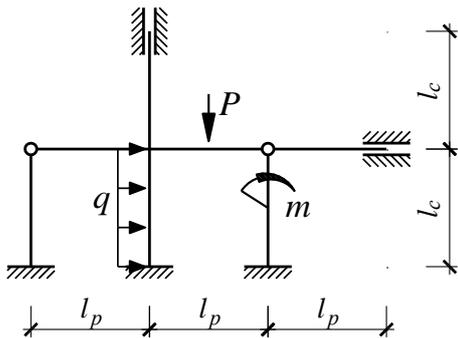
25



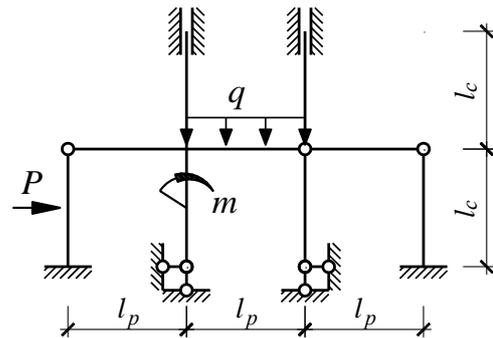
26



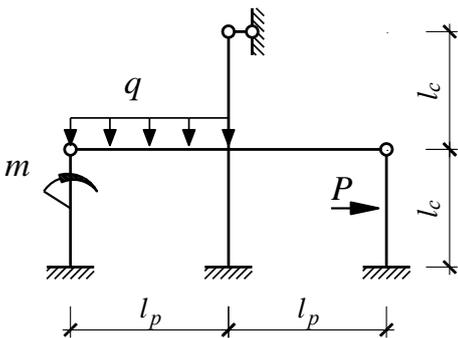
27



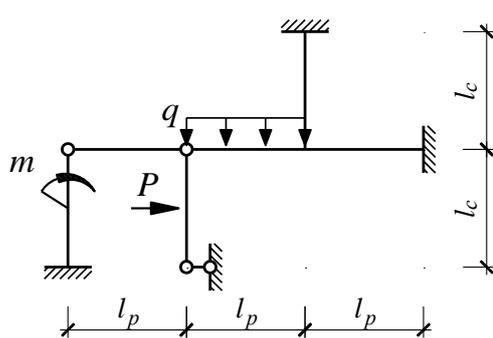
28

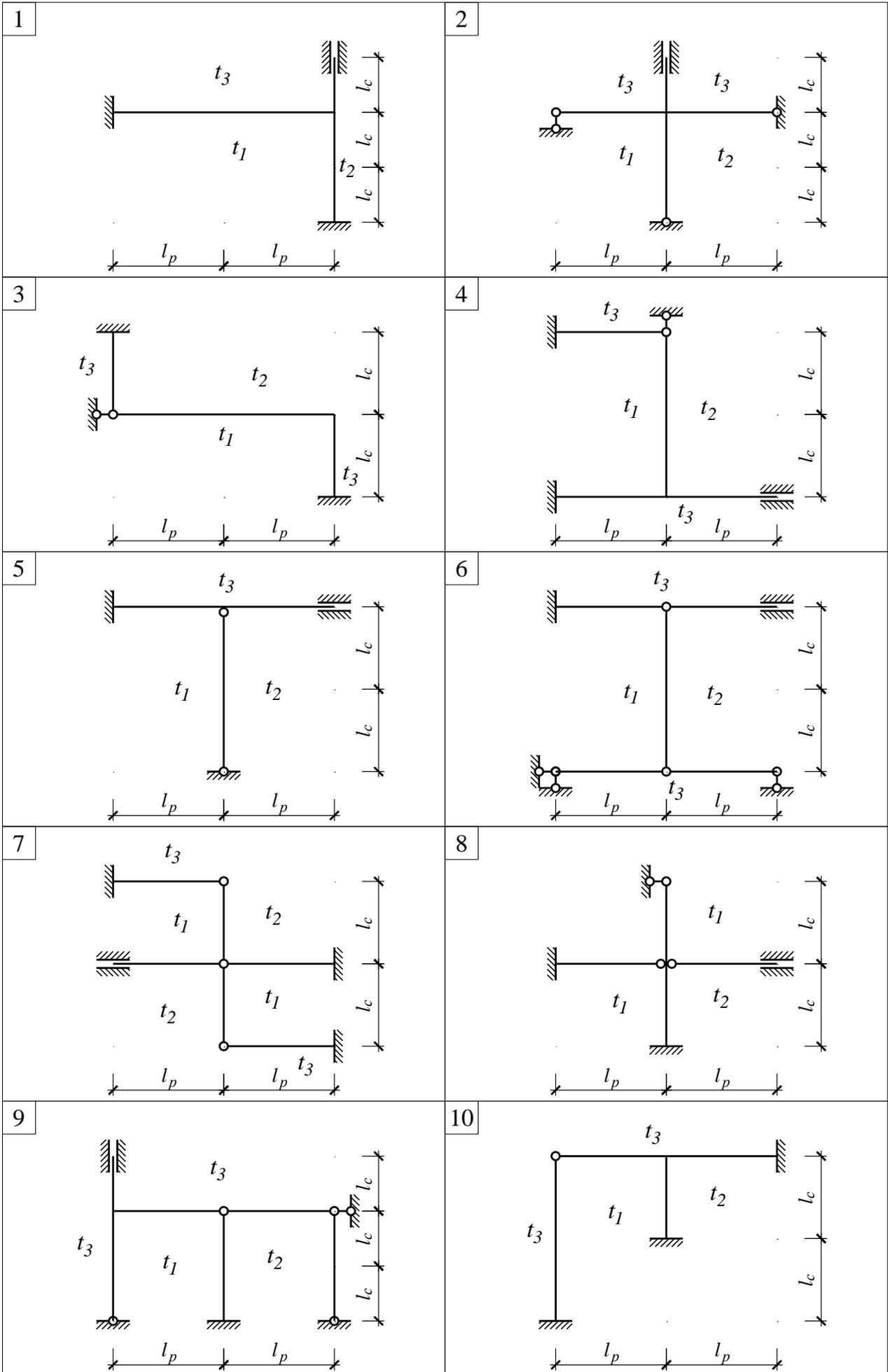


29

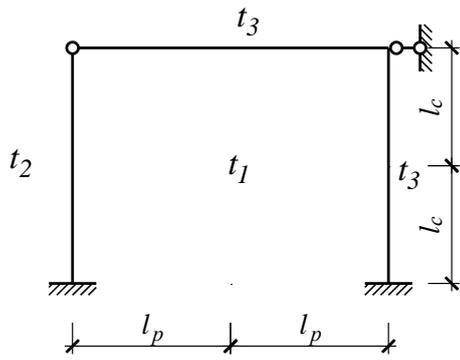


30

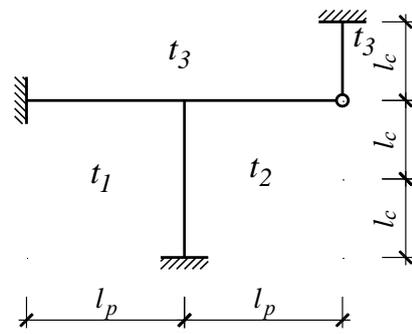




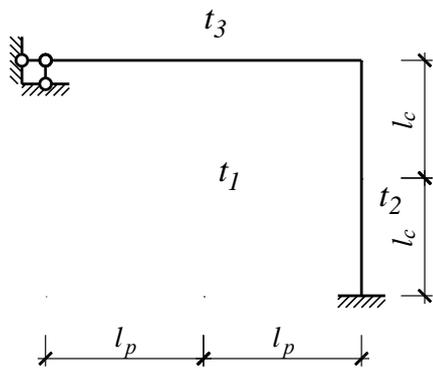
11



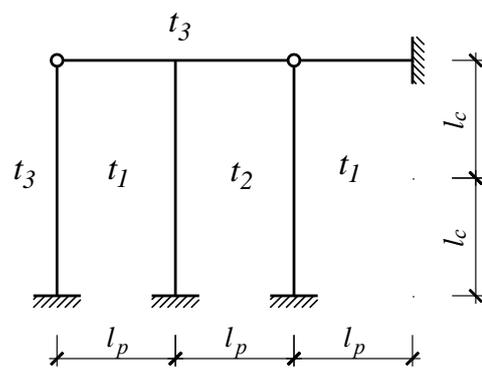
12



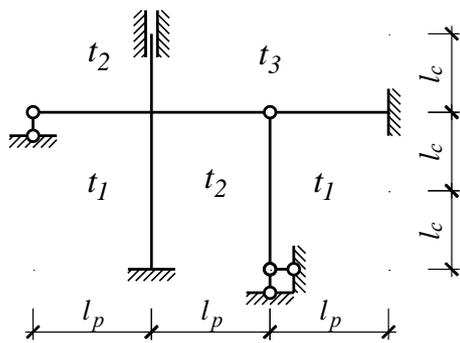
13



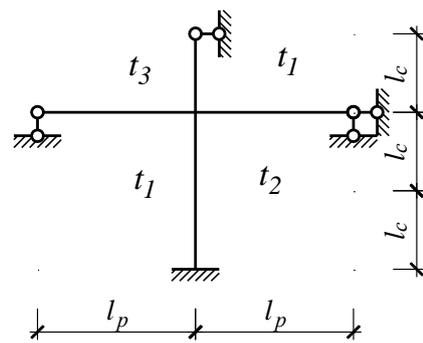
14



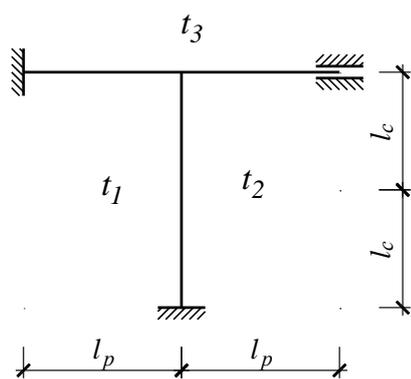
15



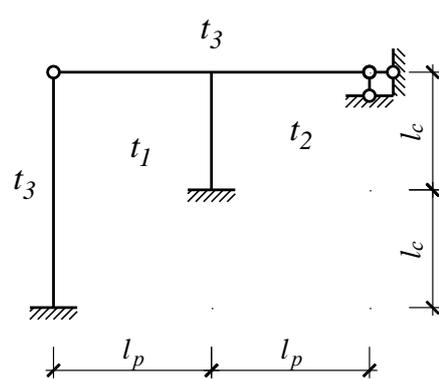
16



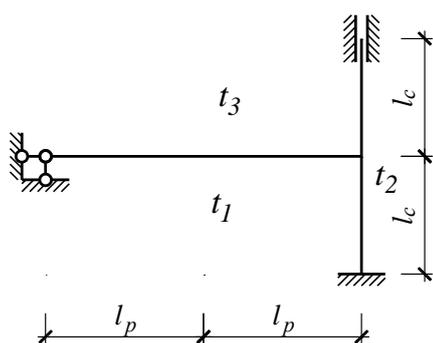
17



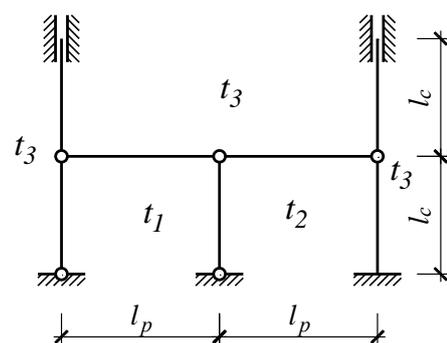
18



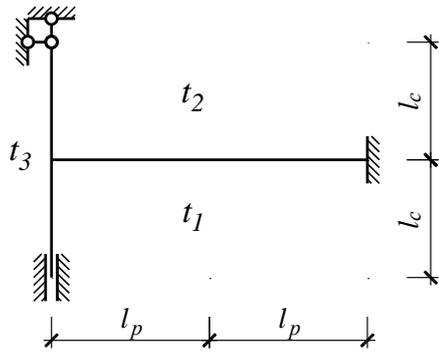
19



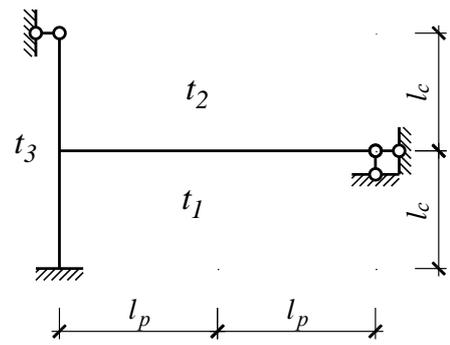
20



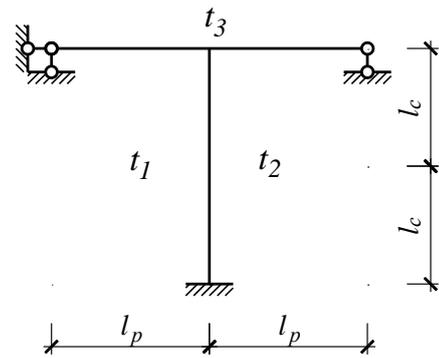
21



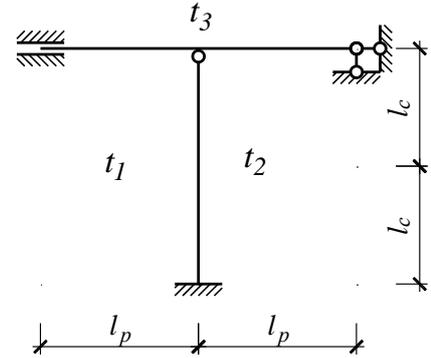
22



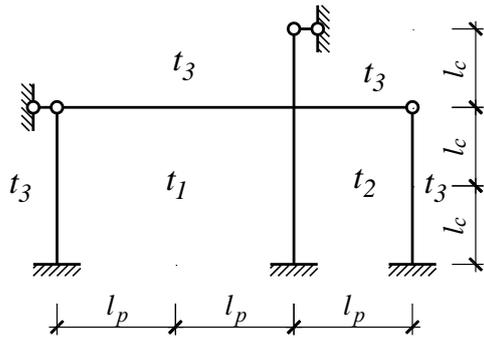
23



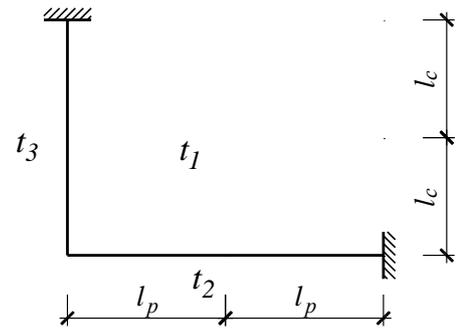
24



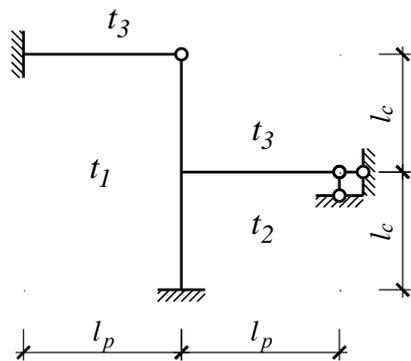
25



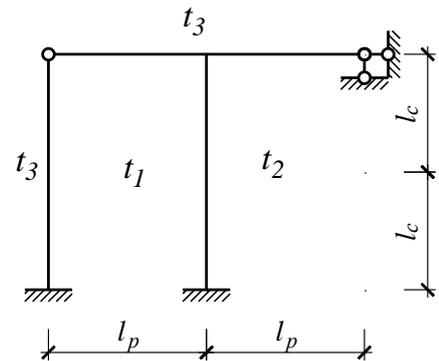
26



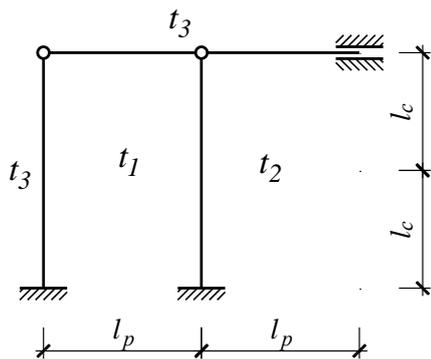
27



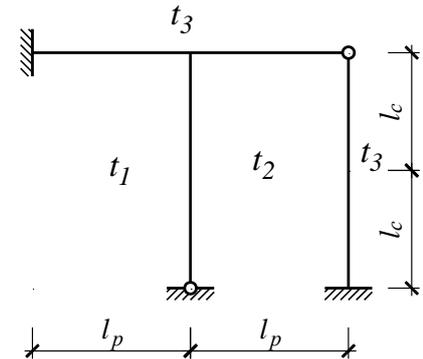
28

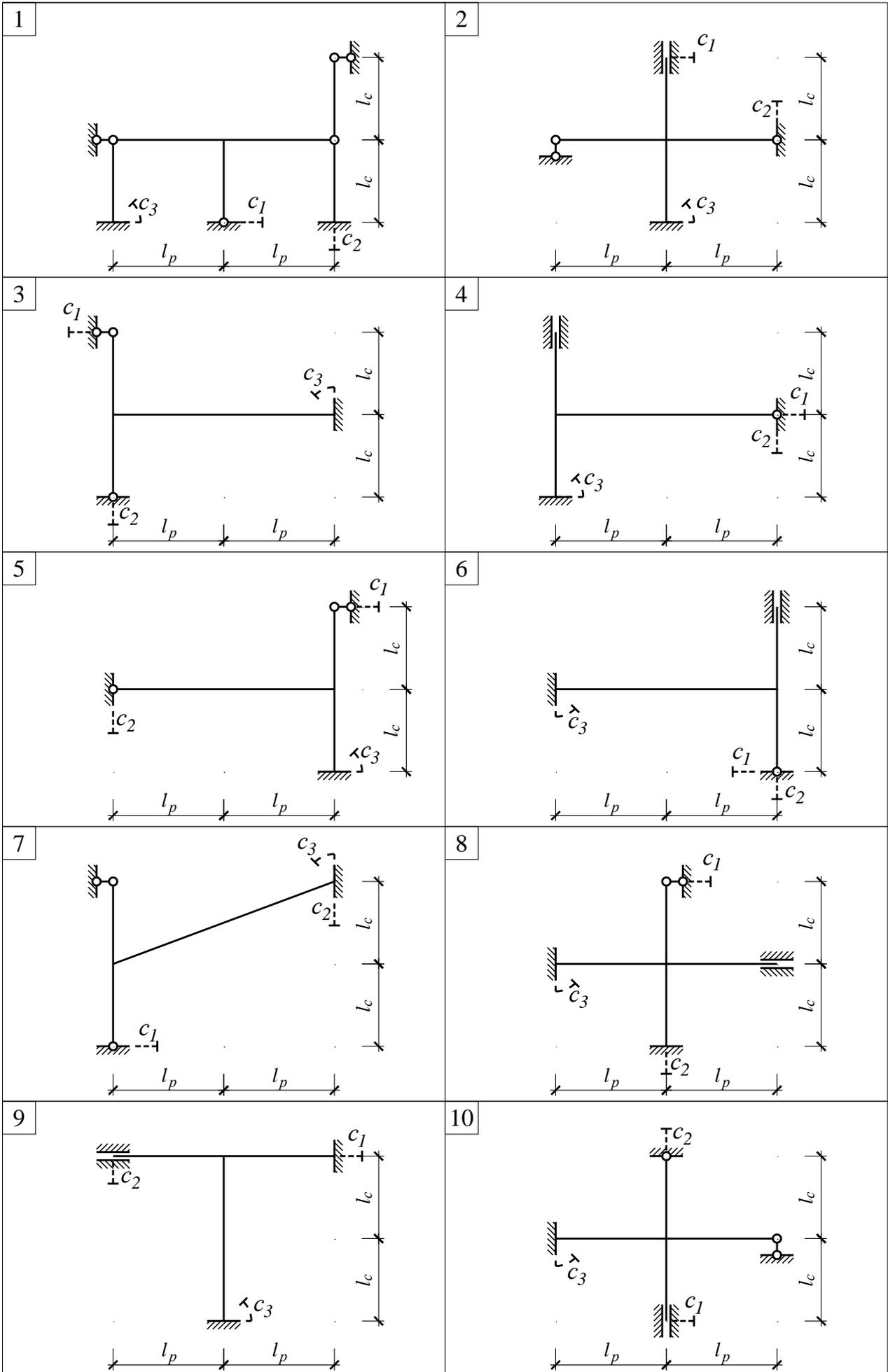


29

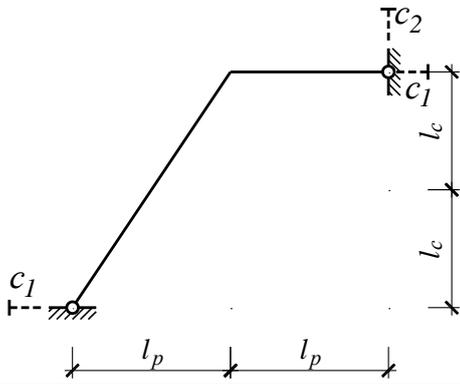


30

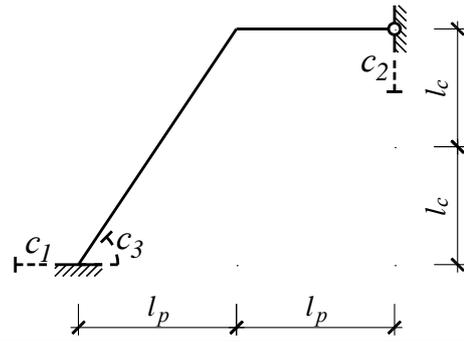




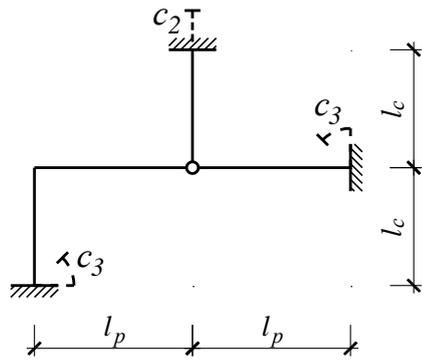
11



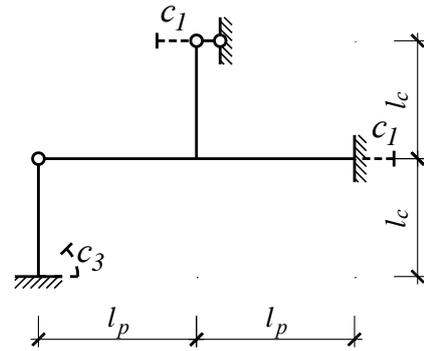
12



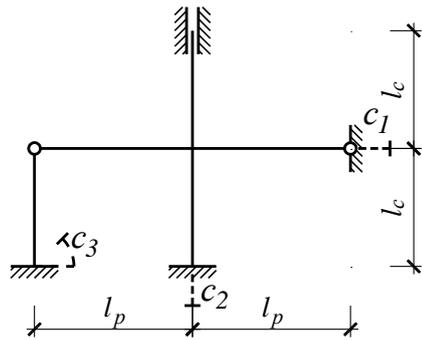
13



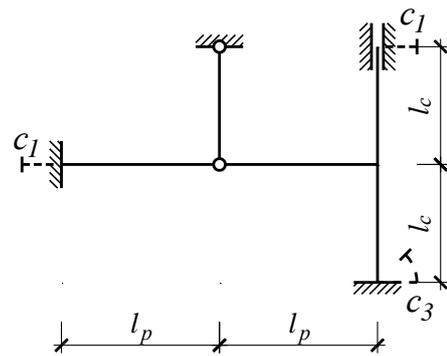
14



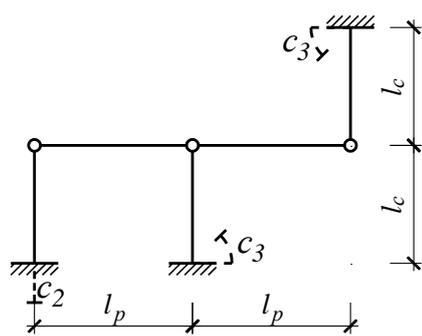
15



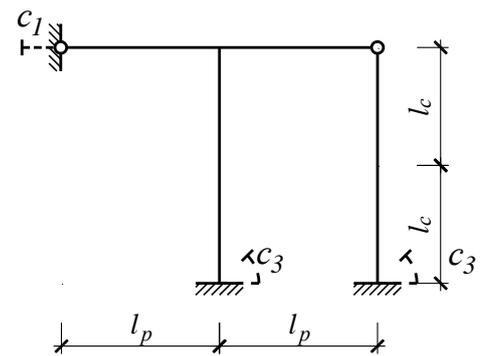
16



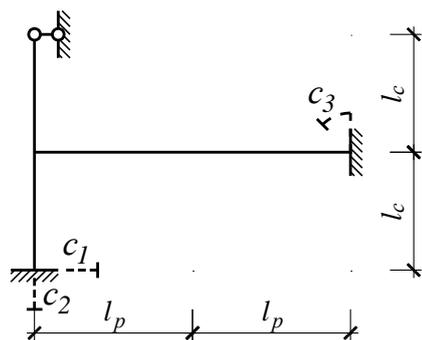
17



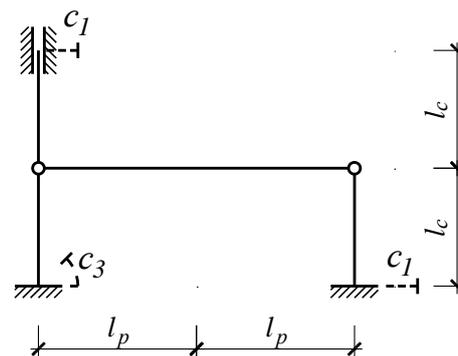
18



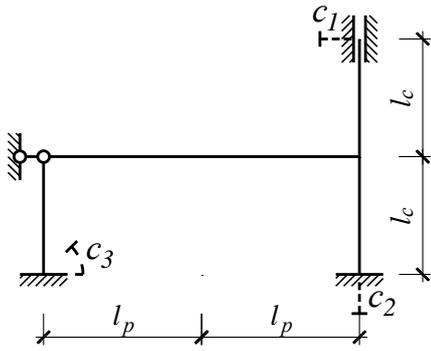
19



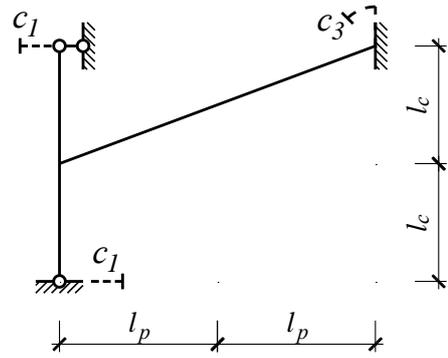
20



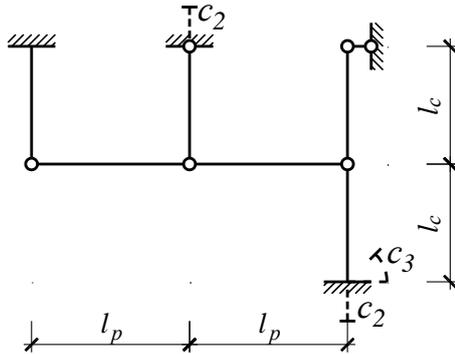
21



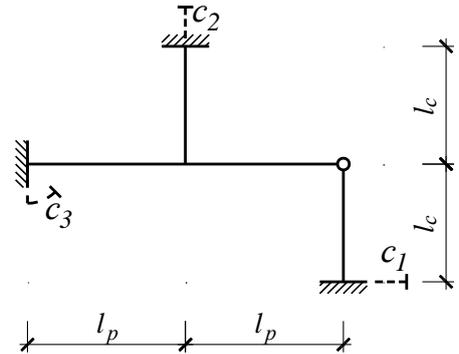
22



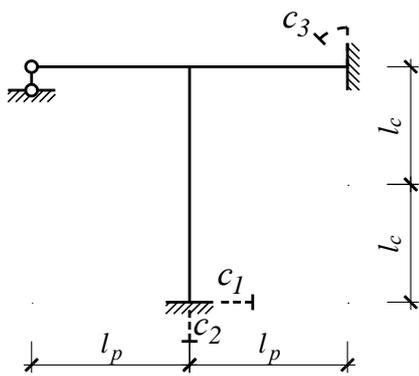
23



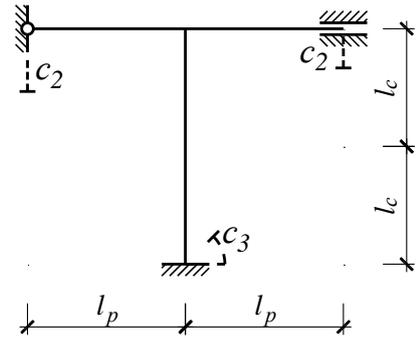
24



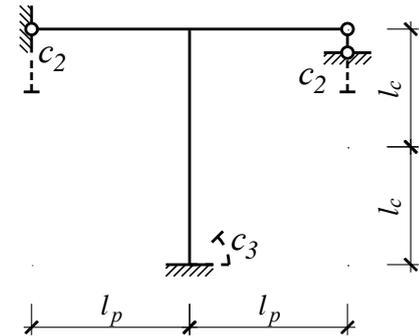
25



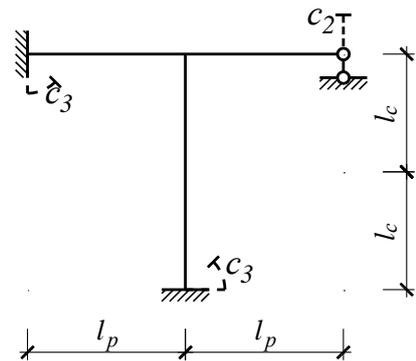
26



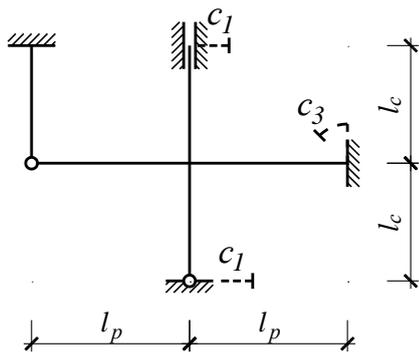
27



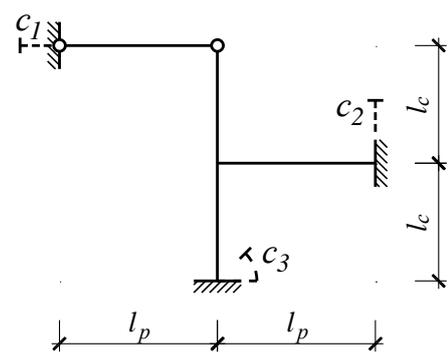
28



29



30



ТЕМА 12. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ

Анализ методов сил и перемещений при расчете статически неопределимых систем показал их общность и различие, что позволяет комбинировать их при расчете определенных систем для упрощения расчетов.

Таблица 12.1. Сопоставление метода сил и метода перемещений

Порядок расчета	МЕТОД СИЛ	МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ
1. Число неизвестных	$L = 3K - Ш$	$\Pi = \Pi_y + \Pi_\Delta$
2. Основная система	удаление «лишних» связей до получения статически определимой системы, основных систем множество	закрепление узлов до получения абсолютно неподвижной системы, основная система единственна
3. Единичные неизвестные	усилия $X_i = 1$	перемещения $Z_i = 1$
4. Канонические уравнения	кинематические: $\delta_{11}X_1 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0$	статические: $r_{11}Z_1 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} = 0$
5. Построение единичных и грузовых эпюр M_i и M_P^0	как для статически определимой системы	как для статически неопределимых однопролетных балок с помощью табличных эпюр прил. 1
6. Определение коэффициентов и свободных членов	по формулам Мора: $\delta_{ij} = \sum \int \frac{M_i M_j}{EI} dx$; $\Delta_{iP} = \sum \int \frac{M_i M_P^0}{EI} dx$	из уравнений статики: путем вырезания узлов: $\sum M_{уз} = 0$ методом сечений: $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$
7. Определение неизвестных	усилия X_i	перемещения Z_i
8. Окончательная эпюра M	$M = \sum M_i X_i + M_P^0$	$M = \sum M_i Z_i + M_P^0$
9. Проверка M	статическая – путем вырезания узлов: $\sum M_{уз} = 0$	
	кинематическая: $\Delta_i = \sum \int \frac{M_i M}{EI} dx = 0$	кинематическая: строится основная система и единичная эпюра метода сил, далее как в методе сил
10. Построение эпюр Q , N , проверка	по эпюре M строится эпюра Q с помощью зависимости Журавского по эпюре Q строится эпюра N путем вырезания узлов по эпюрам M , Q , N определяют опорные реакции и выполняют статическую проверку всей системы: $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$.	

Комбинированный метод применяется при расчете симметричных систем и особенно удобен при расчете однопролетных многоярусных рам.

Сущность метода заключается в раздельном применении методов сил и перемещений при решении одной задачи. Известно, что в симметричных системах при симметричном нагружении возникают только симметричные усилия, деформации и перемещения, следовательно, неизвестные методов сил или перемещений будут только симметричные, а при кососимметричном нагружении – только кососимметричные неизвестные.

Раскладывая внешнюю нагрузку на симметричную и кососимметричную составляющие, раму рассчитывают в состоянии симметричного нагружения методом перемещений и строят эпюру M^C , в состоянии кососимметричного за-

гружения – методом сил и строят эпюру M^{KC} . Окончательную эпюру M получают путем сложения эпюр: $M_P = M^C + M^{KC}$.

При выборе основных систем метода перемещений и метода сил целесообразно использовать группировку неизвестных на симметричные и кососимметричные составляющие. Произвольное нагружение также раскладывают на симметричную и кососимметричную составляющие.

	<p>схема разложения на составляющие:</p> $\begin{cases} P = P/2 + P/2 \\ P = P/2 - P/2 \end{cases}$	<p>кососимметричная основная система: кососимметричные составляющие нагружения и неизвестные</p>	<p>симметричная основная система: симметричные составляющие нагружения и неизвестные</p>
<p>неизвестных МП – 4</p>	<p>неизвестных МС – 4</p>	<p>неизвестных МС – 2</p>	<p>неизвестных МП – 1</p>

Рисунок 12.1. Схема группировки неизвестных комбинированного метода

После изучения данной темы студент должен:

- **знать**, как выбрать основную систему комбинированного метода и произвести группировку неизвестных и внешнего воздействия;
- **уметь** строить единичные, грузовые и окончательные эпюры изгибающих моментов методами сил и перемещений;
- **владеть** комбинированным методом расчета для упрощения расчета симметричных рам;

и суметь **ответить** на следующие вопросы:

1. Что означает группировка неизвестных?
2. Когда применяется комбинированный метод?
3. Какие усилия возникают в симметричных рамах при симметричном нагружении и какой метод расчета для них предпочтительнее?
4. Как выбирается основная система в симметричных системах?

Задача 12.1. Расчет статически неопределимых симметричных рам комбинированным методом

Для рам, приведенных на стр.126...128, построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от силового воздействия. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.12.2.

Таблица 12.2. Исходные параметры к задаче 12.1

номер группы	l_p , м	l_c , м	$\frac{EI_p}{EI_c}$	m , кН·м	P , кН	q , кН/м	Сложность задания		Переменные параметры	
							Сложность задания	Переменные параметры		
1	2	$L + 1$	k	4	3	2	3	$L = 0$	$k = 1$	
2	2	$L + 2$	k	5	2	2	4	$L = 1$	$k = 2$	
3	3	$L + 3$	k	4	3	2	6 с анализом	$L = 2$	$k = 0.5$	
4	3	$L + 1$	k	5	2	2			$k = 1$	
5	3	$L + 2$	k	4	3	2			$k = 2$	

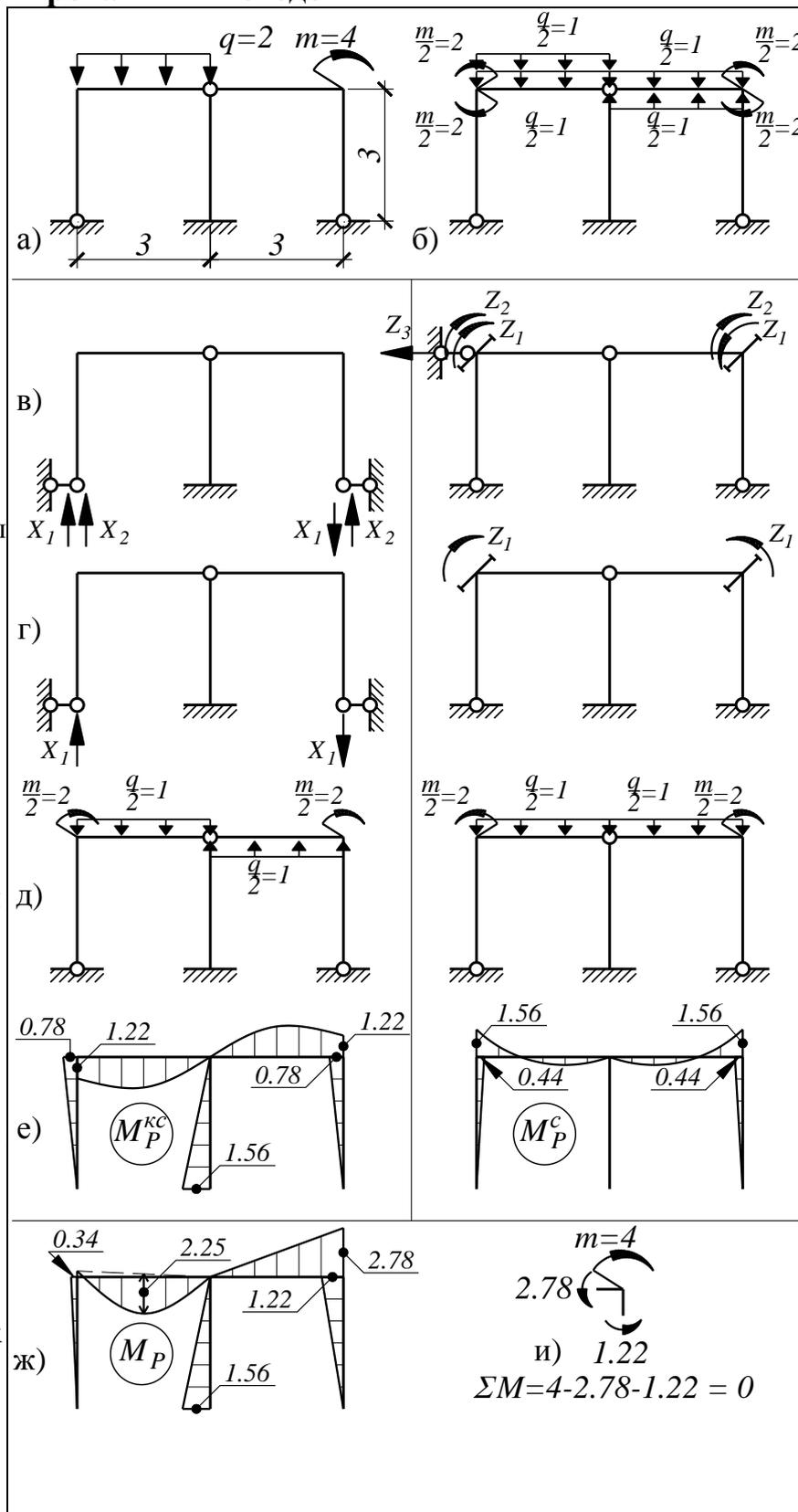
Порядок расчета симметричной рамы комбинированным методом рассмотрим на примере.

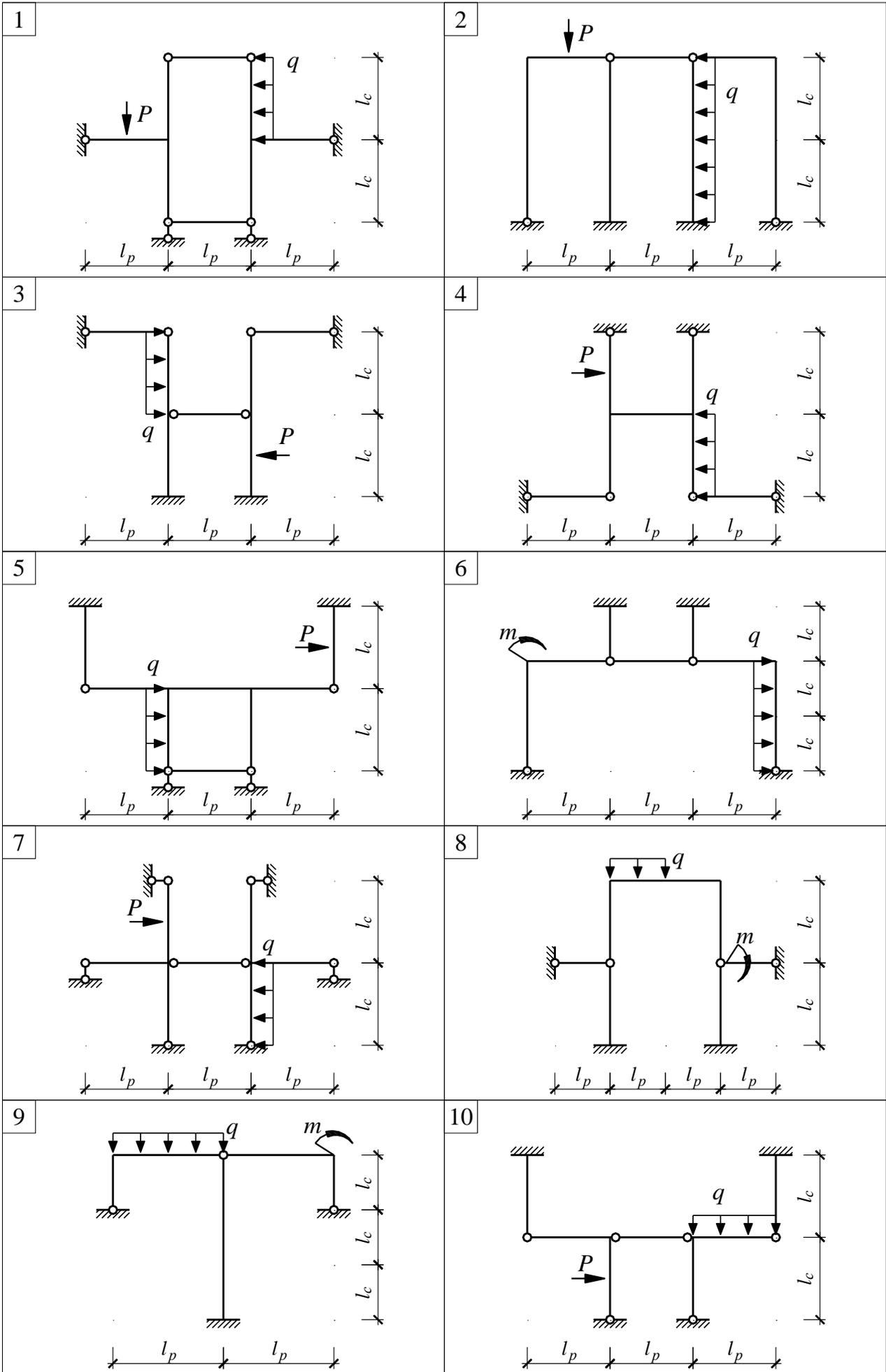
Пример 12.1. Построение эпюр внутренних усилий для симметричной рамы комбинированным методом

Условие задачи: Для приведенной симметричной рамы (а) построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от силового воздействия. Жесткость $EI_p = EI_c$.
Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

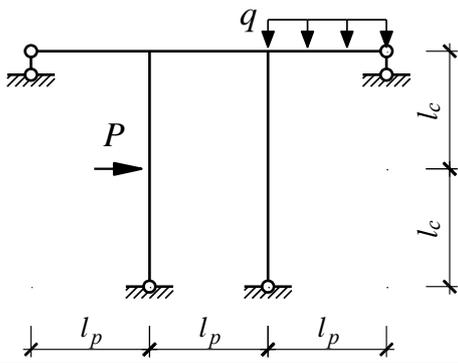
Решение.

1. Выполняем кинематический анализ и убеждаемся, что система статически неопределима и геометрически неизменяема: $L = 2$ – неизвестных 2 при расчете рамы методом сил, методом перемещений неизвестных $\Pi = 3$.
2. Производим группировку внешнего силового воздействия на симметричные и кососимметричные составляющие (б).
3. Строим основные системы метода сил с группировкой кососимметричных и метода перемещений с группировкой симметричных неизвестных (в).
4. Независимо решаем и строим эпюры изгибающих моментов методом сил и перемещений (д, е).
5. Геометрически складываем полученные эпюры и строим окончательную эпюру моментов (ж). Выполняем статическую (и) и кинематическую проверку эпюр.
6. Строим эпюры поперечных и продольных сил.
7. Определяем опорные реакции и производим статическую проверку для всей рамы.

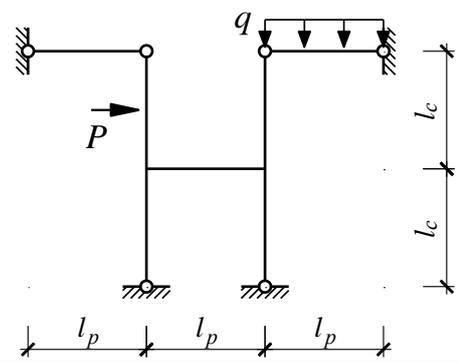




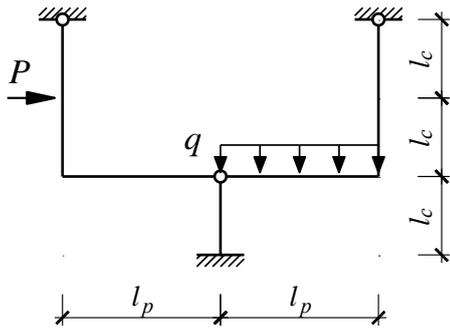
11



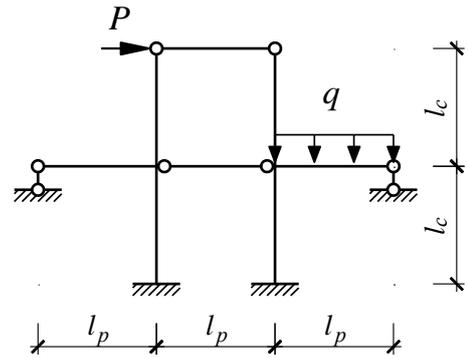
12



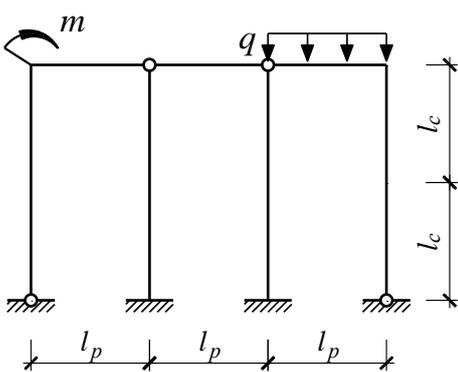
13



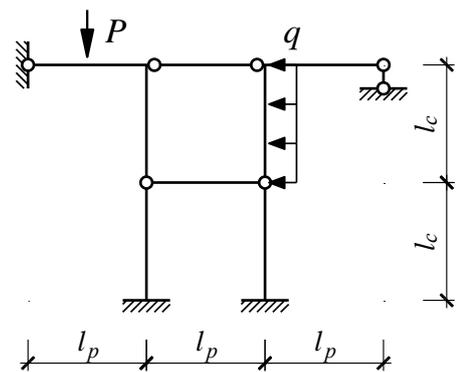
14



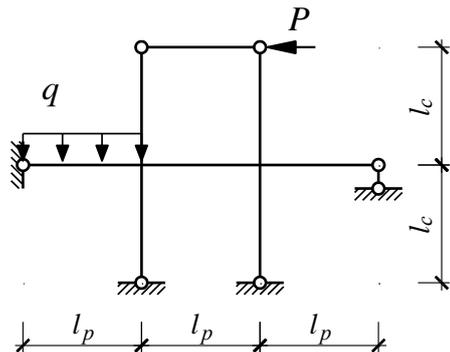
15



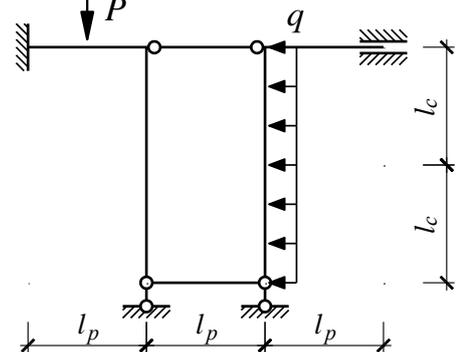
16



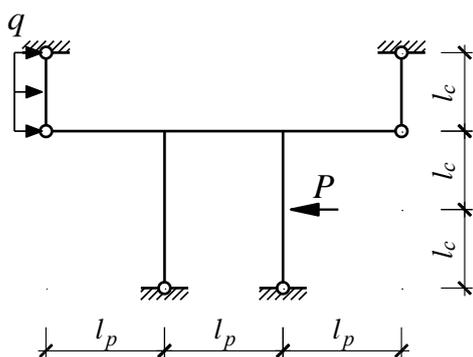
17



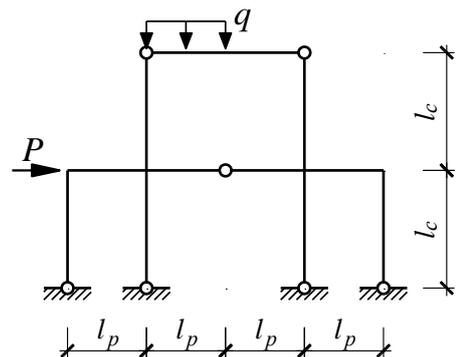
18



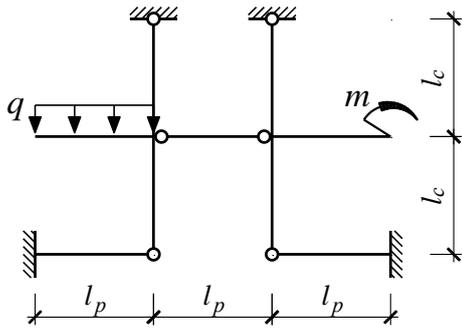
19



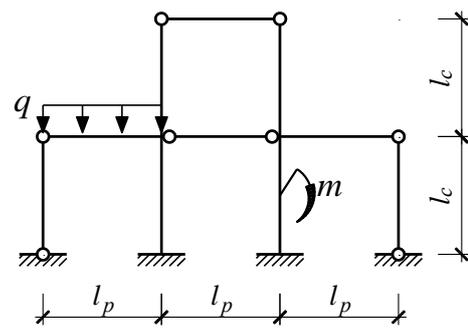
20



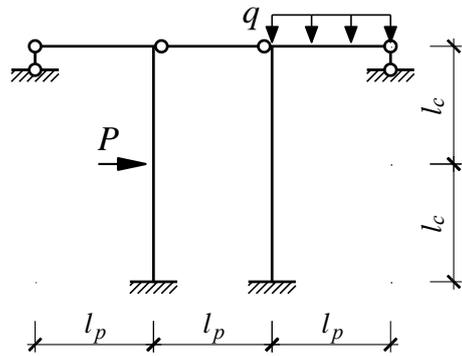
21



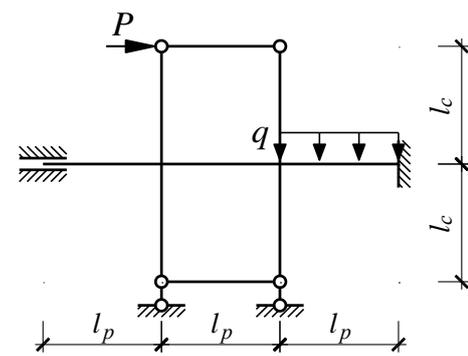
22



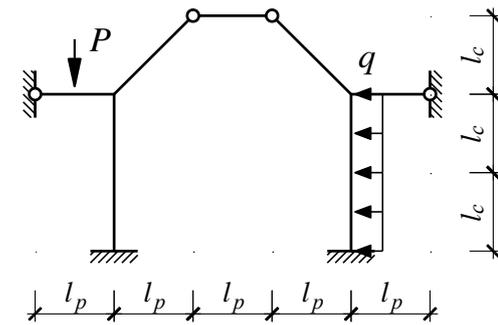
23



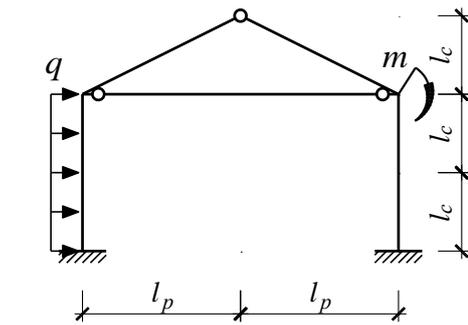
24



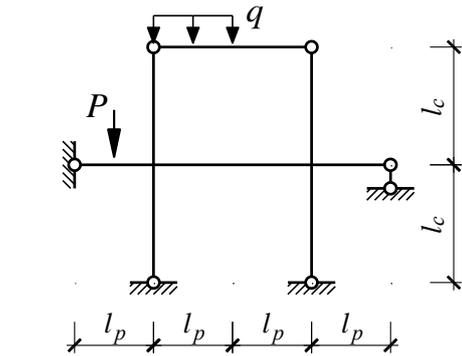
25



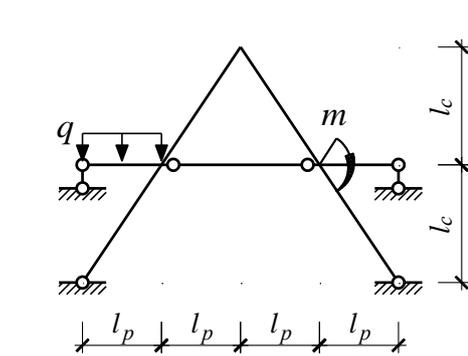
26



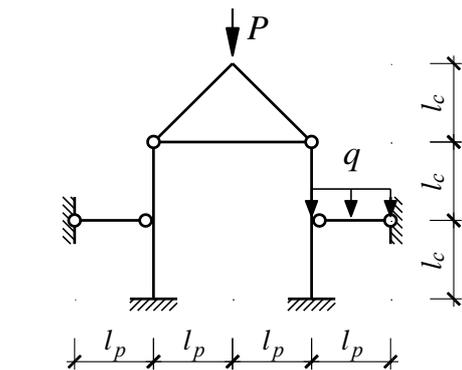
27



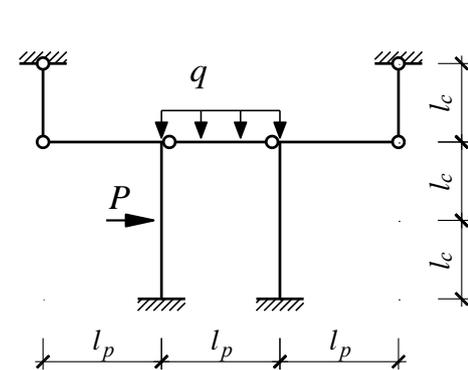
28



29



30



ТЕМА 13. СМЕШАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА

Сложность решения статически неопределимых систем методом сил или перемещений, как выяснилось, сильно зависит от количества неизвестных. Метод сил удобно использовать для решения задач с небольшим количеством «лишних» связей, а метод перемещений – наоборот.

Бывают системы, в которых один контур имеет большое количество «лишних» связей, а другой контур – большое количество возможных перемещений узлов. Для решения таких систем удобно использовать смешанный метод, который позволяет совместить расчет методом перемещений более жесткого контура схемы и методом сил – более податливого контура.

Рассмотрим порядок расчета рам от силового воздействия смешанным методом:

1. Количество неизвестных смешанного метода определяется как сумма неизвестных метода перемещений Π более жесткого фрагмента схемы и «лишних» связей метода сил L более податливого фрагмента:

$$H = \Pi_y + \Pi_n + L$$

2. Основная система смешанного метода образуется путем введения связи Z_i в части схемы с меньшей подвижностью и замены «лишних» связей реакцией X_i для части схемы с большей подвижностью.
3. Система канонических уравнений смешанного метода будет включать неизвестные как метода перемещений, так и метода сил. Например, для системы, включающей под одной неизвестной метода перемещений и метода сил, система канонических уравнений примет вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r'_{12}X_2 + R_{1P} = 0 \\ \delta'_{21}Z_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

4. Путем последовательного приложения в основной системе смешанного метода единичных перемещений $Z_i = 1$ и единичных сил $X_i = 1$, строят единичные эпюры изгибающих моментов M_i . Эпюры изгибающих моментов строятся на «участке метода сил» как для статически определимых элементов, на «участке метода перемещений» – по таблицам метода перемещений.
5. Строят эпюру M_P^0 от силового воздействия в основной системе смешанного метода.
6. Коэффициенты и свободные члены определяются в соответствии с методом сил или методом перемещений. Согласно теореме о взаимности реакций и перемещений, особые коэффициенты равны по значению и противоположны по знаку: $r'_{ij} = -\delta'_{ji}$. Это тождество является промежуточной проверкой правильности определения коэффициентов.

7. Решают систему канонических уравнений и определяют неизвестные перемещения и усилия Z_i и X_i .
8. Строят промежуточные эпюры моментов путем перемножения единичных эпюр с полученными значениями перемещений $M_i \cdot Z_i$, $M_i \cdot X_i$ и окончательную эпюру путем сложения промежуточных и грузовой эпюр:

$$M_P = \sum M_i \cdot Z_i + \sum M_i \cdot X_i + M_P^0.$$

9. Проводят статическую проверку правильности построения эпюры изгибающих моментов путем вырезания узлов – отсутствие реакций во введенных связях означает правильность построения эпюры.
10. По эпюре изгибающих моментов M строят эпюру поперечных сил Q , используя дифференциальную зависимость Журавского: $Q = dM/dx$.
11. По эпюре Q строят эпюру продольных усилий N , рассматривая равновесия узлов с учетом возможной узловой нагрузки P .
12. Проводят статическую проверку правильности построения эпюр Q и N путем составления уравнений проекций сил на оси X и Y для всей системы после определения опорных реакций из вырезанных опорных узлов.

После изучения данной темы студент должен:

- **знать**, как выбрать основную систему смешанного метода;
- **уметь** строить единичные, грузовые и окончательные эпюры изгибающих моментов смешанного метода;
- **владеть** смешанным методом расчета для упрощения расчета рам;

и суметь **ответить** на следующие вопросы:

1. В чем заключается сущность смешанного метода?
2. Как образуется основная система и что она собой представляет?
3. Что принимается за неизвестные?
4. Как проверить окончательную эпюру M ?

Задача 13.1. Расчет статически неопределимых рам смешанным методом

Для рам, приведенных на стр.132...134, построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от силового воздействия. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.13.1. Результаты можно проверить расчетами на ЭВМ.

Таблица 13.1. Исходные параметры к задаче 13.1

номер группы	l_p , м	l_c , м	$\frac{EI_p}{EI_c}$	m , кН·м	P , кН	q , кН/м	Сложность задания		Переменные параметры	
1	$L + 1$	2	k	4	3	2	3	$L = 0$	$k = 1$	
2	$L + 2$	2	k	5	2	2	4	$L = 1$	$k = 2$	
3	$L + 3$	3	k	4	3	2	6 с анализом	$L = 0$	$k = 0.5$	
4	$L + 1$	3	k	5	2	2		$L = 1$		
5	$L + 2$	3	k	4	3	2		$L = 2$		

Пример 13.1. Построение эпюр внутренних усилий рамы смешанным методом

Условие задачи: Для приведенной симметричной рамы (а) построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от силового воздействия. Жесткость $EI_p = 2EI_c$.

Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

Решение.

1. Выполняем кинематический анализ и убеждаемся, что система статически неопределима и геометрически неизменяема: $L = 3$ – неизвестных 3 при расчете рамы методом сил, методом перемещений неизвестных $\Pi = 3$.

2. Строим основную систему смешанного метода с двумя неизвестными (б).

3. Записываем систему канонических уравнений в общем виде:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r'_{12}X_2 + R_{1P} = 0 \\ \delta'_{21}Z_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

4. Строим единичные и грузовую эпюры (в, г, д).

5. Определяем коэффициенты и запишем их систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} 25i Z_1 + 2X_2 - 2.5 = 0 \\ -2Z_1 + \frac{26}{3EI} X_2 - \frac{12}{EI} = 0 \end{cases}$$

при $EI = 6i$ получим:

$$\begin{cases} 25i Z_1 + 2X_2 - 2.5 = 0 \\ -18i Z_1 + 13X_2 - 18 = 0 \end{cases}$$

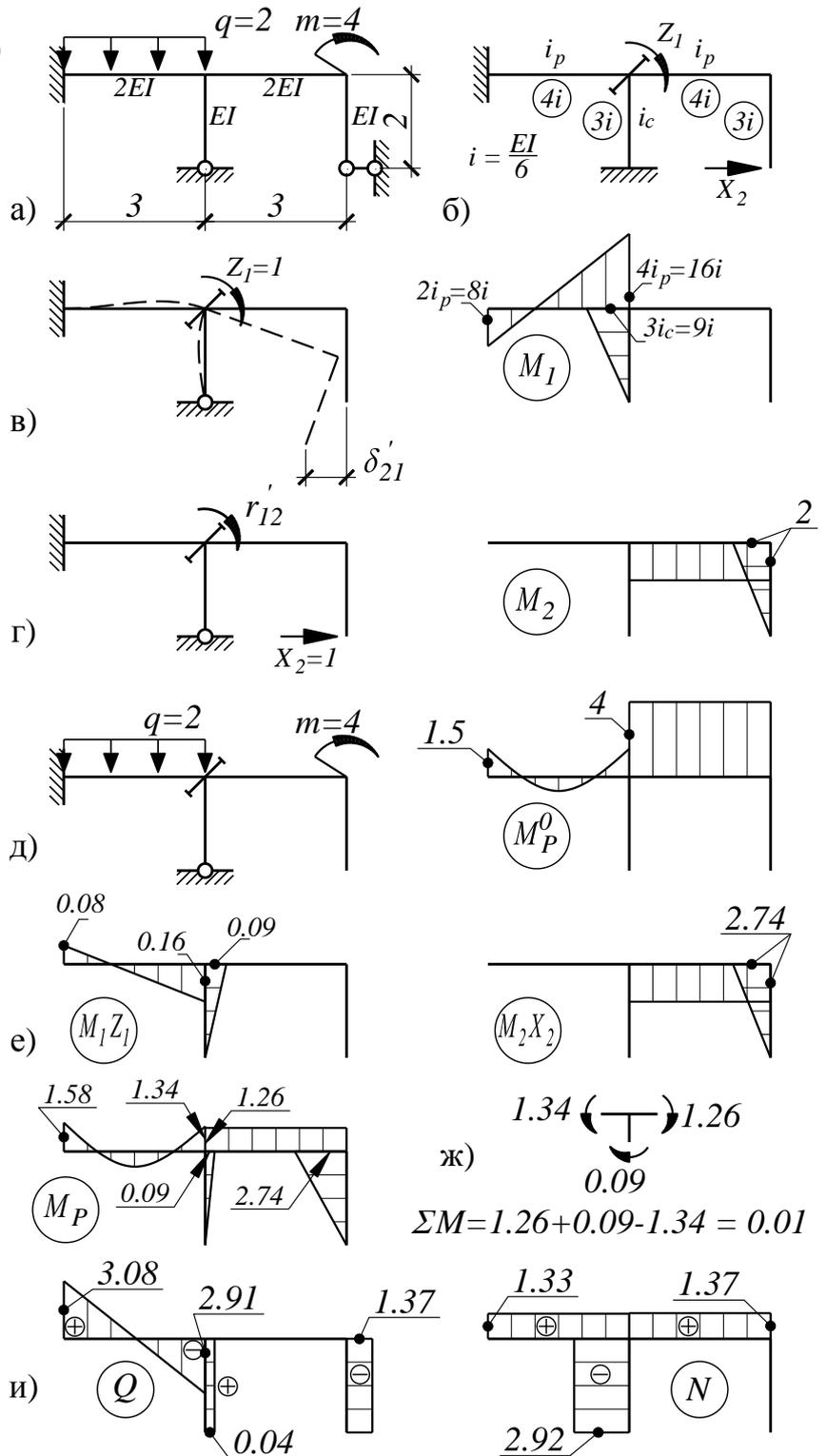
откуда: $Z_1 = -0.01i$; $X_2 = 1.37$.

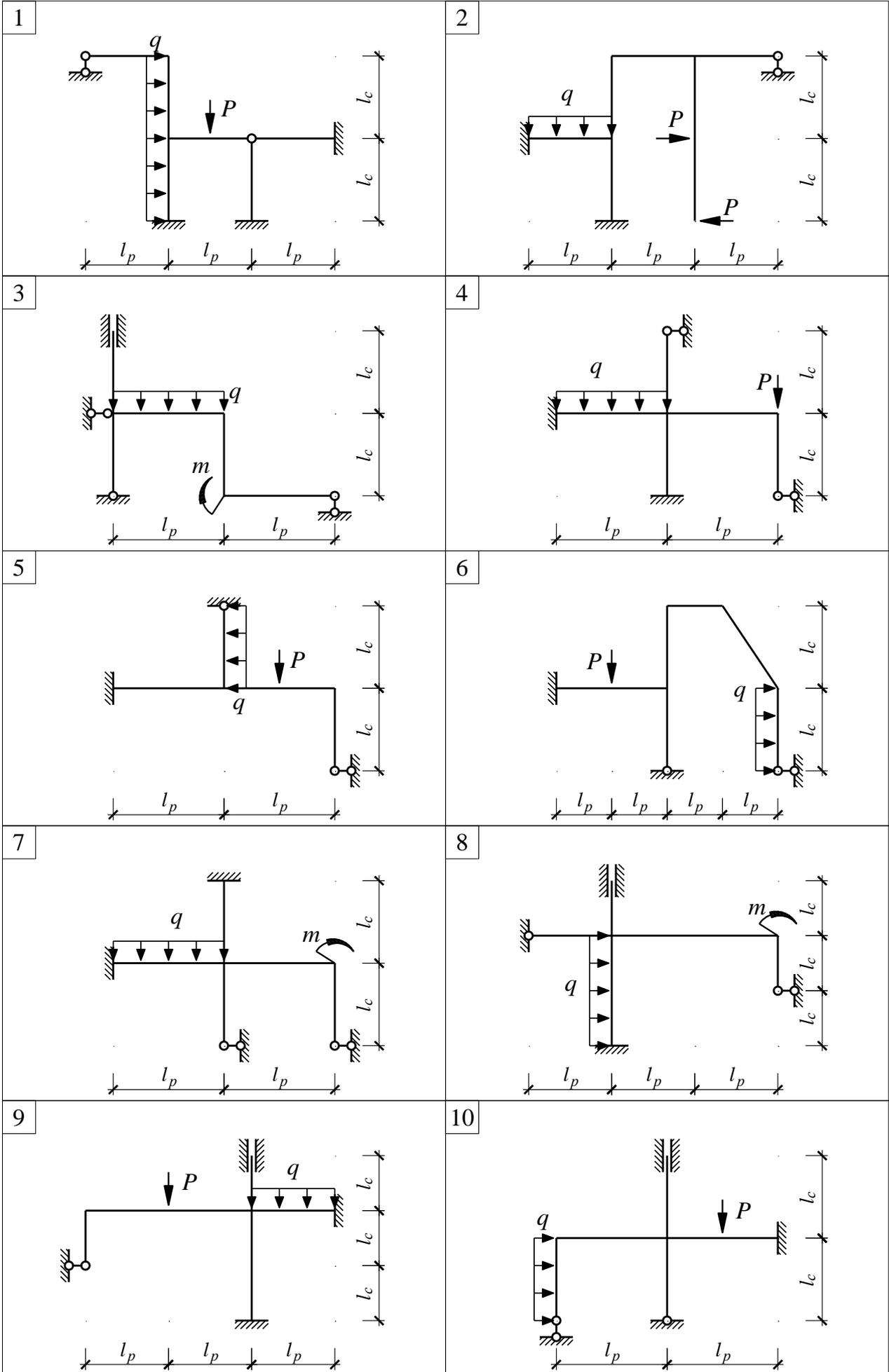
6. Строим промежуточные и окончательную эпюру моментов (е).

7. Выполняем статическую (ж) и самостоятельно кинематическую проверки с помощью любой единичной эпюры моментов в основной системе метода сил.

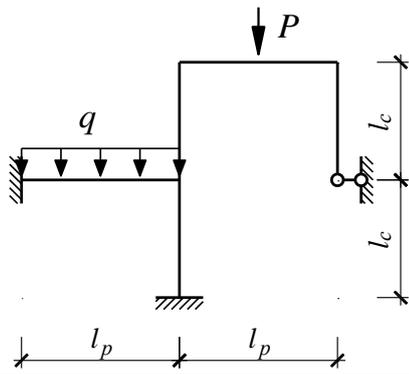
8. Строим эпюры поперечных и продольных сил (и).

9. Самостоятельно определяем опорные реакции и проводим статическую проверку для всей системы.

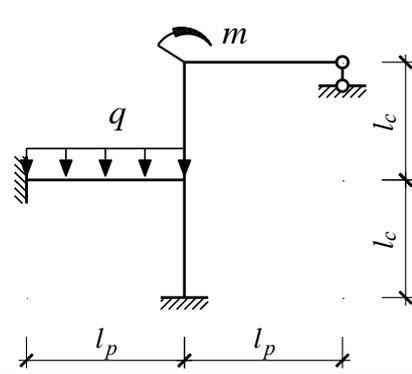




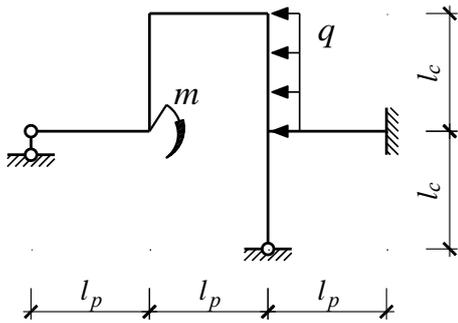
11



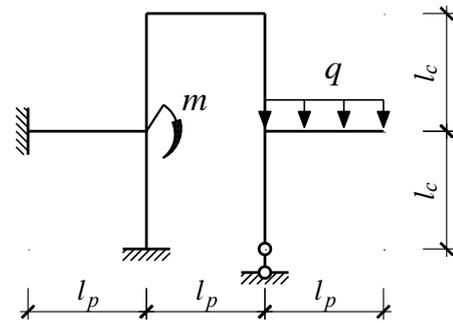
12



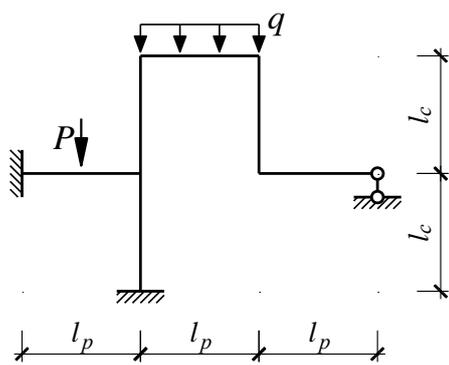
13



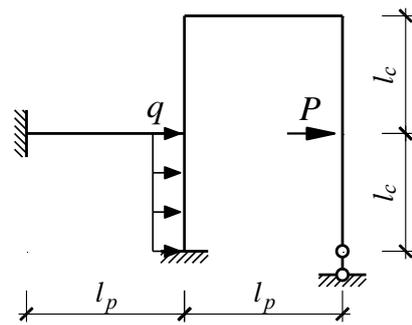
14



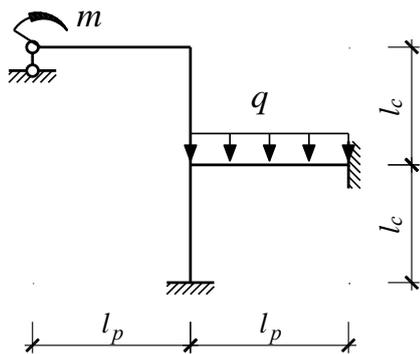
15



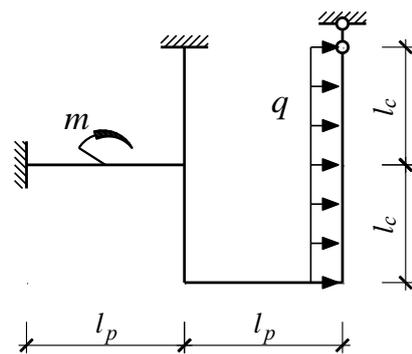
16



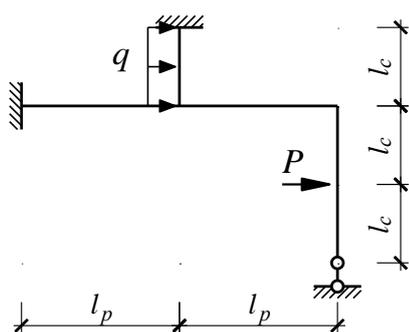
17



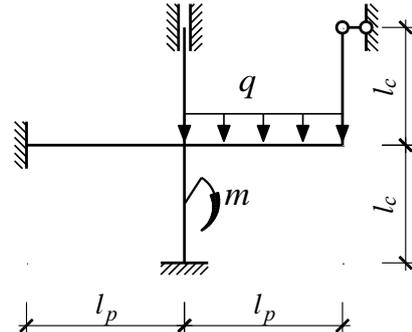
18



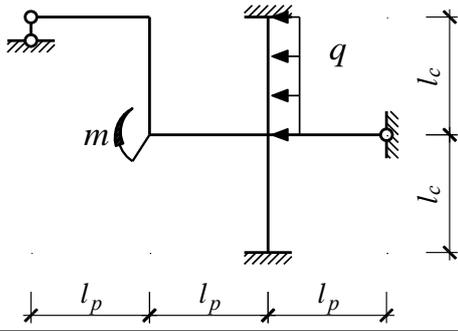
19



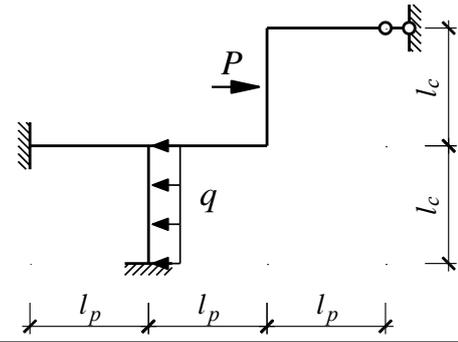
20



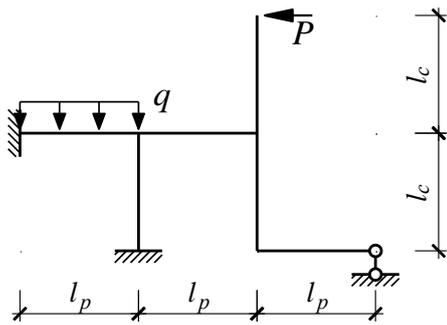
21



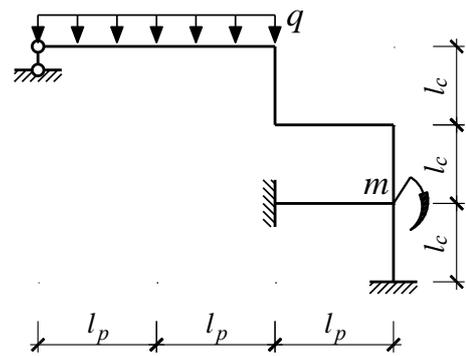
22



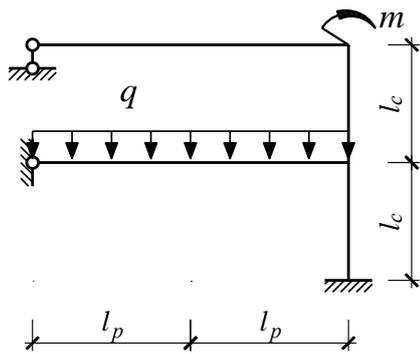
23



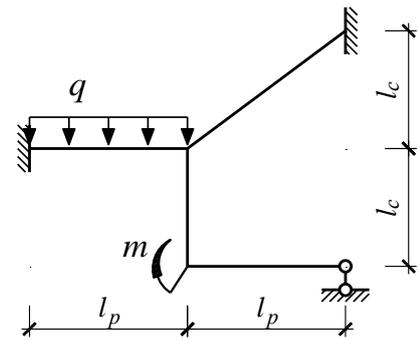
24



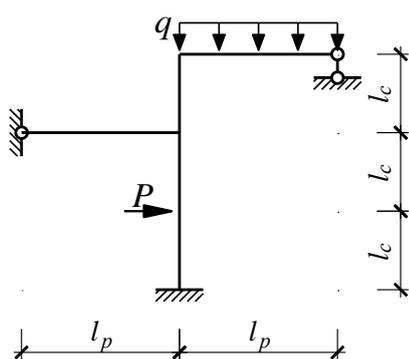
25



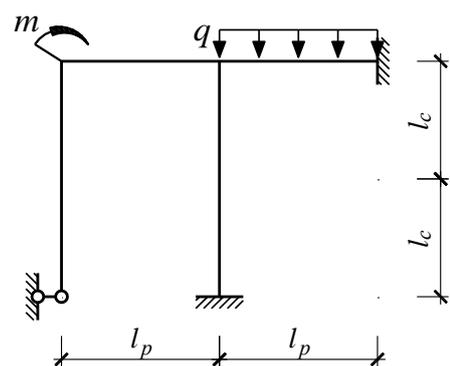
26



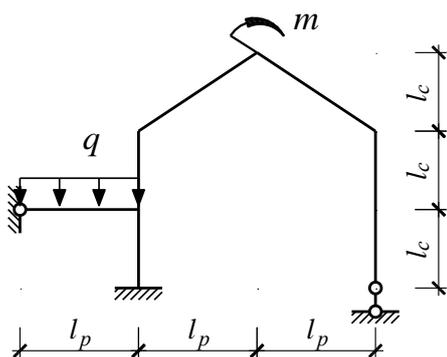
27



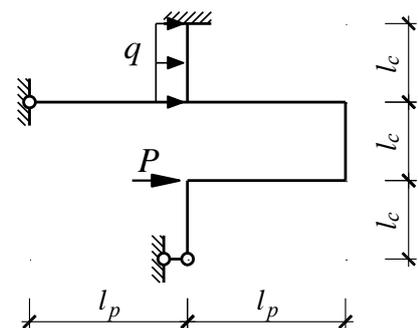
28



29



30



ТЕМА 14. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ РАМ МЕТОДОМ УРАВНОВЕШИВАНИЯ УЗЛОВЫХ МОМЕНТОВ

Приближенные методы расчета используются, в основном, на стадии эскизного проектирования для задания начальных жесткостей элементов.

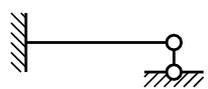
Метод уравнивания узловых моментов разработан на основе метода перемещений и удобен для расчета рам без линейной подвижности $\Pi_{\Delta} = 0$.

Метод заключается в последовательном уравнивании узловых моментов в закрепленных от поворота узлах основной системы метода перемещений. Для этого временно снимают подвижное защемление и уравнивают узел. Происходит перераспределение изгибающего момента от внешней нагрузки на стержни и смежные узлы. После этого заделка ставится обратно и выполняют ту же самую операцию для смежных узлов уже с учетом неуравновешенного момента от ранее рассмотренных узлов. Операцию повторяют несколько раз до достижения приемлемой точности результатов.

Порядок расчета:

1. Строят основную систему рамы методом перемещений.
2. Определяют условные погонные жесткости элементов основной системы:

– для элементов типа «заделка-заделка»:  $\bar{i}_k = \frac{3EI_k}{4l_k} = 0.75i_k$

– для элементов типа «заделка-шарнир»:  $\bar{i}_k = \frac{EI_k}{l_k} = i_k$

3. Вычисляют коэффициенты распределения стержней, сходящихся к каждому закрепленному узлу, и показывающие долю воспринимаемого каждым стержнем неуравновешенного момента в узле.

$\mu_k = \frac{\bar{i}_k}{\sum \bar{i}_k}$, причем $\sum \mu_k^{узла} = 1$ – сумма коэффициентов распределения в любом узле равна единице.

4. Строят грузовую эпюру M_P^0 в основной системе от внешней нагрузки по таблицам прил.1.
5. Из эпюры M_P^0 определяют начальные реактивные моменты M_R^0 для каждого узла как сумму изгибающих моментов на концах сходящихся в узел стержней и приложенных к узлу сосредоточенных моментов. Реактивные моменты, направленные по часовой стрелке, считаются положительными.
6. Начинают уравнивание узлов путем прикладывания к ним уравнивающих моментов, равных реактивным, но с противоположными знаками. Выполняют распределение уравнивающих моментов между стержнями, сходящимися в узел, пропорционально их коэффициентам распределения: $M_k = -\mu_k M_R^0$.

7. Передача половины распределенных моментов $0.5M_k$ на противоположные концы стержней, если в основной системе на этих концах имеется заземление. При наличии же шарнира передаваемый момент равен нулю.
8. Проводят последующее уравнивание узлов, выведенных из равновесия при предыдущей передаче и с учетом силового воздействия.

Для быстроты расчетов можно параллельно уравнивать несколько несмежных между собой узлов. Процесс уравнивания повторяется несколько раз и прекращается тогда, когда значения неуравновешенных моментов достигнут предела заданной точности.

9. Вычисляют окончательные моменты на концах каждого стержня, алгебраически складывая начальные моменты заделки, распределенные моменты и переданные моменты.
10. Проводят проверку правильности расчета, которой служит равенство нулю суммы моментов в каждом узле.
11. По эпюре изгибающих моментов M строят эпюру поперечных сил Q , используя дифференциальную зависимость Журавского: $Q = dM/dx$.
12. По эпюре Q строят эпюру продольных усилий N , рассматривая равновесия узлов с учетом возможной узловой нагрузки P .
13. Проводят статическую проверку правильности построения эпюр Q и N путем составления уравнений проекций сил на оси X и Y для всей системы после определения опорных реакций из вырезанных опорных узлов.

Уравнивание узлов удобнее проводить в табличной форме. Этот метод есть своеобразное применение метода последовательных приближений в методе перемещений.

Задача 14.1. Расчет статически неопределимых рам приближенным методом уравнивания узловых моментов

Для рам, приведенных на стр.138...140, построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от силового воздействия методом уравнивания узловых моментов. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Результаты можно проверить расчетами на ЭВМ.

Таблица 14.1. Исходные параметры к задаче 14.1

номер группы	$l_p, \text{ м}$	$l_c, \text{ м}$	$\frac{EI_p}{EI_c}$	$m, \text{ кН}\cdot\text{м}$	$P, \text{ кН}$	$q, \text{ кН/м}$	Сложность задания		Переменные параметры	
							Сложность задания	Переменные параметры		
1	2	2	k	4	3	q	3	$q = 0$	$k = 1$	
2	2	3	k	5	2	q	4	$q = 2$	$k = 0.5$	
3	3	4	k	4	3	q	6 с анализом	$q = 0$	$k = 2$	
4	3	2	k	5	2	q		$q = 2$		
5	3	3	k	4	3	q		$q = 4$		

Пример 14.1. Расчет статически неопределимой рамы методом уравнивания узловых моментов

Условие задачи: Для приведенной рамы (а) построить эпюры внутренних усилий M, Q, N от силового воздействия методом уравнивания узловых моментов. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

Решение.

1. Выполняем кинематический анализ и убеждаемся, что система статически неопределима и геометрически неизменяема:

$L=5, \Pi=2$.

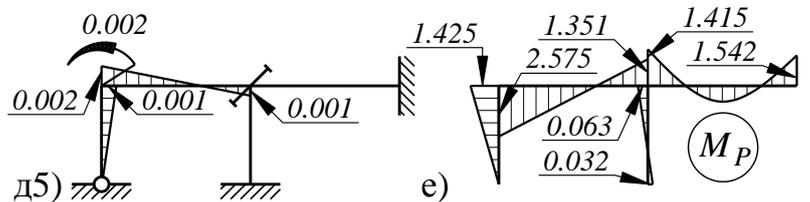
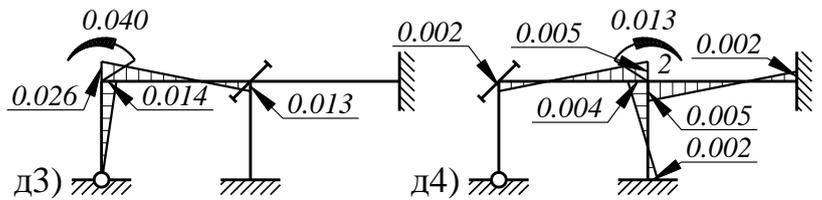
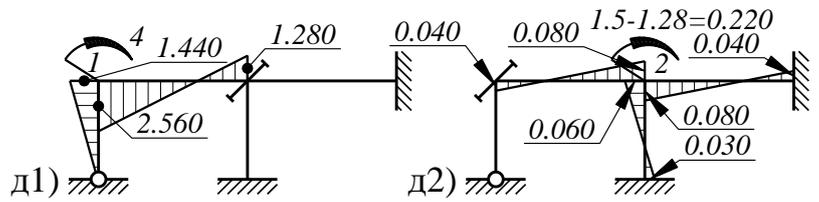
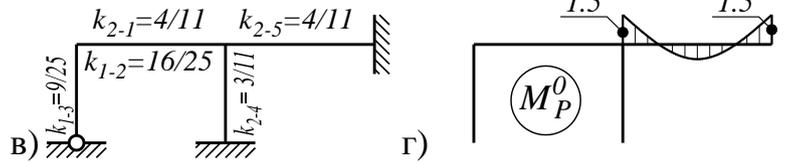
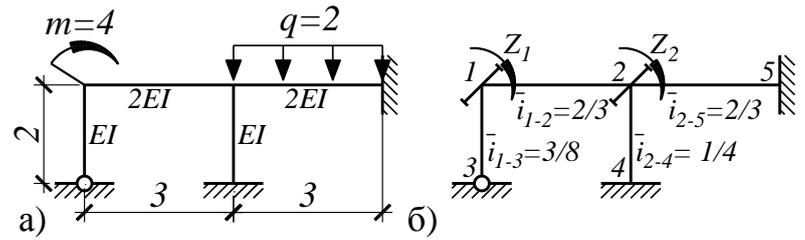
2. Строим основную систему метода перемещений и указываем на ней условные погонные жесткости (б) и коэффициенты распределения жесткости (в).

3. Строим грузовую эпюру (г).

4. Вычисление выполняем путем последовательного приближения графическим способом (д1...д5), а также в табличной форме.

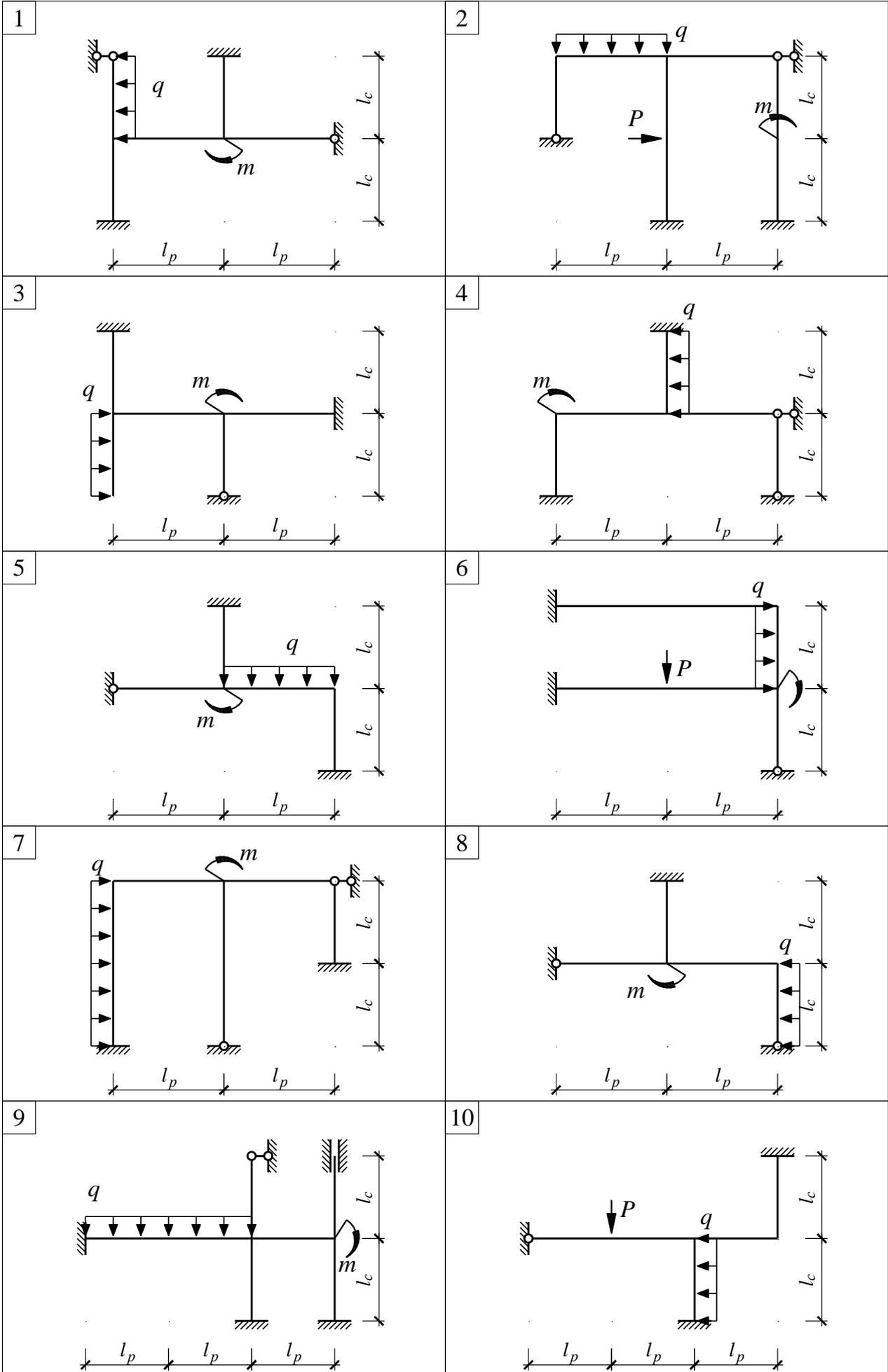
5. Строим окончательную эпюру M_P путем сложения всех промежуточных значений итерации.

6. Самостоятельно выполняем статическую проверку путем уравнивания узлов и кинематическую проверку с использованием любой единичной эпюры метода сил.

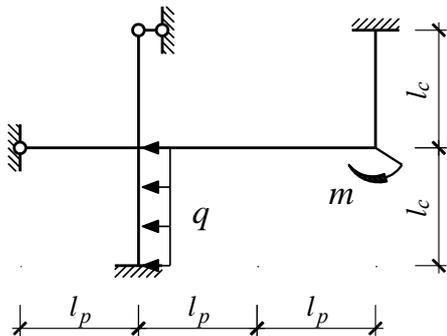


Определение величины изгибающих моментов табличным способом

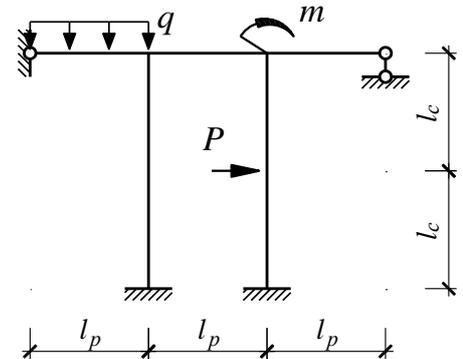
Номер узла		3	1	2			5	4	
Номер стержня		3-1	1-3	1-2	2-1	2-4	2-5	5-2	4-2
Условная погонная жесткость \bar{i}		3/8	3/8	2/3	2/3	1/2	2/3	2/3	2/3
Коэффициент распределения μ		-	9/25	16/25	4/11	3/11	4/11	-	-
Воздействие на узлы	M_P^0 (в)							-1.5	1.5
	1 (д1)	0	1.440	2.560	1.280				
	2 (д2)				1.280	-1.5 = -0.220			
	1 (д3)	0	-0.014	-0.026	-0.013				
	2 (д4)				0.002	0.005	0.004	0.005	0.002
	1 (д5)		-0.001	-0.002	-0.001				
Окончательные моменты (е)		0	1.425	2.575	1.351	0.063	-1.415	1.542	0.032



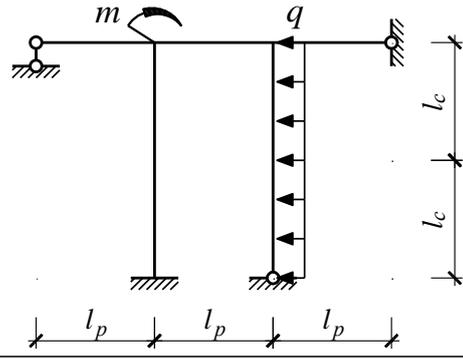
11



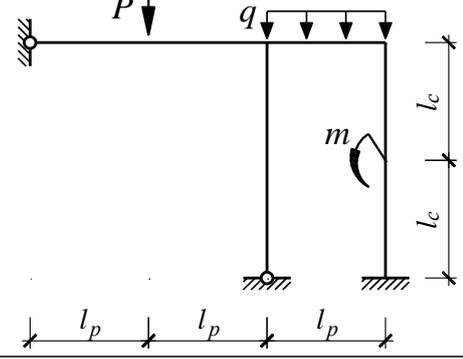
12



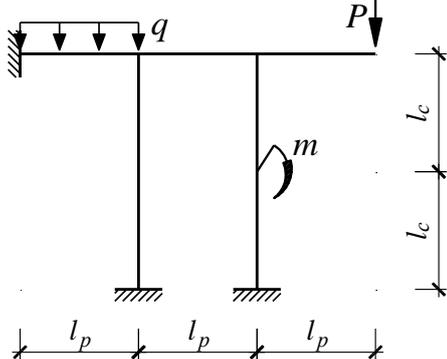
13



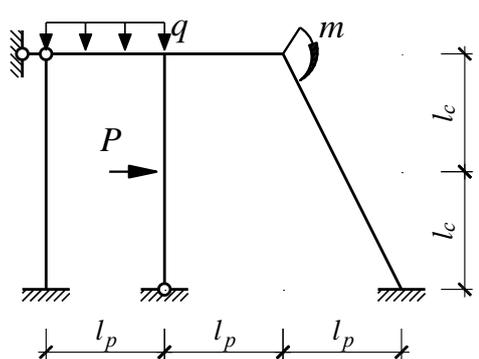
14



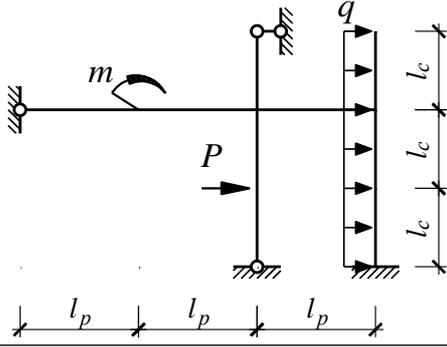
15



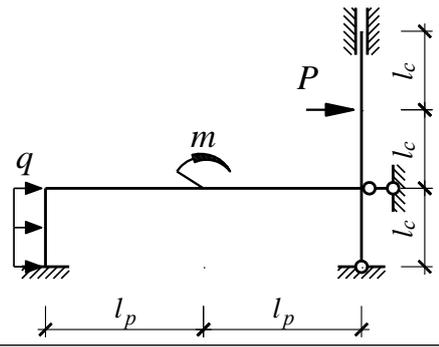
16



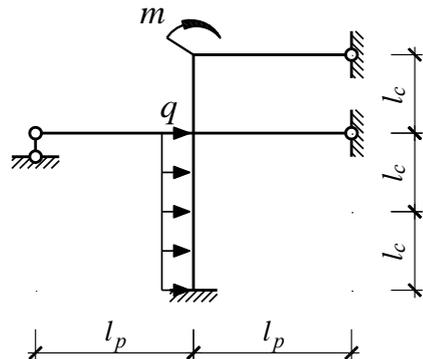
17



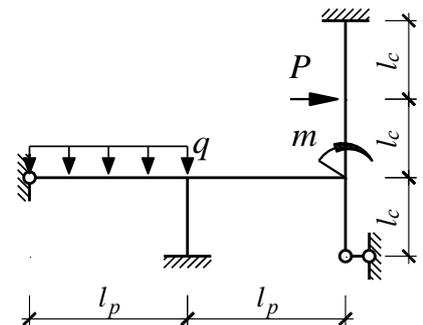
18



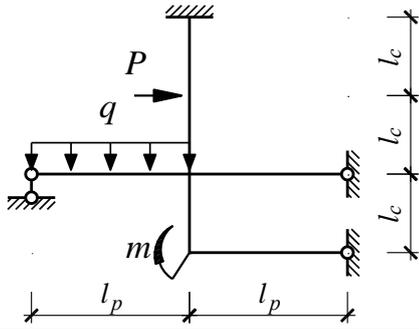
19



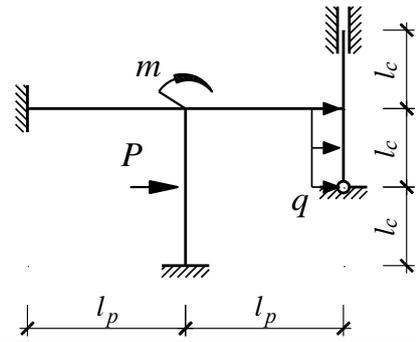
20



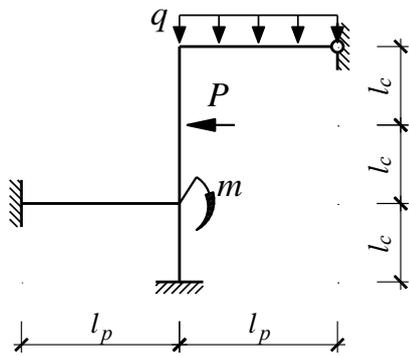
21



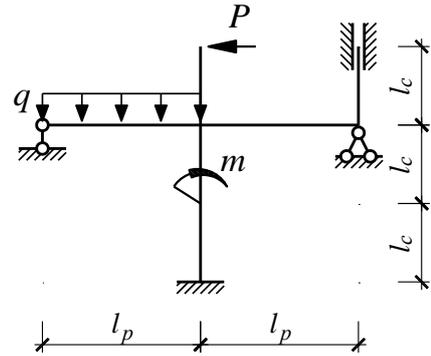
22



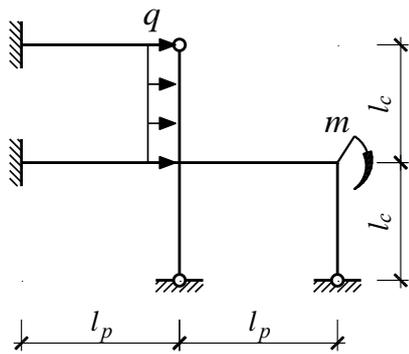
23



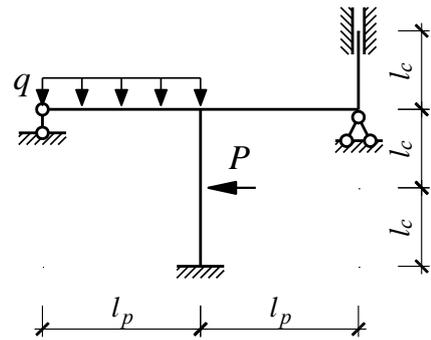
24



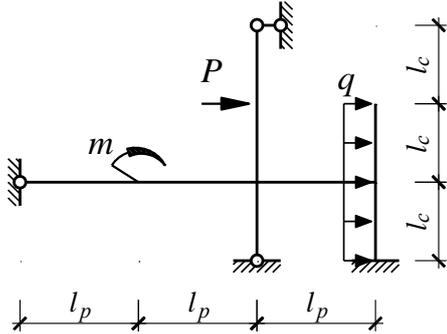
25



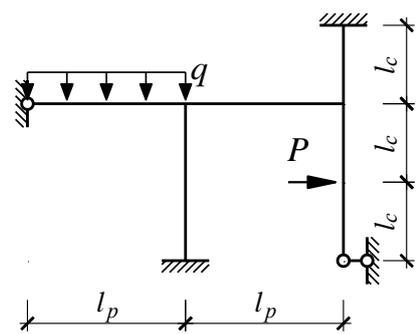
26



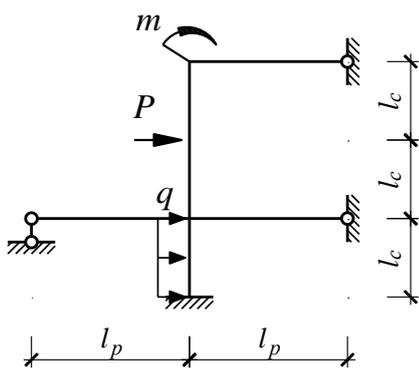
27



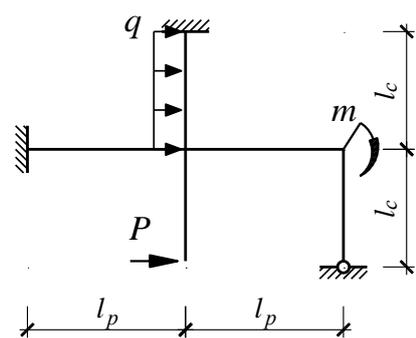
28



29



30



После изучения данной темы студент должен:

- **знать**, порядок расчета рам приближенным методом уравнивания узловых моментов;
- **уметь** строить эпюры изгибающих моментов приближенным методом;
- **владеть** приближенным методом для предварительного расчета рамы;

и суметь **ответить** на следующие вопросы:

1. На каком методе основан данный метод расчета?
2. От чего зависит коэффициент распределения?
3. Какие проверки расчета существуют в данном методе?
4. В чем заключается сущность метода уравнивания узловых моментов?

ТЕМА 15. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ РАМ НА ГОРИЗОНТАЛЬНУЮ НАГРУЗКУ

В основном данный метод используется при расчете многоэтажных многопролетных рам на действие ветровой нагрузки. Отметим особенности и порядок проведения расчета рам на горизонтальную нагрузку приближенным методом:

1. Горизонтальная распределенная нагрузка приводится к сосредоточенным узловым нагрузкам.
2. Во все бесшарнирные стойки 2-го и выше этажей вводятся шарниры в середине высоты. В стойках первого этажа шарниры ставятся на расстоянии $2/3$ высоты от основания.
3. Проводят сечение по шарнирам каждого этажа отдельно и рассматривают равновесие вышеотсеченной части рамы.
4. Равнодействующая горизонтальных сил, равная сумме всех сил выше рассматриваемого сечения, распределяется между поперечными усилиями стоек, попадающих в сечение, пропорционально коэффициенту распределения:

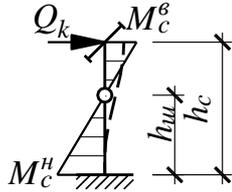
$$Q = \sum_{i=1}^n P_i; \mu_k = \frac{EI_k}{h_k^3} \bigg/ \sum_{j=1}^m \frac{EI_j}{h_j^3}; Q_k = Q \cdot \mu_k,$$

где n – количество горизонтальных сил P_i , действующих выше рассматриваемого сечения; m – количество стоек жесткостью EI_j и высотой h_j по сечению, в которых возникают поперечные силы Q_k .

При постоянной высоте стоек этажа:

$$Q_k = EI_k \sum_{i=1}^n P_i \bigg/ \sum_{j=1}^m EI_j.$$

5. Определяют изгибающие моменты на концах каждой стойки этажей в зависимости от положения шарнира, считая, что они имеют защемление в узлах рамы:



$$M_c^g = Q_k (h_c - h_u);$$

$$M_c^H = Q_k h_u.$$

6. Определяют моменты на концах ригелей, исходя из условий равновесия узлов рамы:

– для крайних узлов: $M_p = \sum M_c;$

– для средних узлов: $M_p^{лев} + M_p^{np} = \sum M_c,$

причем $M_p^{лев}$ и M_p^{np} распределяются пропорционально их погонным жесткостям:

$$M_p^{лев} = \frac{i_p^{лев}}{i_p^{лев} + i_p^{np}} \sum M_c; \quad M_p^{np} = \frac{i_p^{np}}{i_p^{лев} + i_p^{np}} \sum M_c.$$

После изучения данной темы студент должен:

– **знать**, порядок расчета рам приближенным методом на горизонтальную нагрузку;

– **уметь** строить эпюры изгибающих моментов приближенным методом;

– **владеть** приближенным методом для предварительного расчета рамы;

– суметь **ответить** на следующие вопросы:

1. Какие допущения положены в основу расчета данного метода?
2. Чем отличается постановка шарниров в стойках первого и последующих этажей?
3. Как определяются моменты на стойках, а как на ригелях?
4. Как проверить правильность построенной эпюры M ?

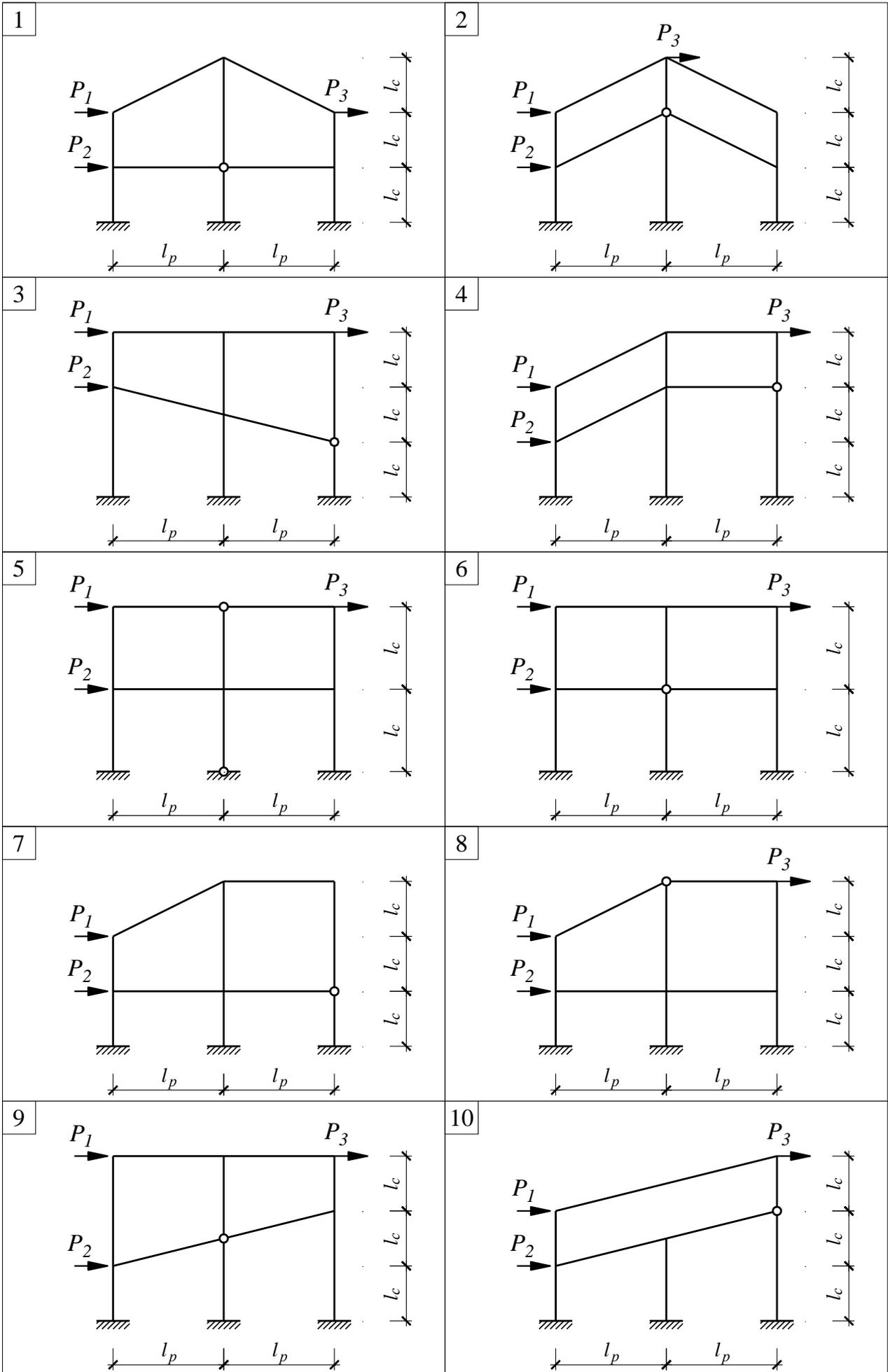
Задача 15.1. Расчет статически неопределимых рам приближенным методом на горизонтальную нагрузку

Для рам, приведенных на стр.143...145, построить эпюры внутренних усилий M , Q , N от силового воздействия приближенным методом. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Вариантный анализ выполнить путем добавления одного этажа высотой l_c ниже схемы. Исходные параметры принимать по табл.15.1.

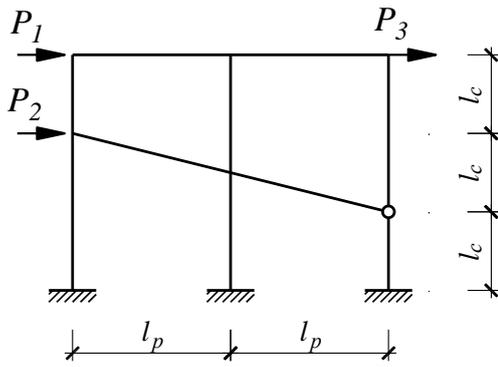
Полученные результаты можно сопоставить с расчетом на ЭВМ.

Таблица 15.1. Исходные параметры к задаче 15.1

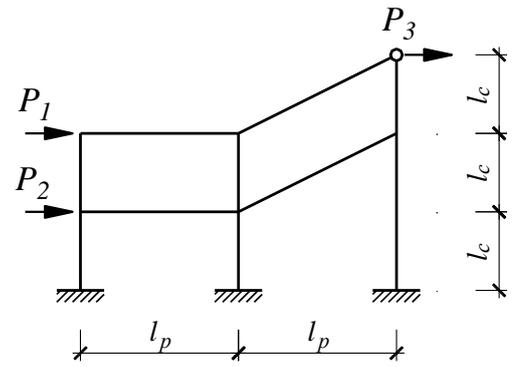
номер группы	l_p , м	l_c , м	$\frac{EI_p}{EI_c}$	P_1 , кН·м	P_2 , кН·м	P_3 , кН·м	Сложность задания		Переменные параметры	
							Сложность задания	Переменные параметры		
1	6	$L + 2$	k	4	3	2	3	$L = 0$	$k = 2$	
2	6	$L + 3$	k	5	4	3	4	$L = 1$	$k = 4$	
3	6	$L + 1$	k	6	5	4	6 с анализом	$L = 2$	$k = 4$	
4	6	$L + 2$	k	2	3	4		добавить этаж ниже и сравнить эпюры		
5	6	$L + 3$	k	3	4	5				



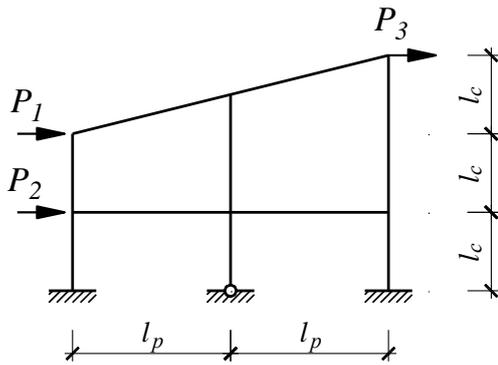
11



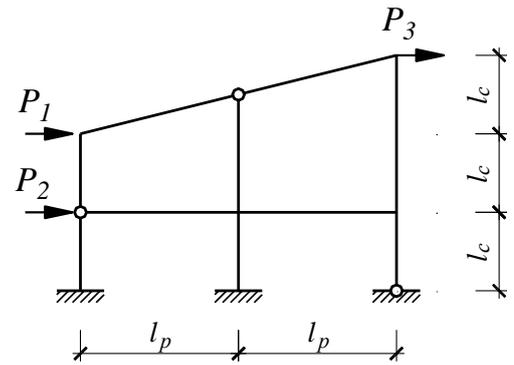
12



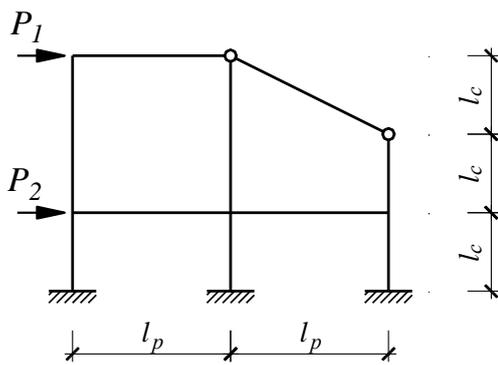
13



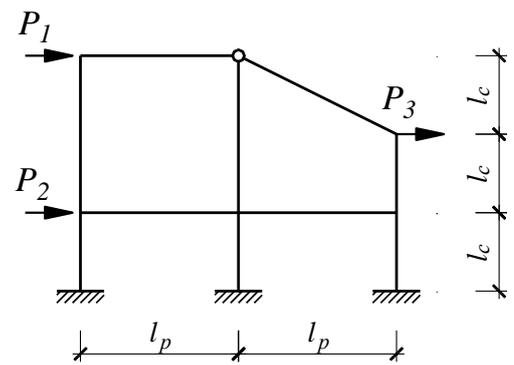
14



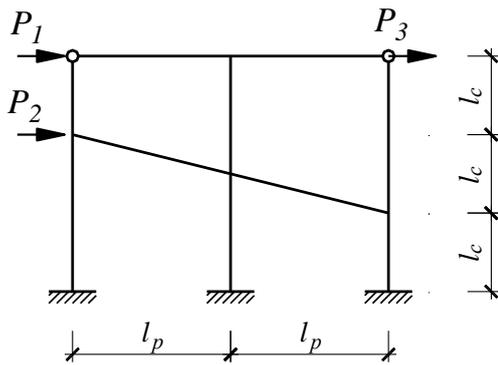
15



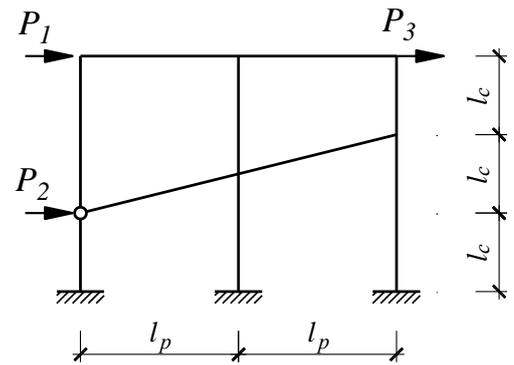
16



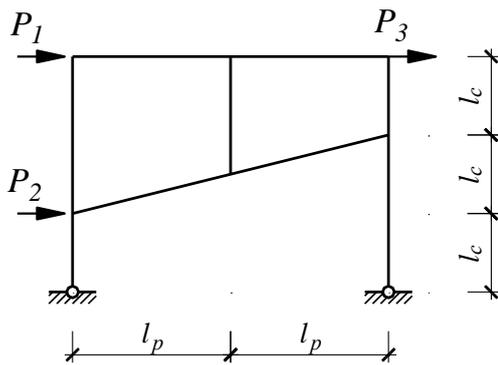
17



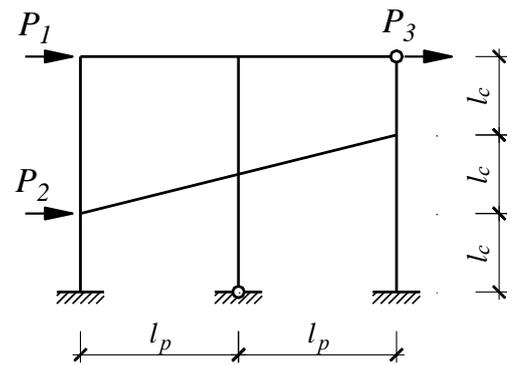
18



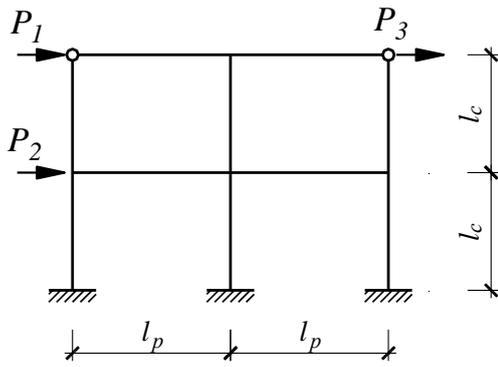
19



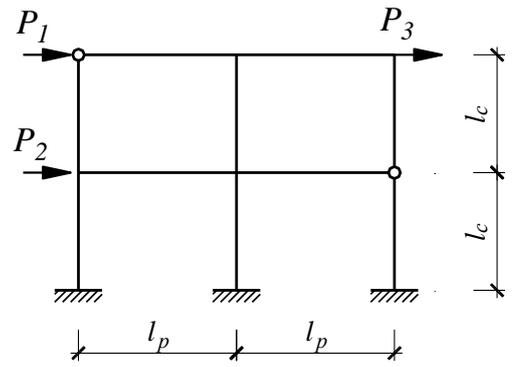
20



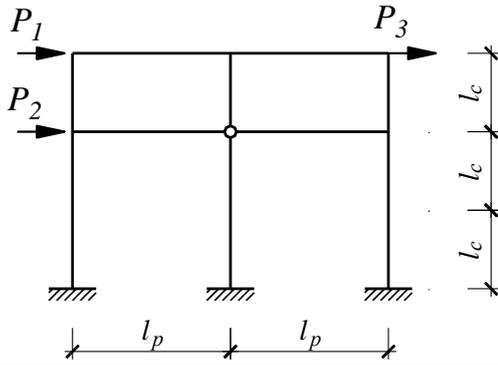
21



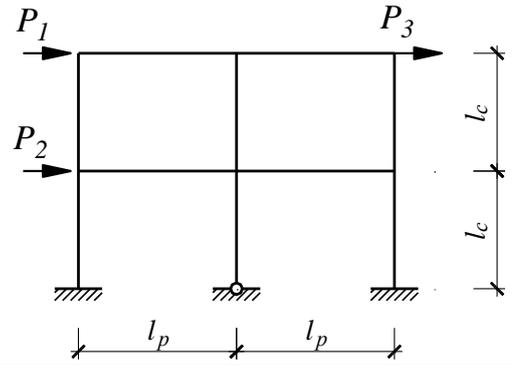
22



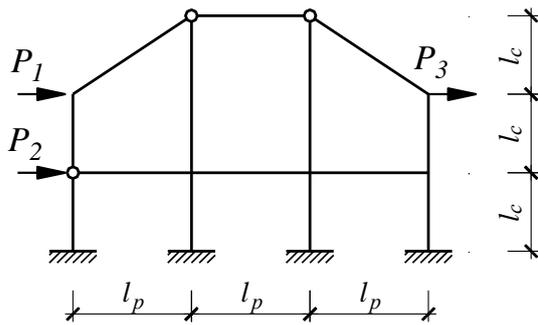
23



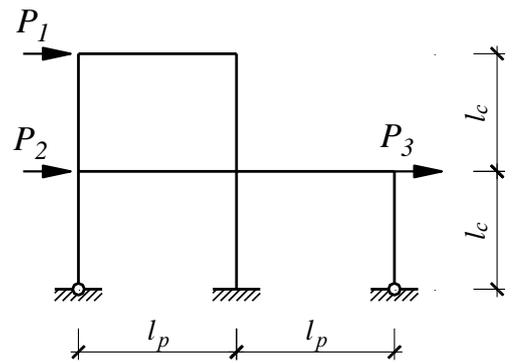
24



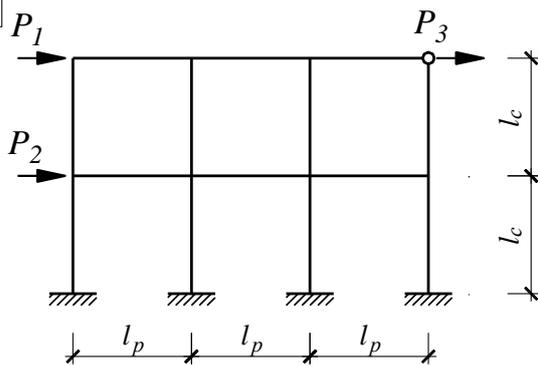
25



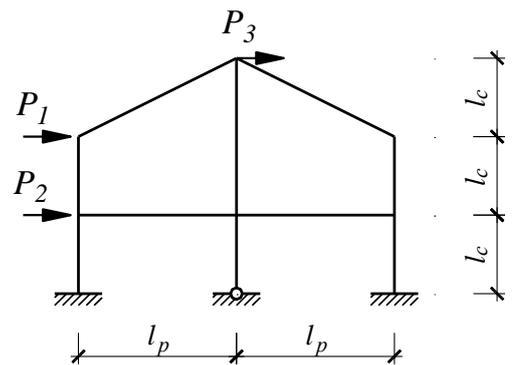
26



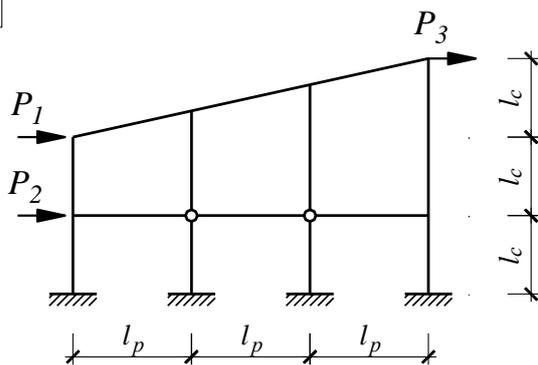
27



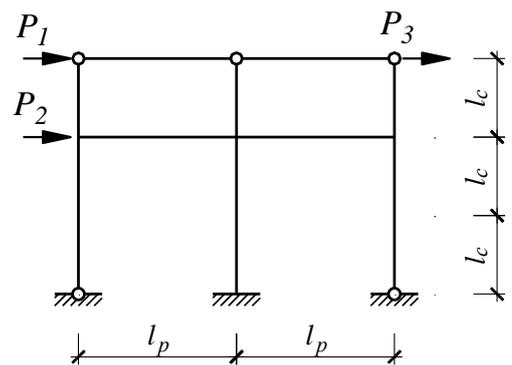
28



29



30



ТЕМА 16. ВЫБОР РАЦИОНАЛЬНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Для точного расчета статически неопределимых систем в изучаемом курсе мы рассмотрели методы сил и перемещений, смешанный и комбинированный методы. Данные методы расчета апробированы при решении ранее предложенных задач.

При решении практических задач из множества методов необходимо выбрать такой, использование которой позволяет наименьшими затратами достичь поставленной цели. Поэтому, для произвольно поставленной задачи необходимо предварительно выбрать рациональный метод расчета. Критерием выбора рационального метода служит количество неизвестных, входящих в систему канонических уравнений. При этом необходимо учитывать симметричность системы, использовать группировку неизвестных и внешнего воздействия. Выбор метода расчета оформляется в табличной форме.

Таблица 16.1. Форма таблицы для выбора оптимального метода расчета

Методы расчета	система		неизвестные			нагрузки			Выбор метода расчета
	симм.	произв.	общее число	симм.	косо-симм.	симм.	косо-симм.	произв.	
– метод сил									
– метод перемещений									
– смешанный метод									
– комбинированный метод									

После изучения данной темы студент должен:

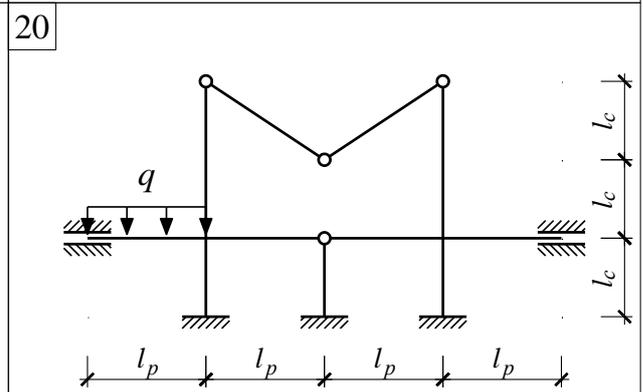
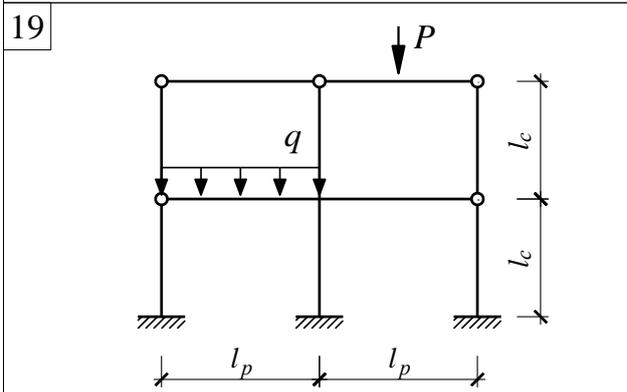
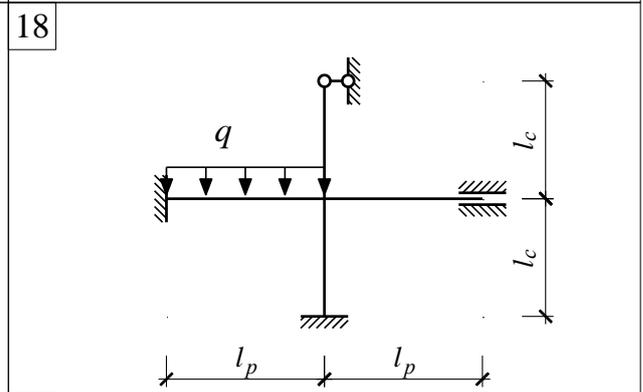
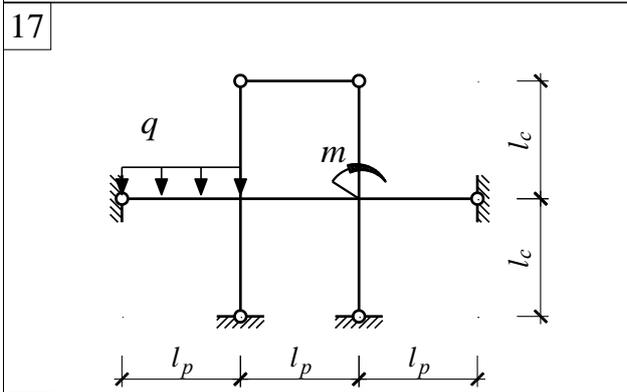
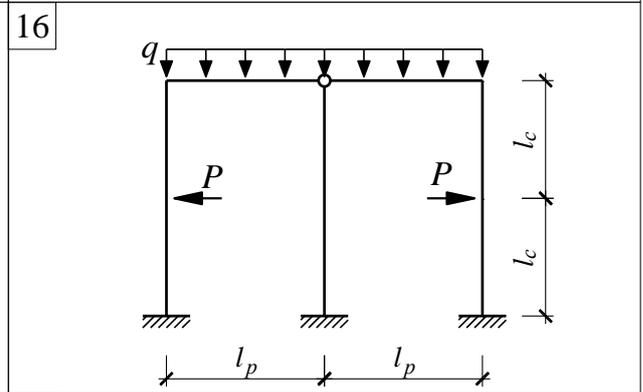
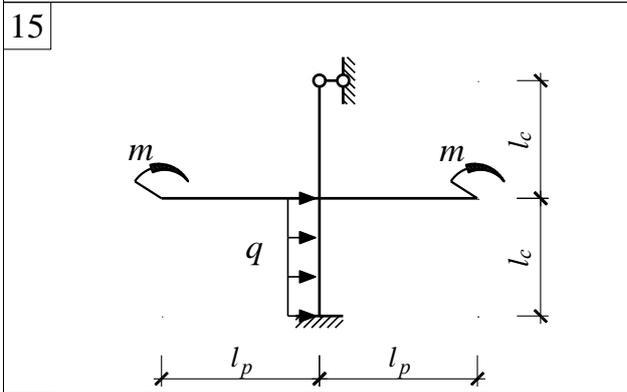
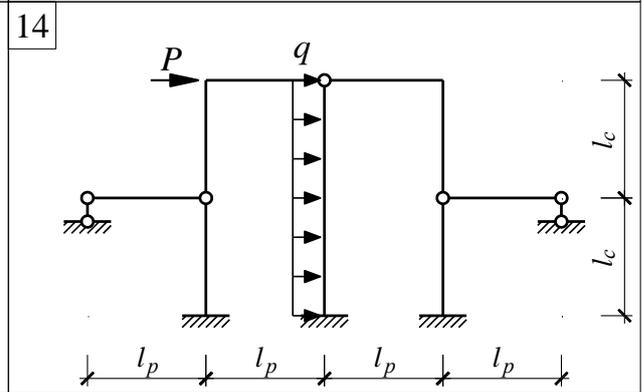
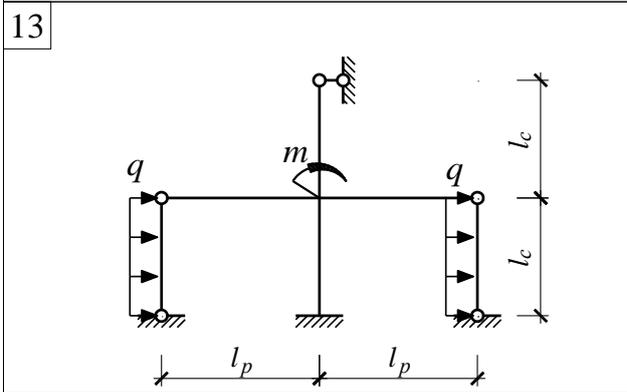
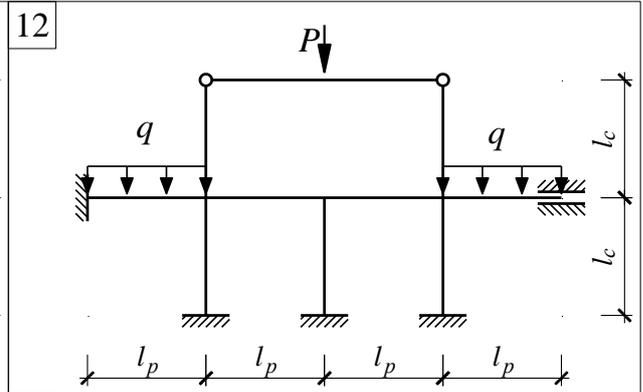
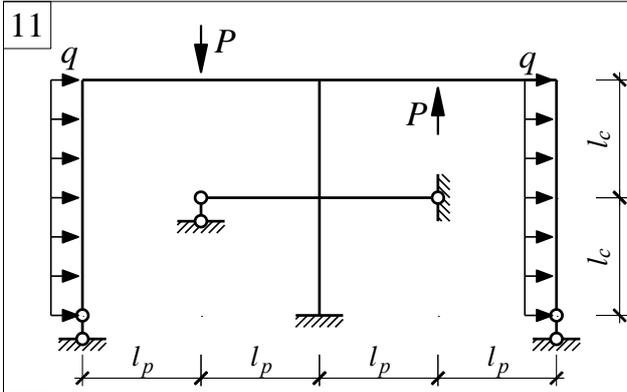
- **знать**, порядок расчета рам методами строительной механики;
- **уметь** выбрать рациональный метод расчета из всех рассмотренных;
- **владеть** анализом методов расчета статически неопределимых систем с учетом геометрии расчетных схем, приложенной нагрузки и симметрии расчетных схем.

Задача 16.1. Расчет статически неопределимых рам рациональным методом

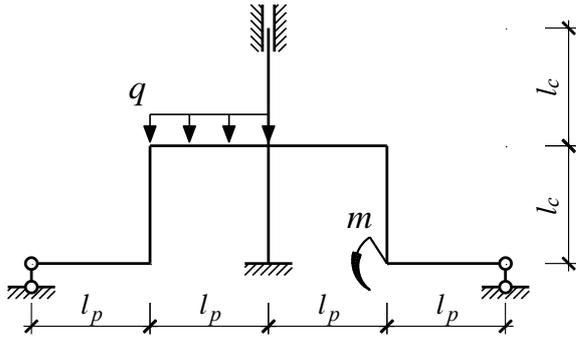
Для представленных на стр.147...149 схем на основании сопоставления всех методов расчета выбрать наиболее рациональный метод и построить эпюры внутренних усилий M , Q , N . Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.16.2.

Таблица 16.2. Исходные параметры к задаче 16.1

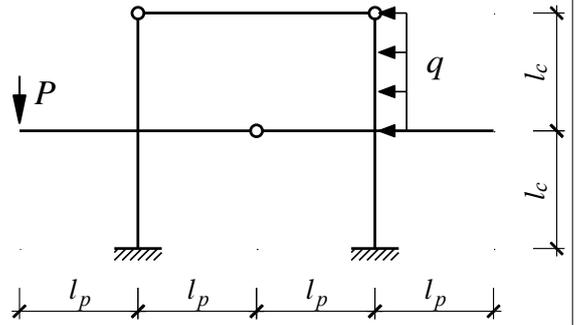
номер группы	l_p , м	l_c , м	$\frac{EI_p}{EI_c}$	m , кН·м	P , кН	q , кН/м	Сложность задания	Переменные параметры	
1	2	2	k	4	3	q	3	$q = 0$	$k = 1$
2	2	3	k	5	2	q	4	$q = 1$	$k = 2$
3	3	2	k	4	3	q	6 с анализом	$q = 0$	$k = 0.5$
4	3	3	k	5	2	q		$q = 1$	
5	3	4	k	4	3	q		$q = 2$	



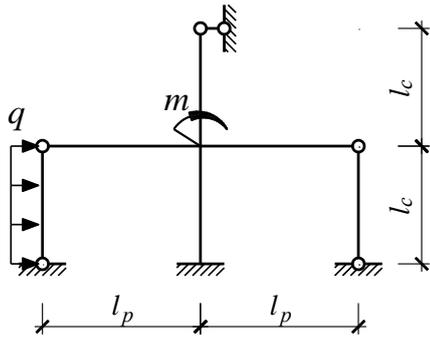
21



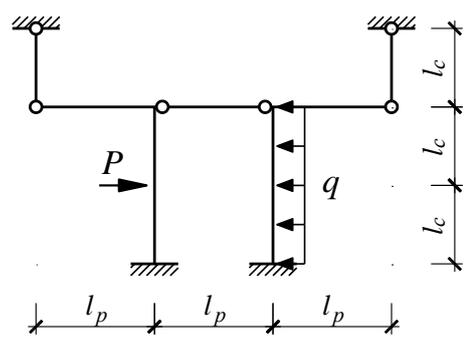
22



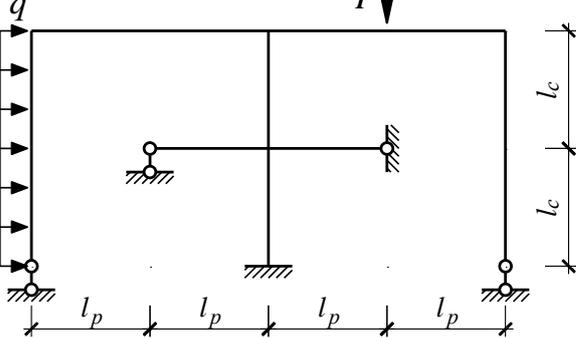
23



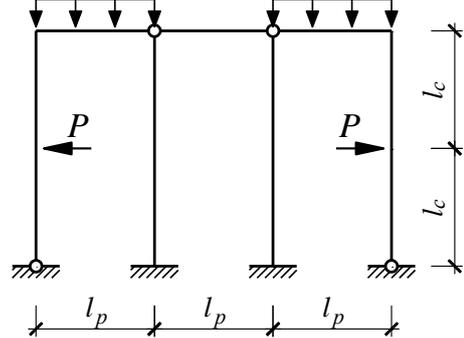
24



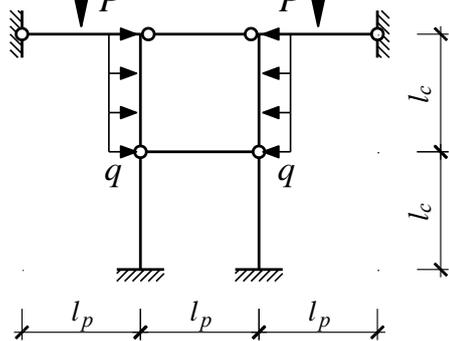
25



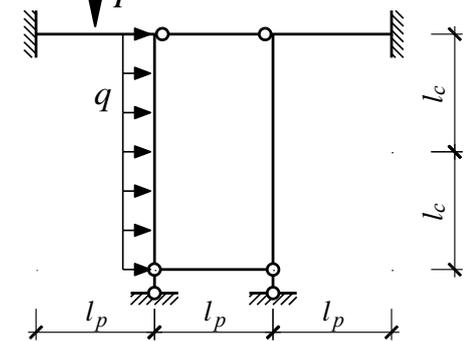
26



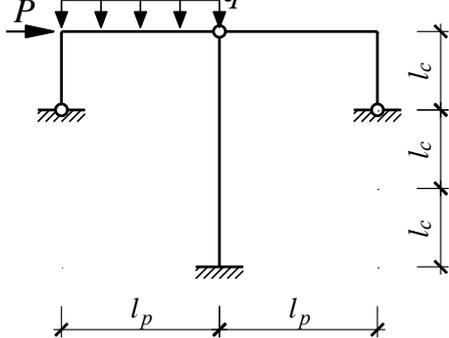
27



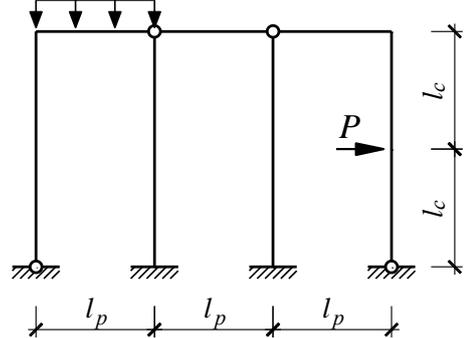
28



29



30



ГЛАВА 4. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Устойчивостью называется способность сооружений сохранять свое первоначальное положение или первоначальную форму равновесия в деформированном состоянии при действии внешних сил. Принято различать устойчивость положения сооружения и устойчивость форм равновесия в нагруженном состоянии.

Положение сооружения или форма равновесия в нагруженном состоянии считаются устойчивыми, если при всяком, сколь угодно малом дополнительном возмущении сооружение отклоняется от своего положения или равновесного состояния, однако после исчезновения дополнительного возмущения полностью возвращается в исходное состояние. В неустойчивых системах происходит переход в другое состояние равновесия вплоть до разрушения конструкции.

Переход сооружения из одного равновесного состояния к другому равновесному состоянию называется потерей устойчивости системы, состояние перехода – критическим состоянием, величины внешних сил – критической нагрузкой.

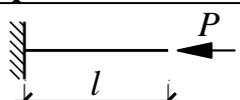
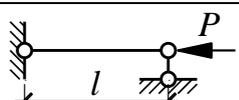
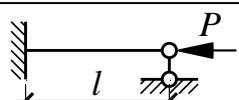
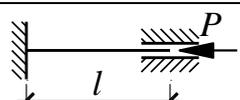
ТЕМА 17. РАСЧЕТ РАМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Решение задач устойчивости стержневых систем сводятся к определению критического параметра ν , по которому находится величина критической нагрузки:

$$P_{кр} = \frac{\nu^2 EI}{l^2}.$$

Задача устойчивости прямолинейного стержня постоянной жесткости при действии продольной силы впервые была решена Л. Эйлером.

Таблица 17.1. Эйлеровские значения критического параметра для сжатых стержней

Схема закрепления стержней				
Критический параметр ν	$\nu = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$	$\nu = \pi \approx 3.14$	$\nu = \frac{3\pi}{2} \approx 4.71$	$\nu = \pi \approx 6.28$
Коэффициент расчетной длины μ	$\mu = 2$	$\mu = \frac{\pi}{\nu} = 1$	$\mu = 0.67$	0.5

Решение рам на устойчивость выполняют методом перемещений. При этом используют табличные значения реакций для изгибаемых стержней (прил.1) и функции метода перемещений для сжатоизогнутых стержней (прил.2).

Напомним особенности и порядок расчета рам на устойчивость методом перемещений:

1. Определяют число неизвестных метода перемещений $\Pi = \Pi_y + \Pi_\lambda$ и строят основную систему.
2. Определяют критические параметры ν_i для сжатых элементов по формуле:

$$\nu_i = kl_i = l_i \sqrt{\frac{P_i}{EI_i}}.$$

Выбирается критический стержень, для которого критический параметр ν имеет наибольшее значение, и приводят значения критических параметров других стержней к параметру критического стержня.

3. Записывают систему канонических уравнений в общем виде без свободных коэффициентов R_{ip} , т.к. продольное действие силы не приводит к образованию изгибающих моментов от внешнего воздействия и $M_p^0 = 0$:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n = 0 \\ \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n = 0 \end{cases}.$$

4. Строят единичные эпюры изгибающих моментов M_i в основной системе от действия единичных неизвестных $Z_i = 1$, используя при этом таблицы метода перемещений (прил.1) для изгибаемых стержней, и таблицы метода перемещений (прил.2) для сжато-изгибаемых стержней.
5. Определяют единичные коэффициенты r_{ij} по условиям равновесия узлов или сечений, и заполняют ими определитель системы канонических уравнений (уравнение устойчивости):

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

В задачах прочности всегда $D > 0$, а в задачах устойчивости $D = 0$. Коэффициент r_{ij} зависят от сжимающих сил, а именно от параметра ν .

6. Раскрывая определитель, решают уравнение устойчивости относительно критического параметра ν . Так как функции для критического параметра нелинейные, часто решение достигается путем итераций. При этом начальное значение параметра ν задается из условия закрепления стержня по Эйлеровским значениям критического параметра для сжатых стержней (табл.17.1).

7. Определяют величину критической силы:

$$P_{кр} = \frac{EI}{l^2} \nu^2,$$

8. Вычисляют значения приведенных длин стержней $l_0 = \mu l = \frac{\pi}{\nu} l$.

После изучения данной темы студент должен:

- **знать**, порядок расчета рам на устойчивость;
- **уметь** определять критическую нагрузку для произвольной схемы;
- **владеть** расчетом рам на устойчивость при проектировании;
- суметь **ответить** на следующие вопросы:
 1. Что подразумевают под понятием потери устойчивости?
 2. Какую нагрузку можно назвать критической?
 3. Запишите значения критических сил для отдельных стержней, имеющих различные условия опирания по концам,
 4. Как выглядит грузовая эпюра моментов в задачах устойчивости метода перемещений?
 5. Как определить критический параметр ν ?

Задача 17.1. Определение критической нагрузки в статически неопределимых рамах методом перемещений

Для рам, приведенных на стр.154...156, определить значение критической силы $P_{кр}$. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.17.2. Анализ выполнить сравнением критической силы для исходной схемы с одним неизвестным $\Pi = 1$ и схемы, построенной из исходной путем самостоятельного введения дополнительного перемещения $\Pi = 2$ к исходной схеме. Дополнительное перемещение можно получить путем замены шарнирного узла на жесткий или снятия горизонтальной опорной связи для ригелей.

Таблица 17.2. Исходные параметры к задаче 17.1

номер группы	$l_p, \text{ м}$	$l_c, \text{ м}$	$\frac{EI_p}{EI_c}$	$P_1, \text{ кН}$	$P_2, \text{ кН}$	$P_3, \text{ кН}$	Сложность задания		Переменные параметры	
1	2	$L + 2$	k	2P	P	P	3	$L = 0$	$k = 1$	
2	2	$L + 3$	k	P	2P	P	4	$L = 1$	$k = 2$	
3	3	$L + 2$	k	P	P	2P	6 с анализом	$L = 2$	$k = 2$	
4	3	$L + 3$	k	2P	2P	P		добавить одно перемещение $\Pi = 2$		
5	3	$L + 4$	k	P	2P	2P				

Пример 17.1. Определение критической нагрузки методом перемещений

Условие задачи: Для приведенной рамы (а) определить величину критической нагрузки $P_{кр}$. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

Решение.

1. Выполняем кинематический анализ и убеждаемся, что система статически неопределима и геометрически неизменяема: $\Pi = 2$.

2. Строим основную систему метода перемещений, нумеруем стержни и указываем погонные жесткости (б):

$$i_1 = i_4 = \frac{EI}{4} = 3i; \quad i_2 = \frac{EI}{6} = 2i; \quad i_3 = \frac{2EI}{6} = 4i;$$

3. Определяем критический параметр для сжатых стержней и выражаем через ν критический параметр с наибольшим значением:

$$\nu_1 = \nu_4 = 4\sqrt{\frac{3P}{EI}} = \nu; \quad \nu_2 = 6\sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\nu.$$

3. Строим единичные эпюры метода перемещений (в, г), используя таблицы прил.1 для изгибаемых стержней и прил.2 – для сжатоизгибаемых стержней.

4. Определяем члены системы канонического уравнения, подставляя соответствующие значения i_k и ν_k :

$$r_{11} = 4i_1\varphi_2(\nu_1) + 3i_2\varphi_1(\nu_2) + 3i_3 =$$

$$= 12i\varphi_2(\nu) + 6i\varphi_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu\right) + 12i;$$

$$r_{22} = \frac{12i_1}{16}\eta_2(\nu_1) + \frac{3i_2}{36}\eta_1(\nu_2) + \frac{3i_4}{16}\eta_1(\nu_4) =$$

$$= \frac{9i}{4}\eta_2(\nu) + \frac{i}{6}\eta_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu\right) + \frac{9i}{16}\eta_1(\nu);$$

$$r_{12} = r_{21} = -\frac{6i_1}{4}\varphi_4(\nu_1) + \frac{3i_2}{6}\varphi_1(\nu_2) =$$

$$= -\frac{9}{2}i\varphi_4(\nu) + i\varphi_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu\right);$$

и заполняем ими определитель системы:

$$\begin{vmatrix} 12\varphi_2(\nu) + 6\varphi_1(0,866\nu) + 12 & -4,5\varphi_4(\nu) + \varphi_1(0,866\nu) \\ -4,5\varphi_4(\nu) + \varphi_1(0,866\nu) & 2,25\eta_2(\nu) + 0,167\eta_1(0,866\nu) + 0,563\eta_1(\nu) \end{vmatrix} = 0.$$

раскрывая определитель получим уравнение:

$$(12\varphi_2(\nu) + 6\varphi_1(0,866\nu) + 12) \cdot (2,25\eta_2(\nu) + 0,167\eta_1(0,866\nu) + 0,563\eta_1(\nu)) - (\varphi_1(0,866\nu) - 4,5\varphi_4(\nu))^2 = 0.$$

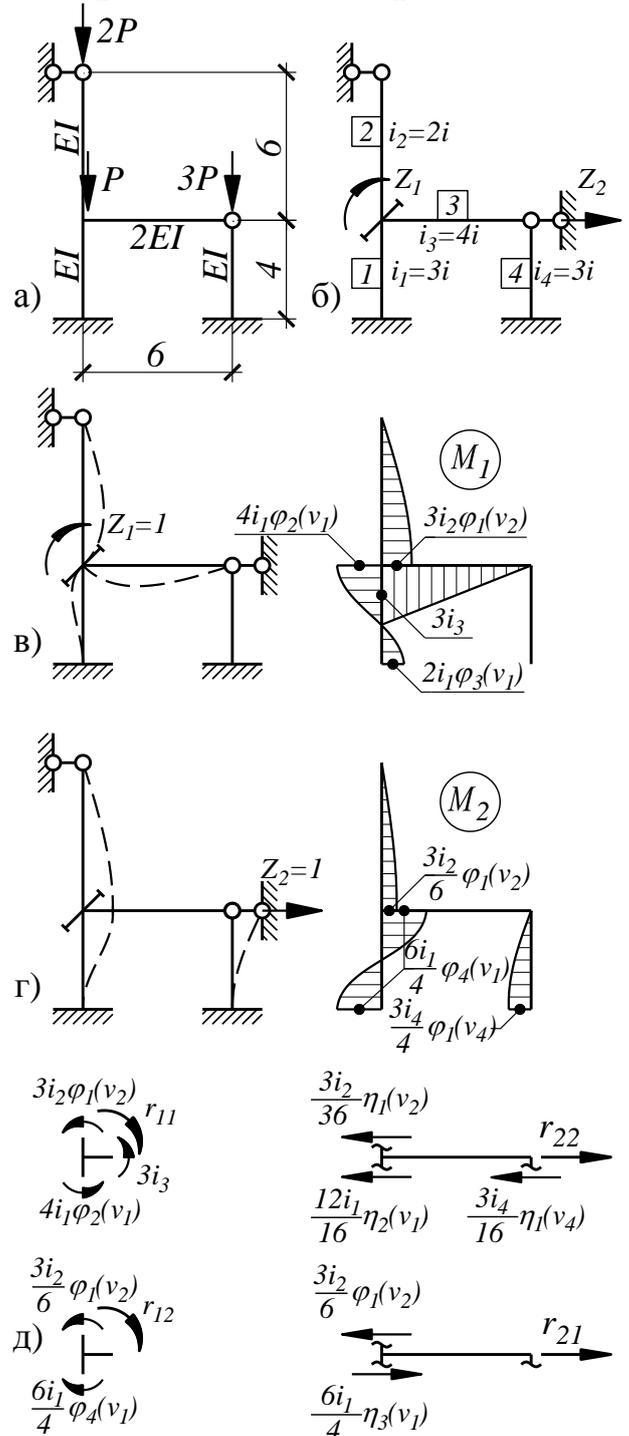
решаем уравнение путем последовательного приближения интерполяцией, используя для этого функции или табличные значения прил.2:

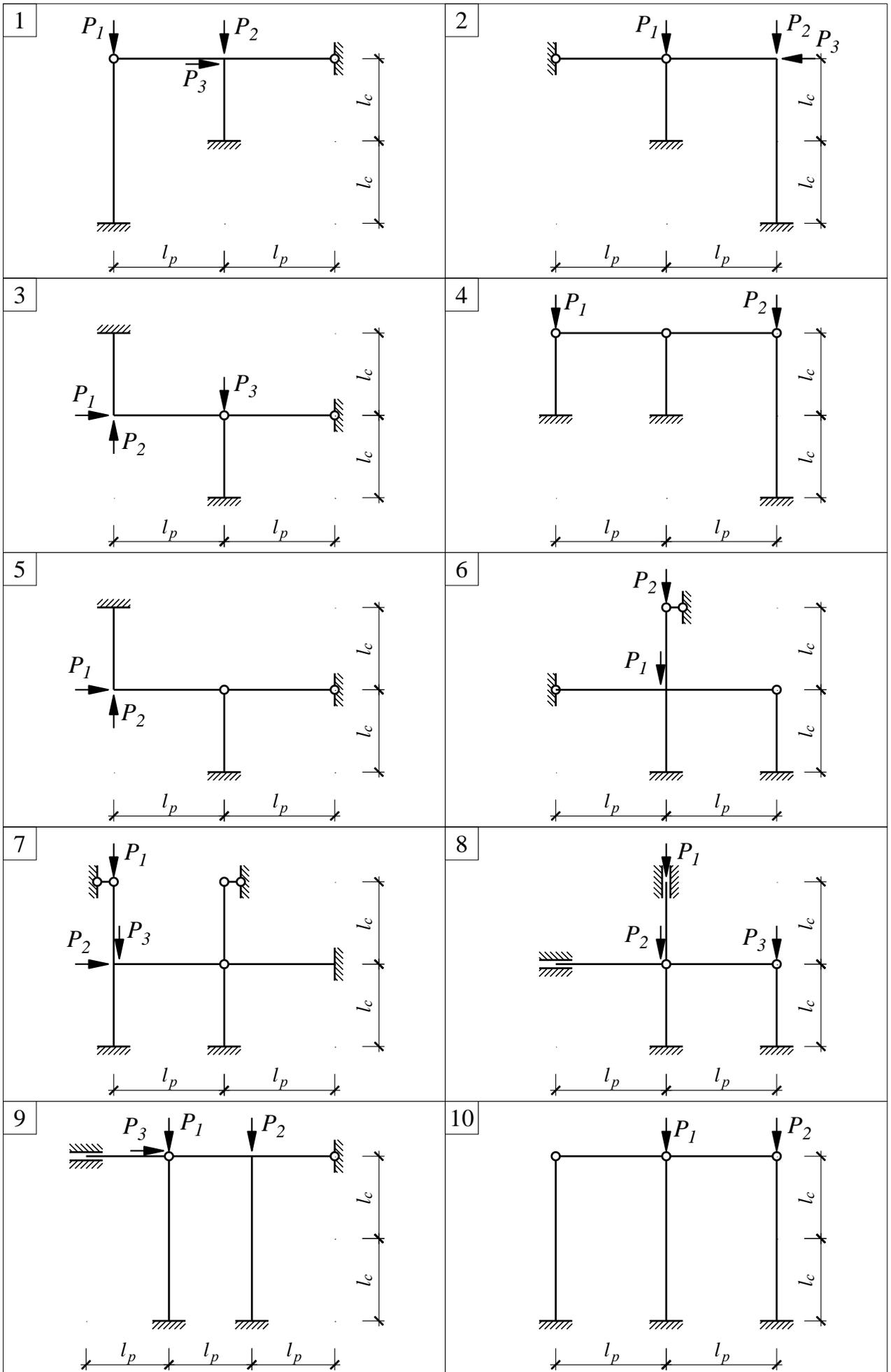
$$\nu=2: [12 \cdot 0,859 + 6 \cdot 0,775 + 12] \cdot [2,25 \cdot 0,598 + 0,167 \cdot (-0,246) + 0,563 \cdot (-0,637)] - [0,775 - 4,5 \cdot 0,931]^2 = 13,838;$$

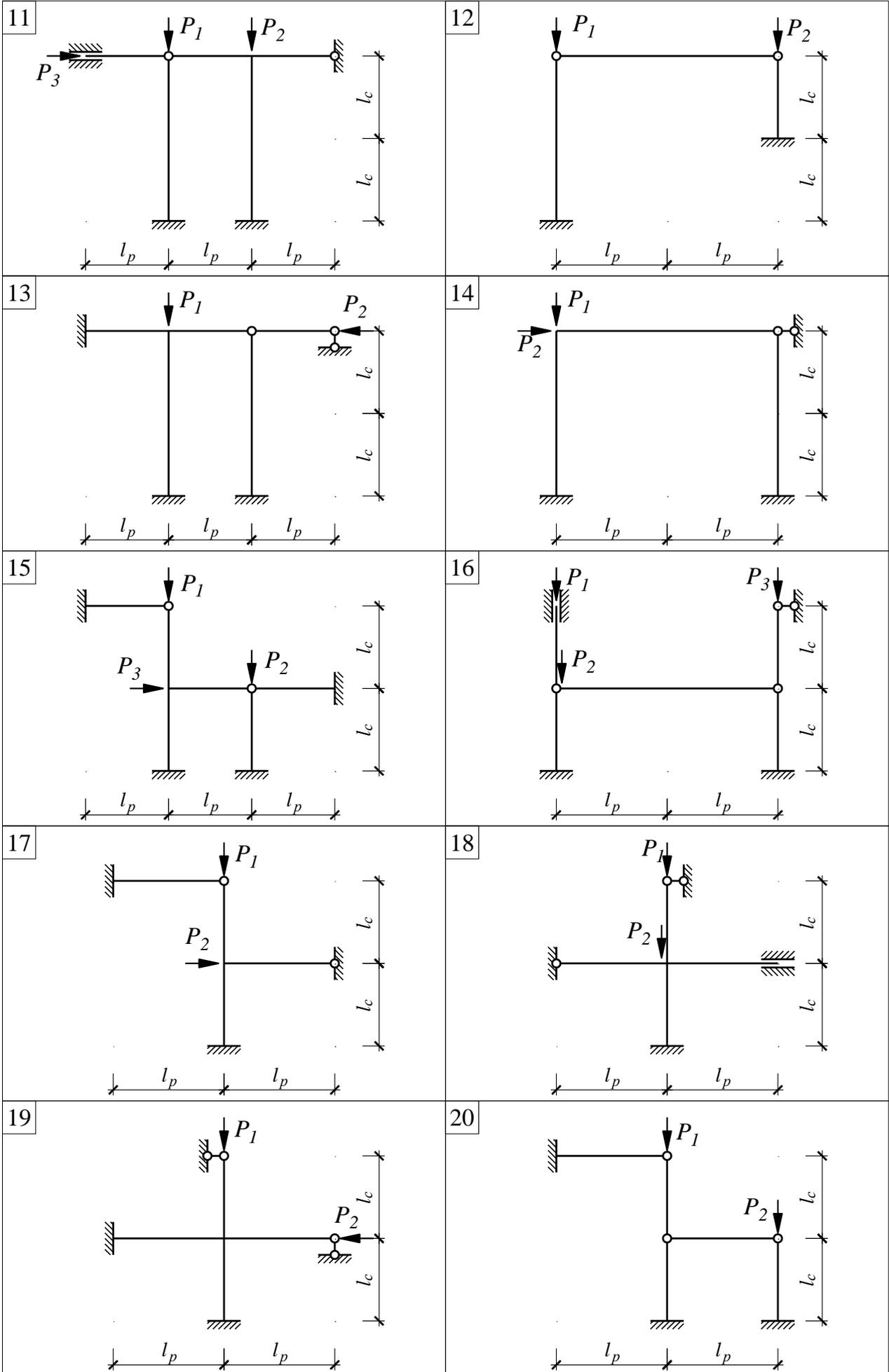
$$\nu=3: [12 \cdot 0,656 + 6 \cdot 0,423 + 12] \cdot [2,25 \cdot 0,089 + 0,167 \cdot (-1,83) + 0,563 \cdot (-2,864)] - [0,423 - 4,5 \cdot 0,839]^2 = -49,735;$$

$$\nu=2,2: [12 \cdot 0,827 + 6 \cdot 0,73 + 12] \cdot [2,25 \cdot 0,513 + 0,167 \cdot (-0,474) + 0,563 \cdot (-0,993)] - [0,73 - 4,5 \cdot 0,916]^2 = 2,068.$$

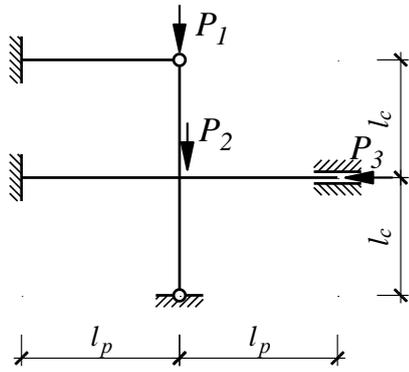
5. Далее самостоятельно находим критическую силу для каждого элемента.



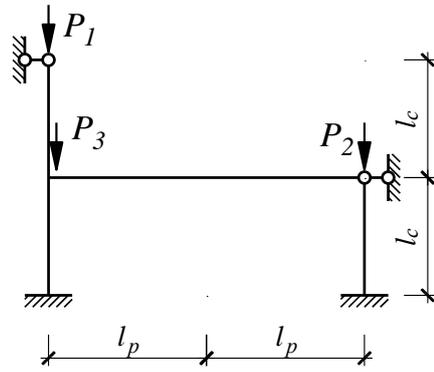




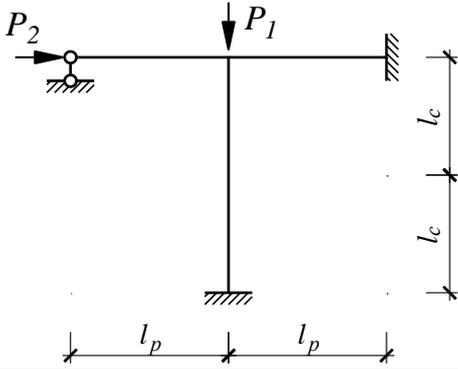
21



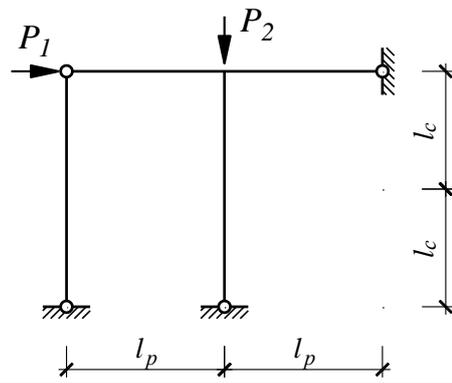
22



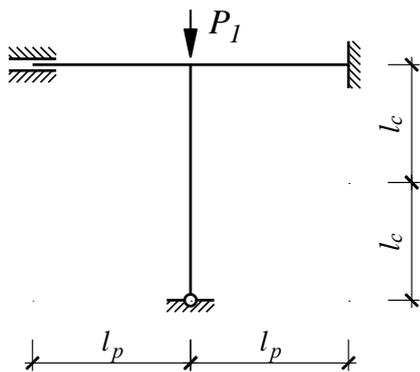
23



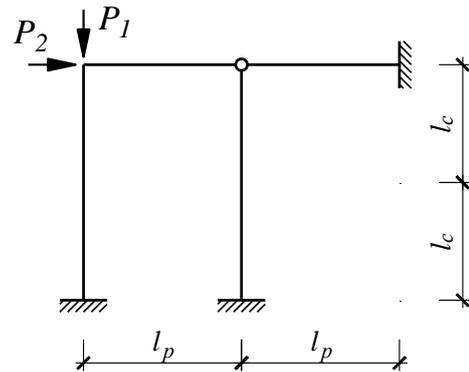
24



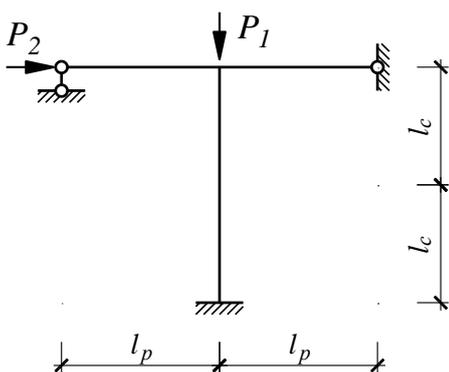
25



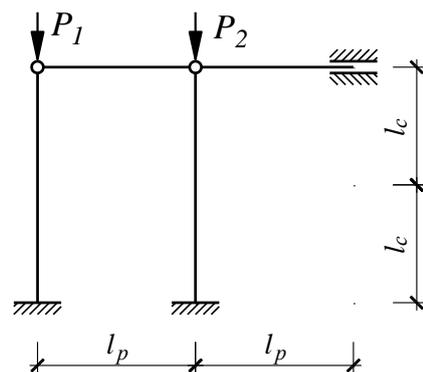
26



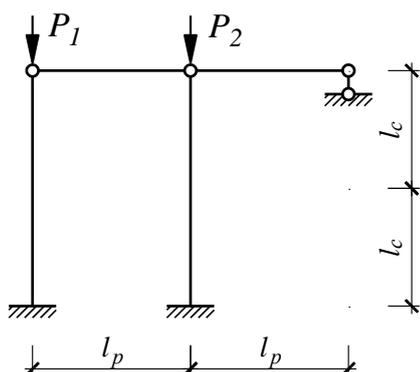
27



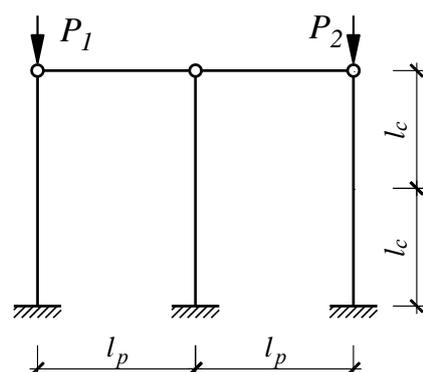
28



29



30



ТЕМА 18. РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНЫХ РАМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫМ СПОСОБОМ

Данный метод расчета используется при следующих допущениях:

- жесткость ригелей постоянна;
- погонные жесткости стоек незначительно отличаются друг от друга;
- рассматривается упругая стадия работы конструкций.

Порядок расчета:

1. Заданная многопролетная рама заменяется эквивалентной по устойчивости однопролетной рамой с приведенными жесткостями элементов и сжимающими силами. Приведенная жесткость стоек и приведенная нагрузка на них определяются как:

$$i_c^0 = \frac{\sum_{k=1}^m i_k}{2(m-1)}, \quad P_{эм}^0 = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{2(m-1)}$$

где m – число стоек рассматриваемого этажа заданной рамы, n – количество приложенных сил.

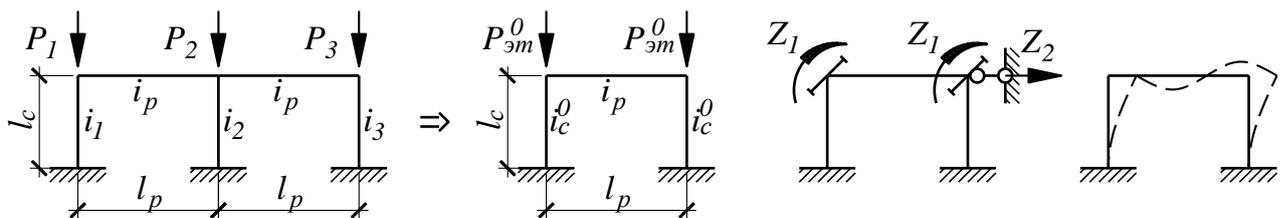


Рисунок 18.1. Схема образования эквивалентной рамы.

2. Записывают уравнение устойчивости для эквивалентной рамы. Число неизвестных для нее равно числу этажей. Для таких рам наиболее опасной является кососимметричная форма потери устойчивости.
3. Строят единичные эпюры изгибающих моментов от угловых неизвестных $Z_i = 1$ с использованием для ригелей таблиц прил.1, а для стоек – таблиц прил.2.
4. Определяют единичные коэффициенты r_{ik} обычным способом метода перемещений – путем вырезания узлов.
5. Решая уравнение устойчивости, находят приведенный критический параметр ν^0 и делают обратный переход от эквивалентной рамы к заданной через зависимости пункта 1 с учетом того, что

$$P_{кр}^0 = \frac{\nu^0 i_c^0}{l_c},$$

Уравнение устойчивости для одноэтажной рамы будет иметь вид:

$$r_{11} = 0, \text{ или } i_c^0 = \frac{v_c^0}{\operatorname{tg} v_c^0} + 6i_p^0.$$

Погрешность рассматриваемого метода составляет не более 10-15%.

После изучения данной темы студент должен:

- *знать*, порядок расчета многопролетных рам на устойчивость;
- *уметь* определять критическую нагрузку для многопролетной рамы;
- *владеть* расчетом многопролетных рам на устойчивость при проектировании;

и суметь *ответить* на следующие вопросы:

1. Что представляет собой эквивалентная рама?
2. При каких допущениях возможна замена заданной рамы эквивалентной?
3. Какие характеристики имеет эквивалентная рама?
4. Как определяется критический параметр в эквивалентной раме и как в заданной?

Задача 18.1. Определение критической нагрузки в статически неопределимых многопролетных рамах приближенным способом

Для схемы, приведенной на рис.18.1, определить значения критической силы. Исходные параметры принимать по табл.18.1, где L – количество десятков, P – количество единиц в номере варианта, n – порядковый номер стоек и нагрузки. Жесткость дана в условных единицах.

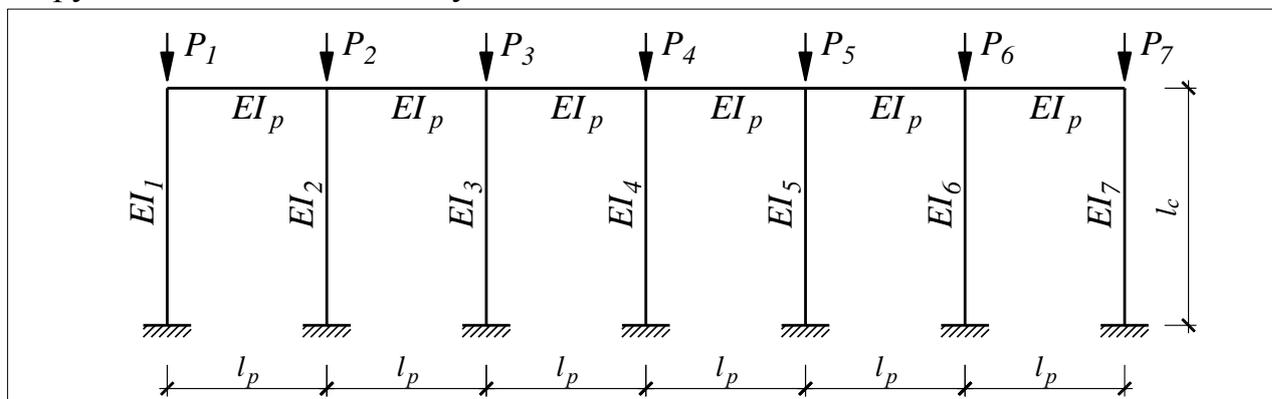


Рисунок 18.2. Схема к задаче 18.1.

Таблица 18.1. Исходные параметры к задаче 18.1

номер группы	l_p , м	l_c , м	P_n	EI_p	EI_n	Сложность задания	Переменные параметры	
							пролетов	
1	2	$L + 4$	$20 + P + n$	20	$10 + n$	3	пролетов	2
2	2	$L + 5$	$30 - P + n$	30	$20 - n$	4	пролетов	3
3	3	$L + 4$	$30 + P - n$	30	$20 + n$	6 с анализом	пролетов	4
4	3	$L + 5$	$40 - P - n$	40	$30 - n$			5
5	3	$L + 6$	$40 + P + n$	40	$30 + n$			6

ТЕМА 19. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Порядок расчета стержней переменной жесткости на устойчивость энергетическим методом:

1. Задаются формой потери устойчивости в виде $y = y(x)$;
2. Анализируют заданную форму потери устойчивости, для чего записывают граничные условия и смотрят, удовлетворяет ли им принятая форма потери устойчивости. Граничные условия:
 - для свободного края $M_0 = 0, Q_0 = 0$;
 - для шарнирного края $y_0 = 0, M_0 = 0$;
 - для жесткого края $y_0 = 0, y'_0 = 0$.
3. Вычисляют значение критической силы по формуле:

$$P_{кр} = \frac{\sum_0^l \int EI(y'')^2 dx}{\sum_0^l \int (y')^2 dx}.$$

Для стержня в упругой среде, например, сваи:

$$P_{кр} = \frac{\sum_0^l \int EI(y'')^2 dx + \sum_0^l \int \beta(x)y^2 dx}{\sum_0^l \int (y')^2 dx}.$$

Недостатком метода является трудность задания возможной формы потери устойчивости. Кроме того, вычислив приближенно критическую нагрузку, нельзя указать степень точности полученного значения.

После изучения данной темы студент должен:

- **знать**, порядок расчета стоек переменной жесткости;
- **уметь** определять критическую нагрузку, используя энергетический метод расчета;
- **владеть** расчетом элементов на устойчивость с различными граничными условиями, подбором формы потери устойчивости $y(x)$;
- суметь **ответить** на следующие вопросы:
 1. Как выбирается функция формы потери устойчивости?
 2. Как изменяются граничные условия, если изменить условия закрепления концов стержней?
 3. Как влияет на величину $P_{кр}$ наличие упругой среды?
 4. Как влияет на величину $P_{кр}$ изменение жесткости стержня по его длине?

Задача 19.1. Определение критической нагрузки центрально-сжатых стержней энергетическим методом

Определить значение $P_{кр}$ для сжатого стержня с учетом упругой среды $\beta(x) = const$. Исходные данные приведены в табл.14. Значение параметра F принимать по количеству десятков, L – по количеству единиц в номере варианта по списку группы.

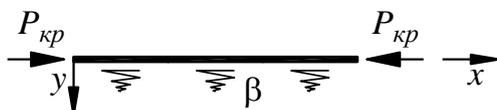


Таблица 19.1. Исходные данные

Параметр F	Исходные данные						
	β , кН/м ²	I_1	I_2	I_3	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м
0	$0.3 \cdot 10^5$	I	2I	I	$2 + L$	6	6
1	$0.5 \cdot 10^5$	2I	I	2I	6	$2 + L$	6
2 и более	$1.0 \cdot 10^5$	I	I	2I	6	6	$2 + L$

Таблица 19.2. Уровень сложности задачи 19.1

Сложность задачи, балл	Условие задачи
3	определить $P_{кр}$ без учета упругой среды $\beta(x) = 0$;
4	определить $P_{кр}$ с учетом упругой среды $\beta(x) = const$;
6	определить $P_{кр}$ без учета упругой среды $\beta(x) = 0$; определить $P_{кр}$ с учетом упругой среды $\beta(x) = const$; провести анализ полученных результатов.

Схемы закрепления (по номеру группы)	Формы потери устойчивости
<p>1)</p>	<p>1) $y = a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$;</p> <p>2) $y = a(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2)$;</p> <p>3) $y = ax^2$.</p>
<p>2)</p>	<p>1) $y = a \sin \frac{\pi x}{l}$;</p> <p>2) $y = a(l^3x - 2lx^3 + x^4)$;</p> <p>3) $y = ax(l - x)$.</p>
<p>3)</p>	<p>1) $y = 3l^2x^2 - 5lx^3 + 2x^4$;</p> <p>2) $y = ax^2(l - x)$.</p>
<p>4)</p>	<p>1) $y = a \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$;</p> <p>2) $y = a(x^4 - 2lx^3 + l^2x^2)$.</p>

ТЕМА 20. РАСЧЕТ АРОК НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Для арок значение критической равномерно-распределенной радиальной нагрузки можно определить по формуле:

$$q_{кр} = K_{1,2} \frac{EI}{l^3},$$

где l – пролет арки; $K_{1,2}$ – коэффициенты, зависящие от отношения f/l и характера закрепления опор, для арки кругового и параболического очертания, соответственно (табл.20.1).

Таблица 20.1. Расчетные коэффициенты

$\frac{f}{l}$	Бесшарнирная арка		Двухшарнирная арка		Трехшарнирная арка			
					симметричная форма потери устойчивости		кососимметричная форма потери устойчивости	
	K_1	K_2	K_1	K_2	K_1	K_2	K_1	K_2
0.1	58.9	60.7	28.4	28.5	22.2	22.5	28.4	28.5
0.2	90.4	101.0	39.0	45.4	33.5	39.6	39.3	45.4
0.3	93.4	115.0	40.9	46.5	34.9	47.3	40.9	46.5
0.4	80.7	111.0	32.8	43.9	30.2	49.2	32.8	43.9
0.5	64.0	97.4	24.0	38.4	24.0	–	24.0	38.4
0.6		83.8		30.5		38.0		30.5
0.8		59.1		20.0		28.8		20.0
1.0		43.7		14.1		22.1		14.1
схема								

Задача 20.1. Определение критической нагрузки для арок

Определить критическое значение равномерно-распределенной радиальной нагрузки, действующей на арки параболического и круглого очертаний. Исходные параметры принимать по табл.20.2, где L – количество десятков, F – количество единиц в номере варианта по списку группы. Промежуточные значения коэффициентов $K_{1,2}$ вычислять интерполяцией.

Таблица 20.2. Исходные параметры к задаче 20.1

номер группы	l , м	f , м	Очертание	Сложность задания	схема закрепления
1	$30 + 3 \cdot L$	$12 + F$	параболическое	3	бесшарнирная
2	$30 + 6 \cdot L$	$6 + F$	круговое	4	двухшарнирная
3	$24 + 3 \cdot L$	$6 + F$	параболическое	6 с анализом	трехшарнирная, симметричная и кососимметричная формы
4	$24 + 6 \cdot L$	$3 + F$	круговое		
5	$18 + 6 \cdot L$	$3 + F$	параболическое		

Контрольные вопросы, на которые должен суметь ответить студент после проработки данной темы:

1. От каких параметров зависит величина критической нагрузки в арках?
2. Как влияет очертание оси арки на величину критической нагрузки?
3. При каких условиях закреплений значение критической нагрузки повышается?

ГЛАВА 5. ДИНАМИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Нагрузки, у которых достаточно быстро меняется величина, направление и точка приложения, называются динамическими. Наиболее часто встречаются вибрационная, сейсмическая, ветровая, ударная, подвижная нагрузки и т.д.

Сложность динамического расчета зависит от динамической степени свободы – числа независимых геометрических параметров, полностью определяющих положение масс системы в процессе колебаний. Все элементы сооружений имеют распределенную массу и конечную жесткость, поэтому все реальные сооружения являются системами с бесконечным числом динамической степени свободы.

Практически весьма удобно и поэтому широко применяется в динамических расчетах сведение реальных систем к системам с несколькими (и даже одной) степенями свободы. Это возможно при условии замены распределенной массы сосредоточенными, по закону рычага или равнодействующей, массами. Кроме того, можно пренебречь в расчетах массой элементов сооружений по сравнению с массой механизмов, установленных на сооружении и вызывающих колебания системы. Решение динамических задач в основном заключаются:

- в построении форм собственных колебаний системы с получением частоты основного тона;
- в рассмотрении вынужденных колебаний с построением эпюр внутренних усилий и перемещений.

ТЕМА 21. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Напомним вековое уравнение, с помощью которого определяется спектр частот и частота основного тона свободных колебаний:

$$D = \begin{vmatrix} m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2} & m_2\delta_{12} & \dots & m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & m_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega^2} & \dots & m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots & m_n\delta_{nn} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0$$

где m_i – сосредоточенные массы, приложенные к i -ой точке; δ_{ik} – единичное перемещение i -ой точки от единичной силы инерции ($F_k = 1$), действующей по направлению движения массы в k -ой точке; ω – круговая частота собственных колебаний.

Частота собственных колебаний систем с одной степенью свободы определяется формулой:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}},$$

где δ_{11} – перемещение точки приложения массы m при действии единичной силы инерции $F_1 = 1$, приложенной к этой же точке в направлении возможного колебания.

Перемещение δ_{11} определяют по формуле Мора-Верещагина, предварительно построив для этого эпюру M_1 в заданной системе:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} dx$$

В случае, если система является статически неопределимой, необходимо выполнить ее расчет более рациональным методом сил или перемещений, а полученную эпюру от единичного воздействия M_p назвать M_1 .

Период колебаний системы определяется как:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

При расчете рам обычно пренебрегают продольными деформациями стержней и расчет ведут только с учетом изгибных деформаций.

Запишем порядок расчета систем, имеющих две динамические степени свободы:

1. Определяем динамическую степень свободы заданной системы, в данном случае она равна двум $n = 2$.
2. В заданной системе поочередно прикладываем к местам расположения масс единичные силы инерции и строим эпюры изгибающих моментов (M_1 от $F_1 = 1$, M_2 от $F_2 = 1$). При построении эпюр M_1 и M_2 необходимо раскрыть статическую неопределимость рам, используя рациональный метод расчета (метод сил или метод перемещений и т.д.).
3. Определяем перемещения δ_{ik} от единичных сил инерции по формуле Мора-Верещагина:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} dx; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx; \quad \delta_{22} = \sum \int \frac{M_2^2}{EI} dx$$

при перемножении эпюр можно одну из них брать в основной системе метода сил:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k^0}{EI} dx,$$

где M_k^0 – эпюра изгибающих моментов, построенная от силы $F_k = 1$ в основной системе метода сил.

4. Подставляем найденные значения перемещений δ_{ik} в вековое уравнение, которое, при динамической степени свободы $n = 2$, примет вид:

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega^2} & m_2 \delta_{12} \\ m_1 \delta_{21} & m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0,$$

раскрыв определитель, получим:

$$\frac{1}{\omega^4} - \frac{1}{\omega^2}(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) + m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) = 0.$$

Значения частот из этого уравнения будут определяться как:

$$\omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) \pm \sqrt{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22})^2 - 4m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}}.$$

Частотой основного тона колебаний (ω_{min}) будет меньшее значение из двух найденных.

Построение главных форм колебаний.

Главным формами колебаний (или нормальными) называют такие формы, когда все массы системы совершают движение с какой-либо одной частотой. Важным свойством нормальных форм колебаний является свойство взаимной ортогональности.

Рассмотрим порядок построения главных форм колебаний для систем с двумя динамическими степенями свободы:

1. Определяем значения собственных частот ω_1 и ω_2 вышеописанным способом.
2. Записываем уравнение движений для первой формы колебаний, подставив значение частоты $\omega = \omega_1$:

$$\left(m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega_1^2}\right)A_1^{(1)} + m_2\delta_{12}A_2^{(1)} = 0; \quad m_1\delta_{21}A_1^{(1)} + \left(m_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega_1^2}\right)A_2^{(1)} = 0,$$

где $A_i^{(k)}$ амплитуда точки приложения i -ой массы в k -ой форме колебаний.

положим в нем $A_1^{(1)}$ или $A_2^{(1)}$ равными единице и найдем соответствующие значения $A_2^{(1)}$ или $A_1^{(1)}$.

3. Записываем уравнение движений для второй формы колебаний, подставив значение частоты $\omega = \omega_2$:

$$\left(m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)A_1^{(2)} + m_2\delta_{12}A_2^{(2)} = 0; \quad m_1\delta_{21}A_1^{(2)} + \left(m_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)A_2^{(2)} = 0.$$

и также, положив в нем $A_2^{(2)}$ или $A_1^{(2)}$ равными единице, найдем соответствующие значения $A_1^{(2)}$ или $A_2^{(2)}$.

4. По полученным значениям амплитуд $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(1)}$ строим в определенном масштабе первую форму колебаний, учитывая при этом условия закрепления элементов рамы.

5. По полученным значениям амплитуд $A_1^{(2)}$ и $A_2^{(2)}$ строим в том же масштабе вторую форму колебаний.
6. Проверкой правильности построенных форм колебаний является выполнение условия их взаимной ортогональности:

$$m_1 A_1^{(1)} A_1^{(2)} + m_2 A_2^{(1)} A_2^{(2)} = 0, \text{ или } \sum m_i A_i^{(1)} A_i^{(2)} = 0.$$

Единственная форма колебаний для систем с одной динамической степенью свободы определяется из условия единичного амплитудного перемещения точки приложения массы в направлении возможного колебания: $A_1^{(1)} = 1$.

После изучения данной темы студент должен обладать следующими компетенциями:

- **знать** порядок определения частоты собственных колебаний системы;
- **уметь** определять собственную частоту колебаний и строить основные формы колебаний;
- **владеть** методикой для дальнейшего проектирования;
- суметь **ответить** на следующие вопросы:
 1. Что называется частотой основного тона колебаний?
 2. Как определить частоту в системе с n – степенями свободы?
 3. Какие факторы влияют на частоту свободных колебаний?
 4. Как определить степень свободы в динамике сооружений?
 5. Запишите условие взаимной ортогональности главных форм колебаний.

Пример 21.1. Определение собственной частоты колебаний рамы и построение главных форм колебаний

Условие задачи: Для приведенной рамы (а) определить частоту собственных колебаний и построить главные формы колебаний. Соотношение $m_1/m_2 = 2$. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

Решение.

1. Выполняем кинематический анализ и убеждаемся, что система статически неопределима и геометрически неизменяема: $\Pi = 5$, $\mathcal{L} = 1$. Степень свободы $n = 2$ (б).
2. Прикладываем единичную силу инерции $F_1 = 1$ в направлении возможного колебания (в) и строим эпюру M_1 рациональным для данного примера методом сил (г...и):

$$\delta_{11}^0 = \sum \int \frac{(M_1^0)^2}{EI} dx = \frac{40}{3EI};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_1^0 M_1^F}{EI} dx = \frac{32}{3EI};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}^0} = -\frac{32}{3EI} \div \frac{40}{3EI} = -0.8;$$

$$M_1 = M_1^0 X_1 + M_1^F.$$

Выполняем статическую и кинематическую проверки.

3. Прикладываем единичную силу инерции $F_2 = 1$ (к) и аналогично строим эпюру моментов M_2 (л).

4. Определяем перемещения от единичных сил инерции:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \sum \int \frac{M_1 M_1^F}{EI} dx = \frac{22.4}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \sum \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \sum \int \frac{M_1^F M_2}{EI} dx = -\frac{9.6}{3EI}.$$

Перемножение выполнить двумя способами для проверки. Так как система симметричная, то $\delta_{22} = \delta_{11}$; $\delta_{21} = \delta_{12}$.

5. Поставляя полученные значения в вековое уравнение при $m_1 = 2m$ и $m_2 = m$, определим значения частот собственных колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3EI}{51.2m}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3EI}{16m}}.$$

6. Определим значения амплитудных колебаний из уравнений движения:

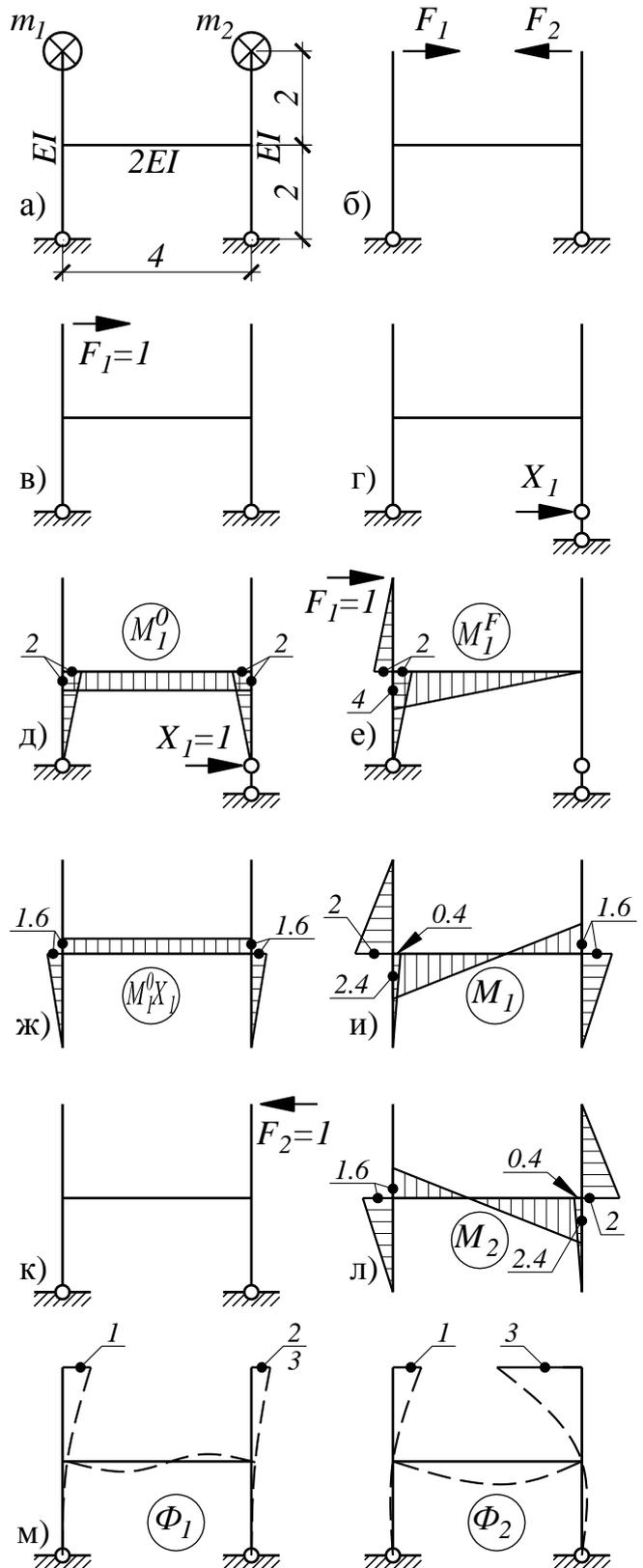
– при $A_1^{(1)} = 1$, $A_2^{(1)} = -2/3$;

– при $A_1^{(2)} = 1$, $A_2^{(2)} = 3$;

7. Выполним проверку:

$$2m \cdot 1 \cdot 1 + m \cdot (-2/3) \cdot 3 = 0.$$

и построим главные формы колебаний (м).



Задача 21.1. Определение собственной частоты колебаний рамы с одной степенью свободы

Для рам, приведенных на стр.168...170, найти круговую частоту собственных колебаний и построить форму колебаний. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.21.1.

Таблица 21.1. Исходные параметры к задаче 21.1

номер группы	$l_p, \text{ м}$	$l_c, \text{ м}$	$\frac{EI_p}{EI_c}$	Сложность задания		Переменные параметры	
				Сложность задания	Переменные параметры	L	k
1	2	$L + 2$	k	3	$L = 0$	$k = 1$	
2	2	$L + 3$	k	4	$L = 1$	$k = 2$	
3	3	$L + 4$	k	6 с анализом	$L = 2$	$k = 0.5$	
4	3	$L + 2$	k			$k = 1$	
5	3	$L + 3$	k			$k = 2$	

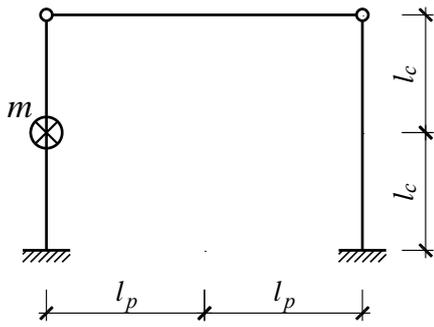
Задача 21.2. Определение собственной частоты колебаний рамы с двумя динамическими степенями свободы

Для рам, приведенных на стр.171...173, определить частоты собственных колебаний и построить главные формы колебаний. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.21.2.

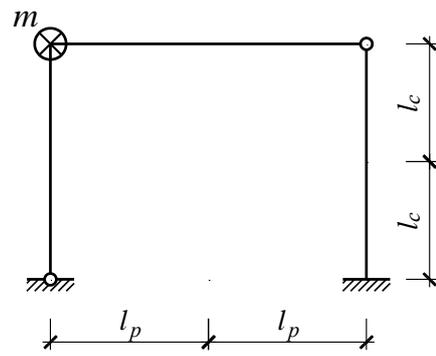
Таблица 21.2. Исходные параметры к задаче 21.2

номер группы	$l_p, \text{ м}$	$l_c, \text{ м}$	$\frac{EI_p}{EI_c}$	$\frac{m_1}{m_2}$	Сложность задания		Переменные параметры	
					Сложность задания	Переменные параметры	L	k
1	2	$L + 2$	1	k	3	$L = 0$	$k = 1$	
2	2	$L + 3$	1	k	4	$L = 1$	$k = 2$	
3	3	$L + 4$	1	k	6 с анализом	$L = 2$	$k = 0.5$	
4	3	$L + 2$	1	$k = 1$				
5	3	$L + 3$	1	$k = 2$				

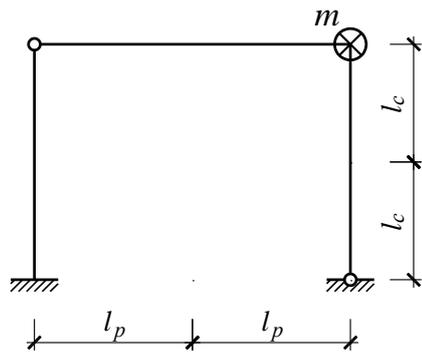
1



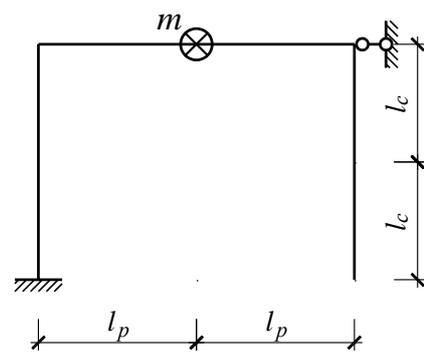
2



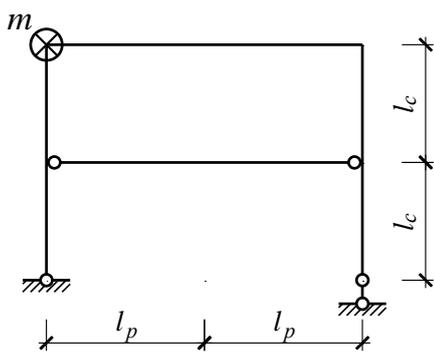
3



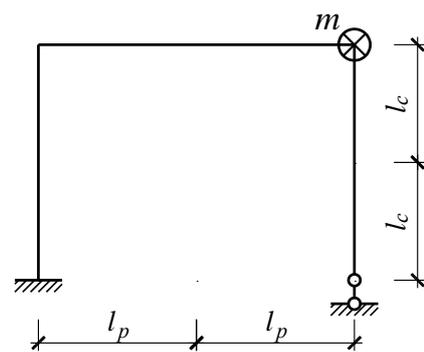
4



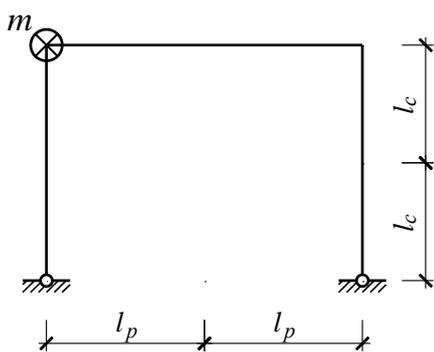
5



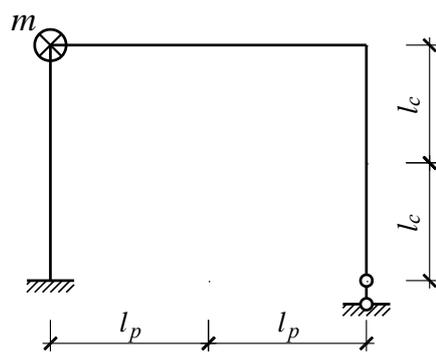
6



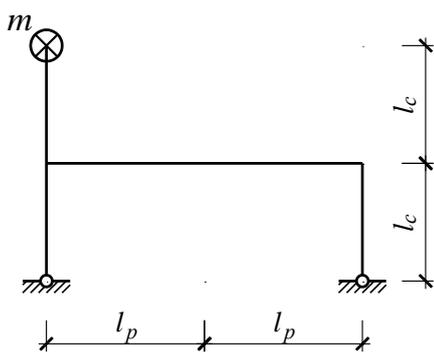
7



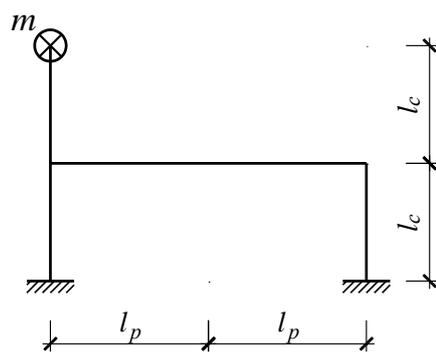
8



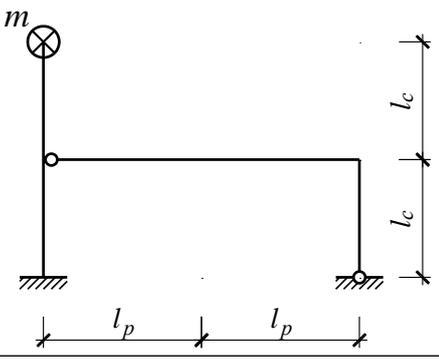
9



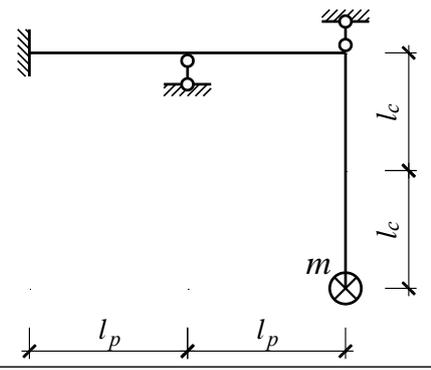
10



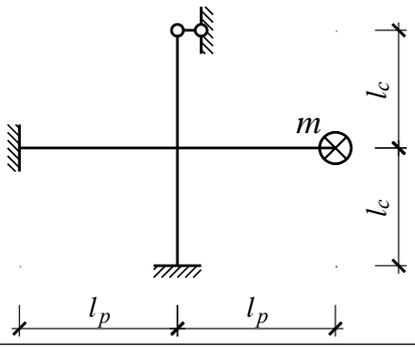
11



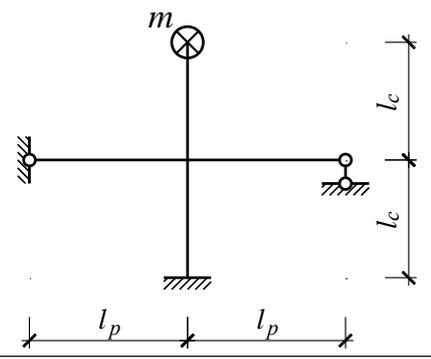
12



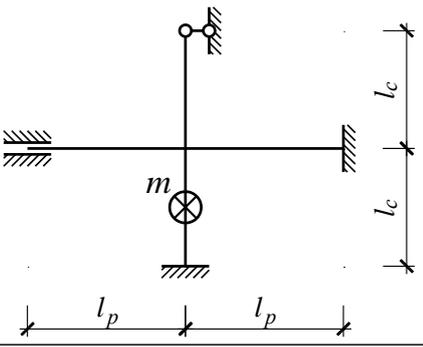
13



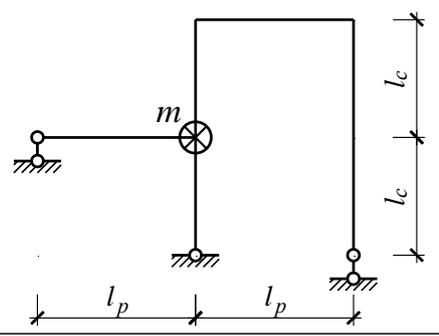
14



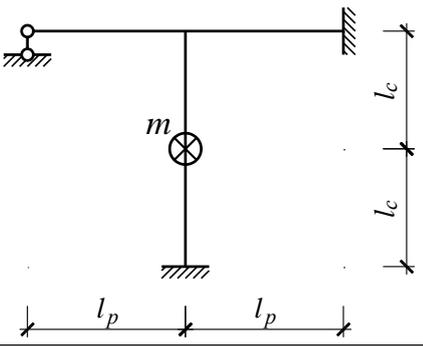
15



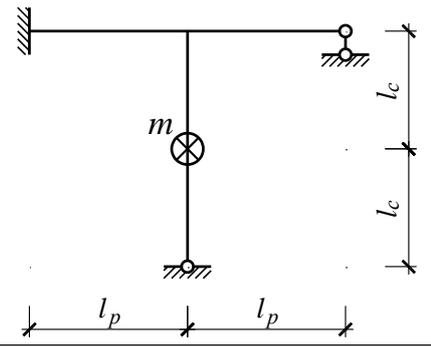
16



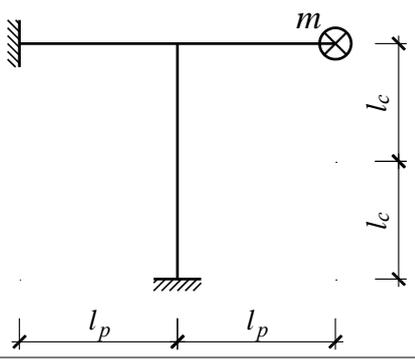
17



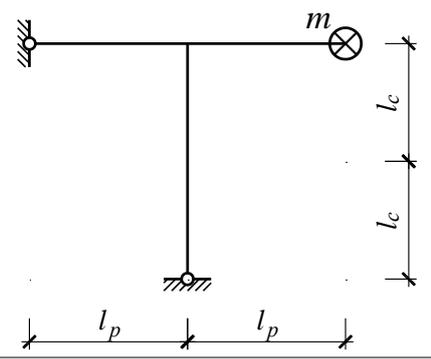
18



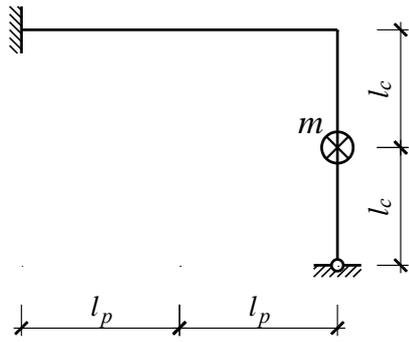
19



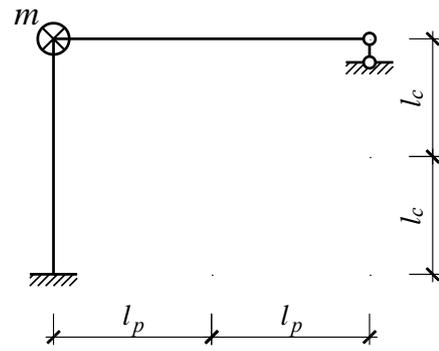
20



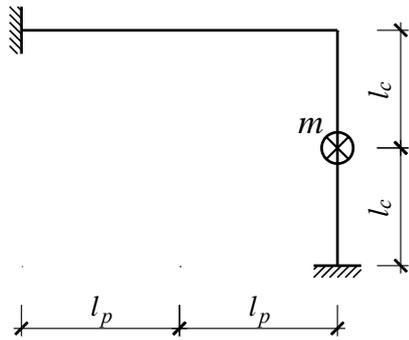
21



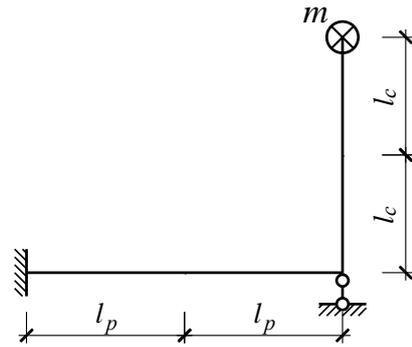
22



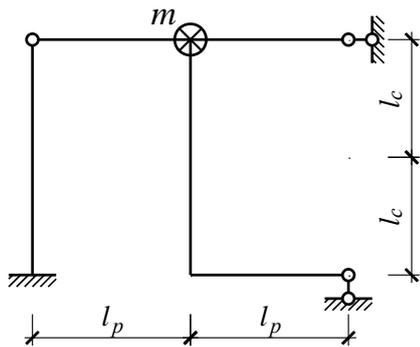
23



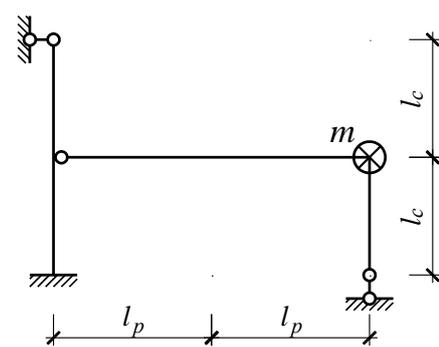
24



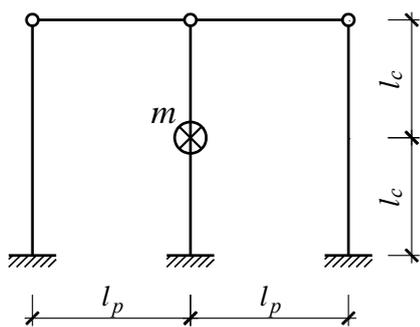
25



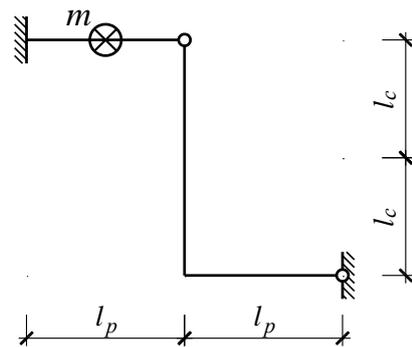
26



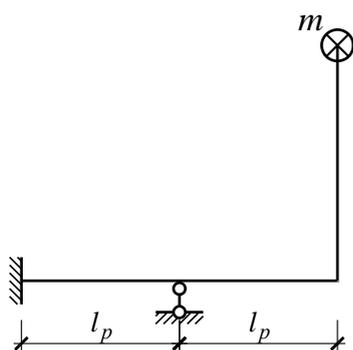
27



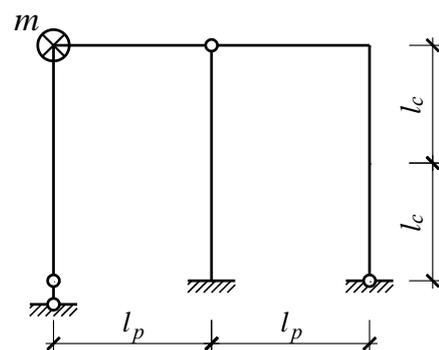
28

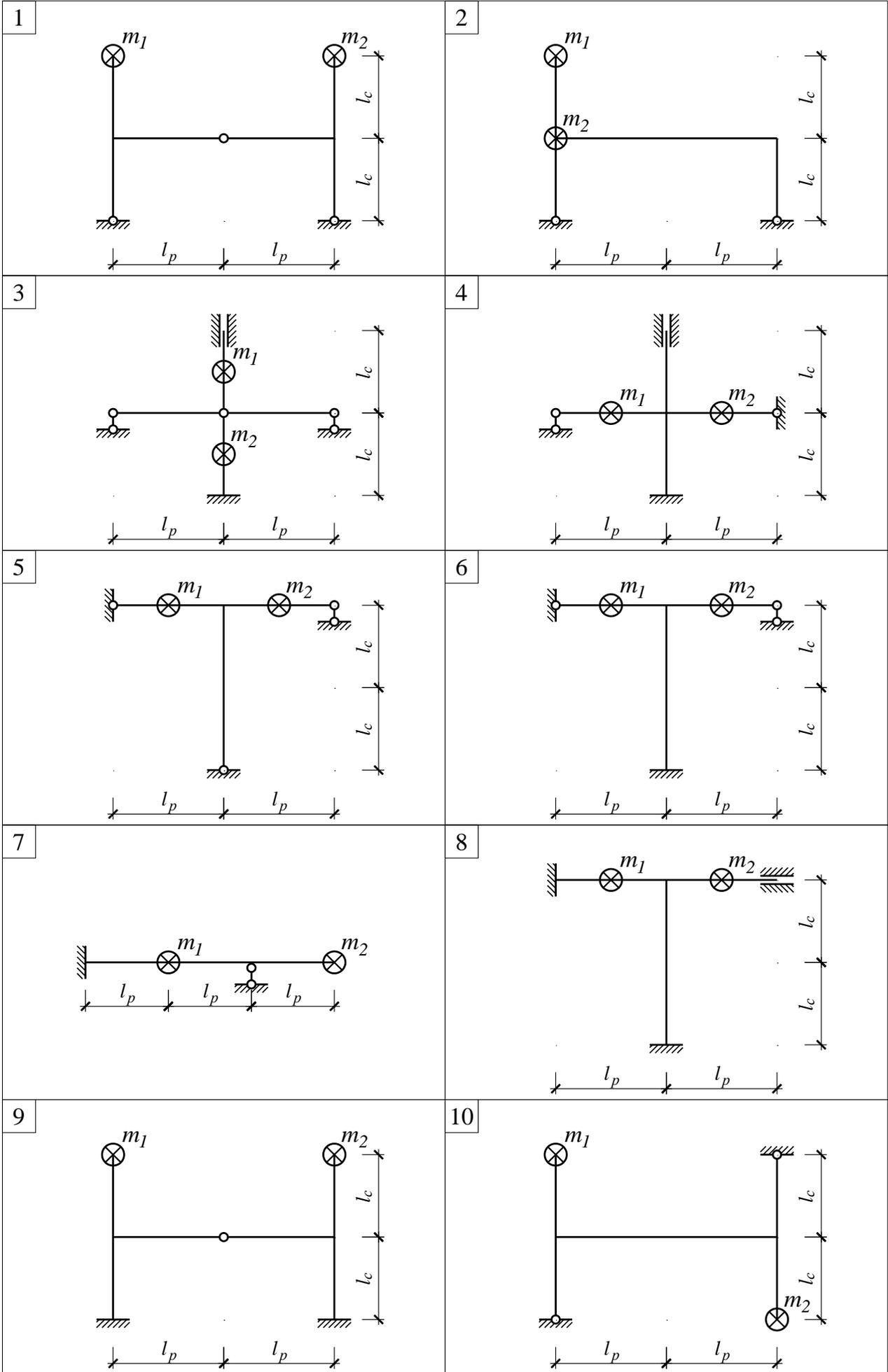


29

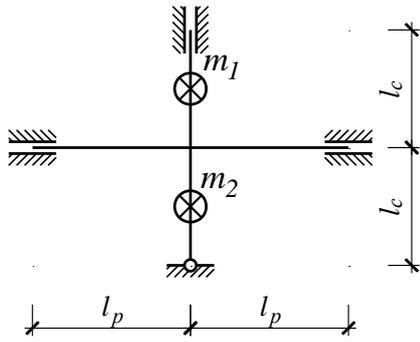


30

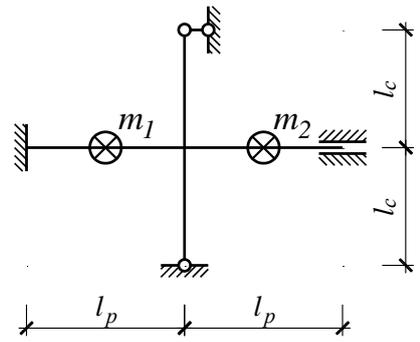




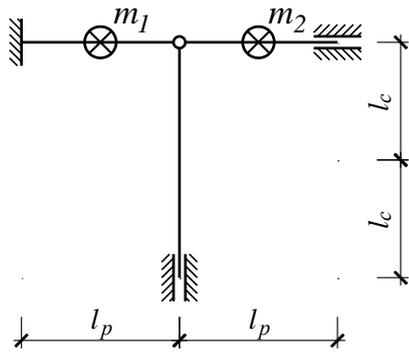
11



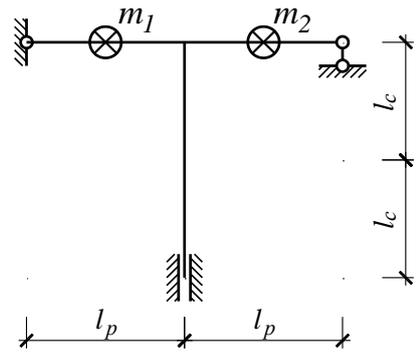
12



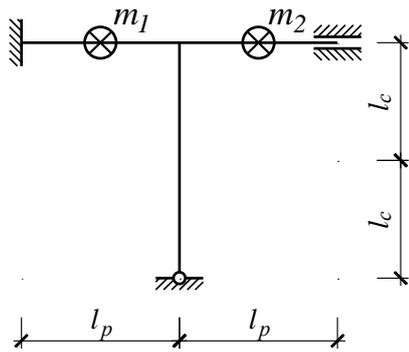
13



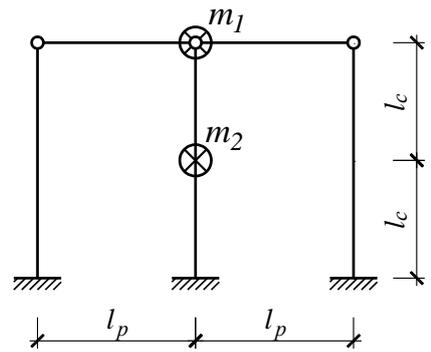
14



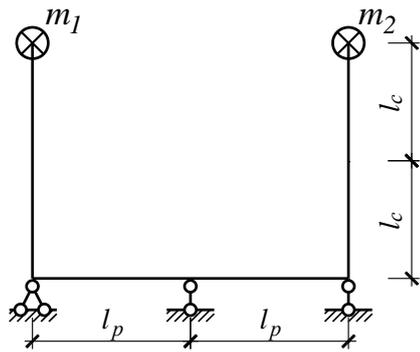
15



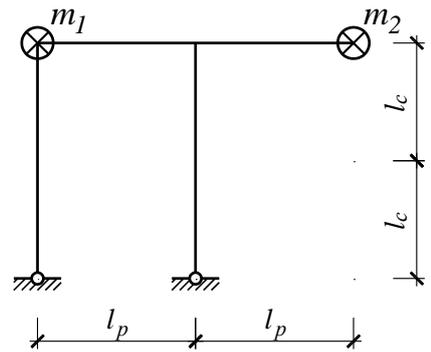
16



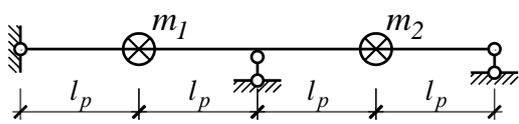
17



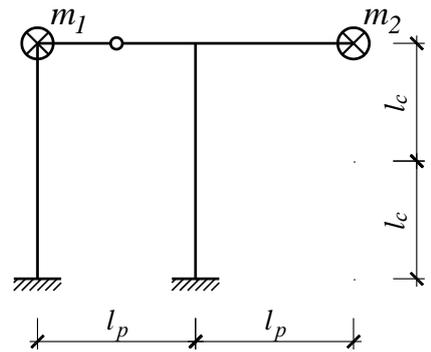
18



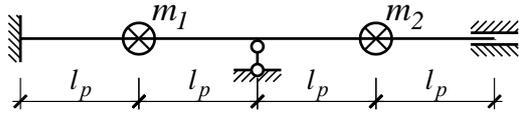
19



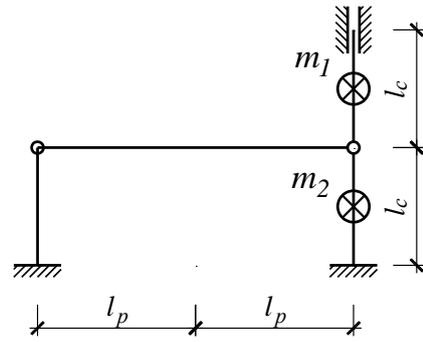
20



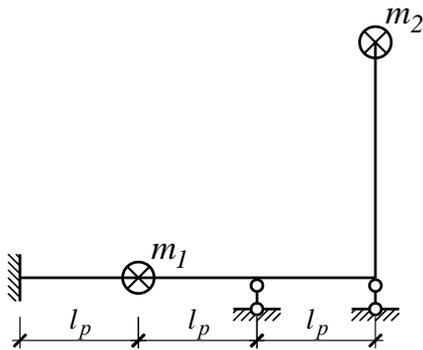
21



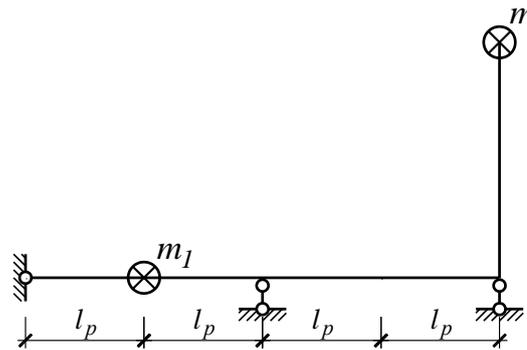
22



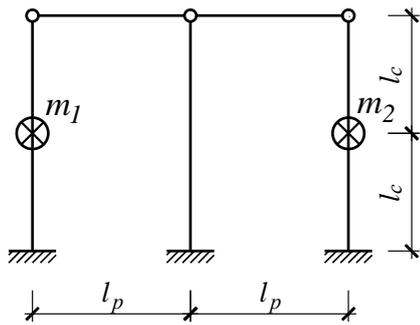
23



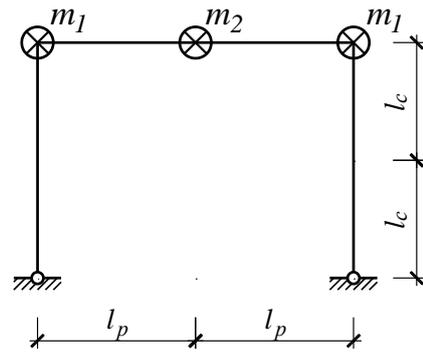
24



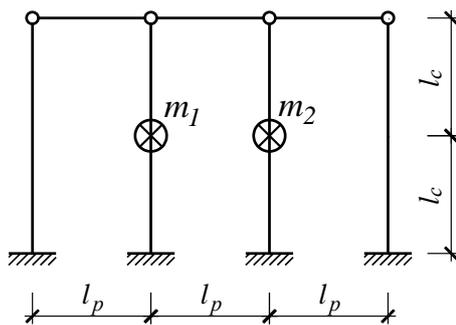
25



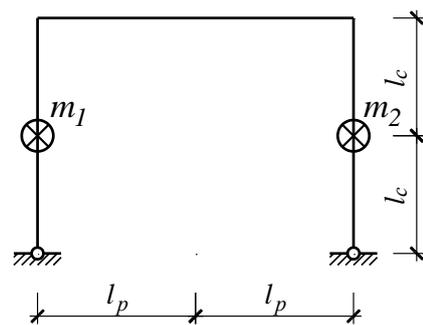
26



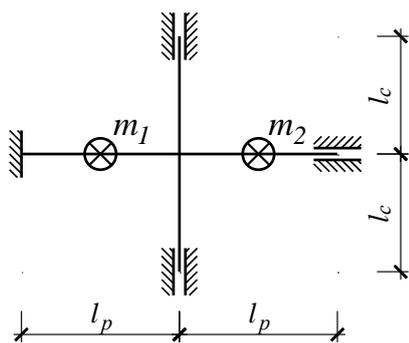
27



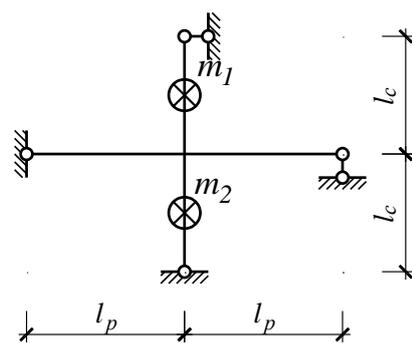
28



29



30



ТЕМА 22. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Как мы уже отмечали, все реальные конструкции обладают бесконечным числом степени свободы. Расчет таких конструкций ведется с использованием основных принципов метода перемещений, в котором статические эпюры (прил.1) заменяются на инерционные эпюры моментов (прил.3).

Запишем порядок расчета:

1. Определяют число неизвестных $\Pi = \Pi_y + \Pi_l$ и строят основную систему метода перемещений для заданной рамы.
2. Вычисляют соотношение параметров частот для элементов:

$$u_k = l_k \sqrt[4]{\frac{M_k}{EI_k}}.$$

Принимая за основной параметр u большее значение u_k , выражают параметры частоты через u .

3. Строят единичные эпюры моментов от приложенных неизвестных ($Z_i = 1$) в основной системе, используя при этом специальные эпюры из таблицы прил.3.
4. Определяют единичные коэффициенты r_{ik} по условиям равновесия узлов или сечений.
5. Записывают определитель системы канонических уравнений, и, приравняв его к нулю, получают уравнение частот реальной рамы:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Раскрыв определитель, решают уравнение частот путем нескольких попыток методом итерации. Результат подбора параметра u лучше всего представлять графиком, отмечая на нем u_{min} .
7. Определяют значение собственной частоты системы в зависимости от того, какой k -ый стержень первоначально приняли за $u = u_{min}$:

$$\omega = \frac{u_k^2}{l_k^2} \sqrt{EI_k M_k}.$$

Пример 22.1. Определение собственной частоты колебаний рамы с бесконечным числом степени свободы

Условие задачи: Для приведенной рамы (а) определить частоту собственных колебаний. Соотношение $M_p/M_c = 2$. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

Решение.

1. Выполняем кинематический анализ и убеждаемся, что система статически неопределима и геометрически неизменяема: $\Pi = 1$.

2. Вычисляем отношение параметров частот:

$$u_1 = 4\sqrt{\frac{2M}{2EI}} = u; \quad u_2 = u_3 = 3\sqrt{\frac{M}{EI}} = \frac{3}{4}u;$$

2. Строим основную систему методом перемещений (б), прикладываем единичное перемещение (в) и строим инерционную эпюру моментов (г).

3. Вырезаем узел и определяем значение реакции:

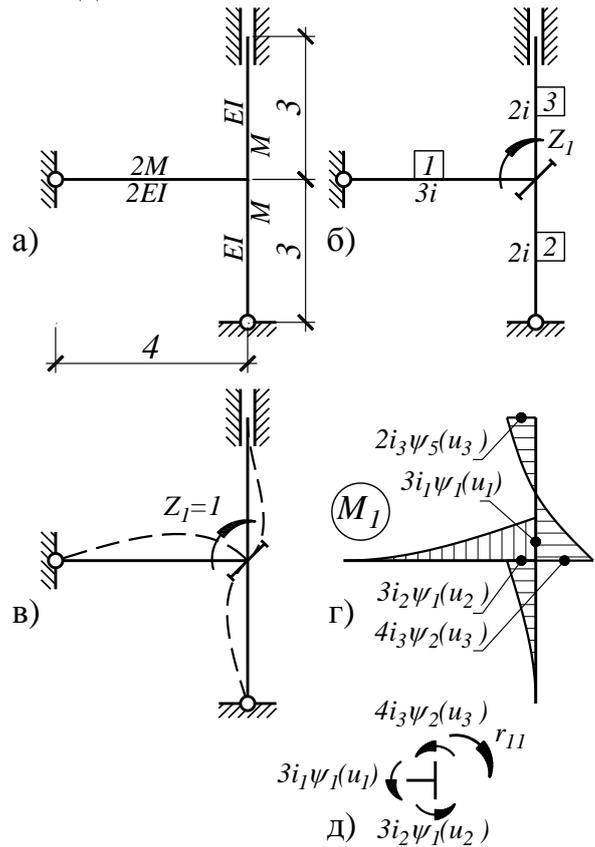
$$r_{11} = 3i_1\psi_1(u_1) + 3i_2\psi_1(u_2) + 4i_3\psi_2(u_3).$$

4. Решаем уравнение $r_{11} = 0$ для системы с одним неизвестным путем последовательного перебора значений u по таблице прил.3:

$$9\psi_1(u) + 6\psi_1(3/4u) + 8\psi_2(3/4u) = 0$$

находим $u = 3.5$, и значение собственной частоты колебаний системы:

$$\omega = \frac{u^2}{l_1^2} \sqrt{\frac{EI_1}{M_1}} = \frac{3.5^2}{4^2} \sqrt{\frac{2EI}{2M}} = 0.766 \sqrt{\frac{EI}{M}}.$$



Задача 22.1. Определение собственной частоты колебаний рамы с бесконечным числом степеней свободы

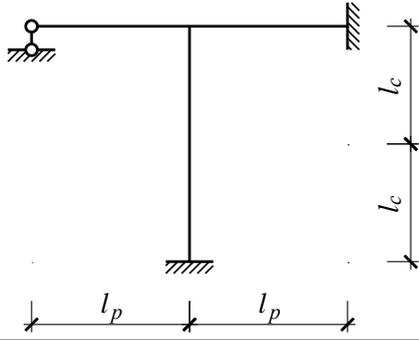
Для рам, приведенных на стр.176...178, найти круговую частоту собственных колебаний методом перемещений. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.22.1. Данная задача имеет число неизвестных $\Pi = 1$, следовательно, уравнение частот будет простым: $r_{11} = 0$.

Таблица 22.1. Исходные параметры к задаче 22.1

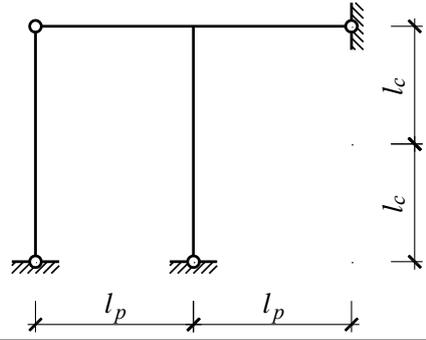
номер группы	$l_p, \text{ м}$	$l_c, \text{ м}$	$\frac{EI_p}{EI_c}$	$\frac{M_p}{M_c}$
1	$L + 2$	2	1	k
2	$L + 3$	2	2	k
3	$L + 4$	3	1	k
4	$L + 2$	3	2	k
5	$L + 3$	3	1	k

Сложность задания	Переменные параметры	
3	$L = 0$	$k = 1$
4	$L = 1$	$k = 2$
6 с анализом	$L = 2$	$k = 1$
		$k = 2$
		$k = 3$

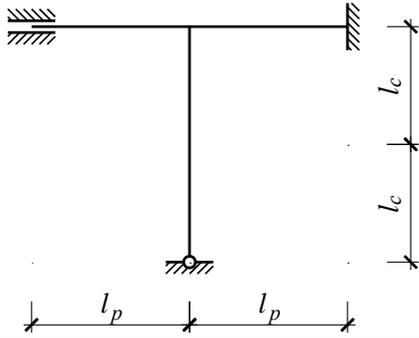
1



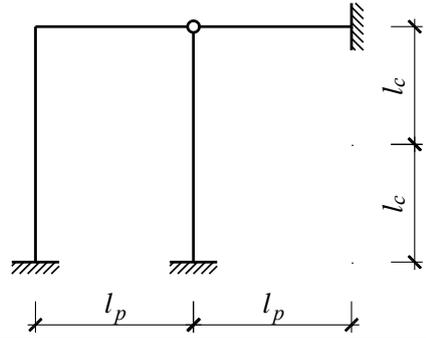
2



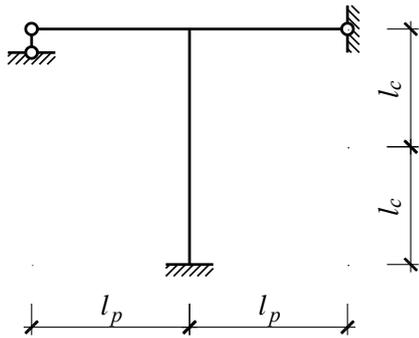
3



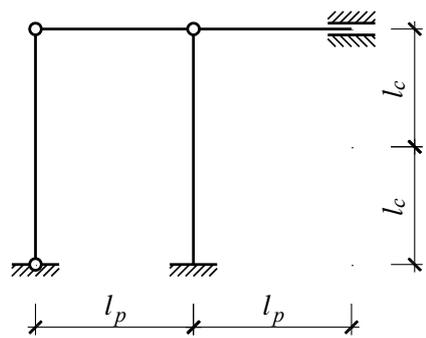
4



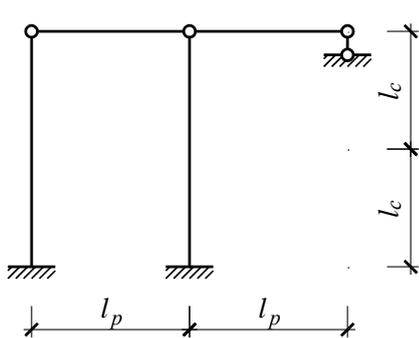
5



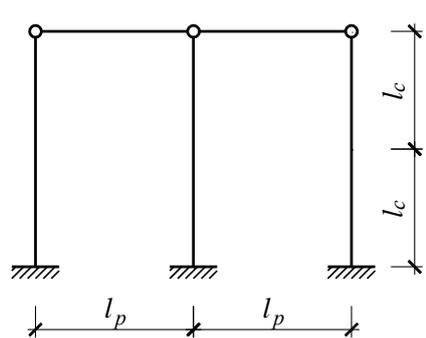
6



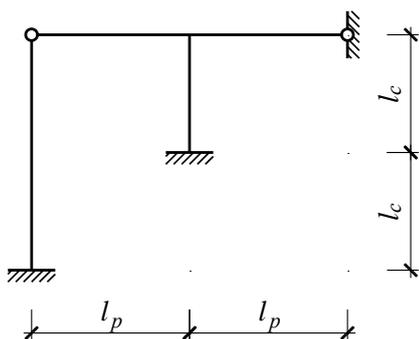
7



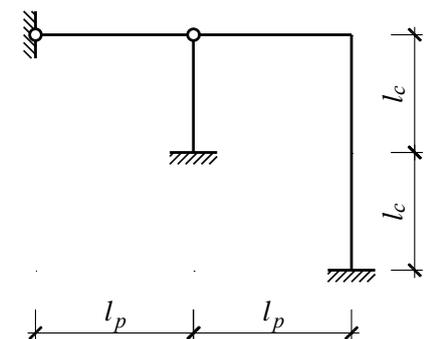
8



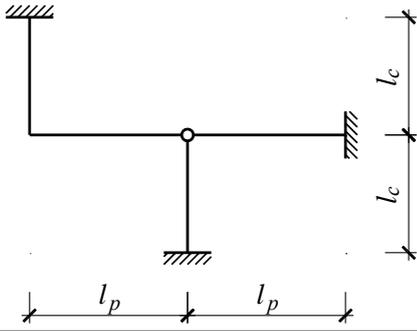
9



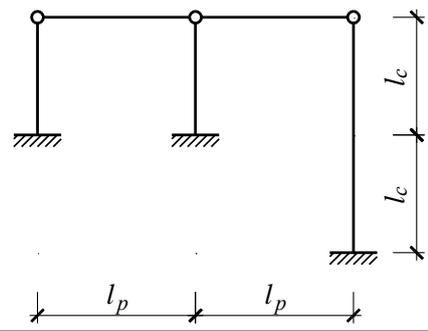
10



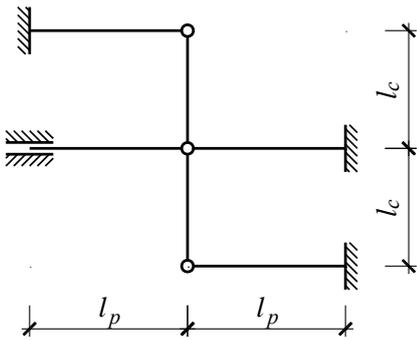
11



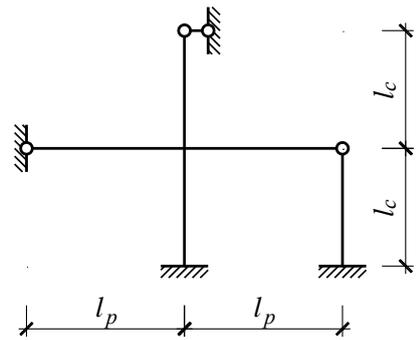
12



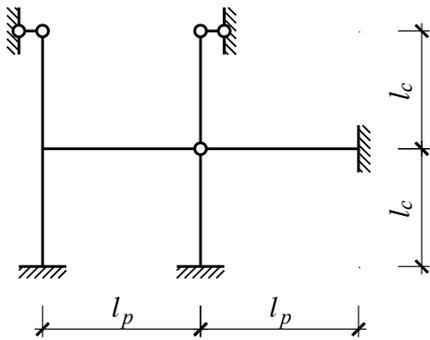
13



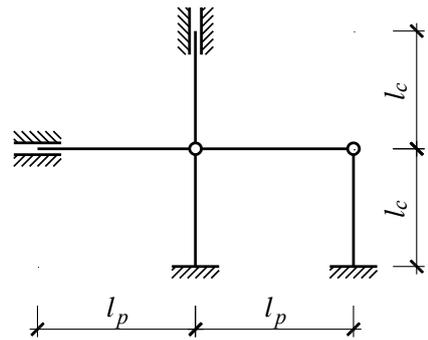
14



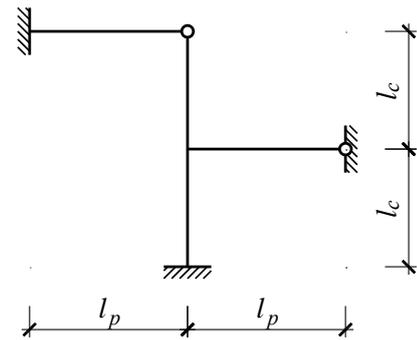
15



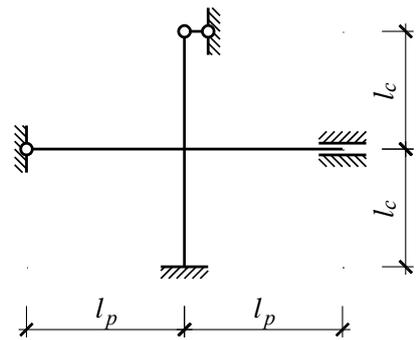
16



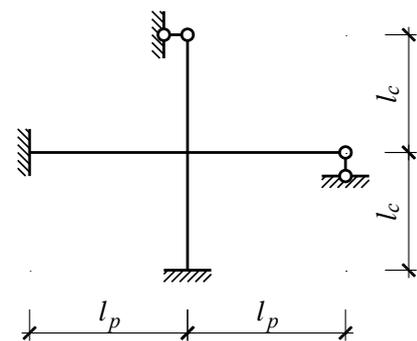
17



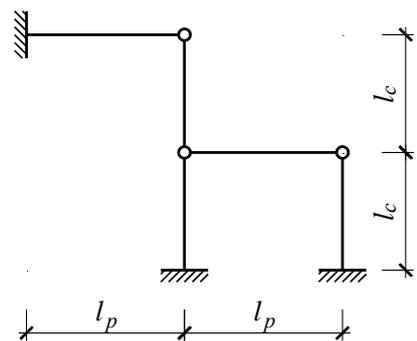
18



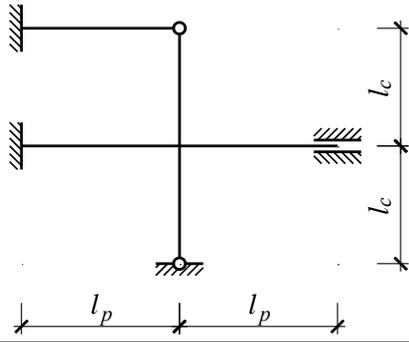
19



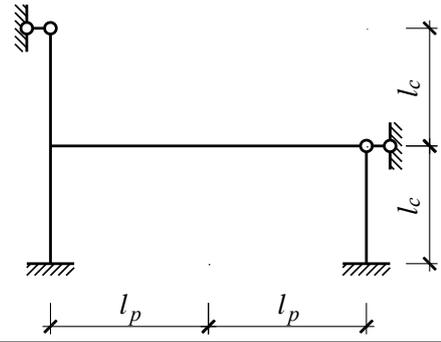
20



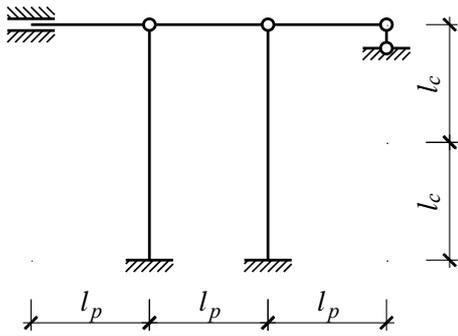
21



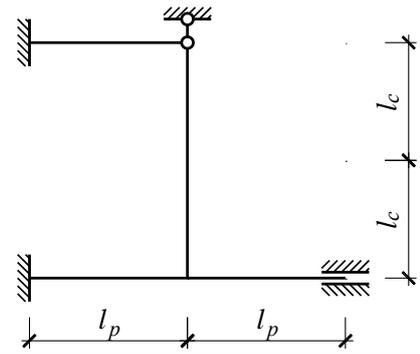
22



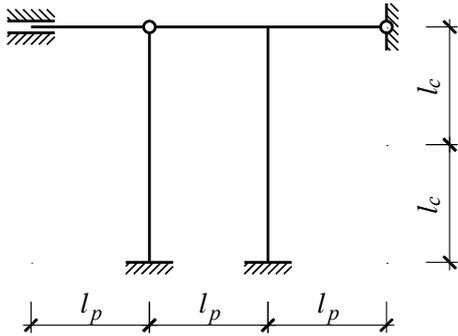
23



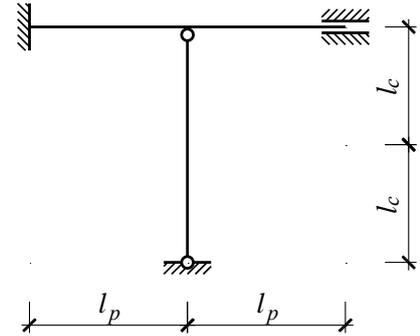
24



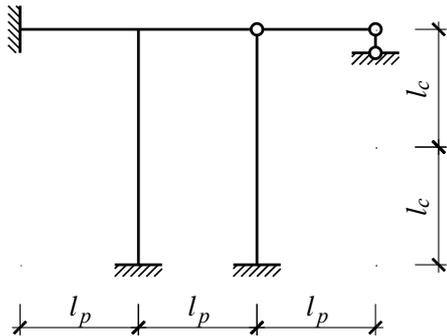
25



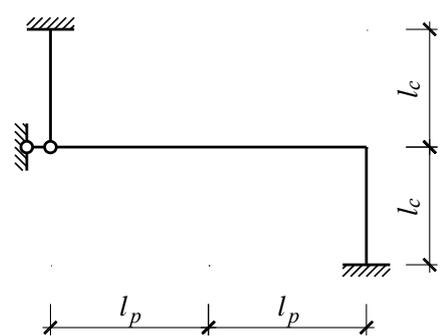
26



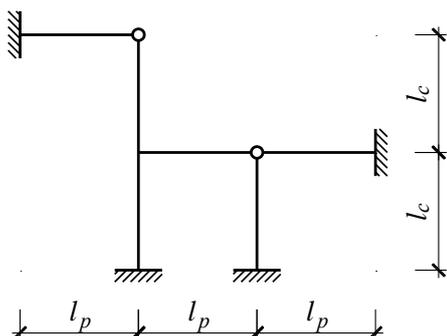
27



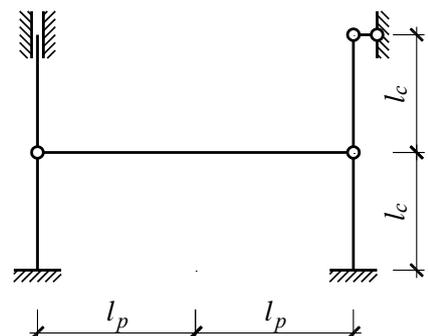
28



29



30



ТЕМА 23. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ

Следующим, после определения собственной частоты колебаний системы, является расчет на вынужденные колебания систем. Рассмотрим вынужденные колебания от действия вибрационной и импульсной нагрузок. Обратим внимание на то, что в заданиях системы являются статически определимыми.

I. Порядок расчета рам на действие вибрационной нагрузки:

1. Определяем степень свободы заданной системы.
2. Строим единичные эпюры изгибающих моментов от поочередного приложения к системе единичных сил инерции (M_1 от $F_1 = 1$; M_2 от $F_2 = 1 \dots$).
3. Определяем единичные перемещения δ_{ik} от единичных сил инерций по формуле Мора:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k}{EI} dx .$$

4. Решая вековое уравнение, находим значение частоты основного тона колебаний ω_{min} .
5. Записываем систему канонических уравнений для отыскания сил инерции:

$$\delta_{11}^* F_1 + \delta_{12} F_2 + \dots + \delta_{1n} F_n + \Delta_{1p}^0 = 0$$

$$\delta_{21} F_1 + \delta_{22}^* F_2 + \dots + \delta_{2n} F_n + \Delta_{2p}^0 = 0$$

...

$$\delta_{n1} F_1 + \delta_{n2} F_2 + \dots + \delta_{nn}^* F_n + \Delta_{np}^0 = 0$$

6. Определяем главные коэффициенты по формуле:

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2} .$$

Значением частоты вынужденных колебаний θ задаются в пределах 0.8 или 1.2 ω_{min} при условии $\theta \neq \omega_{min}$.

7. Строим грузовую эпюру изгибающих моментов M_p в заданной системе от амплитудных значений внешней нагрузки и определяем свободные члены уравнения Δ_{ip}^0 :

$$\Delta_{ip}^0 = \sum \int \frac{M_i M_p}{EI} dx .$$

8. Решаем систему канонических уравнений относительно инерционных сил F_i и определяем их значения.

9. Строим эпюру динамических изгибающих моментов отдельно для каждой частоты:

$$M_D = M_1F_1 + M_2F_2 + \dots + M_nF_n + M_p$$

10. Проводим статическую проверку правильности построения эпюры M_D .

11. Проводим анализ эпюры M_D в зависимости от соотношения частот θ/ω .

Примечание. В симметричных системах симметрично расположенные силы инерции желательно группировать, подставляя для них в канонические уравнения значения сгруппированных масс $m = (m_i + m_k)/2$.

II. Порядок расчета рам на действие импульсной нагрузки:

Особенностью расчета задач на импульсную нагрузку является замена нагрузки на эквивалентную статическую. Расчет на действие эквивалентной нагрузки производится как обычный статический расчет. Порядок расчета:

1. Определяется динамическая степень свободы заданной системы.
2. Вычисляется значение частоты основного тона колебаний.
3. Определяется значение эквивалентной нагрузки:

$$P_{эkv} = \omega S; q_{эkv} = \omega s.$$

4. Проводится обычный статический расчет заданной системы на действие эквивалентной нагрузки.

После изучения данной темы студент должен обладать следующими компетенциями:

- **знать** порядок расчета систем на вынужденные колебания;
- **уметь** строить эпюры внутренних усилий от динамического воздействия;
- **владеть** методикой для дальнейшего проектирования;
- суметь **ответить** на следующие вопросы:
 1. Какая нагрузка называется вибрационной?
 2. В чем состоит особенность расчета систем на действие вибрационной нагрузки?
 3. Как влияет соотношение частот на характер и величину динамических изгибающих моментов?
 4. Как отыскать силы инерции при действии вибрационной нагрузки?
 5. В чем состоит особенность статической проверки эпюр динамических моментов?

Пример 23.1. Расчет рамы на действие вибрационной нагрузки

Условие задачи: Для приведенной рамы (а) определить внутренние усилия от действия вибрационной нагрузки. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

$$P(t) = 4 \sin \theta t; q(t) = 2 \sin \theta t.$$

Решение.

1. Выполняем кинематический анализ и убеждаемся, что система статически определима и геометрически неизменяема. Динамическая степень свободы $n = 1$.
2. Строим единичную эпюру M_1 от $F_1 = 1$.
3. Определяем перемещение:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \times \frac{2}{3} \cdot 3 \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \times \frac{2}{3} \cdot 3 \right] = \frac{15}{EI}$$

4. Вычисляем частоту основного тона:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{EI}{15m}}$$

5. Записываем каноническое уравнение для отыскания сил инерции: $\delta_{11}^* F_1 + \Delta_{1P}^0 = 0$

6. Определяем главные коэффициенты канонического уравнения:

$$\text{при } \theta = 0.8\omega: \delta_{11}^* = \delta_{11}(1 - 0.8) = \frac{3}{EI}; \text{ при } \theta = 1.2\omega: \delta_{11}^* = \delta_{11}(1 - 1.2) = -\frac{3}{EI}$$

7. Строим грузовую эпюру M_p и определяем свободные члены уравнения:

$$\Delta_{1P}^0 = \sum \int \frac{M_1 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{2 \cdot 4^3}{12} \times \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \times \frac{2}{3} \cdot 3 \right] + \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot 6 \times \frac{2}{3} \cdot 1.5 - 1.5 \cdot 6 \times \frac{3 + 1.5}{2} \right] = -\frac{115}{4EI}$$

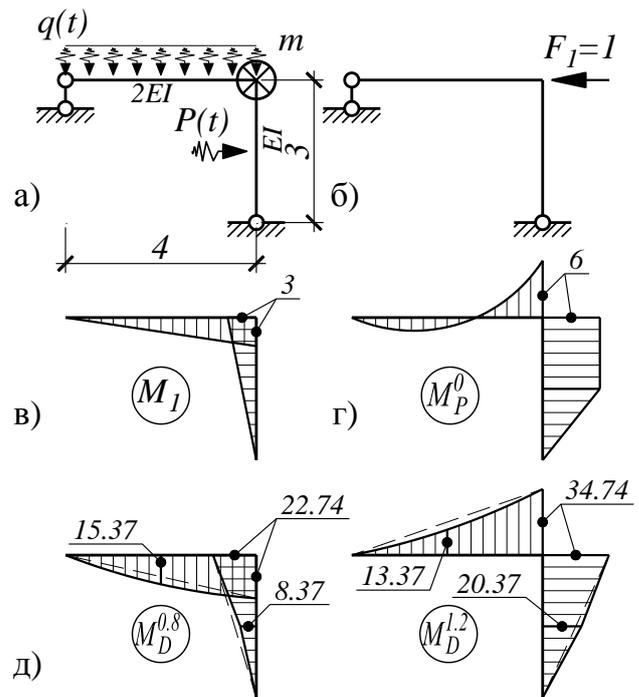
8. Решаем каноническое уравнение и определяем силы инерции:

$$\text{при } \theta = 0.8\omega: F_1 = -\frac{\Delta_{1P}^0}{\delta_{11}^*} = \frac{115}{4EI} \div \frac{3}{EI} = 9.58; \text{ при } \theta = 1.2\omega: F_1 = -\frac{\Delta_{1P}^0}{\delta_{11}^*} = -9.58.$$

9. Строим эпюру динамических изгибающих моментов отдельно для каждой частоты.

10. Проводим статическую проверку правильности построения эпюры M_D .

11. Проводим анализ эпюры M_D в зависимости от соотношения частот θ/ω .



Пример 23.2. Расчет рамы на действие импульсной нагрузки

Условие задачи: Для приведенной рамы (а) определить построить эпюру M_D от действия импульсной нагрузки. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

Решение.

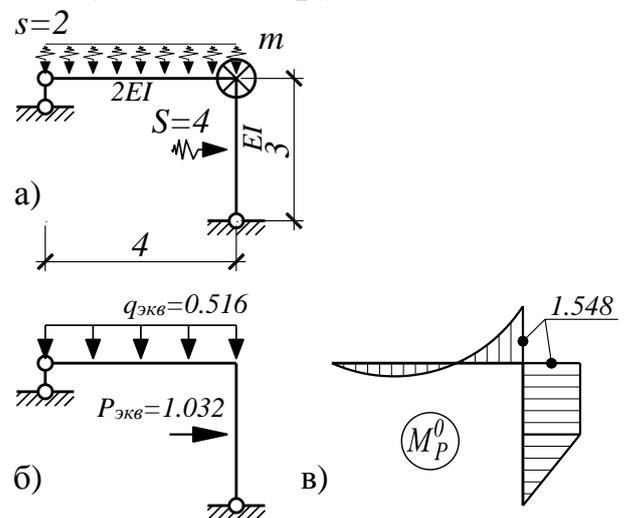
1. Система статически определима и имеет одну динамическую степень свободы.
2. Ранее определили частоту основного тона:

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{15m}} = 0,258 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

3. Значения эквивалентной нагрузки:

$$P_{эkv} = \omega \cdot S = 1.032 \sqrt{\frac{EI}{m}}; q_{эkv} = \omega \cdot s = 0.516 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

4. Строим эпюру M_D .



Задача 23.1. Определение внутренних усилий в рамах от действия вибрационной нагрузки

Для рам, приведенных на стр.183...185, построить эпюры внутренних усилий от действия динамической нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону $P(t) = P \sin \theta t$; $q(t) = q \sin \theta t$. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.23.1. Сделать анализ полученных результатов эпюр M_D при различных значениях частоты вынужденных колебаний θ .

Таблица 23.1. Исходные параметры к задаче 23.1

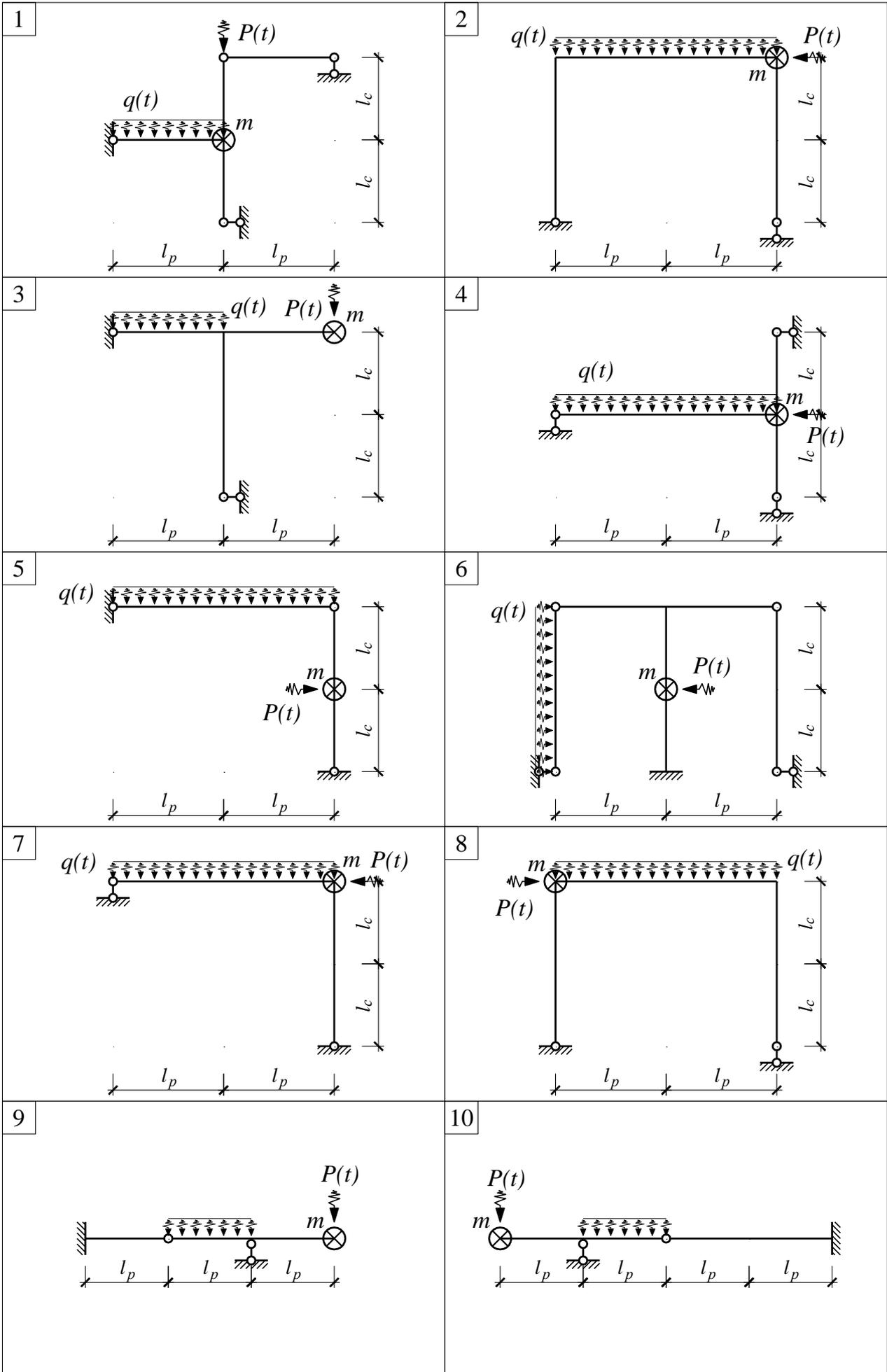
номер группы	l_p , м	l_c , м	$\frac{EI_p}{EI_c}$	P , кН	q , кН/м	Сложность задания	Переменные параметры	
1	2	2	1	4	q	3	$q = 0$	$\theta = 0.8, 1.2$
2	3	2	2	6	q	4	$q = 2$	$\theta = 0.8, 1.2$
3	4	3	1	2	q	6, с анализом	$q = 2$	$\theta =$
4	2	3	2	4	q			0.8; 0.9;
5	3	3	1	6	q			1.1; 1.2

Задача 23.2. Определение внутренних усилий в рамах от действия импульсной нагрузки

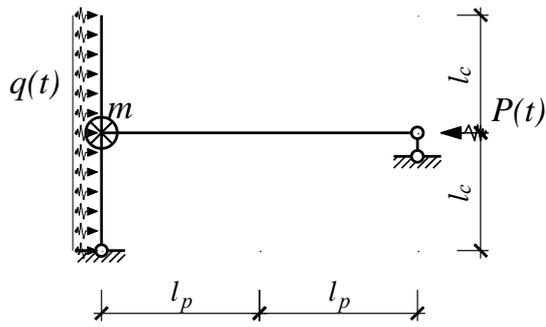
Для рам, приведенных на стр.186...188, построить эпюры внутренних усилий от действия импульсной нагрузки. Номер схемы принимать по номеру варианта из списка группы. Исходные параметры принимать по табл.23.2. Выполнить анализ полученных эпюр при различных соотношениях жесткости элементов.

Таблица 23.2. Исходные параметры к задаче 23.2

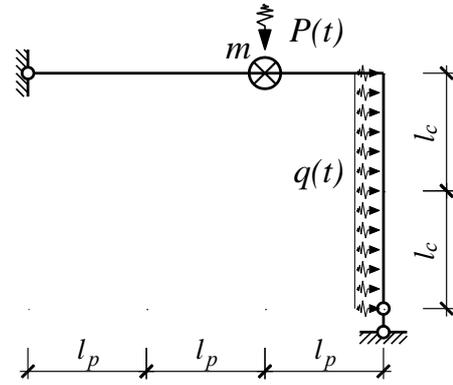
номер группы	l_p , м	l_c , м	$\frac{EI_p}{EI_c}$	S , кН·сек	s , (кН/м)·сек	Сложность задания	Переменные параметры	
1	$L + 2$	2	k	4	3	3	$L = 0$	$k = 1$
2	$L + 3$	2	k	3	2	4	$L = 1$	$k = 2$
3	$L + 4$	3	k	2	3	6, с анализом	$L = 2$	$k = 1$
4	$L + 2$	3	k	4	2			$k = 2$
5	$L + 3$	3	k	3	3			$k = 3$



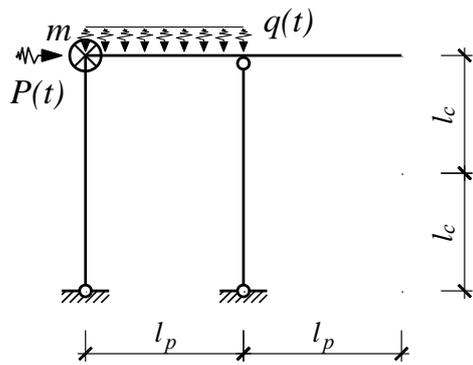
11



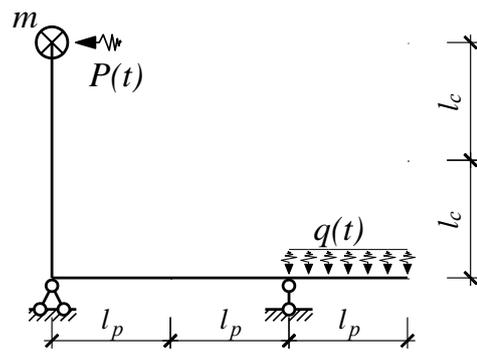
12



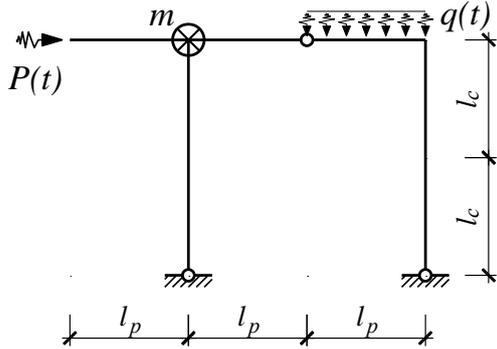
13



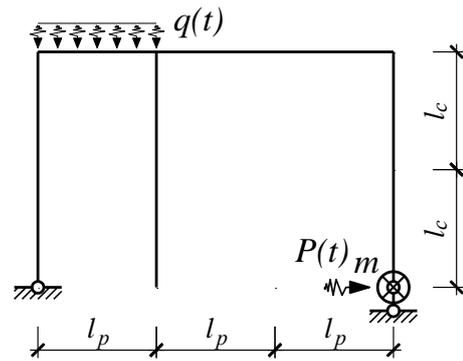
14



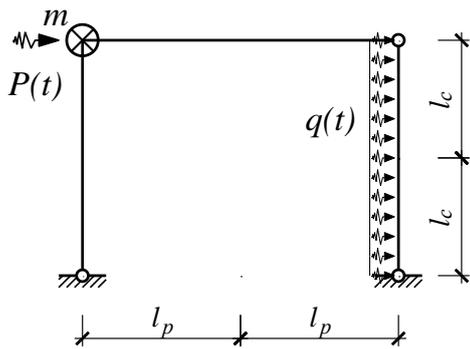
15



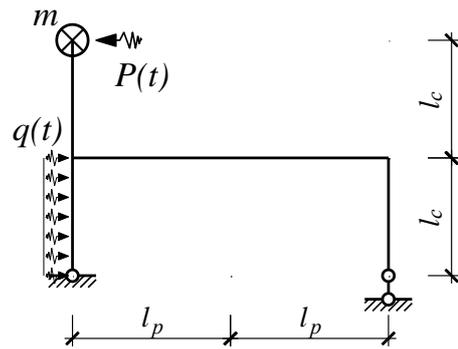
16



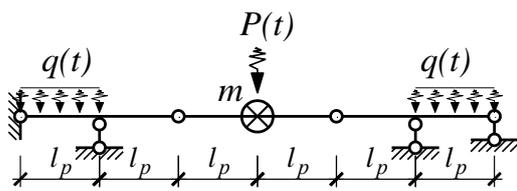
17



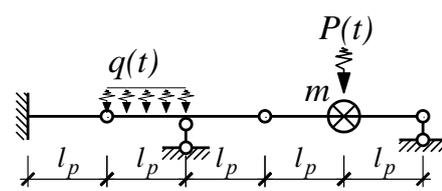
18



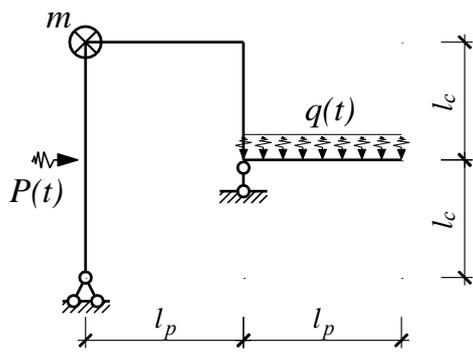
19



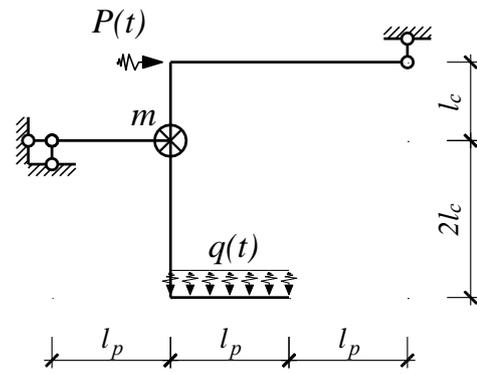
20



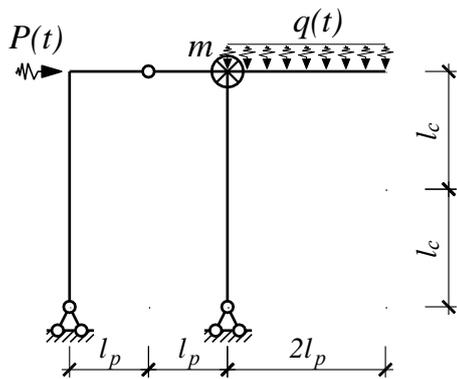
21



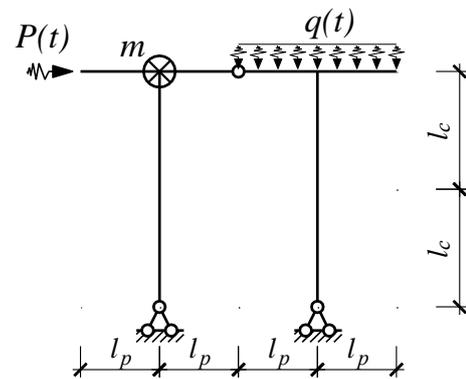
22



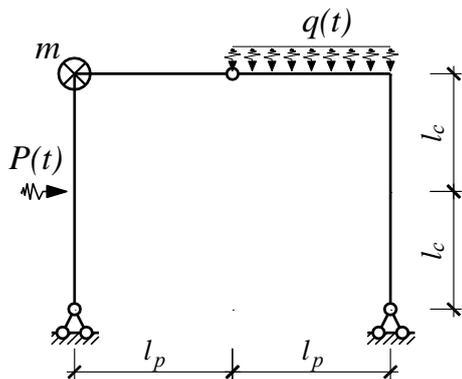
23



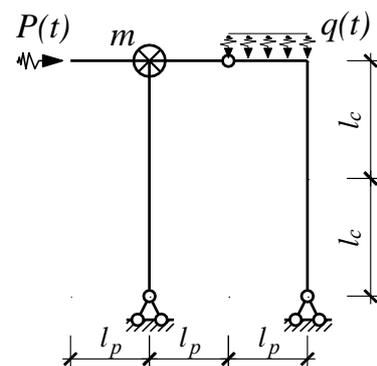
24



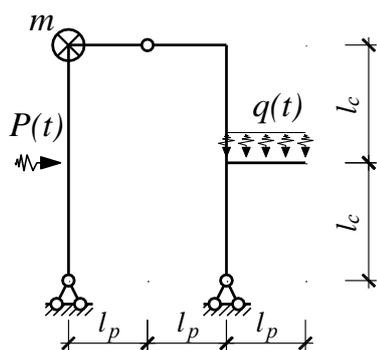
25



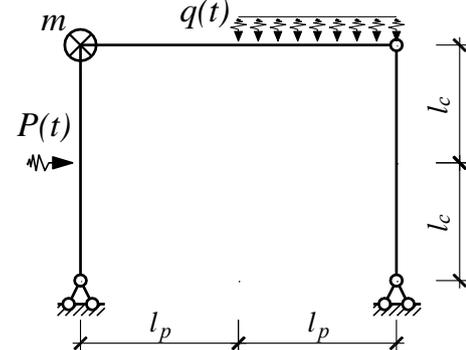
26



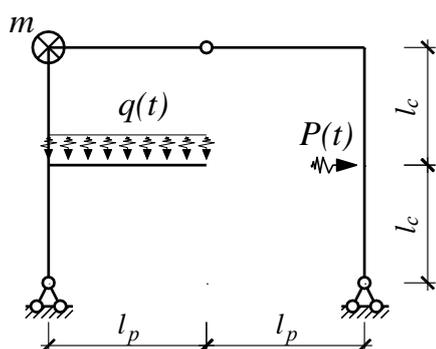
27



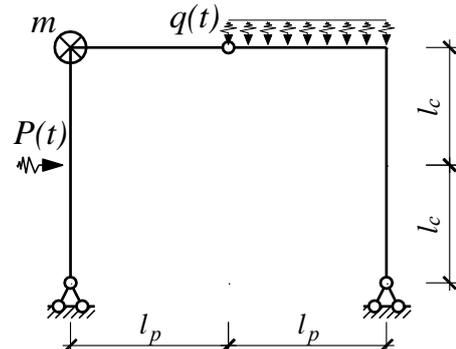
28

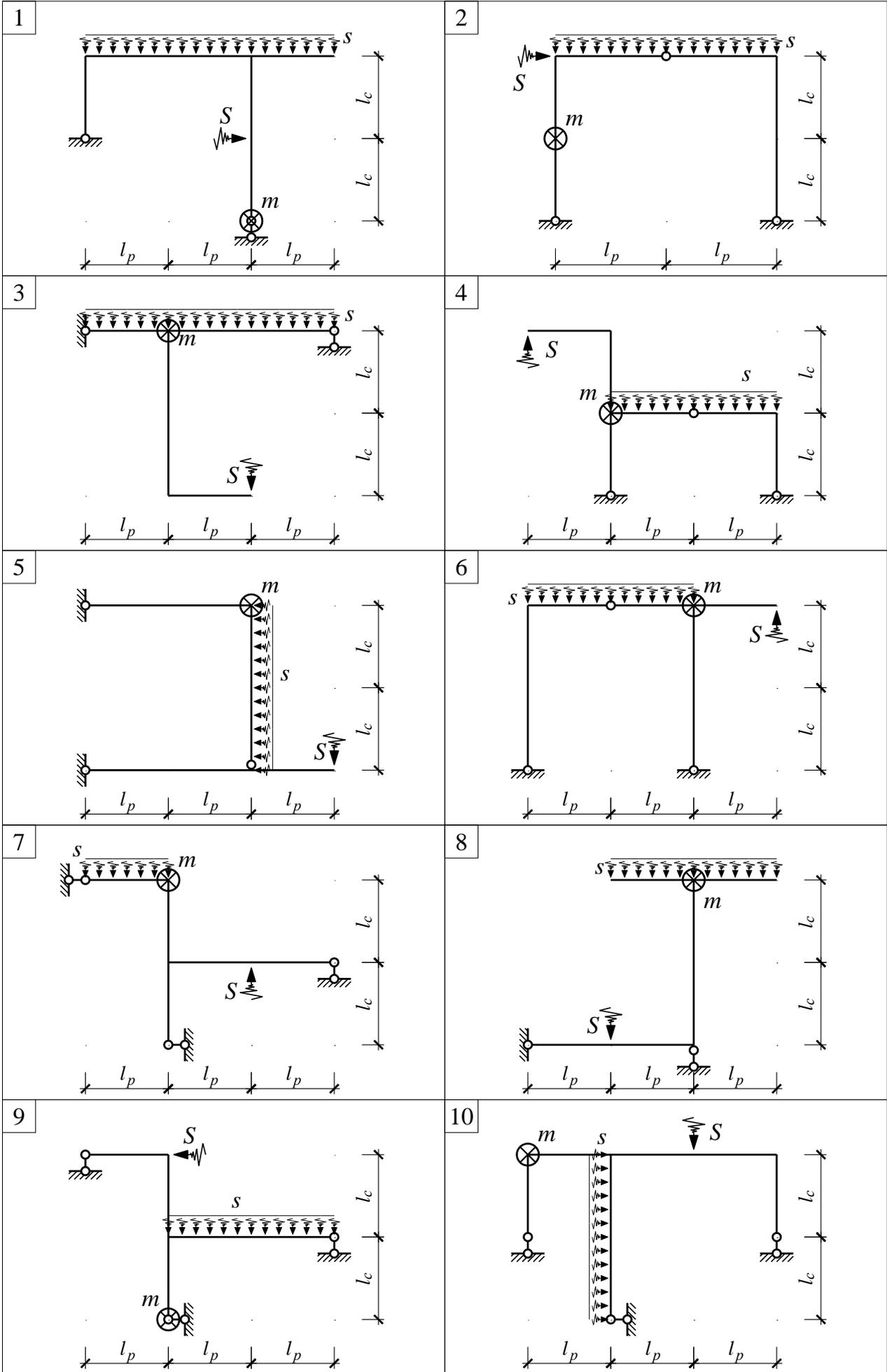


29

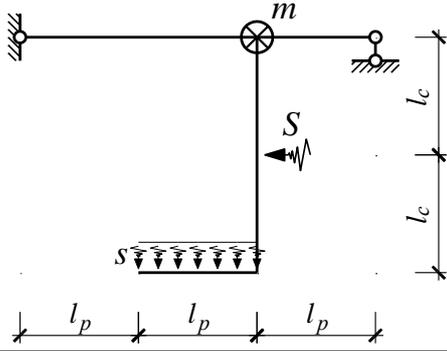


30

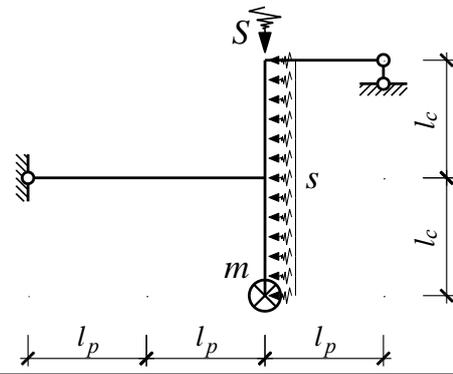




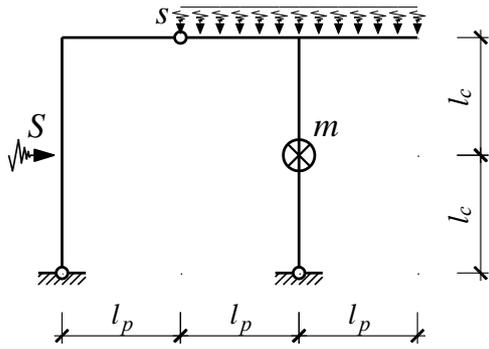
11



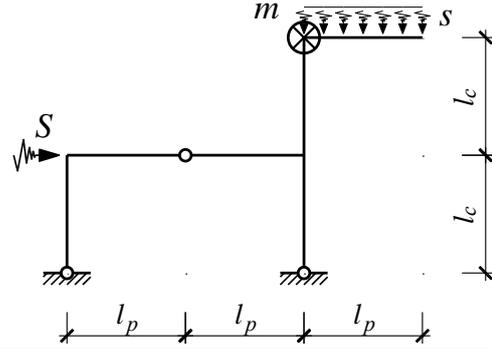
12



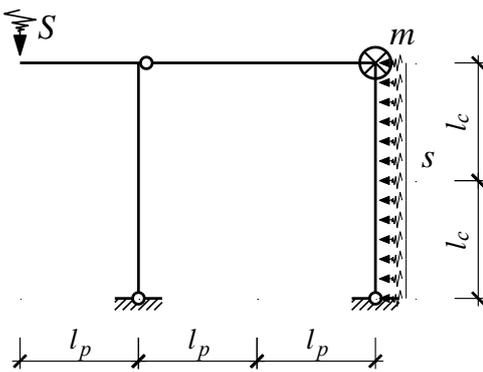
13



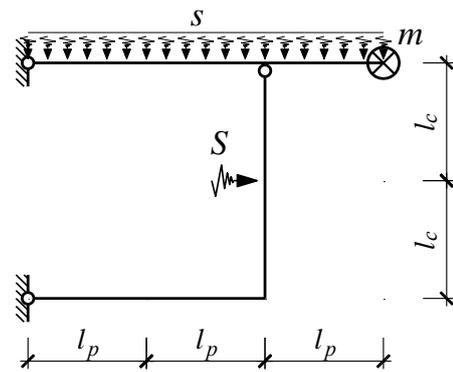
14



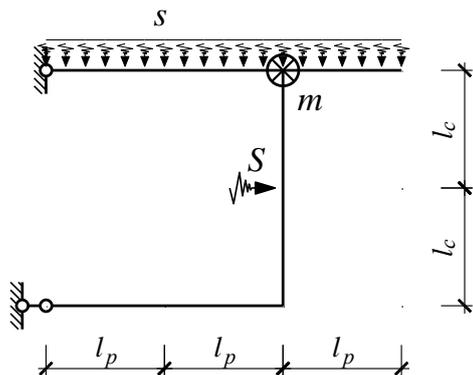
15



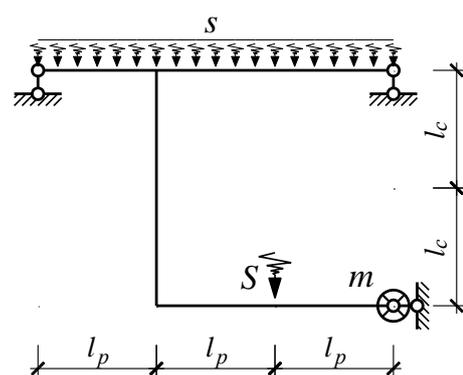
16



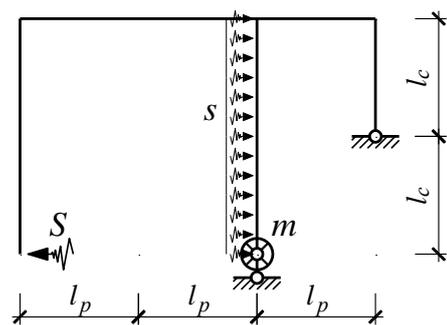
17



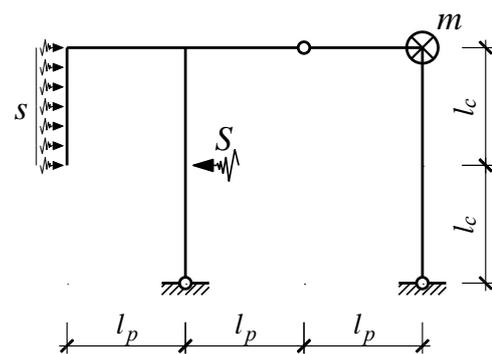
18



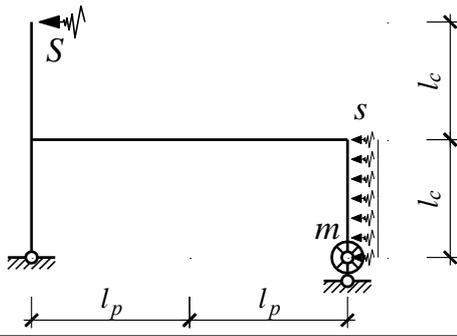
19



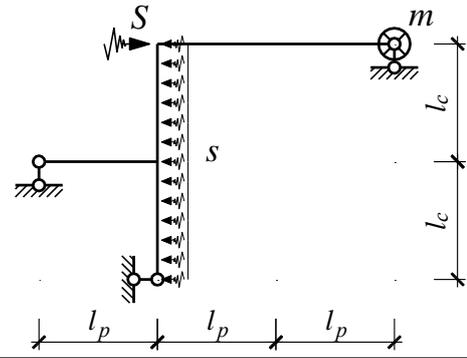
20



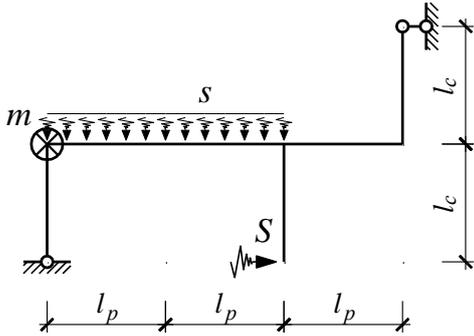
21



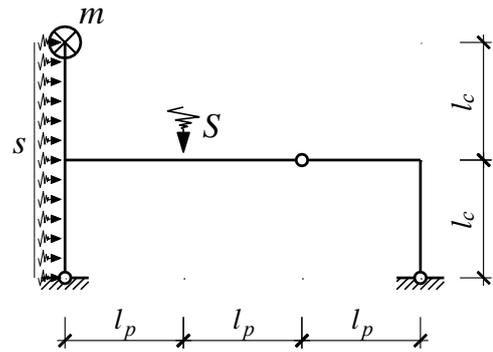
22



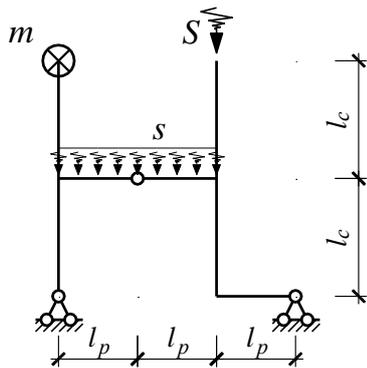
23



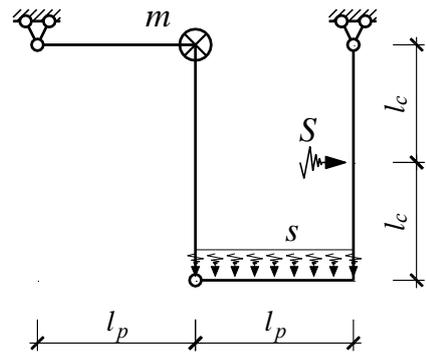
24



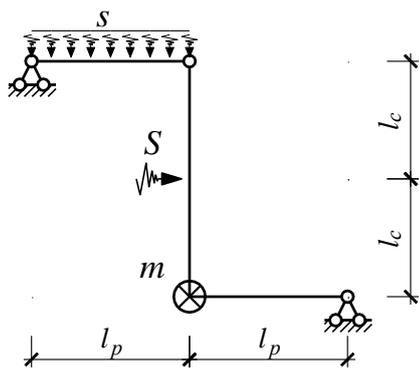
25



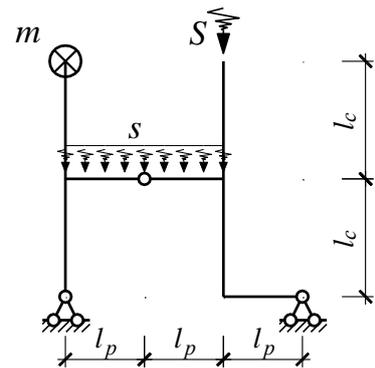
26



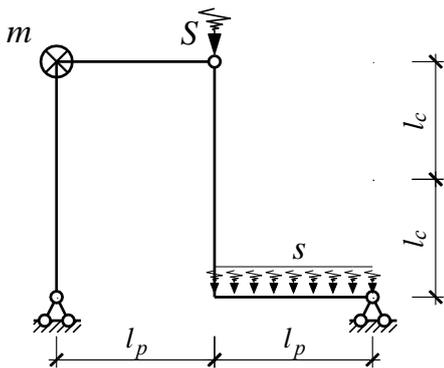
27



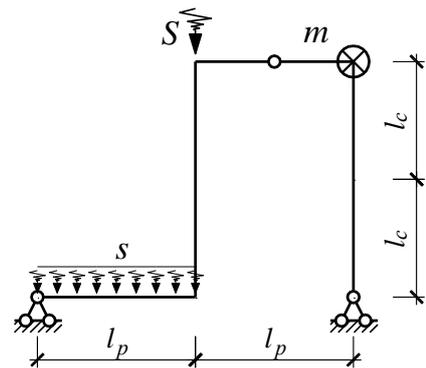
28



29



30



ГЛАВА 6. ОСНОВЫ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Тонкостенные пространственные системы можно разделить на оболочки, висячие конструкции, перекрестные системы и пневматические конструкции. Остановимся на классе оболочек. Оболочка – тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами тела.

В строительстве классифицируют формы поверхности оболочек по их гауссовой кривизне $G = K_1 \times K_2$, где K_1 и K_2 – главные кривизны. Если $G > 0$, имеют место оболочки положительной гауссовой кривизны (например, оболочки вращения), если $G < 0$ – оболочки отрицательной гауссовой кривизны (например, седлообразные оболочки), если $G = 0$ оболочки нулевой гауссовой кривизны (например, цилиндрические оболочки).

Существует три теории расчета оболочек – общая или моментная, полубезмоментная (или полумоментная) и безмоментная. В изучаемом курсе рассмотрим наиболее удобные для расчета классы оболочек по безмоментной и полумоментной теории.

ТЕМА 24. РАСЧЕТ ОБЛОЧЕК ПО БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

Запишем условия, при которых в данной системе будет возникать безмоментное напряженное состояние:

1. Срединная поверхность должна быть плавно изменяющейся, непрерывной так, чтобы при дифференцировании по φ и θ , R_1 и R_2 не возрастали.
2. Срединная поверхность не должна содержать «особенностей», т.е. для цилиндрической оболочки $l \neq \infty$, для конической – отсутствие вершины и ее окрестности.
3. Толщина оболочки должна изменяться плавно, непрерывно и не возрастать при дифференцировании по φ и θ .
4. Закрепление краев не должно препятствовать нормальному перемещению (прогибу) и повороту.
5. Нагрузка должна быть непрерывной, плавно изменяющейся, так, чтобы производные от q по φ и θ были малы.
6. Силы, приложенные к краям оболочки, должны лежать в плоскости, касательной к срединной поверхности.

В безмоментной теории учитывают лишь усилия N_1 , N_2 , S , т.е. усилия, лежащие в срединной поверхности оболочки.

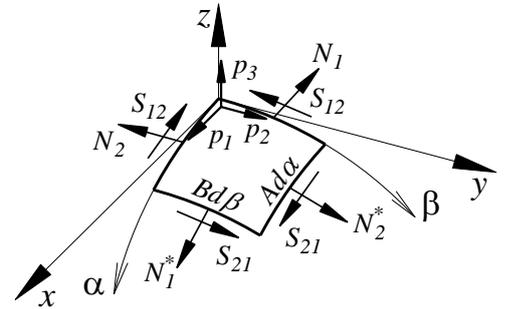
Основные уравнения равновесия для отыскания внутренних усилий:

$$\sum x = 0: \frac{\partial(BN_1)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AS_{12})}{\partial\beta} - N_2 \frac{\partial B}{\partial\alpha} + S_{21} \frac{\partial A}{\partial\beta} + p_{1AB} = 0;$$

$$\sum y = 0: \frac{\partial(AN_2)}{\partial\beta} + \frac{\partial(BS_{21})}{\partial\alpha} - N_1 \frac{\partial A}{\partial\beta} + S_{12} \frac{\partial B}{\partial\alpha} + p_2 AB = 0;$$

$$\sum z = 0: \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - p_3 = 0; S_{12} = S_{21} = S.$$

Здесь N_1, N_2 – нормальные усилия, действующие по граням $Ada, Bd\beta$, бесконечно малого элемента; S – сдвигающие усилия; p_1, p_2, p_3 – составляющие внешней нагрузки по направлениям осей Ox, Oy, Oz ; A и B – коэффициенты квадратичной формы поверхности, характеризующие кривизну α и β .



Для различных поверхностей A и B имеют свои значения. Так, например:

- для оболочек вращения: $A = \sqrt{1+r'^2}, B = r$;
- в цилиндрической системе координат: $d\alpha = dz, d\beta = d\theta$;
- в сферической системе координат: $A = R, B = r, d\alpha = d\varphi, d\beta = d\theta$;
- для цилиндрических оболочек: $A = 1, B = R, d\alpha = dx, d\beta = d\theta$;
- для прямоугольных пологих оболочек: $A = 1, B = 1, d\alpha = dx, d\beta = dy$.

Задача 24.1. Расчет цилиндрической оболочки по безмоментной теории

Для цилиндрической оболочки, изображенной на схеме а (рис.24.1), определить усилия от собственного веса q . Оболочка по краям оперта на диафрагмы, абсолютно жесткие в своей плоскости и гибкие из плоскости. Исходные параметры принимать по табл.24.1.

Последовательность расчета:

1. Определяем составляющие p_1, p_2, p_3 , внешней нагрузки:

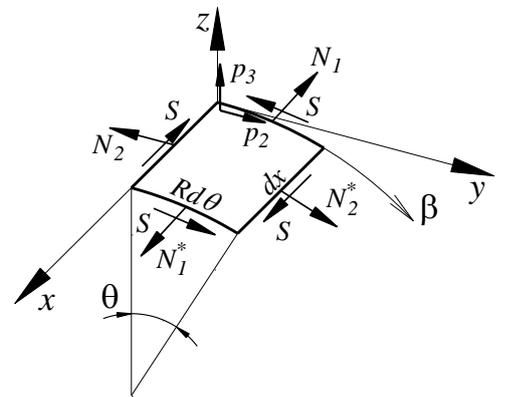
$$p_1 = 0, p_2 = q \cdot \sin\theta, p_3 = -q \cdot \cos\theta.$$

2. Записываем значения коэффициентов для данной оболочки:

$$A = 1, d\alpha = dx; B = R; d\beta = d\theta; R_1 = \infty; R_2 = R.$$

3. Записываем основные уравнения равновесия для бесконечно малого элемента цилиндрической оболочки:

$$\begin{aligned} R \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \theta} &= 0; \\ \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + R \frac{\partial S}{\partial x} + qR \sin\theta &= 0; \\ \frac{N_2}{R} + q \cos\theta &= 0. \end{aligned}$$



4. Оболочка статически определима в малом. Из уравнений равновесия находят поочередно N_2 , S , N_1 , с учетом условий закрепления оболочки по торцам.
5. Строим эпюры внутренних усилий $N_1(x, \theta)$, $N_2(x, \theta)$, $S(x, \theta)$, показывая характер изменения усилий по длине и по сечению оболочки.

Задача 24.2. Расчет сферической оболочки по безмоментной теории

Построить эпюры распределения внутренних усилий в оболочке вращения – полусфере, изображенной на рис.24.1. Исходные параметры принимать по табл.24.1. Внешнее воздействие представлено в двух вариантах: от собственного веса q – схема б; от вертикальной равномерно-распределенной нагрузки p – схема в.

Таблица 24.1. Исходные параметры к задаче 24.1

номер группы	$l, м$	$R, м$	$\gamma, кН/м^3$	$\delta, м$	$q, кН/м^2$	$p, кН/м^2$	Сложность задания	Переменные параметры	
								схема б	схема в
1	12	6	$20+k$	0.012	$\gamma \cdot \delta$	$P+6$	P – количество десятков, k – единицы в номере варианта		
2	18	9	$30-k$	0.015	$\gamma \cdot \delta$	$P+5$			
3	24	12	$30+k$	0.018	$\gamma \cdot \delta$	$P+4$			
4	30	15	$40-k$	0.021	$\gamma \cdot \delta$	$P+3$			
5	36	18	$40+k$	0.024	$\gamma \cdot \delta$	$P+2$		6 с анализом	схемы а, б, в

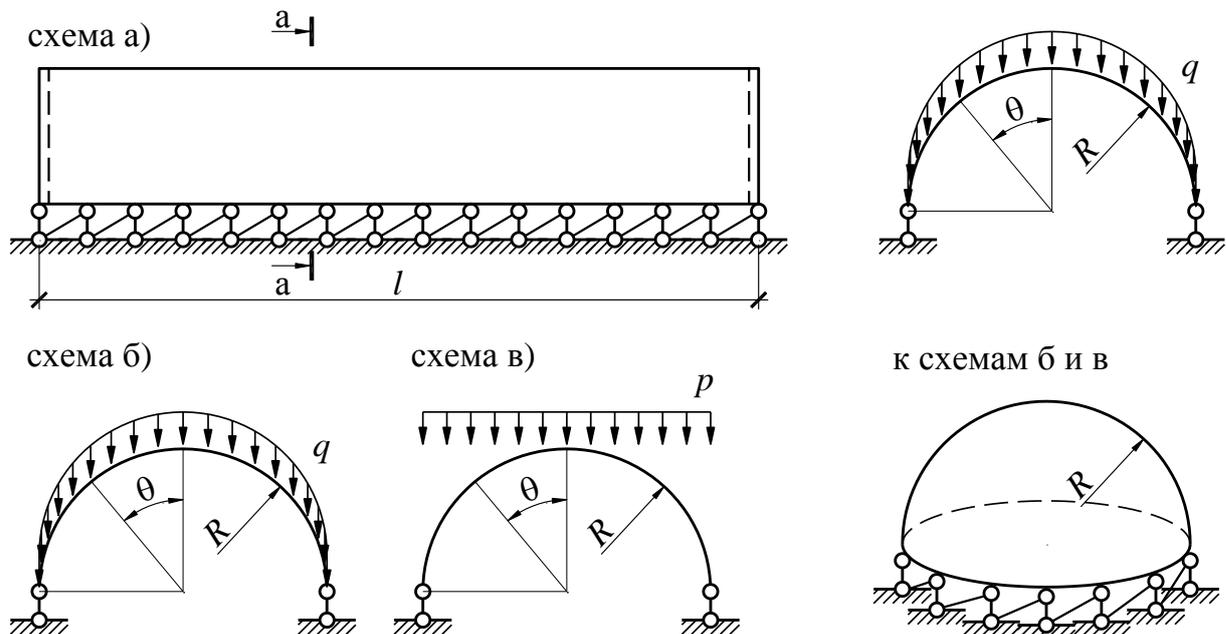


Рисунок 24.1. Схемы к задачам 24.1, 24.2.

Обратим внимание на некоторые особенности решения полусферы:

1. Данная система симметрична и имеет осесимметричное нагружение:

$$R_1 = R_2 = R.$$

2. Составляющая внешней нагрузки $p_2 = 0$, сдвигающие усилия $S = 0$.
3. Усилия N_1 и N_2 постоянны по сечению окружности и не зависят от θ .
4. Коэффициенты кривизны $A = R$, $B = r$, $d\alpha = d\varphi$, $d\beta = d\theta$.

5. Основные уравнения равновесия:

$$\frac{\partial(rN_1)}{\partial\varphi} - N_2 \frac{\partial r}{\partial\varphi} + p_1 R r = 0; \quad \frac{N_1}{R} + \frac{N_2}{R} - p_3 = 0.$$

Первое уравнение можно заменить обычным уравнением проекций отсеченной части сферы на ось симметрии оболочки:

$$N_1 = -\frac{Q_z}{2\pi \sin\varphi}; \quad N_2 = p_3 R - N_1.$$

6. Здесь Q_z – составляющая внешней нагрузки на ось симметрии оболочки.

Для случая (а) – от собственного веса q :

$$Q_z = 2\pi \int_0^\varphi (p_1 \sin\varphi - p_3 \cos\varphi) r R d\varphi,$$

откуда: $N_1 = -qR \frac{1}{\cos\theta + 1}; \quad N_2 = -qR \frac{\cos^2\theta + \cos\theta - 1}{\cos\theta + 1}.$

Для случая (б) – от вертикальной нагрузки p :

$$Q_z = p\pi r^2 = p\pi R^2 \sin^2\varphi.$$

откуда: $N_1 = -\frac{1}{2}Rp; \quad N_2 = -\frac{\cos 2\theta}{2}Rp.$

7. Определяют составляющие внешней нагрузки p_1 и p_3 .

8. По формулам (п.5) находят значения N_1 и N_2 и строят эпюры меридиональных и кольцевых усилий в зависимости от параметра φ : $N_1(\varphi)$, $N_2(\varphi)$.

После изучения данной темы студент должен обладать следующими компетенциями:

- **знать** порядок расчета цилиндрических и сферических оболочек вращения по безмоментной теории;
- **уметь** строить эпюры внутренних усилий цилиндрических и сферических оболочек вращения;
- **владеть** методикой для дальнейшего проектирования;
- суметь **ответить** на следующие вопросы:
 1. Какие виды напряженно-деформированного состояния могут возникать в оболочках?
 2. Какие усилия возникают в оболочке в случае безмоментного напряженного состояния?
 3. Когда в оболочках возникает безмоментное напряженное состояние?
 4. Какой характер носят эпюры N_1 и N_2 в сферических оболочках при осесимметричном нагружении?
 5. При каких видах нагружения в сферических оболочках не будет возникать сдвигающих усилий?

Пример 24.1. Расчет полусферы от действия собственного веса

Условие задачи: Для приведенной полусферической оболочки (а) построить эпюры меридиональных и кольцевых усилий. Единицы измерения: м, кН (на схемах условно не показаны).

Решение.

1. Запишем основное уравнение равновесия для полусферической оболочки:

$$\frac{\partial(rN_1)}{\partial\theta} - N_2 \frac{\partial r}{\partial\theta} + p_1 R r = 0; \quad \frac{N_1}{R} + \frac{N_2}{R} - p_3 = 0.$$

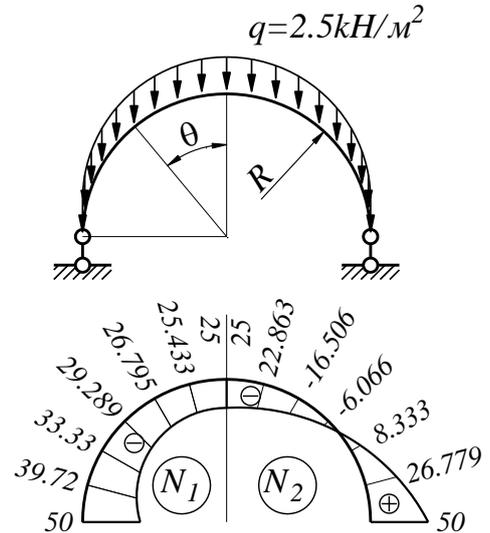
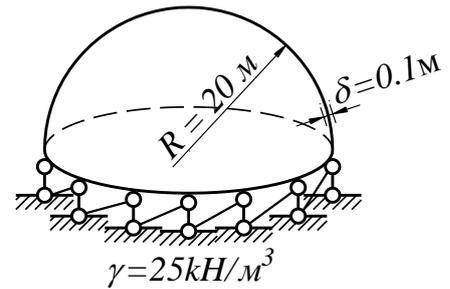
2. Запишем основное уравнение равновесия для полусферической оболочки:

$$N_1 = -qR \frac{1}{\cos\theta + 1}; \quad N_2 = -qR \frac{\cos^2\theta + \cos\theta - 1}{\cos\theta + 1}.$$

3. Расчет усилий ведем в табличной форме. Шаг вычисления значений примем $\Delta\theta = 15^\circ$:

θ	$\cos\theta$	N_1 , кН	N_2 , кН
0	1.000	-25.000	-25.000
15	0.966	-25.433	-22.863
30	0.866	-26.795	-16.506
45	0.707	-29.289	-6.066
60	0.500	-33.333	8.333
75	0.259	-39.720	26.779
90	0.000	-50.000	50.000

4. По полученным значениям строим совмещенную эпюру N_1 и N_2 .



ТЕМА 25. РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК ПО ПОЛУМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

Напряженное состояние, которое рассматривается так называемой полумоментной теорией, включает в себя усилия безмоментной группы (N_1 , N_2 , S), и часть усилий моментной группы. Полумоментная теория занимает промежуточное положение между моментной и безмоментной теориями расчета оболочек. По данной теории можно рассчитывать и такие оболочки, условия закрепления краев которых не удовлетворяют условиям существования безмоментного напряженного состояния, что является причиной возникновения краевого эффекта.

Общее решение таких оболочек получают как сумму индивидуального расчета краевого эффекта и расчета оболочек по безмоментной теории.

Особенности расчета оболочек по данной теории рассмотрим на примере цилиндрической оболочки.

Задача 25.1. Расчет оболочки по полумоментной теории

Построить эпюры распределения внутренних усилий в оболочке вращения – круглой цилиндрической оболочке, изображенной на рис.25.1, от гидростатического давления. Исходные параметры принимать по табл.25.1. Закрепление оболочки представлено в двух вариантах: жесткое защемление – схема а; шарнирно-неподвижное – схема б. Материал оболочки: модуль упругости $EI = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$.

Таблица 25.1. Исходные параметры к задаче 25.1

номер группы	$H, \text{ м}$	$R, \text{ м}$	$\delta, \text{ м}$	$\rho, \text{ кН/м}^3$	$p, \text{ кН/м}^2$
1	12	$5-R$	0.012	$10-k$	ρH
2	10	$5+R$	0.010	$10+k$	ρH
3	8	$4-R$	0.008	$20-k$	ρH
4	6	$4+R$	0.006	$20+k$	ρH
5	4	$3+R$	0.004	$30-k$	ρH

Сложность задания	Переменные параметры	
3	схема а	R – количество десятков, k – единиц в номере варианта
4	схема б	
6 с анализом	схемы а, б	

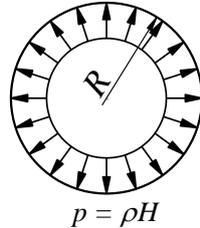
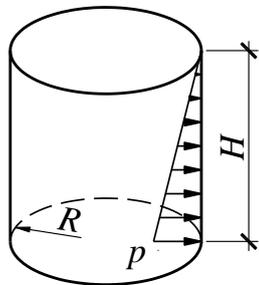
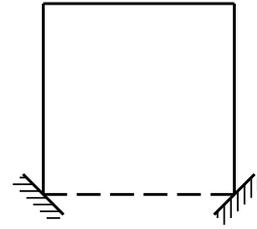
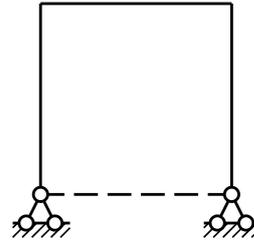


схема а)

схема б)



Пояснения к решению задачи.

При осесимметричном нагружении оболочки имеем только симметричные составляющие внешней нагрузки, а именно – p_1 и p_3 , а $p_2 = 0$. Из условий симметрии заключаем:

- все усилия будут постоянны по окружности, т.е. не зависят от координаты θ ;
- сдвигающие силы S , крутящие моменты M и перерезывающие силы Q_2 равны 0.

В результате основные уравнения равновесия имеют вид:

а) Для безмоментного напряженного состояния:

$$\sum x = 0: \frac{N_2^0}{R} + p_3 = 0; N_1^0 = -\int p_1 dx .$$

$$\sum z = 0: \frac{N_2^0}{R} + p_3 = 0; N_2^0 = -p_3 R .$$

Здесь N_1^0 и N_2^0 – нормальные усилия безмоментной группы, каждое из которых зависит только от составляющих внешней нагрузки, в случае их отсутствия усилия будут нулевыми. Если, например, $p_1 = 0$, то $N_1^0 = 0$ и в оболочке будут возникать только кольцевые усилия N_2^0 .

б) Для моментного напряженного состояния, возникающего в результате закрепления нижнего края оболочки с днищем (когда условия закрепления безмоментного напряженного состояния нарушены – нижний край оболочки не может свободно перемещаться), расчет сводится к расчету стержня единичной ширины на упругом основании с жесткостью D и коэффициентом постели β :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{P_3}{D}, \text{ здесь } D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}, \beta = \sqrt[4]{\frac{E\delta}{4RD}} = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{R\delta}}.$$

Решение этого уравнения позволяет найти прогиб оболочки, а затем усилия моментной группы M_1 , M_2 , Q_1 . Приведем окончательные выражения для них:

Прогиб –

$$w = e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{P_3}{4D\beta^4}.$$

последний член данного выражения представляет прогиб оболочки, работающей по безмоментному напряженному состоянию.

Изгибающие моменты:

$$M_1 = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = -2D\beta^2 \left[e^{-\beta x} (-C_2 \cos \beta x + C_1 \sin \beta x) + e^{\beta x} (C_4 \cos \beta x - C_3 \sin \beta x) \right]$$

$$M_2 = \nu M_1.$$

Поперечная сила:

$$Q_1 = \frac{dM}{dx} = -2D\beta^3 \left\{ e^{-\beta x} [(C_1 + C_2) \cos \beta x + (C_2 - C_1) \sin \beta x] + e^{\beta x} [(C_4 - C_3) \cos \beta x - (C_4 + C_3) \sin \beta x] \right\}$$

$$\text{Кольцевое усилие: } N_2 = \frac{E\delta w}{R}.$$

Анализ функции прогиба краевого эффекта показал, что одна часть решения, а именно: $e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, описывает картину напряженно-деформированного состояния у нижнего края ($x = 0$) оболочки, а другая часть функции $e^{\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x)$ описывает напряженно-деформированное состояние у верхнего края оболочки ($x = H$). Поэтому, при определении усилий и перемещений у какого-нибудь края, в общем решении W нужно брать лишь одну часть, соответствующую рассматриваемому краю.

Произвольные постоянные C_1 , C_2 , C_3 , C_4 определяются из четырех граничных условий, причем на каждом крае цилиндрической оболочки могут быть поставлены два граничных условия.

Для жесткого закрепления нижнего края оболочки:

$$x = 0; w = 0; \frac{dw}{dx} = 0.$$

Для шарнирного закрепления нижнего края оболочки:

$$x = 0; w = 0; M_1 = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \text{ или } \frac{d^2 w}{dx^2} = 0.$$

Для свободного верхнего края оболочки:

$$x = H; M_1 = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = 0; Q_1 = -D \frac{d^3 w}{dx^3} = 0.$$

Запишем порядок расчета:

1. По условию задачи определяют составляющие внешней нагрузки p_1 и p_3 .
2. Записывают выражения для усилий безмоментной группы $N_1^0 = N_1^0(x)$ и $N_2^0 = N_2^0(x)$, и строятся эпюры усилий.
3. Определяют величину цилиндрической жесткости оболочки D , принимая модуль упругости E , толщину оболочки δ и коэффициент Пуассона ν по заданию.
4. По соответствующей зависимости находят величину коэффициента постели β .
5. Записывают граничные условия на соответствующих краях оболочки.
6. Находят значения постоянных интегрирования. Причем при рассмотрении напряженно-деформированного состояния у нижнего края оболочки считают $C_3 = C_4 = 0$, а у верхнего края $C_1 = C_2 = 0$.
7. Определяют зону краевого эффекта – длина полуволны затухающих функций равна $\lambda = \pi/\beta$.
8. Находят прогиб оболочки с учетом значений постоянных C_i и строят эпюру прогибов $W(x)$.
9. Определяют изгибающий момент с учетом постоянных интегрирования и строят эпюру $M_1(x)$.
10. Определяют поперечную силу с учетом постоянных интегрирования и строят эпюру $Q_1(x)$.
11. Находят кольцевое усилие с учетом найденных значений C_i и строят эпюру $N_2(x)$.

Приведем зависимости для любого случая закрепления оболочки у нижнего края, вводя в формулы функции А.Н. Крылова (табл.25.2):

$$W = C_1 \eta_2 + C_2 \eta_3 + \frac{P_3}{4D\beta^4}; M_1 = -2D\beta^2(C_1 \eta_3 - C_2 \eta_2);$$

$$Q_1 = -2D\beta^3(C_1 \eta_1 + C_2 \eta); N_2 = -\frac{E\delta}{R} \left(C_1 \eta_2 + C_2 \eta_3 + \frac{P_3}{4D\beta^4} \right);$$

$$\eta = e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x); \eta_1 = e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x);$$

$$\eta_2 = e^{-\beta x} \cos \beta x; \eta_3 = e^{-\beta x} \sin \beta x.$$

Таблица 25.2. Значения функций Крылова

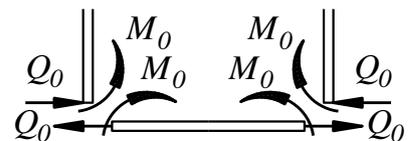
$\xi = \beta x$	η	η_1	η_2	η_3
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
0.2	0.9651	0.6398	0.8024	0.1627
0.4	0.8784	0.3564	0.6174	0.2610
0.6	0.7628	0.1431	0.4530	0.3099
0.8	0.6354	-0.0093	0.3131	0.3224
1.0	0.5083	-0.1108	0.1988	0.3096
1.2	0.3899	-0.1716	0.1091	0.2807
1.4	0.2849	-0.2011	0.0419	0.2430
1.6	0.1959	-0.2077	-0.0059	0.2018
1.8	0.0234	-0.1985	-0.0376	0.1610
2.0	0.0667	-0.1794	-0.0563	0.1231
2.2	0.0244	-0.1548	-0.0652	0.0896
2.4	-0.0056	-0.1282	-0.0669	0.0613
2.6	-0.0254	-0.1019	-0.0636	0.0383
2.8	-0.0369	-0.0777	-0.0573	0.0204
3.0	-0.0423	-0.0563	-0.0493	0.0071
3.2	-0.0431	-0.0383	-0.0407	0.0024
3.4	-0.0408	-0.0237	-0.0323	-0.0085
3.6	-0.0366	-0.0124	-0.0245	-0.0121
3.8	-0.0314	-0.0040	-0.0177	-0.0137
4.0	-0.0258	0.0019	-0.0120	-0.0139
4.2	-0.0204	0.0057	-0.0074	-0.0131
4.4	-0.0155	0.0079	-0.0038	-0.0117
4.6	-0.0111	0.0089	-0.0011	-0.0100
4.8	-0.0075	0.0089	0.0007	-0.0082
5.0	-0.0046	0.0084	0.0019	-0.0065

В итоге занятия необходимо провести анализ напряженно-деформированного состояния оболочки:

- оценить возможность определения усилий в отдельных сечениях оболочки по безмоментной теории;
- указать сечение оболочки с максимальным значением изгибающего момента и определить его величину;
- показать характер эпюр M_1 и Q_1 , при различных условиях закреплений оболочки у основания и указать на наиболее невыгодные условия работы оболочки в исследуемых случаях;
- записать граничные условия для определения постоянных C_1 и C_2 в случае реального закрепления оболочки с днищем, используя при этом один из методов строительной механики:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1p} = 0 \quad \delta_{ik} = \delta_{ik}^{об} + \delta_{ik}^{ДН};$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} = 0 \quad \Delta_{ip} = \Delta_{ip}^{об} + \Delta_{ip}^{ДН}.$$

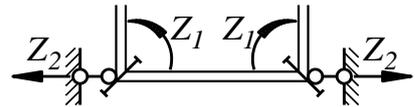


Для метода сил, приняв $M_0 = X_1$; $Q_0 = X_2$ имеем:

Для метода перемещения, приняв $W = Z_2$; $\varphi = dW/dx = Z_1$ имеем:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \quad r_{ik} = r_{ik}^{об} + r_{ik}^{ДН};$$

$$r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + R_{2p} = 0 \quad R_{ip} = R_{ip}^{об} + R_{ip}^{ДН}.$$



Для расчета сопряжения двух оболочек, усиленного кольцом жесткости, метод перемещений удобнее метода сил.

После изучения данной темы студент должен обладать следующими компетенциями:

- **знать** порядок расчета цилиндрических оболочек вращения;
- **уметь** строить эпюры внутренних усилий цилиндрических оболочек вращения;
- **владеть** методикой для дальнейшего проектирования;
- суметь **ответить** на следующие вопросы:
 1. Как упрощаются уравнения равновесия для цилиндрических оболочек, нагруженных осесимметричной нагрузкой?
 2. Что такое «краевой эффект»?
 3. Каков порядок расчета оболочек с учетом краевых эффектов?
 4. В чем состоит отличие граничных условий для случаев жесткого и шарнирного закреплений края оболочки?
 5. Как определяются постоянные общего решения прогибов цилиндрической оболочки?
 6. Какова взаимосвязь внутренних усилий и прогиба в цилиндрической оболочке, нагруженной осесимметрично?

ГЛАВА 7. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА SCAD OFFICE ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Метод конечных элементов (МКЭ) – численный метод решения дифференциальных уравнений, описывающих физические и инженерные задачи. При расчете строительных конструкций эти уравнения являются функциями прогиба. МКЭ является универсальным методом, однако его применение для «ручного» расчета возможно лишь для простейших задач, так как приводит к необходимости решения систем уравнений высокого порядка с большим числом неизвестных. Метод успешно реализован в многочисленных программах конечно-элементного расчета (ANSYS, COSMOS, ЛИРА, STARK, SCAD и др.).

Сущность метода состоит в делении конструкции на отдельные элементы достаточной простой конфигурации, напряженно-деформированное состояние которых предварительно исследовано и для них уже составлены уравнения «жесткости». При этом для каждого элемента выполняются все три группы уравнений: статические – уравнения равновесия, геометрические – уравнения неразрывности деформаций или перемещений и физические – например, закон Гука.

Стержневые системы могут быть разбиты на элементы в виде прямолинейных элементов с различными условиями их закрепления по концам. Тонкостенные пространственные системы, состоящие из пластин и оболочек, разбиваются на треугольные или четырехугольные плоские элементы. Массивные конструкции могут быть разбиты на элементы в виде тетраэдров или параллелепипедов.

Все конечные элементы соединяются друг с другом в узлах, для каждой из которых соблюдаются условия равновесия и неразрывности перемещений. Все внешние силы считаются приложенными в узлах, а внеузловая нагрузка предварительно приводится к эквивалентной узловой.

При реализации МКЭ наиболее широкое распространение получили идеи метода перемещений по двум причинам: во-первых, при построении вспомогательного напряженного состояния из многоэлементной конструкции легче получить кинематически определимую систему, нежели статически определимую; во-вторых, при расчете методом перемещений матрица коэффициентов при неизвестных канонической системы уравнений – матрица жесткости – составляется достаточно просто из табличных значений жесткости отдельных элементов.

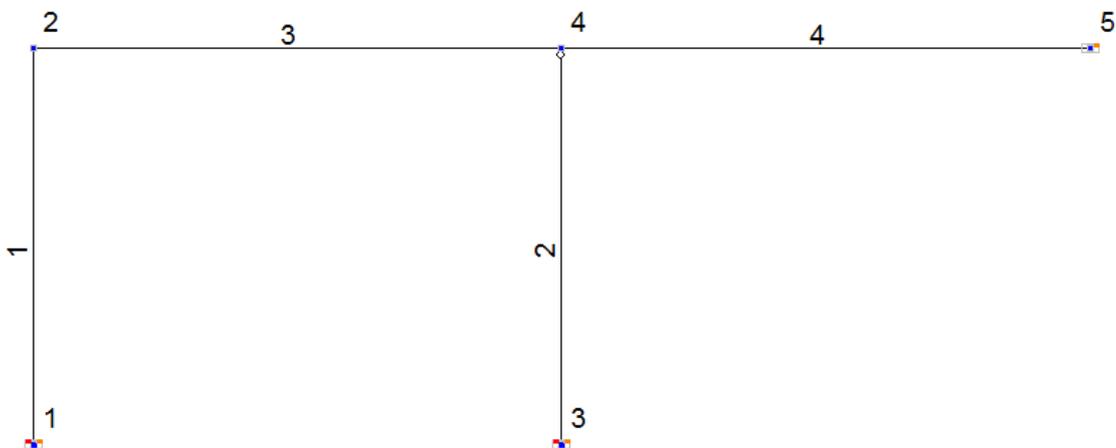
Такой подход является единственным как для стержневых систем, так и для континуальных систем (пластинок, оболочек и массивов). Поэтому метод конечных элементов позволяет рассчитывать реальные конструкции, в которых сочетаются все указанные элементы.

ТЕМА 26. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РАМ НА СИЛОВОЕ, ТЕМПЕРАТУРНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ И СМЕЩЕНИЯ ОПОР

До выполнения заданий студент должен знать основные возможности программного комплекса SCAD Office, для чего ему предлагается ознакомиться и повторить решения подробно разобранных примеров из учебного пособия «Проектно-вычислительный комплекс SCAD в учебном процессе. Часть 1», авторы Семенов А.А., Габитов А.И. В пособии изложены общие сведения о проектно-вычислительном комплексе SCAD и на его основе рассмотрены алгоритмы формирования характерных типов моделей конструкций, а также определения и визуализация их напряженно-деформируемого состояния.

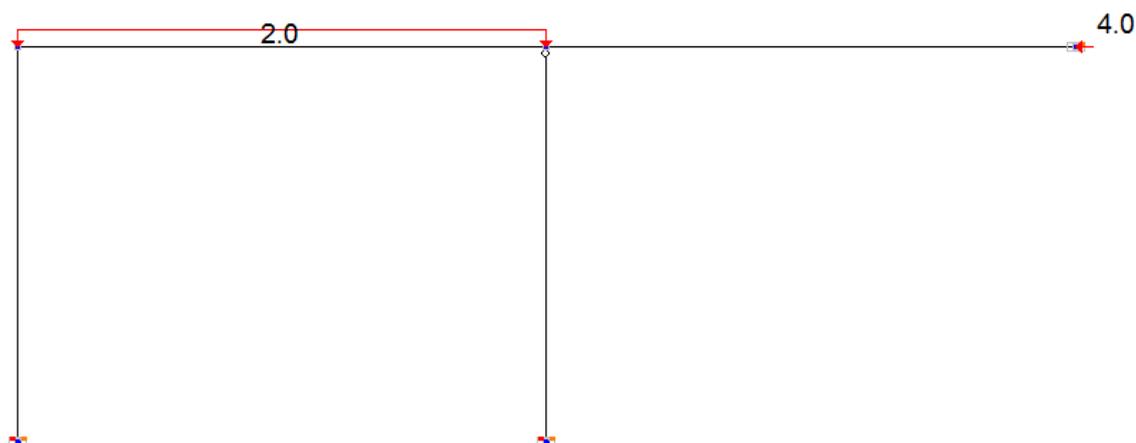
Порядок выполнения задания:

1. Запускаем программу SCAD программного комплекса SCAD Office.
2. Создаем задачу для решения плоских рам и сохраняем под любым названием (Новый проект / Тип схемы – «плоская рама»). При расчете ферм выбираем тип схемы «плоская шарнирно-стержневая система».
3. Последовательно вводим узлы (Узлы и элементы / Узлы / Ввод узлов) и элементы (Узлы и элементы / Элементы / Добавление стержней) расчетной схемы в плоской системе координат XoZ , приняв за начало координат левый нижний угол рамы.
4. Назначаем относительную жесткость элементам согласно расчетной схеме (Назначение / Назначение жесткостей стержням). Предлагаем элементам с жесткостью EI назначать параметрическое сечение $b \times h = 10 \times 10$ см, а элементам, имеющим другую жесткость, значение параметра b увеличивать пропорционально их жесткостям. Например, элементу с жесткостью $2EI$ назначить сечение $b \times h = 20 \times 10$ см.
5. Прикладываем к закрепленным узлам расчетной схемы соответствующие связи в направлениях X , Y и Uy (Назначения / Установка связей в узлах).

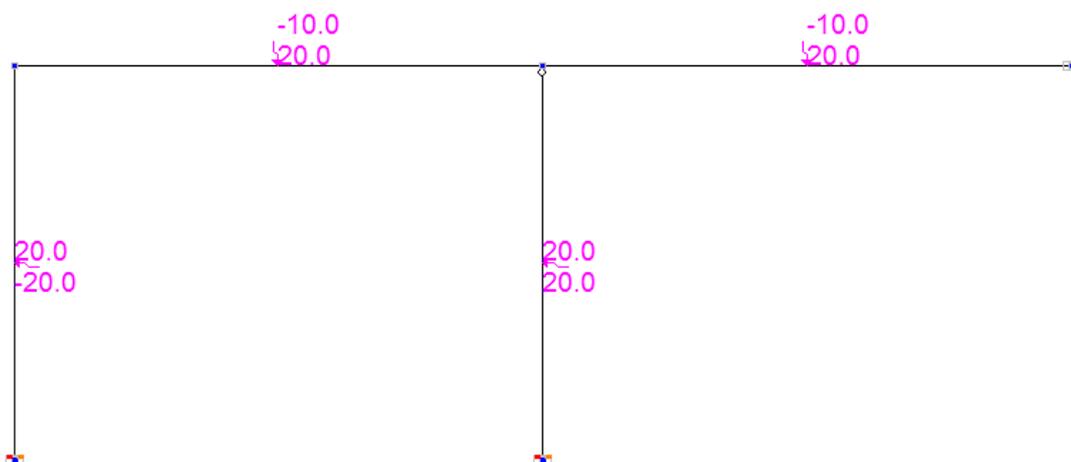
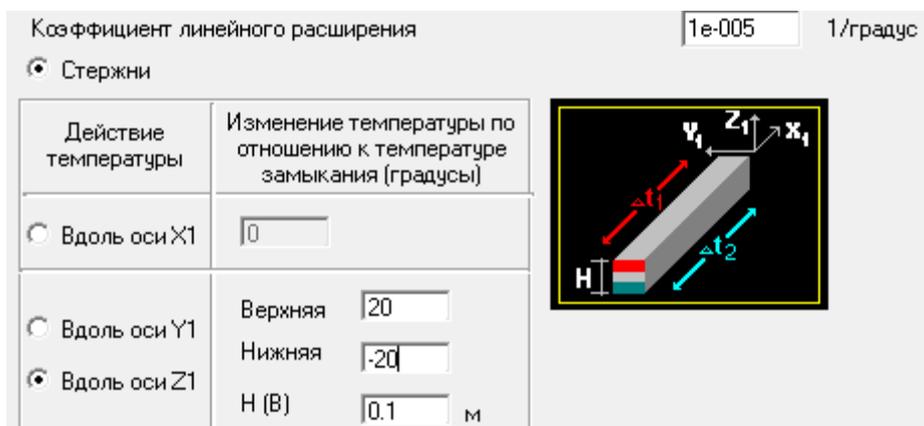


6. Освобождаем шарнирные узлы расчетной схемы от угловых связей Uy (Назначения / Установка шарниров).
7. Прикладываем силовое воздействие на узлы (Загрузки / Узловые нагрузки) или стержни (Загрузки / Нагрузки на стержни), и сохраняем

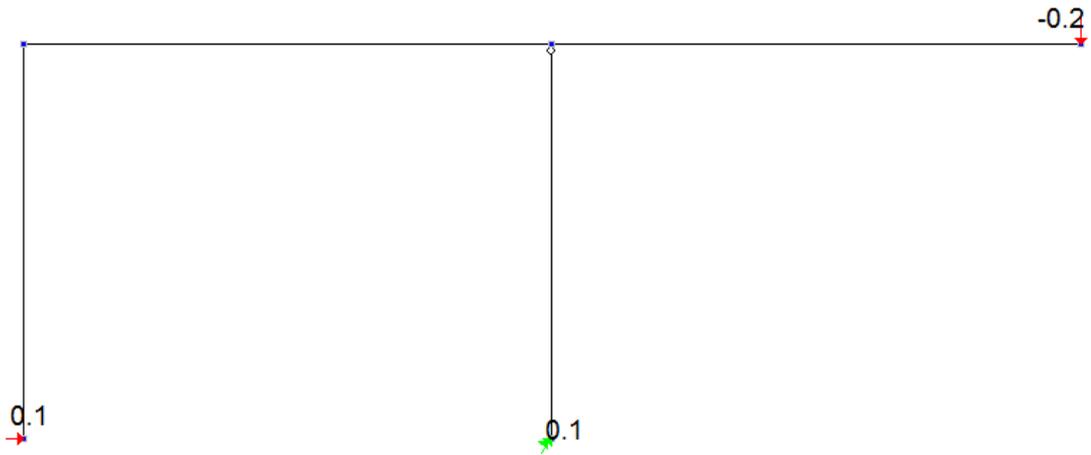
загружение под названием «Силовое воздействие» (Загружения / Сохранить загружение). Переходим к формированию следующего загружения.



- Прикладываем температурное воздействие к стержню в местной системе координат вдоль оси $Z1$ (Загружения / Задание температурных нагрузок) и сохраняем загружение под названием «Температурное воздействие».



- Прикладываем смещения опор в закрепленных узлах (Загружения / Заданное перемещение) и сохраняем загружение под названием «Смещения опор».



10. Выходим в экран управления проектом и (Управление / Экран управления проектом) и выполняем Линейный расчет (РАСЧЕТ / Линейный).

11. В режиме графического анализа (РЕЗУЛЬТАТЫ / Графический анализ) анализируем деформированную схему (Деформации / Отображение деформированной схемы) и эпюры внутренних усилий (Эпюры усилий / Эпюры / M, Q, N) для различных вариантов загрузки.

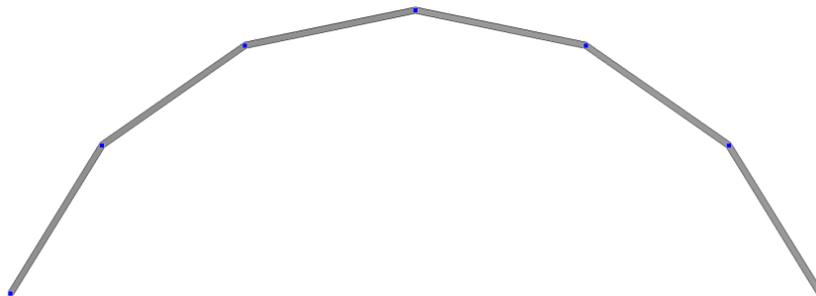
	Деформированная схема	Эпюра изгибающих моментов
Силовое воздействие		
Температурное воздействие		
Осадка опор		

ТЕМА 27. АНАЛИЗ РАБОТЫ ПЛОСКОЙ АРКИ НА СИЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

При расчете арочных конструкций с использованием ПК SCAD следует учитывать следующие особенности.

1. *Особенности расчетной схемы.* Представление криволинейного стержня в МКЭ возможно только путем разбиения его на прямолинейные КЭ. Чем большее количество разбиений, тем выше геометрическая точность описания системы (рис. 1а,б)

а)



б)

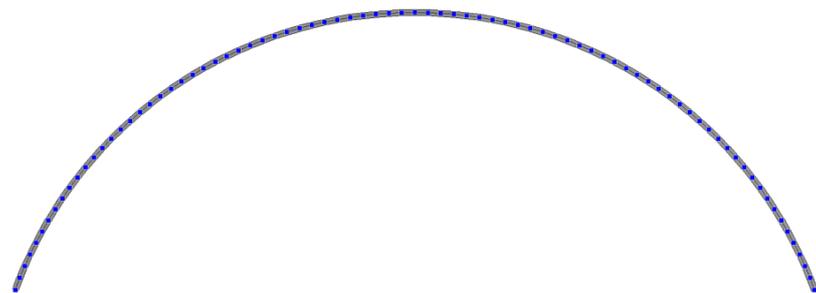
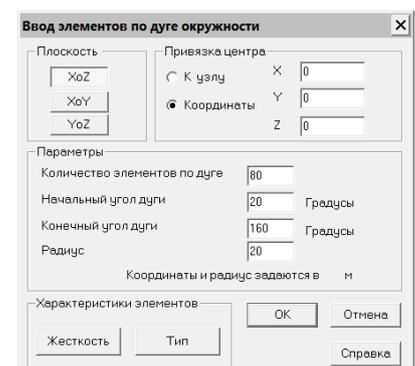


Рисунок 27.1. Расчетная схема круговой арки с числом разбиений на: а) - 6 элементов; б) - 80 элементов.

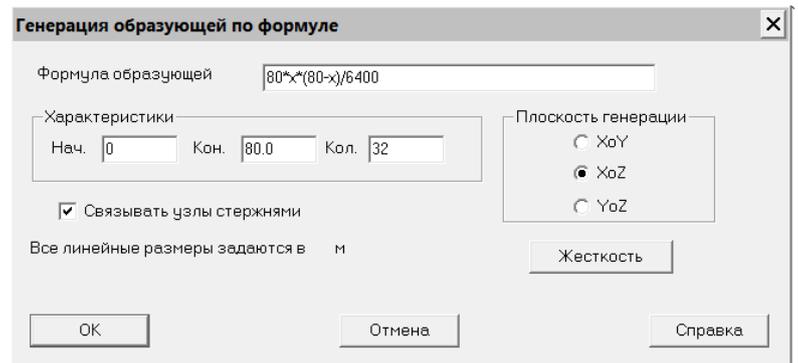
Однако, чрезмерное увеличение количества разбиений (а следовательно и размера матрицы жесткости решаемой задачи) может привести к увеличению вычислительных операций, а также к падению математической точности получаемых результатов. Следует процесс назначения количества конечных элементов арочных конструкций оптимизировать, ограничившись количеством разбиения в пределах 20-60.

2. *Генерация расчетной схемы.* В ПК SCAD реализованы два основных способа генерации схемы арочных конструкций. Первый способ позволяет получить арку кругового очертания в окне *Узлы и элементы - Элементы - Ввод элементов по дуге* . При этом следует задавать жесткости и тип элементов в отрывшемся окне.



Первый способ позволяет получить схему с равными по длине конечными элементами, позволяющую удобно работать с нагрузками с МСК.

Второй способ следует использовать при создании арок параболического и других очертаний, описываемых аналитическими зависимостями, в окне *Узлы и элементы - Узлы - Генерация образующей по формуле* . Необходимо в раскрывшемся окне активизировать *Связывать узлы стержнями*, что даст возможность здесь же задать жесткости элементов схемы.



Второй способ позволяет получить схему с равными длинами проекций КЭ на горизонтальную ось, что позволяет удобно задавать внешние вертикальные нагрузки в ОСК в виде узловых воздействий.

3. *Приложение нагрузок.* Нагрузки на арку могут быть приложены как в ОСК (снеговые, постоянные, временные подвижные и т.п. нагрузки), так и в МСК (нагрузки от ветра, избыточного давления и т.п.).

В подавляющем большинстве задач строительной механики внешние нагрузки представляются в виде «балочных» схем нагружения. На этом основывается аналитический расчет арок. Что бы реализовать корректную схему передачи подобных нагрузок предлагается вводить в схему шарнирно-стержневую цепь, показанную на рис.27.2.

Шарнирно-стержневая цепь образуется из элементов типа 1, элементы арки - из элементов типа 2. Данный прием оправдан при расчете схемы на нагрузки, действие которых происходит на горизонтальную поверхность (снег, подвижные нагрузки и т.п.).

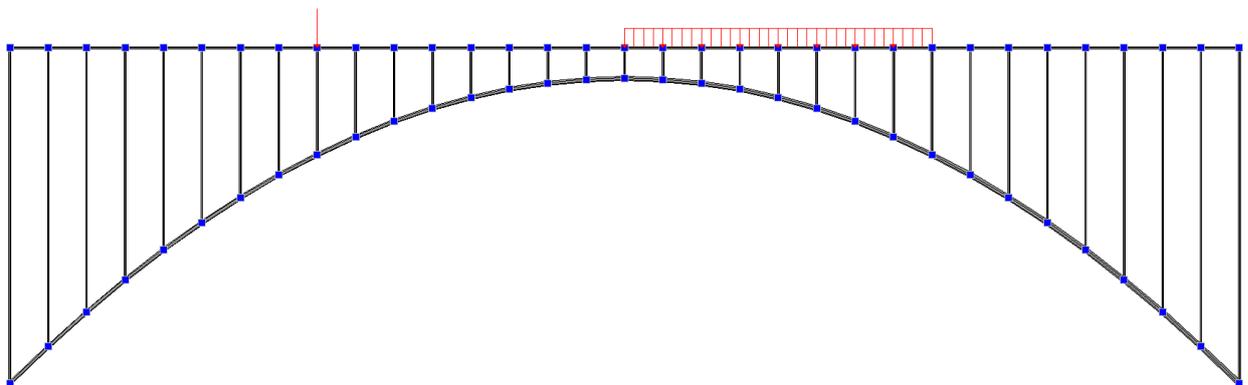


Рисунок 27.2. Схема шарнирно-стержневой системы для корректной реализации «балочной» схемы нагружения.

В случае рассмотрения загрузений от собственного веса (который является решающим при большепролетных сооружениях), веса ограждающих кон-

струкций и технологического оборудования нагрузки следует прикладывать в ОСК непосредственно к КЭ схемы.

При рассмотрении ветровых нагрузок, нагрузок от вакуумметрического давления, избыточного давления следует прикладывать нагрузки в МСК (рис.6).

Пример 27.1. Расчет арки от произвольного силового нагружения

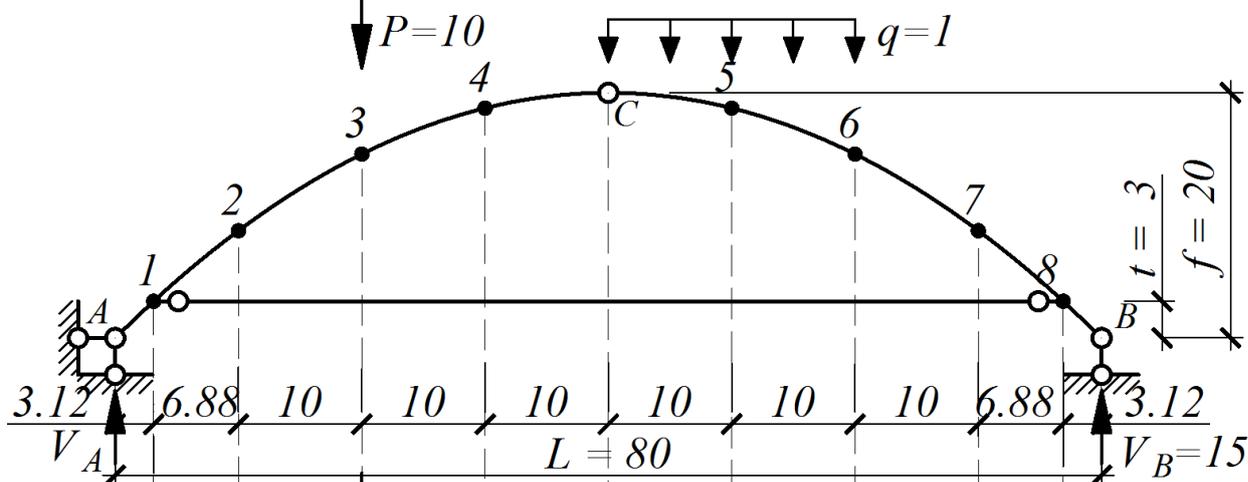


Рисунок 27.3. Исходная схема (взята из решенного примера 4).

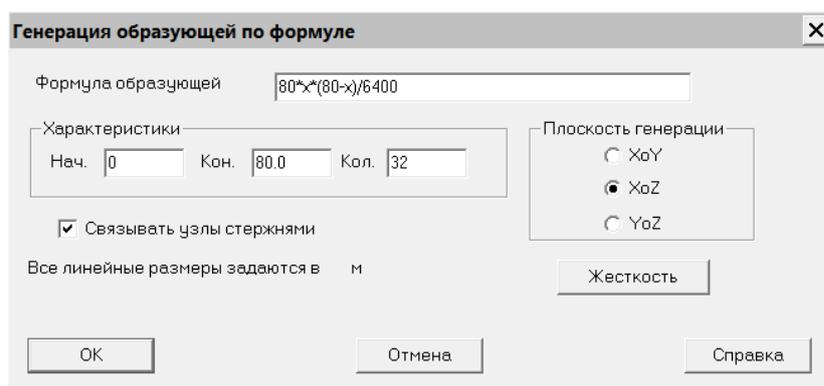


Рисунок 27.4. Диалоговое окно генерации образующей.

Затяжку моделируем путем введения стержня на высоте расположения затяжки, последующего его дробления в точке пересечения с образующей арки и удаления лишних элементов.

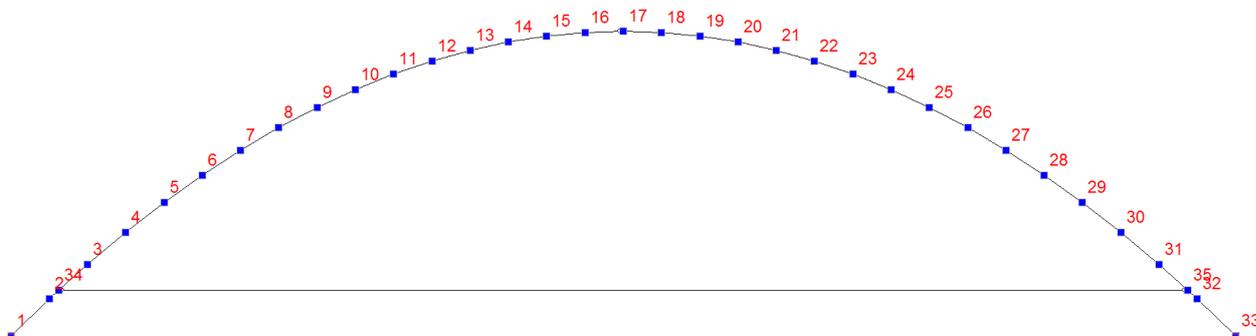


Рисунок 27.5. Вид расчетной схемы с нумерацией узлов

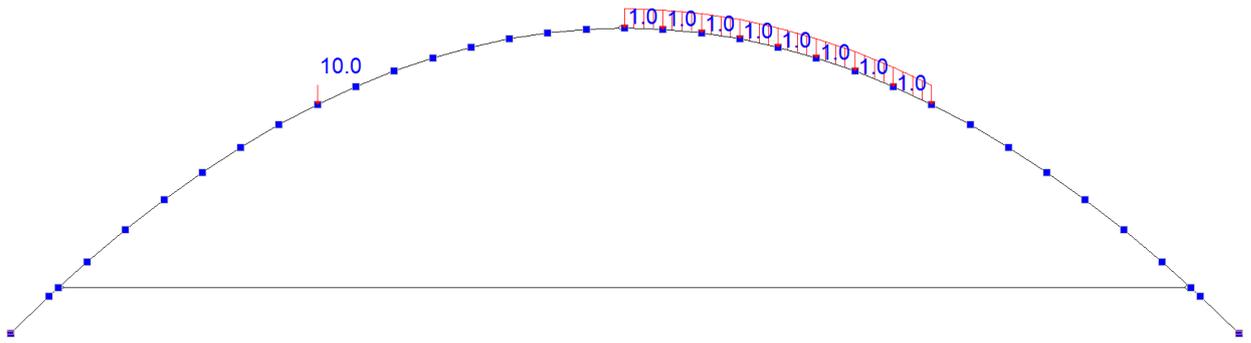


Рисунок 27.6. Схема приложения нагрузки

Выполняем линейный расчет и сопоставляем полученные данные с результатами аналитических расчетов.

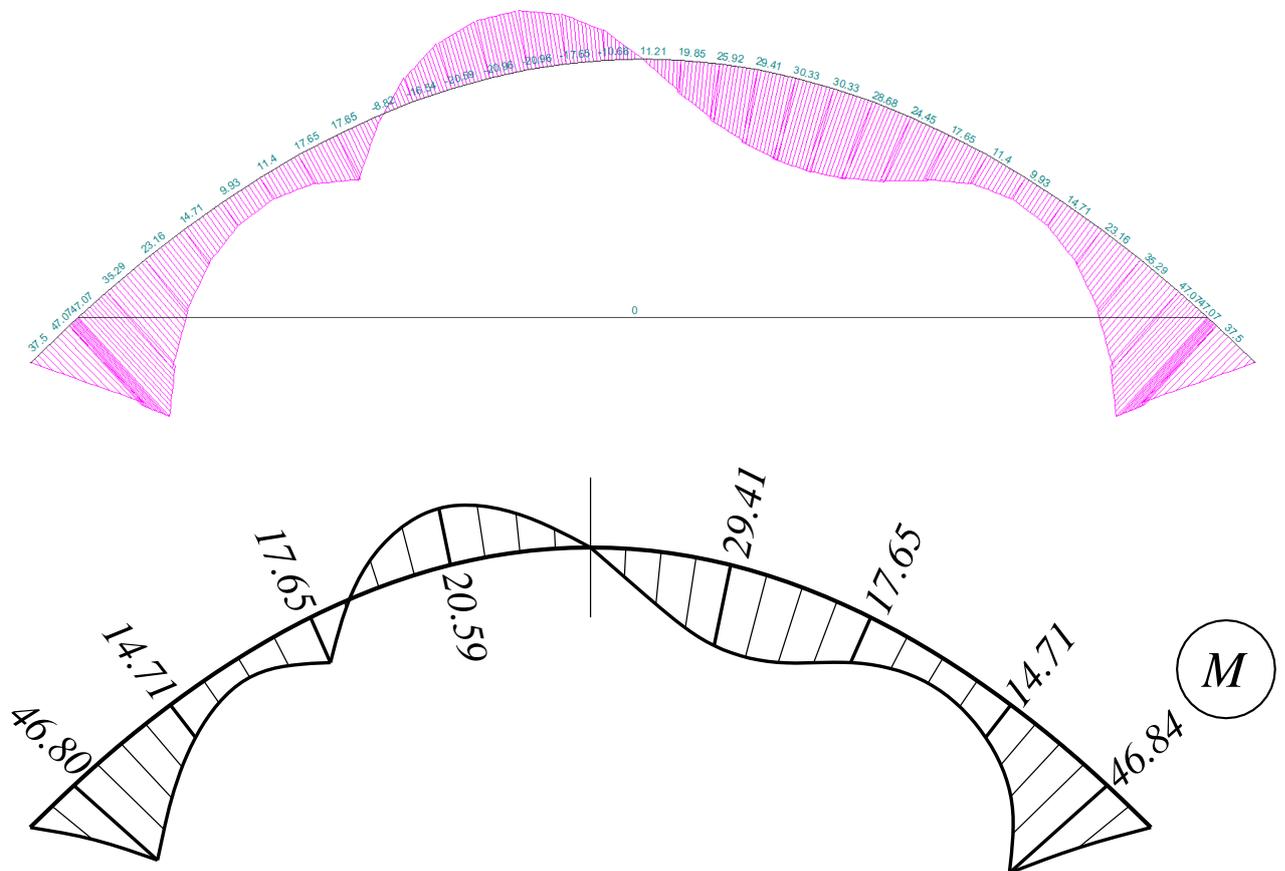


Рисунок 27.7. Сопоставление значений и характера эпюр изгибающих моментов

ТЕМА 28. РАСЧЕТ РАМ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Расчет рам на определение критической силы выполним на примере. Исходная схема взята из примера 17.1 и представлена на рисунке.

Для выполнения расчета используем возможности автоматической генерации схем.

1. Формирование расчетной схемы рамы.

Задание параметров регулярной рамы

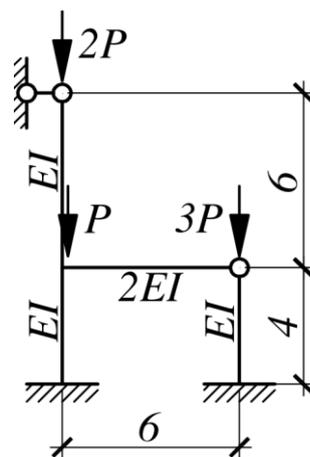
Длины пролетов	Количество пролетов	Высоты этажей	Количество этажей
6	1	4	1
		6	1

Все размеры м

Связи
 Автоматическая установка связей
 X Y Z
 Ux Uy Uz

Жесткости
 Колонны Ригели

Назначение типа КЭ



Задание жесткостей элементов колонн и ригелей можно задать в этом же окне. При решении задач устойчивости решение напрямую зависит от количественной оценки жесткости EJ_y . Для первого приближения следует задавать жесткости в относительных величинах, строго соблюдая их соотношения.

Жесткости стержневых элементов

Общие данные | Численное описание

Тип элемента

- Стержень плоской фермы (Тип 1)
- Стержень плоской рамы (Тип 2)
- Стержень балочного ростверка (Тип 3)
- Стержень пространственной фермы (Тип 4)
- Пространственный стержень (Тип 5)
- Пространственный стержень с учетом сдвига (Тип 6)
- Стержень балочного ростверка на упругом основании (Тип 7)

Продольная жесткость EF: 1000000 Т

Изгибная жесткость

EI_y : 1 Т*м² EI_z : Т*м²

Крутильная жесткость $GJ_{кр}$: Т*м²

Сдвиговая жесткость

GF_y : Т GF_z : Т

Размеры ядра сечения

Y_1 : м Y_2 : м
 Z_1 : м Z_2 : м

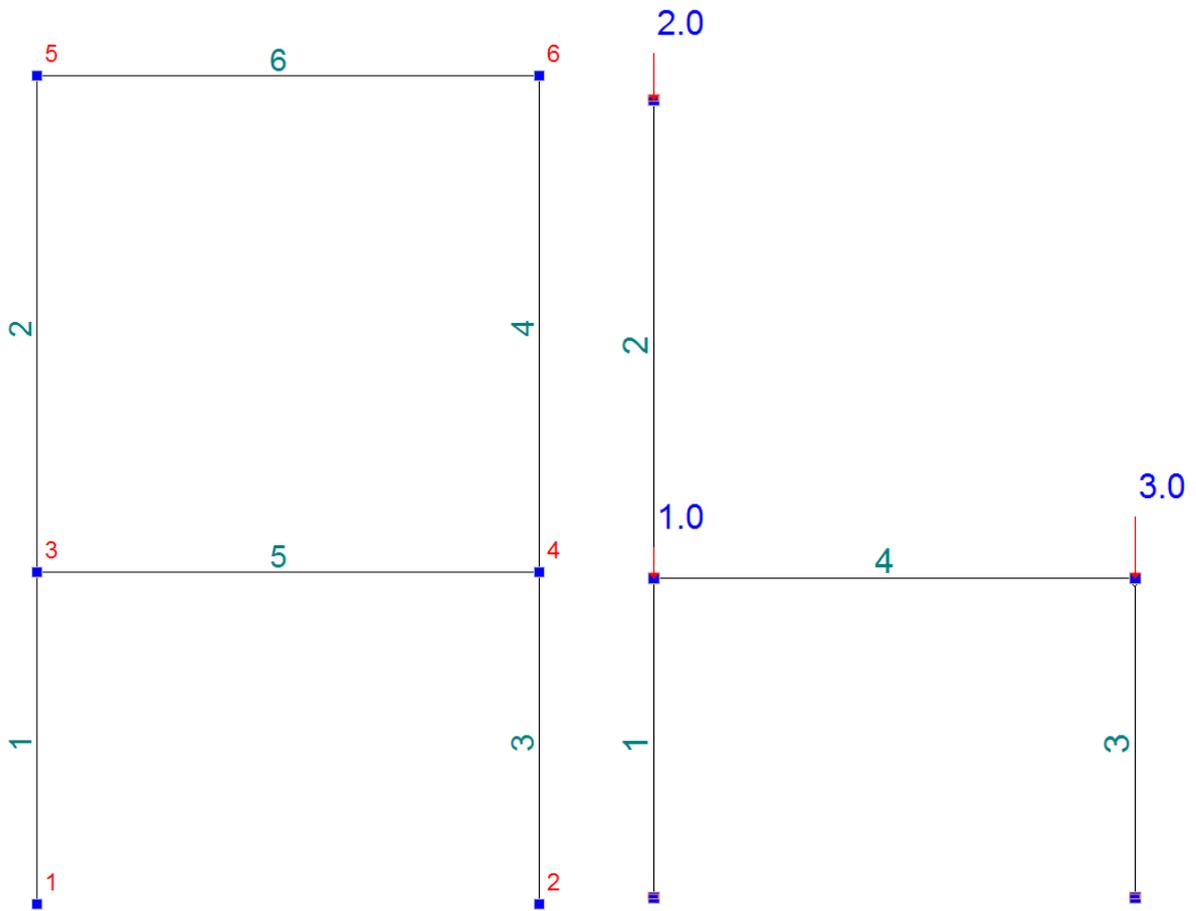
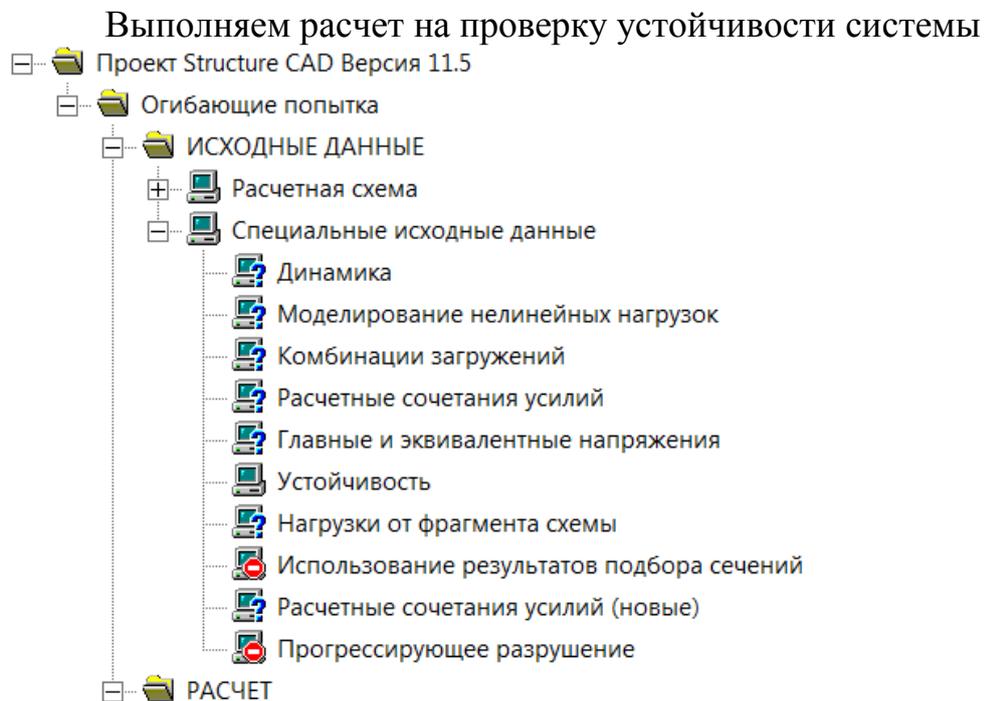
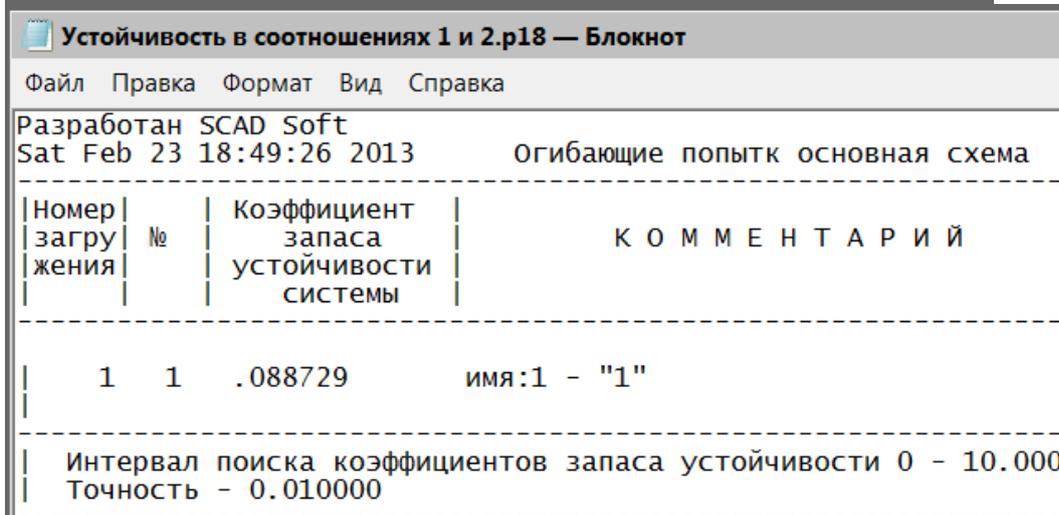
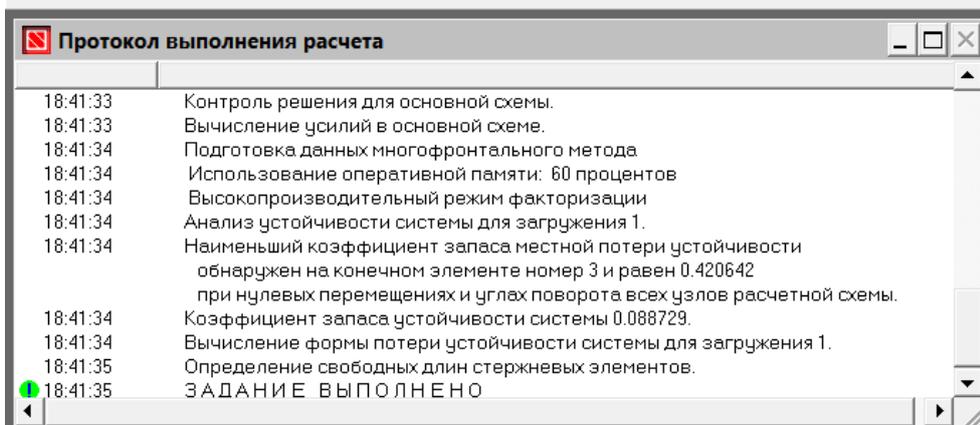
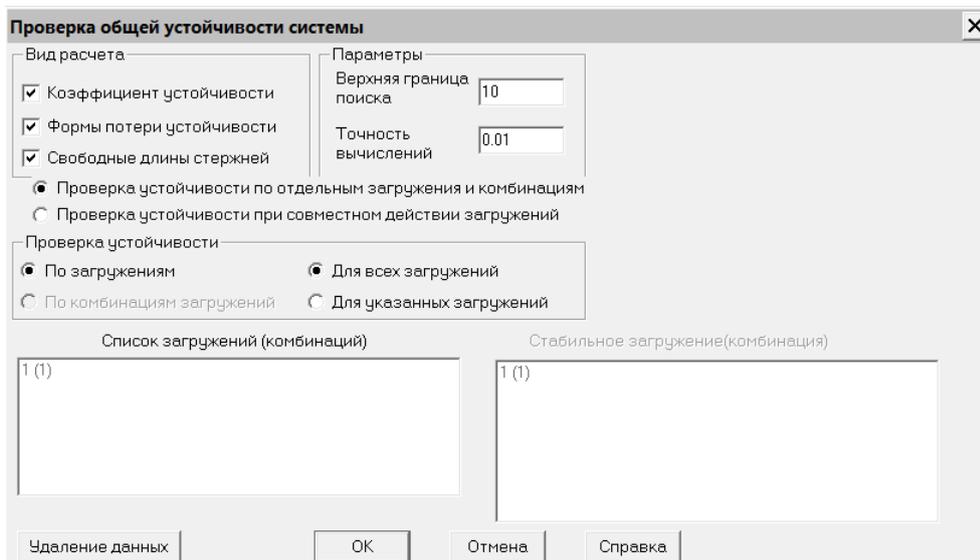


Рисунок 28.1. Расчетная схема

Удалив лишние элементы, установив связи и задав нагрузки получаем окончательную расчетную схему





Получаем результат в виде коэффициента запаса устойчивости системы, равной $0.0887EJ/P$, что и является результатом расчета.

Для наглядного анализа формы потери устойчивости схемы выполним разбивку стержней на мелкие участки и повторно проведем расчет.

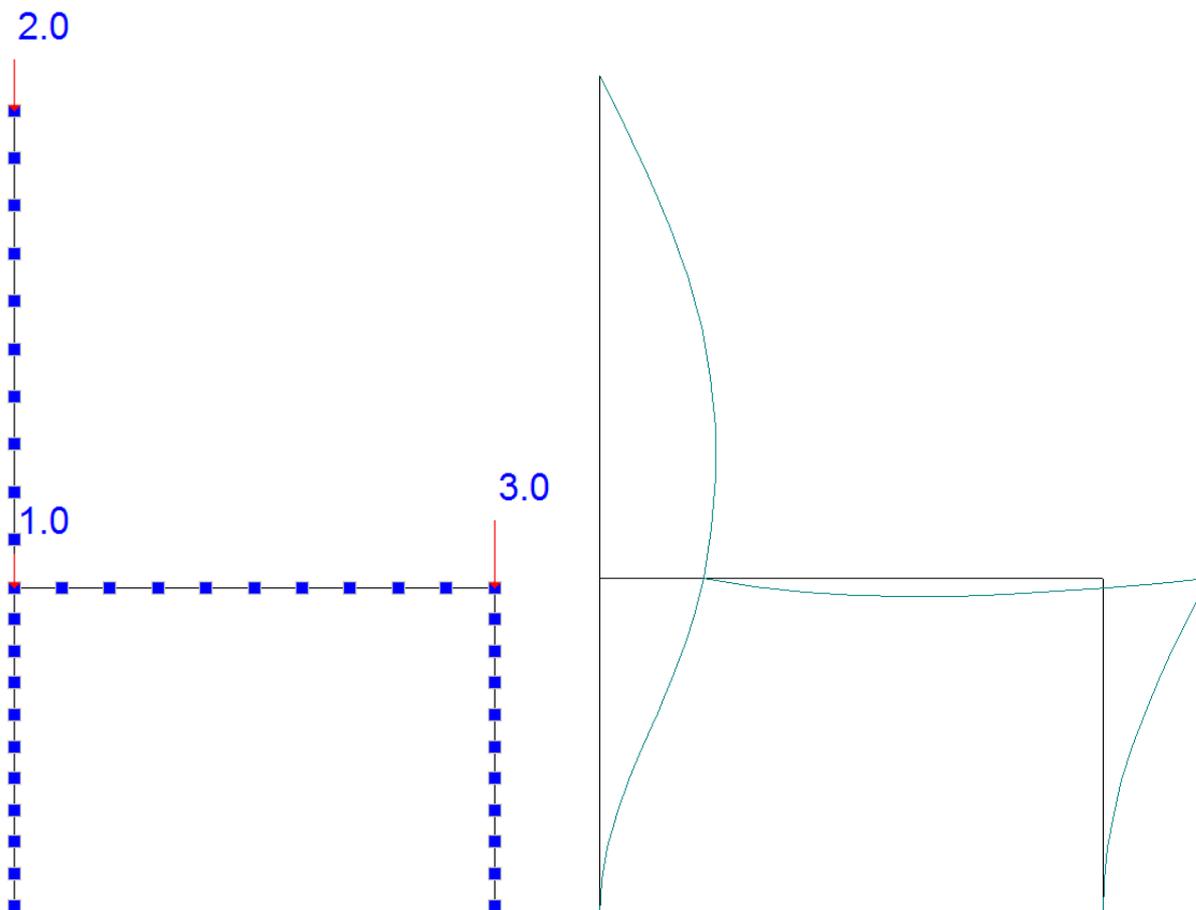


Рисунок 28.2. Наиболее вероятная форма потери устойчивости системы

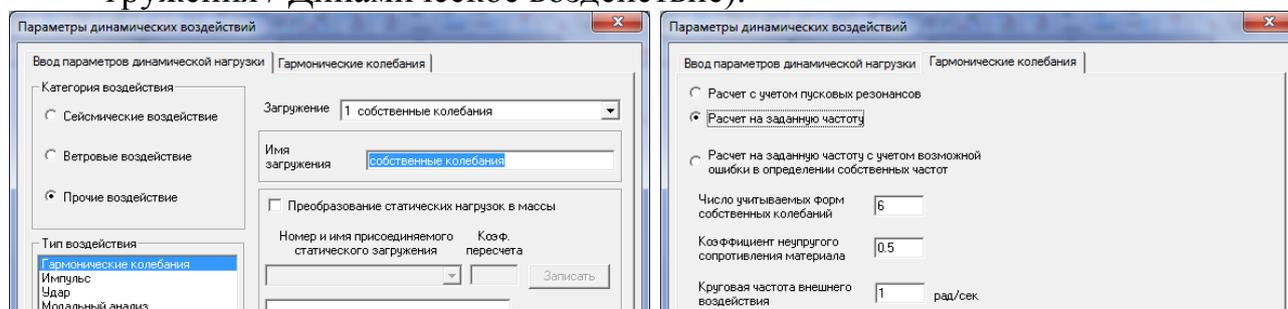
ТЕМА 29. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ

Выполним расчет рамы на определение собственной частоты колебаний с использованием программного комплекса SCAD Office.

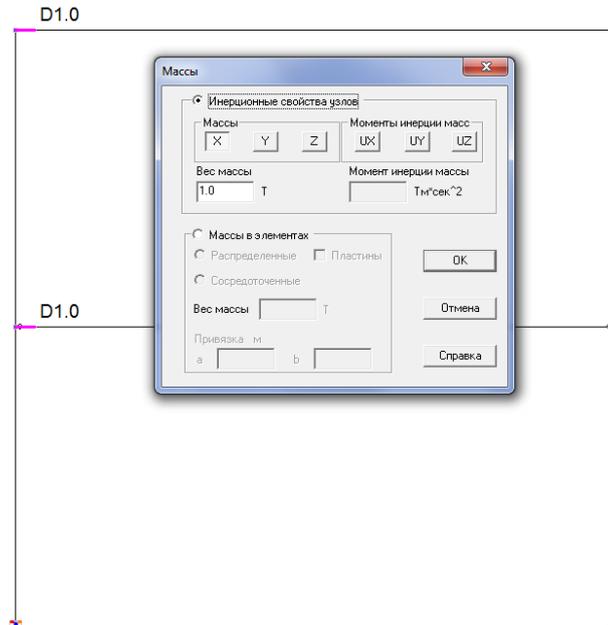
Порядок выполнения задания.

Повторяем пп.1...6 по теме 26 применительно для своего задания и создаем геометрическую схему. Далее, с п.7...

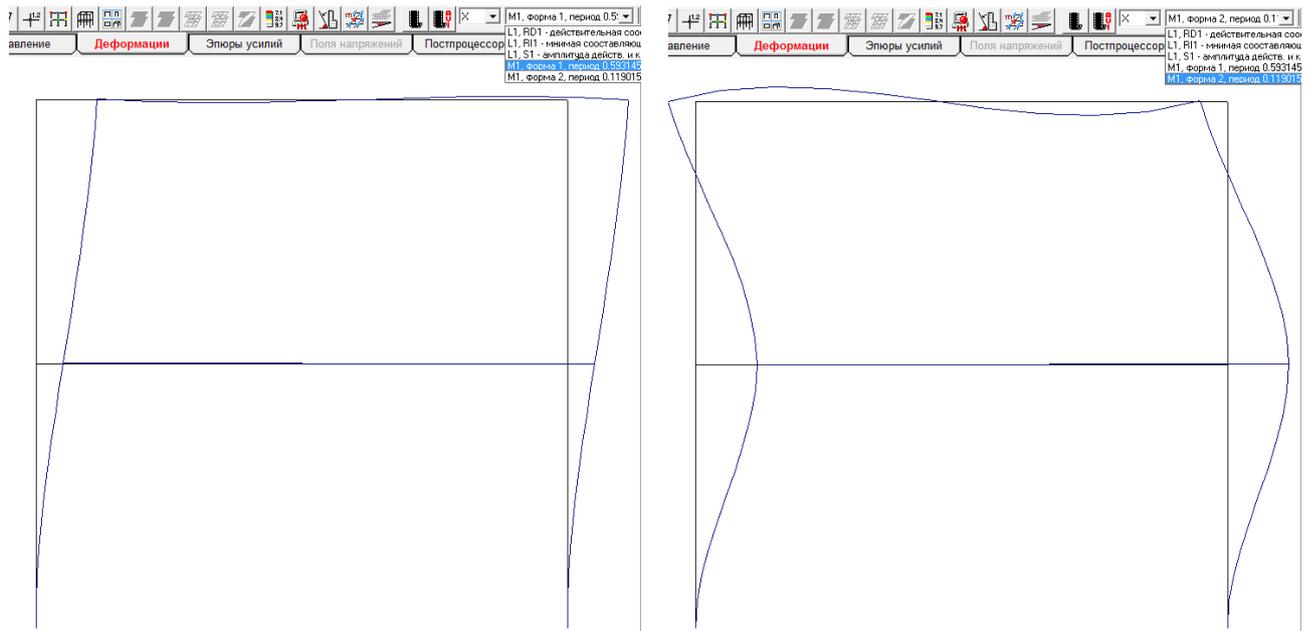
7. Создаем динамическое нагружение и вводим параметры нагружения (Загружения / Динамическое воздействие).



8. Прикладываем инерционные свойства узлов, к которым приложена сосредоточенная масса, в направлении их возможного колебания (Загружения / Инерционные характеристики / Задание масс).



9. Выполняем расчет и получаем результаты деформирования в режиме графического анализа результатов (Деформации / Отображение деформированной схемы). Получаем результаты определения собственной частоты колебаний: $\varphi_1 = 0.593$, $\varphi_2 = 0.119$.

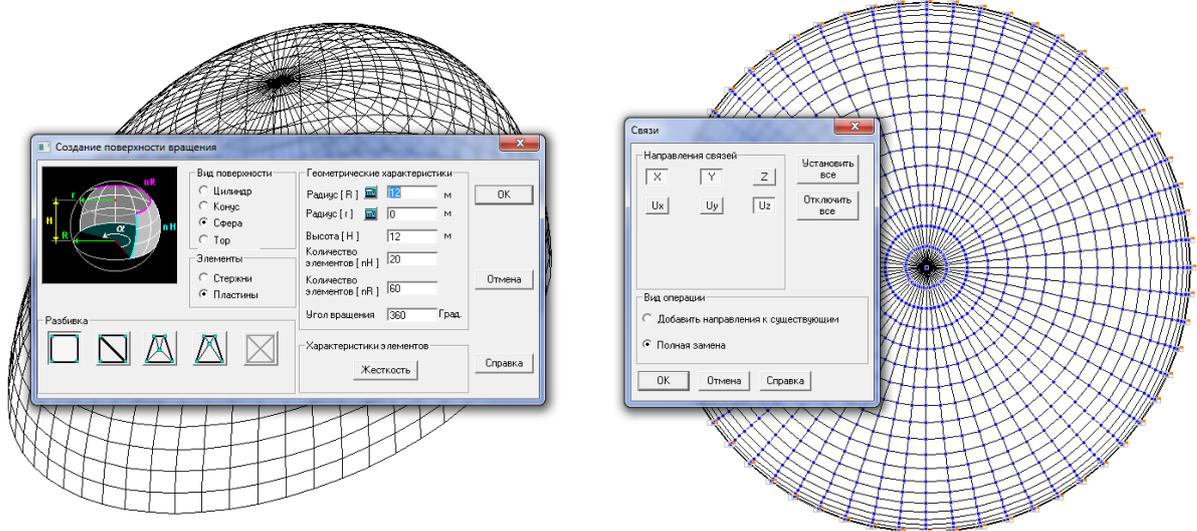


ТЕМА 30. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

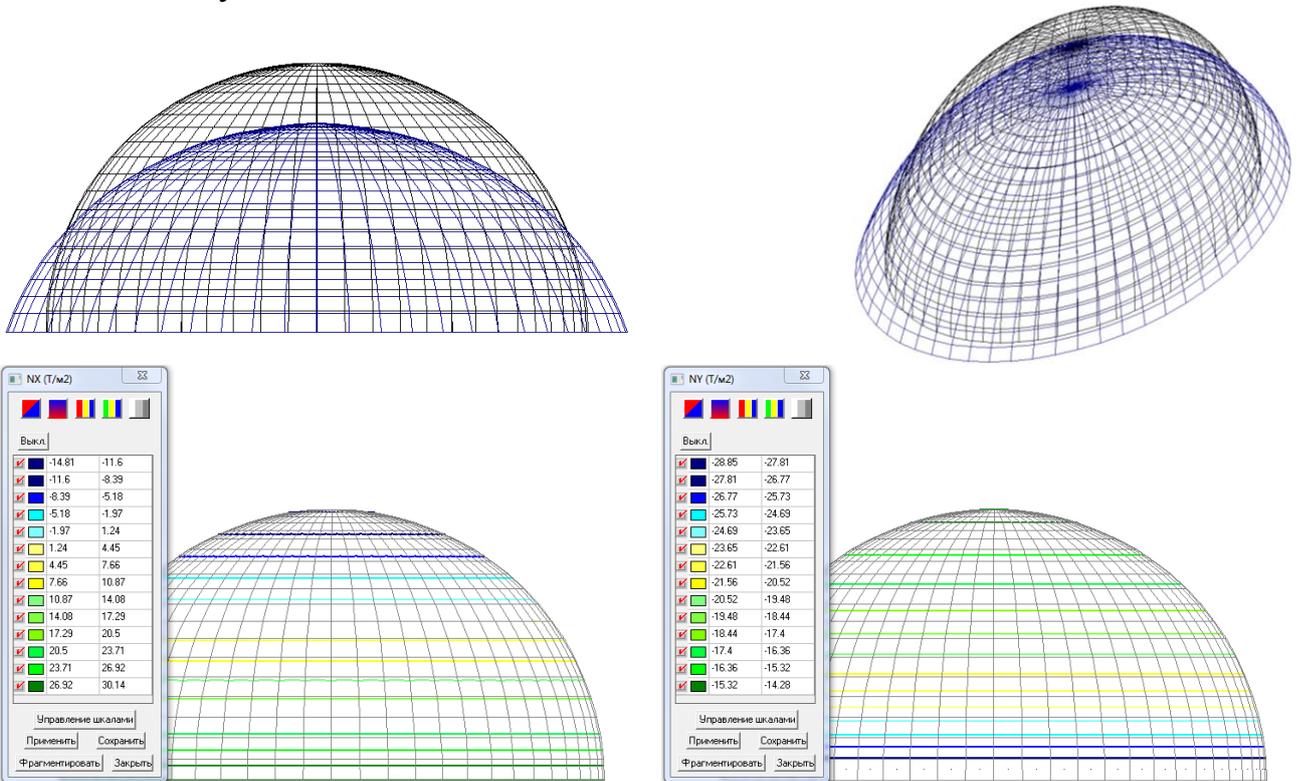
Рассмотрим порядок расчета тонкостенных оболочек с использованием программного комплекса SCAD Office.

1. Запускаем программу SCAD программного комплекса SCAD Office и создаем задачу для решения пространственных систем общего вида.
2. С использованием возможностей автоматической генерации создаем геометрическую схему купола (Схема / Создание поверхностей вращения).
3. К узлам по нижнему поясу прикладываем связи в направлении Z, а к узлу, расположенному по оси симметрии, прикладываем связь в направлениях

X, Y и Uz. При этом используем различные проекции расчетной схемы с помощью панели визуализации и используем возможность выбора группы узлов с помощью рамки (Правая кнопка мыши на экране / Вид курсора прямоугольник).



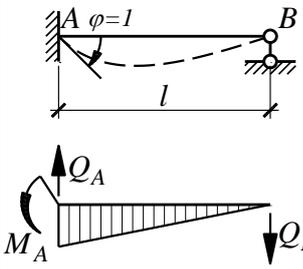
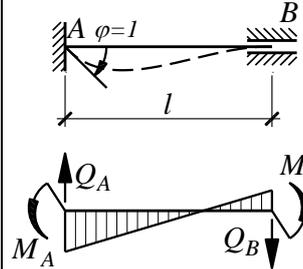
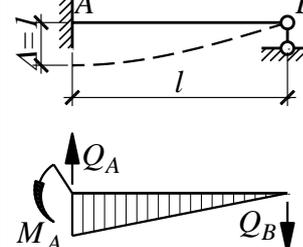
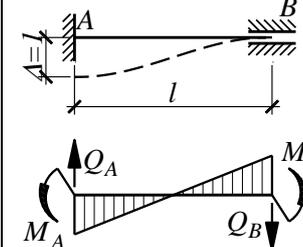
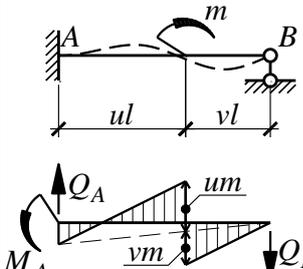
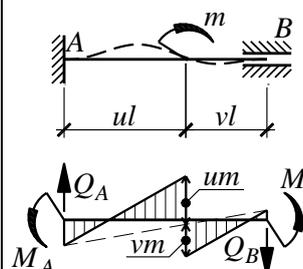
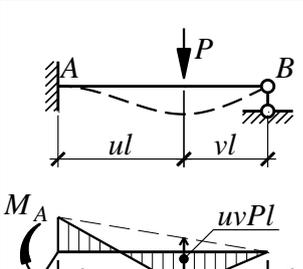
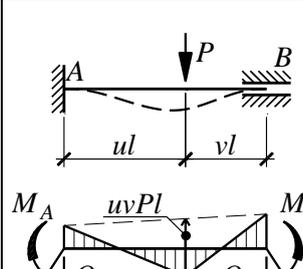
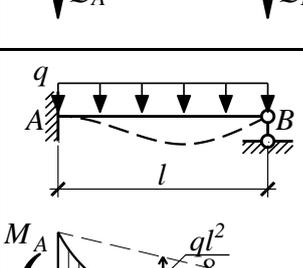
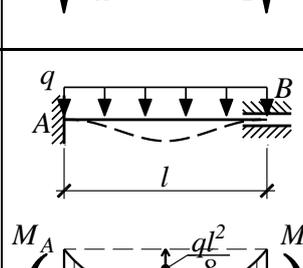
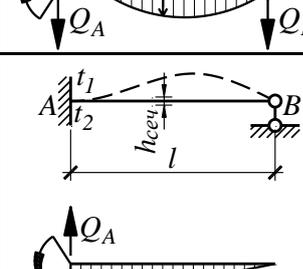
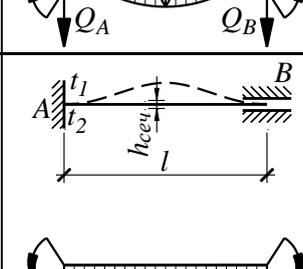
4. Назначаем жесткость элементам (Назначения / Назначения жесткостей пластинам) и прикладываем нагрузку от собственного веса (Загружения / Собственный вес).
5. Выполняем линейный расчет. Анализируем деформированную схему и поля напряжений. Усилия определяются как произведение напряжений на толщину пластины.



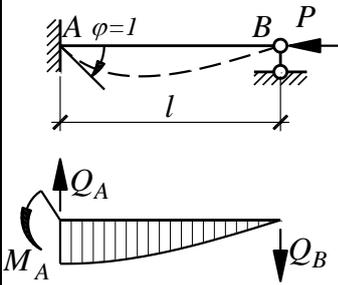
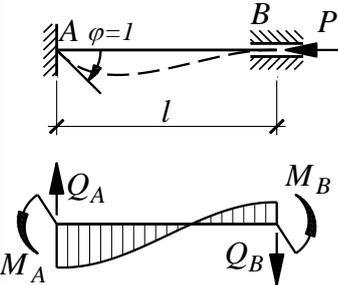
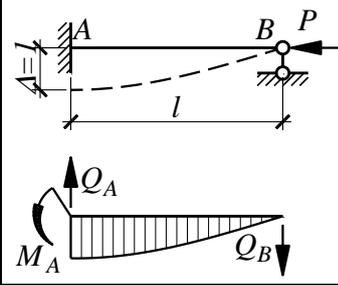
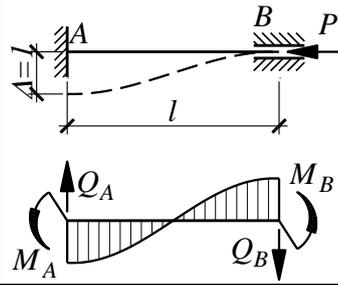
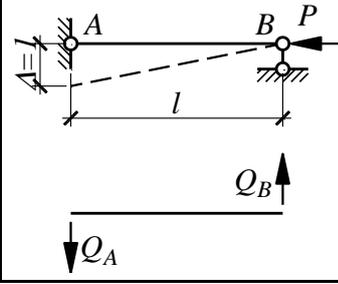
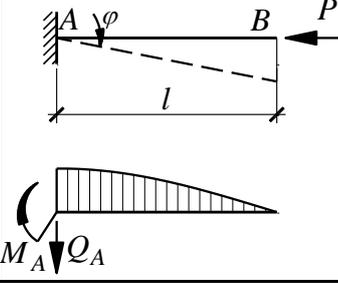
Литература

1. Вычислительный комплекс SCAD/ В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.А. Маляренко, М.А. Микитаренко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер,- М: Издательство "СКАД СОФТ". 2013 - 656 с.
2. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986. – 606с.
3. Киселев В.А. Строительная механика. Общий курс. – М.: Стройиздат, 1986. –520с.
4. Колкунов Н. В. Основы расчета упругих оболочек. – М.: Высшая школа, 1987. –256с.
5. Константинов И.А., Лалин В.В., Лалина И.И. Строительная механика: учебник. - М.: Проспект, 2010. -432 с.
6. Перельмутер А.В., Сливкер В.И Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – 4-е издание перераб.- М.: Изд-во СКАДСОФТ, 2011. – 736 с.
7. Рабинович И. М. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Изд-во лит-ры по строительству и архитектуре, 1960. – 454с.
8. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Под ред. Г. К. Клейна – М.: Высшая школа, 1980. –384с.
9. Семенов А.А., Габитов А.И., Порываев И.А., Сафиуллин М.Н. Вычислительный комплекс SCAD в учебном процессе. Статический расчет.– М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2013. – 234 с.
- 10.Снитко Н. К. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1980. –413с.
- 11.Строительная механика: В 2 кн. Кн. 1. Статистика упругих систем: Учеб. С 83 для вузов/ В.Д. Потапов, А.В. Александров, С.Б. Косицын, Д.Б. Долотказин. Под ред. В.Д. Потапова – М.: Высш. шк., 2007.- 511с.; ил.

Приложение 1. Табличные эпюры метода перемещений

Тип элемента «заделка – шарнир»		Тип элемента «заделка – заделка»	
схемы воздействия и эпюры моментов	формулы для определения усилий	формулы для определения усилий	схемы воздействия и эпюры моментов
	$M_A = 3i = \frac{3EI}{l}$ $Q_A = Q_B = \frac{3i}{l} = \frac{3EI}{l^2}$ $i = \frac{EI}{l}$	$M_A = 4i = \frac{4EI}{l}$ $M_B = 2i = \frac{2EI}{l}$ $Q_A = Q_B = \frac{6i}{l} = \frac{6EI}{l^2}$	
	$M_A = \frac{3i}{l} = \frac{3EI}{l^2}$ $Q_A = Q_B = \frac{3i}{l^2} = \frac{3EI}{l^3}$	$M_A = M_B = \frac{6i}{l} = \frac{6EI}{l^2}$ $Q_A = Q_B = \frac{12i}{l^2} = \frac{12EI}{l^3}$	
	$M_A = \frac{m}{2}(1-3v^2)$ $Q_A = Q_B = \frac{3m}{2l}(1-v^2)$ <p style="text-align: center;">при $u = v = 0.5$:</p> $M_A = \frac{m}{8}; Q = \frac{9m}{8l}$	$M_A = mv(2-3v)$ $M_B = mu(2-3u)$ $Q_A = Q_B = \frac{m}{l}6uv$ <p style="text-align: center;">при $u = v = 0.5$:</p> $M = \frac{m}{4}; Q = \frac{3m}{2l}$	
	$M_A = 0.5Plv(1-v^2)$ $Q_A = 0.5Pv(3-v^2)$ $Q_B = 0.5Pu^2(3-u)$ <p style="text-align: center;">при $u = v = 0.5$:</p> $M_A = \frac{3Pl}{16}$ $Q_A = \frac{11P}{16}; Q_B = \frac{5P}{16}$	$M_A = Pluv^2; M_B = Plu^2v$ $Q_A = Pv^2(3-2v)$ $Q_B = Pu^2(3-2u)$ <p style="text-align: center;">при $u = v = 0.5$:</p> $M_A = M_B = \frac{Pl}{8}$ $Q_A = Q_B = \frac{P}{2}$	
	$M_A = \frac{ql^2}{8}$ $Q_A = \frac{5}{8}ql; Q_B = \frac{3}{8}ql$	$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$ $Q_A = Q_B = \frac{ql}{2}$	
	$M_A = \frac{3iat'l}{2h_{cev}} = \frac{3EIat'}{2h_{cev}}$ $Q = \frac{3iat'}{2h_{cev}} = \frac{3EIat'}{2lh_{cev}}$ $Q = Q_A = Q_B$ <p style="text-align: center;">$t_1 > t_2; t' = t_1 - t_2$</p>	$M_A = \frac{iat'l}{h_{cev}} = \frac{EIat'}{h_{cev}}$ $Q_A = Q_B = 0$ <p style="text-align: center;">$t_1 > t_2; t' = t_1 - t_2$</p>	

Приложение 2. Табличные эпюры для сжатоизогнутых стержней

Тип элемента «заделка – шарнир»		Тип элемента «заделка – заделка»	
схемы воздействия и эпюры моментов	формулы для определения усилий	формулы для определения усилий	схемы воздействия и эпюры моментов
	$M_A = 3i\varphi_1(\nu)$ $Q_A = Q_B = \frac{3i}{l}\varphi_1(\nu)$	$M_A = 4i\varphi_2(\nu)$ $M_B = 2i\varphi_3(\nu)$ $Q_A = Q_B = \frac{6i}{l}\eta_3(\nu)$	
	$M_A = \frac{3i}{l}\varphi_1(\nu)$ $Q_A = Q_B = \frac{3i}{l^2}\eta_1(\nu)$	$M_A = M_B = \frac{6i}{l}\varphi_4(\nu)$ $Q_A = Q_B = \frac{12i}{l^2}\eta_2(\nu)$	
	$Q_A = Q_B = \frac{i\nu^2}{l^2}$	$M_A = i\nu \operatorname{tg} \nu$ $Q_A = \frac{i\nu^2}{l}$	

Функции метода перемещений для сжатоизогнутых стержней:

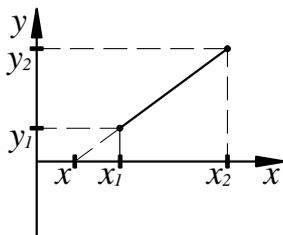
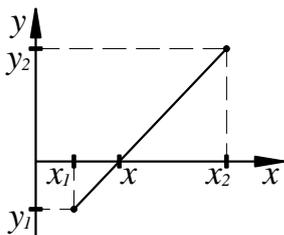
$$\varphi_1(\nu) = \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \nu}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)}; \quad \varphi_2(\nu) = \frac{\nu(\operatorname{tg} \nu - \nu)}{8 \operatorname{tg} \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)}; \quad \varphi_3(\nu) = \frac{\nu(\nu - \sin \nu)}{4 \sin \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)};$$

$$\varphi_4(\nu) = \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}}{12 \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)} = \varphi_1\left(\frac{\nu}{2}\right); \quad \eta_1(\nu) = \frac{\nu^3}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)}; \quad \eta_2(\nu) = \frac{\nu^3}{24 \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)} = \eta_1\left(\frac{\nu}{2}\right).$$

$$\eta_3(\nu) = \varphi_4(\nu);$$

Значения функций для сжатоизогнутых стержней приведены далее в таблице.

Промежуточные значения функция можно вычислить с использованием приведенных формул или путем интерполяции:



Искомое значение x при интерполяции определяется по координатам двух точек:

$$x = x_1 - y_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Таблица П.2. Значения функций для сжатоизогнутых стержней

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)=\eta_3(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$	$\nu \operatorname{tg} \nu$	$\nu \operatorname{ctg} \nu$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	1.0000
0.10	0.9993	0.9997	1.0002	0.9998	0.9960	0.9990	0.0100	0.9967
0.20	0.9973	0.9987	1.0007	0.9993	0.9840	0.9960	0.0405	0.9866
0.30	0.9940	0.9970	1.0015	0.9985	0.9640	0.9910	0.0928	0.9698
0.40	0.9893	0.9947	1.0027	0.9973	0.9360	0.9840	0.1691	0.9461
0.50	0.9832	0.9916	1.0042	0.9958	0.8999	0.9750	0.2732	0.9152
0.60	0.9757	0.9879	1.0061	0.9940	0.8557	0.9640	0.4105	0.8770
0.70	0.9669	0.9836	1.0083	0.9918	0.8035	0.9510	0.5896	0.8311
0.80	0.9565	0.9785	1.0109	0.9893	0.7432	0.9360	0.8237	0.7770
0.90	0.9447	0.9727	1.0138	0.9864	0.6747	0.9189	1.1341	0.7142
1.00	0.9313	0.9662	1.0172	0.9832	0.5980	0.8999	1.5574	0.6421
1.10	0.9164	0.9590	1.0209	0.9797	0.5131	0.8788	2.1612	0.5599
1.20	0.8998	0.9511	1.0251	0.9757	0.4198	0.8557	3.0866	0.4665
1.30	0.8814	0.9424	1.0297	0.9715	0.3181	0.8307	4.6827	0.3609
1.40	0.8613	0.9329	1.0348	0.9669	0.2080	0.8035	8.1170	0.2415
1.50	0.8393	0.9227	1.0403	0.9619	0.0893	0.7744	21.1521	0.1064
$\pi/2$	0.8225	0.9149	1.0445	0.9581	0.0000	0.7525	$+\infty / -\infty$	0.0000
1.60	0.8152	0.9116	1.0463	0.9565	-0.0381	0.7432	-54.7721	-0.0467
1.70	0.7891	0.8998	1.0529	0.9508	-0.1743	0.7100	-13.0842	-0.2209
1.80	0.7606	0.8871	1.0600	0.9447	-0.3194	0.6747	-7.7153	-0.4199
1.90	0.7297	0.8735	1.0676	0.9382	-0.4736	0.6374	-5.5615	-0.6491
2.00	0.6961	0.8590	1.0760	0.9313	-0.6372	0.5980	-4.3701	-0.9153
2.05	0.6783	0.8514	1.0804	0.9278	-0.7225	0.5775	-3.9453	-1.0652
2.10	0.6597	0.8436	1.0849	0.9241	-0.8103	0.5566	-3.5907	-1.2282
2.15	0.6404	0.8356	1.0897	0.9203	-0.9005	0.5351	-3.2873	-1.4062
2.20	0.6202	0.8273	1.0946	0.9164	-0.9931	0.5131	-3.0224	-1.6014
2.25	0.5991	0.8187	1.0998	0.9124	-1.0884	0.4905	-2.7869	-1.8165
2.30	0.5772	0.8099	1.1051	0.9083	-1.1861	0.4675	-2.5742	-2.0550
2.35	0.5543	0.8008	1.1106	0.9041	-1.2865	0.4439	-2.3793	-2.3211
2.40	0.5304	0.7915	1.1164	0.8998	-1.3896	0.4198	-2.1984	-2.6200
2.45	0.5054	0.7819	1.1224	0.8954	-1.4954	0.3952	-2.0286	-2.9589
2.50	0.4793	0.7720	1.1286	0.8908	-1.6040	0.3700	-1.8676	-3.3466
2.55	0.4520	0.7618	1.1350	0.8862	-1.7155	0.3443	-1.7133	-3.7954
2.60	0.4234	0.7513	1.1417	0.8814	-1.8299	0.3181	-1.5642	-4.3218
2.65	0.3935	0.7405	1.1487	0.8766	-1.9474	0.2914	-1.4189	-4.9492
2.70	0.3621	0.7295	1.1559	0.8716	-2.0679	0.2641	-1.2764	-5.7115
2.75	0.3291	0.7181	1.1634	0.8665	-2.1917	0.2363	-1.1355	-6.6599
2.80	0.2944	0.7064	1.1712	0.8613	-2.3189	0.2080	-0.9955	-7.8756
2.85	0.2580	0.6943	1.1794	0.8560	-2.4495	0.1791	-0.8554	-9.4953
2.90	0.2195	0.6819	1.1878	0.8505	-2.5838	0.1497	-0.7146	-11.7692
2.95	0.1790	0.6692	1.1966	0.8450	-2.7219	0.1198	-0.5722	-15.2084
3.00	0.1361	0.6560	1.2057	0.8393	-2.8639	0.0893	-0.4276	-21.0458
3.05	0.0907	0.6426	1.2152	0.8335	-3.0102	0.0582	-0.2801	-33.2064
3.10	0.0424	0.6287	1.2251	0.8275	-3.1609	0.0267	-0.1290	-74.4894
π	0.0000	0.6169	1.2337	0.8225	-3.2899	0.0000	0.0000	$-\infty / +\infty$
3.20	-0.0635	0.5997	1.2462	0.8152	-3.4769	-0.0381	0.1871	54.7253
3.25	-0.1220	0.5846	1.2574	0.8089	-3.6428	-0.0713	0.3537	29.8620
3.30	-0.1847	0.5691	1.2691	0.8024	-3.8147	-0.1051	0.5272	20.6578
3.35	-0.2521	0.5531	1.2813	0.7958	-3.9929	-0.1394	0.7085	15.8409
3.40	-0.3248	0.5366	1.2940	0.7891	-4.1781	-0.1743	0.8987	12.8633
3.45	-0.4036	0.5196	1.3073	0.7822	-4.3711	-0.2097	1.0991	10.8296
3.50	-0.4894	0.5021	1.3212	0.7751	-4.5727	-0.2457	1.3110	9.3437
3.55	-0.5832	0.4841	1.3357	0.7679	-4.7840	-0.2823	1.5362	8.2036
3.60	-0.6862	0.4655	1.3509	0.7606	-5.0062	-0.3194	1.7765	7.2953

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)=\eta_3(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$	$\nu t g \nu$	$\nu t g \nu$
3.65	-0.8002	0.4463	1.3667	0.7531	-5.2410	-0.3571	2.0340	6.5498
3.70	-0.9270	0.4265	1.3834	0.7455	-5.4904	-0.3954	2.3115	5.9225
3.75	-1.0693	0.4061	1.4008	0.7377	-5.7568	-0.4342	2.6121	5.3837
3.80	-1.2303	0.3850	1.4191	0.7297	-6.0436	-0.4736	2.9395	4.9124
3.85	-1.4142	0.3632	1.4383	0.7216	-6.3551	-0.5137	3.2985	4.4937
3.90	-1.6269	0.3407	1.4584	0.7133	-6.6969	-0.5542	3.6950	4.1164
3.95	-1.8760	0.3174	1.4796	0.7048	-7.0768	-0.5954	4.1361	3.7723
4.00	-2.1726	0.2933	1.5019	0.6961	-7.5060	-0.6372	4.6313	3.4548
4.02	-2.3079	0.2834	1.5111	0.6926	-7.6947	-0.6541	4.8471	3.3340
4.04	-2.4546	0.2734	1.5205	0.6891	-7.8952	-0.6710	5.0744	3.2164
4.06	-2.6143	0.2632	1.5302	0.6855	-8.1088	-0.6881	5.3143	3.1018
4.08	-2.7887	0.2529	1.5400	0.6819	-8.3375	-0.7053	5.5678	2.9897
4.10	-2.9802	0.2424	1.5501	0.6783	-8.5836	-0.7225	5.8365	2.8802
4.12	-3.1916	0.2318	1.5603	0.6747	-8.8497	-0.7399	6.1216	2.7728
4.14	-3.4260	0.2211	1.5708	0.6710	-9.1392	-0.7573	6.4251	2.6676
4.16	-3.6878	0.2101	1.5815	0.6673	-9.4564	-0.7749	6.7489	2.5642
4.18	-3.9821	0.1990	1.5925	0.6635	-9.8063	-0.7925	7.0952	2.4626
4.20	-4.3156	0.1878	1.6037	0.6597	-10.1956	-0.8103	7.4667	2.3625
4.22	-4.6968	0.1763	1.6151	0.6559	-10.6329	-0.8281	7.8664	2.2639
4.24	-5.1370	0.1647	1.6269	0.6521	-11.1296	-0.8461	8.2979	2.1665
4.26	-5.6514	0.1529	1.6388	0.6482	-11.7006	-0.8641	8.7653	2.0704
4.28	-6.2609	0.1409	1.6511	0.6443	-12.3670	-0.8822	9.2738	1.9753
4.30	-6.9947	0.1287	1.6636	0.6404	-13.1581	-0.9005	9.8291	1.8811
4.32	-7.8961	0.1164	1.6765	0.6364	-14.1169	-0.9188	10.4386	1.7878
4.34	-9.0304	0.1038	1.6896	0.6324	-15.3089	-0.9372	11.1107	1.6953
4.36	-10.5025	0.0910	1.7031	0.6284	-16.8390	-0.9558	11.8563	1.6033
4.38	-12.4908	0.0780	1.7168	0.6243	-18.8856	-0.9744	12.6884	1.5120
4.40	-15.3271	0.0648	1.7310	0.6202	-21.7805	-0.9931	13.6238	1.4210
4.42	-19.7043	0.0514	1.7454	0.6160	-26.2165	-1.0120	14.6836	1.3305
4.44	-27.3534	0.0377	1.7602	0.6119	-33.9246	-1.0309	15.8951	1.2402
4.46	-44.1501	0.0238	1.7754	0.6077	-50.7807	-1.0500	17.2943	1.1502
4.48	-111.0248	0.0096	1.7910	0.6034	-117.7150	-1.0691	18.9297	1.0603
4.50	227.9292	-0.0048	1.8070	0.5991	221.1792	-1.0884	20.8680	0.9704
4.52	56.9830	-0.0194	1.8234	0.5948	50.1729	-1.1077	23.2035	0.8805
4.54	32.7937	-0.0344	1.8402	0.5905	25.9231	-1.1272	26.0744	0.7905
4.56	23.1289	-0.0496	1.8574	0.5861	16.1977	-1.1467	29.6914	0.7003
4.58	17.9244	-0.0651	1.8751	0.5817	10.9322	-1.1664	34.3927	0.6099
4.60	14.6693	-0.0809	1.8933	0.5772	7.6160	-1.1861	40.7568	0.5192
4.62	12.4397	-0.0969	1.9120	0.5727	5.3249	-1.2060	49.8636	0.4281
4.64	10.8157	-0.1134	1.9312	0.5681	3.6392	-1.2260	63.9862	0.3365
4.66	9.5793	-0.1301	1.9509	0.5636	2.3408	-1.2461	88.8686	0.2444
4.68	8.6057	-0.1471	1.9711	0.5589	1.3049	-1.2663	144.4431	0.1516
4.70	7.8186	-0.1645	1.9920	0.5543	0.4553	-1.2865	379.3500	0.0582
$3\pi/2$	7.4022	-0.1755	2.0052	0.5514	0.0000	-1.2992	$+\infty / -\infty$	0.0000
4.74	6.6223	-0.2005	2.0355	0.5449	-0.8669	-1.3274	-171.6270	-0.1309
4.76	6.1563	-0.2190	2.0582	0.5401	-1.3962	-1.3481	-99.9013	-0.2268
4.78	5.7538	-0.2379	2.0815	0.5352	-1.8624	-1.3688	-70.5908	-0.3237
4.80	5.4023	-0.2572	2.1056	0.5304	-2.2777	-1.3896	-54.6474	-0.4216
4.82	5.0925	-0.2770	2.1304	0.5255	-2.6516	-1.4106	-44.6179	-0.5207
4.84	4.8171	-0.2972	2.1560	0.5205	-2.9915	-1.4316	-37.7217	-0.6210
4.86	4.5704	-0.3179	2.1823	0.5155	-3.3028	-1.4528	-32.6849	-0.7226
4.88	4.3480	-0.3390	2.2095	0.5105	-3.5901	-1.4740	-28.8419	-0.8257
4.90	4.1463	-0.3607	2.2375	0.5054	-3.8570	-1.4954	-25.8107	-0.9302
4.92	3.9623	-0.3828	2.2665	0.5003	-4.1065	-1.5169	-23.3567	-1.0364
4.94	3.7937	-0.4056	2.2964	0.4951	-4.3408	-1.5385	-21.3276	-1.1442

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)=\eta_3(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$	$\nu t g \nu$	$\nu t g \nu$
4.96	3.6384	-0.4288	2.3273	0.4899	-4.5621	-1.5603	-19.6204	-1.2539
4.98	3.4948	-0.4527	2.3592	0.4846	-4.7720	-1.5821	-18.1627	-1.3655
5.00	3.3615	-0.4772	2.3923	0.4793	-4.9719	-1.6040	-16.9026	-1.4791
5.02	3.2373	-0.5023	2.4264	0.4739	-5.1629	-1.6261	-15.8013	-1.5948
5.04	3.1211	-0.5281	2.4618	0.4685	-5.3461	-1.6483	-14.8297	-1.7129
5.06	3.0122	-0.5546	2.4984	0.4631	-5.5224	-1.6706	-13.9654	-1.8334
5.08	2.9097	-0.5818	2.5364	0.4576	-5.6925	-1.6930	-13.1908	-1.9564
5.10	2.8130	-0.6099	2.5757	0.4520	-5.8570	-1.7155	-12.4919	-2.0822
5.12	2.7215	-0.6387	2.6165	0.4464	-6.0166	-1.7381	-11.8575	-2.2108
5.14	2.6347	-0.6683	2.6588	0.4407	-6.1718	-1.7609	-11.2785	-2.3425
5.16	2.5523	-0.6989	2.7028	0.4350	-6.3229	-1.7838	-10.7475	-2.4774
5.18	2.4737	-0.7304	2.7485	0.4292	-6.4704	-1.8068	-10.2582	-2.6157
5.20	2.3986	-0.7629	2.7960	0.4234	-6.6147	-1.8299	-9.8053	-2.7577
5.22	2.3268	-0.7964	2.8455	0.4175	-6.7560	-1.8532	-9.3847	-2.9035
5.24	2.2580	-0.8311	2.8969	0.4116	-6.8946	-1.8765	-8.9924	-3.0534
5.26	2.1918	-0.8669	2.9506	0.4056	-7.0307	-1.9000	-8.6255	-3.2077
5.28	2.1282	-0.9039	3.0065	0.3996	-7.1646	-1.9236	-8.2810	-3.3665
5.30	2.0668	-0.9422	3.0648	0.3935	-7.2965	-1.9474	-7.9567	-3.5303
5.32	2.0075	-0.9819	3.1257	0.3873	-7.4266	-1.9712	-7.6506	-3.6994
5.34	1.9502	-1.0231	3.1894	0.3811	-7.5550	-1.9952	-7.3608	-3.8740
5.36	1.8946	-1.0658	3.2560	0.3748	-7.6819	-2.0193	-7.0858	-4.0545
5.38	1.8407	-1.1102	3.3258	0.3685	-7.8074	-2.0436	-6.8242	-4.2414
5.40	1.7884	-1.1563	3.3989	0.3621	-7.9316	-2.0679	-6.5747	-4.4352
5.42	1.7374	-1.2044	3.4755	0.3556	-8.0548	-2.0924	-6.3363	-4.6362
5.44	1.6877	-1.2544	3.5560	0.3491	-8.1768	-2.1171	-6.1081	-4.8450
5.46	1.6392	-1.3066	3.6407	0.3425	-8.2980	-2.1418	-5.8891	-5.0622
5.48	1.5918	-1.3611	3.7297	0.3358	-8.4183	-2.1667	-5.6785	-5.2884
5.50	1.5455	-1.4182	3.8236	0.3291	-8.5379	-2.1917	-5.4757	-5.5244
5.52	1.5001	-1.4779	3.9226	0.3223	-8.6567	-2.2169	-5.2801	-5.7708
5.54	1.4556	-1.5404	4.0272	0.3154	-8.7750	-2.2422	-5.0910	-6.0286
5.56	1.4118	-1.6062	4.1379	0.3085	-8.8927	-2.2676	-4.9079	-6.2987
5.58	1.3688	-1.6753	4.2551	0.3015	-9.0100	-2.2932	-4.7304	-6.5821
5.60	1.3266	-1.7481	4.3794	0.2944	-9.1268	-2.3189	-4.5581	-6.8801
5.62	1.2849	-1.8249	4.5116	0.2873	-9.2433	-2.3447	-4.3905	-7.1939
5.64	1.2438	-1.9061	4.6523	0.2801	-9.3594	-2.3707	-4.2272	-7.5249
5.66	1.2032	-1.9920	4.8024	0.2728	-9.4753	-2.3968	-4.0680	-7.8750
5.68	1.1631	-2.0833	4.9628	0.2654	-9.5910	-2.4231	-3.9125	-8.2459
5.70	1.1235	-2.1803	5.1346	0.2580	-9.7065	-2.4495	-3.7605	-8.6399
5.72	1.0842	-2.2838	5.3190	0.2504	-9.8219	-2.4761	-3.6116	-9.0593
5.74	1.0453	-2.3944	5.5174	0.2428	-9.9373	-2.5028	-3.4656	-9.5070
5.76	1.0066	-2.5129	5.7313	0.2352	-10.0526	-2.5296	-3.3224	-9.9861
5.78	0.9683	-2.6403	5.9628	0.2274	-10.1678	-2.5566	-3.1816	-10.5006
5.80	0.9302	-2.7777	6.2139	0.2195	-10.2831	-2.5838	-3.0431	-11.0546
5.84	0.8546	-3.0876	6.7858	0.2036	-10.5140	-2.6386	-2.7721	-12.3031
5.88	0.7795	-3.4560	7.4738	0.1873	-10.7453	-2.6939	-2.5081	-13.7849
5.92	0.7047	-3.9022	8.3162	0.1706	-10.9774	-2.7499	-2.2499	-15.5772
5.96	0.6300	-4.4550	9.3706	0.1535	-11.2105	-2.8066	-1.9962	-17.7949
6.00	0.5551	-5.1594	10.7270	0.1361	-11.4449	-2.8639	-1.7460	-20.6181
6.04	0.4798	-6.0900	12.5346	0.1182	-11.6807	-2.9219	-1.4985	-24.3455
6.08	0.4039	-7.3801	15.0601	0.1000	-11.9183	-2.9806	-1.2527	-29.5105
6.12	0.3271	-9.2941	18.8319	0.0812	-12.1577	-3.0400	-1.0077	-37.1699
6.16	0.2492	-12.4391	25.0645	0.0621	-12.3993	-3.1001	-0.7627	-49.7528
6.20	0.1700	-18.5905	37.3084	0.0424	-12.6433	-3.1609	-0.5169	-74.3604
6.24	0.0893	-36.1011	72.2690	0.0223	-12.8899	-3.2225	-0.2696	-144.4038
π	0.0000	$-\infty$	$+\infty$	0.0000	-13.1595	-3.2899	0.0000	$-\infty$

Приложение 3. Табличные эпюры динамических реакций

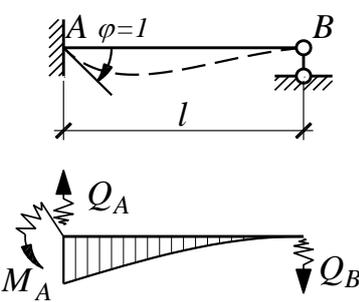
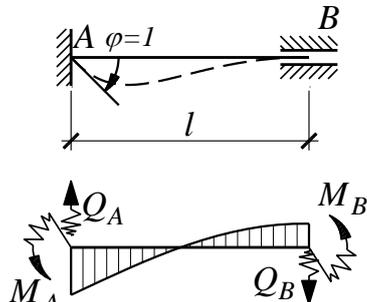
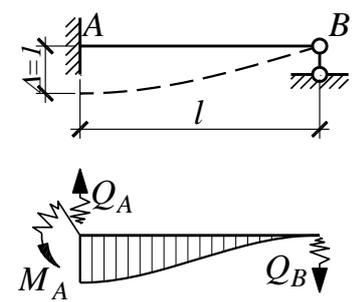
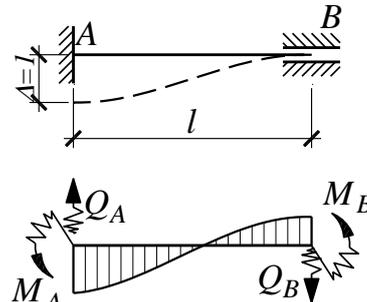
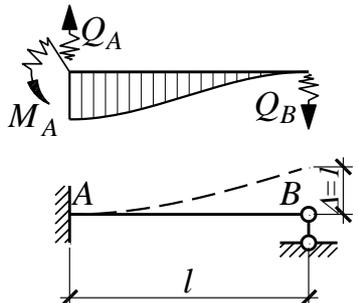
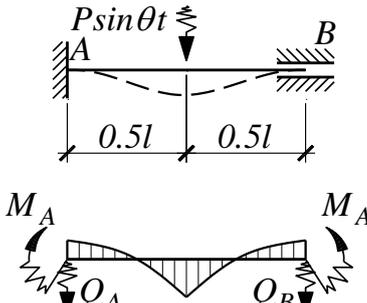
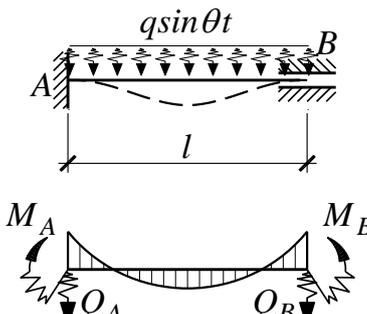
Тип элемента «заделка – шарнир»	Тип элемента «заделка – заделка»		
схемы воздействия и эпюры моментов	формулы для определения усилий	формулы для определения усилий	схемы воздействия и эпюры моментов
	$M_A = 3i\psi_1(u)$ $Q_A = \frac{3i}{l}\psi_4(u)$ $Q_B = \frac{6i}{l}\psi_7(u)$	$M_A = 4i\psi_2(u)$ $M_B = 2i\psi_5(u)$ $Q_A = \frac{6i}{l}\psi_5(u)$ $Q_B = \frac{6i}{l}\psi_6(u)$	
	$M_A = \frac{3i}{l}\psi_4(u)$ $Q_A = \frac{3i}{l^2}\psi_8(u)$ $Q_B = \frac{3i}{l^2}\psi_9(u)$	$M_A = \frac{6i}{l}\psi_6(u)$ $M_B = \frac{6i}{l}\psi_5(u)$ $Q_A = \frac{12i}{l^2}\psi_{11}(u)$ $Q_B = \frac{12i}{l^2}\psi_{10}(u)$	
	$M_A = \frac{3i}{l}\psi_7(u)$ $Q_A = \frac{3i}{l^2}\psi_9(u)$ $Q_B = \frac{3i}{l^2}\psi_{12}(u)$	$M = \frac{Pl}{8}\psi_{1P}(u)$ $Q = \frac{P}{2}\psi_{2P}(u)$ $M_A = M_B = M$ $Q_A = Q_B = Q$	
$u = l^4 \sqrt{\frac{M\theta^2}{EI}} = 4 \sqrt{\frac{Ml^3\theta^2}{i}}$ <p>где l – длина стержня, M – погонная масса стержня; EI – жесткость стержня; i – погонная жесткость стержня; θ – частота вынужденных колебаний.</p>		$M = \frac{ql^2}{12}\psi_{1q}(u)$ $Q = \frac{ql}{2}\psi_{2q}(u)$ $M_A = M_B = M$ $Q_A = Q_B = Q$	

Таблица П.3. Значения функций для определения динамических реакций

u	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$	$\psi_3(u)$	$\psi_4(u)$	$\psi_5(u)$	$\psi_6(u)$	$\psi_7(u)$	$\psi_8(u)$	$\psi_9(u)$	$\psi_{10}(u)$	$\psi_{11}(u)$	$\psi_{12}(u)$
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	1.001	1.000	1.000	0.999
0.4	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	0.996	1.001	0.999	1.000	0.998
0.5	1.000	1.000	1.000	0.998	1.000	1.000	1.001	0.990	1.003	0.998	1.001	0.995
0.6	0.999	1.000	1.001	0.996	0.999	1.001	1.002	0.979	1.006	0.996	1.001	0.990
0.7	0.999	0.999	1.001	0.993	0.998	1.001	1.003	0.961	1.011	0.993	1.003	0.981
0.8	0.997	0.999	1.002	0.988	0.996	1.002	1.005	0.934	1.019	0.987	1.004	0.968
0.9	0.996	0.998	1.002	0.981	0.994	1.003	1.009	0.894	1.004	0.980	1.001	0.948
1.0	0.994	0.998	1.004	0.931	0.991	1.005	1.013	0.838	1.047	0.969	1.011	0.921
1.1	0.991	0.997	1.005	0.958	0.987	1.008	1.019	0.762	1.069	0.955	1.016	0.885
1.2	0.987	0.995	1.007	0.940	0.982	1.011	1.027	0.663	1.097	0.936	1.022	0.836
1.3	0.982	0.993	1.010	0.918	0.975	1.015	1.038	0.535	1.135	0.911	1.031	0.774
1.4	0.975	0.991	1.014	0.889	0.966	1.020	1.051	0.372	1.182	0.881	1.042	0.696
1.5	0.967	0.988	1.018	0.853	0.956	1.027	1.068	0.371	1.241	0.843	1.055	0.598
1.6	0.957	0.984	1.024	0.809	0.942	1.034	1.089	-0.078	1.315	0.796	1.071	0.477
1.7	0.945	0.980	1.030	0.755	0.926	1.044	1.114	-0.379	1.405	0.739	1.091	0.331
1.8	0.931	0.975	1.038	0.689	0.907	1.056	1.145	-0.743	1.516	0.672	1.116	0.155
1.9	0.913	0.968	1.048	0.611	0.884	1.069	1.182	-0.178	1.649	0.591	1.144	-0.056
2.0	0.892	0.961	1.059	0.517	0.857	1.086	1.227	-1.694	1.810	0.497	1.179	-0.306
2.1	0.867	0.952	1.073	0.406	0.825	1.105	1.281	-2.304	2.003	0.386	1.219	-0.601
2.2	0.837	0.942	1.089	0.273	0.788	1.128	1.345	-3.021	2.236	0.257	1.267	-0.949
2.3	0.801	0.930	1.106	0.117	0.745	1.154	1.422	-3.864	2.516	0.109	1.323	-1.356
2.4	0.759	0.916	1.128	-0.068	0.695	1.185	1.515	-4.851	2.883	-0.063	1.388	-1.834
2.5	0.706	0.900	1.153	-0.288	0.638	1.222	1.626	-6.009	3.260	-0.259	1.464	-2.393
2.6	0.648	0.882	1.181	-0.549	0.572	1.264	1.761	-7.367	3.754	-0.484	1.553	-3.048
2.7	0.576	0.861	1.215	-0.860	0.496	1.312	1.925	-8.965	4.358	-0.741	1.657	-3.819
2.8	0.489	0.836	1.253	-1.235	0.409	1.369	2.126	-10.86	5.103	-1.033	1.778	-4.730
2.9	0.382	0.808	1.298	-1.690	0.308	1.435	2.375	-13.11	6.031	-1.365	1.919	-5.814
3.0	0.249	0.775	1.351	-2.248	0.193	1.512	2.688	-15.82	7.206	-1.743	2.084	-7.118
3.1	0.083	0.738	1.412	-2.946	0.061	1.603	3.089	-19.14	8.719	-2.174	2.279	-8.710
3.2	-0.133	0.694	1.484	-3.839	-0.092	1.709	3.615	-23.28	10.71	-2.664	2.509	-10.69
3.3	-0.419	0.643	1.569	-5.015	-0.269	1.835	4.326	-28.61	13.43	-3.225	2.782	-13.24
3.4	-0.815	0.583	1.669	-6.631	-0.475	1.984	5.329	-35.73	17.29	-3.867	3.108	-16.63
3.5	-1.399	0.513	1.790	-8.989	-0.717	2.164	6.832	-45.83	23.09	-4.608	3.502	-22.42
3.6	-2.342	0.428	1.935	-12.76	-1.003	2.382	9.294	-61.59	32.66	-5.468	3.982	-28.92
3.7	-4.115	0.327	2.113	-19.81	-1.345	2.649	13.99	-90.28	50.99	-6.476	4.574	-42.51
3.8	-8.684	0.203	2.334	-37.85	-1.760	2.982	26.23	-162.3	98.95	-7.672	5.317	-76.55
3.9	-47.56	0.048	2.613	-190.7	-2.273	3.405	131.1	-764.1	510.8	-9.115	6.265	-360.8
4.0	19.47	-0.150	2.976	72.59	-2.922	3.956	-50.02	269.2	-201.0	-10.89	7.507	127.1
4.1	9.170	-0.411	3.462	32.02	-3.769	4.696	-22.35	108.4	-92.45	-13.16	9.186	51.05
4.2	6.393	-0.770	4.140	20.98	-4.923	5.734	-15.00	63.47	-63.78	-16.16	11.55	29.79
4.3	5.093	-1.295	5.147	15.74	-6.595	7.280	-11.65	41.21	-50.99	-20.39	15.09	19.21
4.4	4.331	-2.136	6.782	12.61	-9.249	9.796	-9.778	27.09	-43.73	-26.93	20.88	12.46
4.5	3.824	-3.702	9.864	10.46	-14.15	14.55	-8.610	16.70	-39.43	-38.73	31.87	7.470
4.6	3.456	-7.666	17.73	8.848	-26.49	26.73	-7.840	8.255	-36.72	-67.82	60.09	3.388
4.7	3.172	-37.95	78.24	7.548	-120.4	120.4	-7.319	-0.868	-35.04	-286.4	277.8	0.203
4.8	2.941	18.30	-34.33	6.440	53.84	-53.98	-6.970	-5.953	-34.07	117.9	-127.4	-3.536
4.9	2.745	8.344	-14.48	5.450	22.90	-23.25	-6.746	-12.45	-33.64	45.47	-56.28	-6.757
5.0	2.572	5.749	-9.371	4.529	14.79	-15.36	-6.619	19.02	-33.66	26.03	-38.05	-9.964

Для заметок

Для заметок

Учебное пособие

Старцева Луиза Владимировна
Архипов Вячеслав Георгиевич
Семенов Александр Александрович

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

в примерах и задачах

Редактор: Н.И. Морозова

Лицензия ЛР №0716188 от 01.04.98. Подписано к печати 12.09.2013.
Формат 60×90/16. Бумага офс. Гарнитура таймс. Печать офсетная.
Усл.печ.л.14. Тираж 200 экз. Заказ №191.

ООО «Издательство АСВ, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, оф.511,
тел/факс: (499) 183-5683, e-mail: iasv@mgsu.ru; Internet: <http://www.iasv.ru>