

## Лабораторная работа №1

### Расчет упругих, прочностных и термоупругих характеристик однонаправленного слоя композитного материала

**Цель работы:** Ознакомиться с основными аналитическими зависимостями для определения упругих, прочностных и термоупругих характеристик однонаправленного слоя композитного материала, проанализировать, от каких факторов они зависят, рассчитать по заданным значениям вышеуказанные характеристики и построить диаграммы анизотропии упругих, прочностных и термоупругих свойств однонаправленного КМ.

#### Часть 1. Расчет механических характеристик однонаправленного слоя.

##### 1.1 Расчет упругих характеристик однонаправленного слоя

В соответствии с заданным вариантом рассчитать механические свойства однонаправленного слоя. Номер варианта включает в себя 3 цифры, например **1.2.3**: первая цифра означает номер армирующего материала из таблицы 1, вторая – номер матричного материала из таблицы 2, 3 – значение коэффициента армирования из таблицы 3.

Таблица 1

Механические характеристики армирующих волокон

Упругие и прочностные характеристики	Вариант			
	1	2	3	4
	Стеклонить	Угленить	Органонить	Бороволокно
$E_{e1}$ , ГПа	70-80	300-700	130-140	300-400
$E_{e2}$ , ГПа	70-80	9	130-140	300-400
$G_{e12}$ , ГПа	24	12	20	100
$\nu_{e12}$	0,22	0,15	0,25-0,35	0,11
Прочность при растяжении, $\bar{\sigma}_{b1}^+$ , МПа	2500	2400-3500	2000-2500	3000-3500
Прочность при сжатии, $\bar{\sigma}_{b1}^-$ , МПа	-	-	-	-
Предельное удлинение, %	3,0-3,5	1,0	2-4	$\leq 1,0$
Продольный коэффициент линейного термического расширения $\alpha_{e1} \cdot 10^6 1/^\circ C$	5-10	-0,5	2-3	7
Поперечный КЛТР $\alpha_{e2} \cdot 10^6 1/^\circ C$	5-10	5	2-3	7
Плотность $\rho_b$ , г/см <sup>3</sup>	2,45-2,55	1,7-1,9	1,44	2,7

Прочность при сжатии для волокон отсутствует по определению, т.к. воспринимать сжимающие нагрузки волокна могут только в составе композита. В первом приближении можно принять  $\bar{\sigma}_{в1}^- = \frac{\bar{\sigma}_{в1}^+}{2}$ .

Таблица 2

Механические характеристики связующих

Упругие и прочностные характеристики	Вариант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Полиэфирное связующее	Эпоксидное связующее	Эпоксифенольное связующее	Фенолформальдегидное связующее	Полипропилен	Полиимидное связующее	Алюминиевый сплав	Магний сплав
$E_m$ , ГПа	2,1-4,6	2,8-4,2	2,8-4,1	2,8-4,6	2	4	70	40
$G_m$ , ГПа	1,0-1,9	0,8-1,5	1,1-1,6	1,0-1,4	-	-	-	-
$\nu_m$	0,35-0,42	0,34-0,4	0,33-0,4	0,35	0,4	0,4	0,34	0,3-0,35
Прочность при растяжении, $\bar{\sigma}_{м1}^+$ , МПа	42-70	28-91	33-86	42-63	25-40	100	100-480	120-200
Прочность при сжатии, $\bar{\sigma}_{м1}^-$ , МПа	-	-	-	-	-	114	-	-
Прочность при сдвиге, $\bar{\tau}_{м12}$ , МПа	-	-	-	-	-	-	-	-
КЛТР $\alpha_m \cdot 10^6$ 1/°C	55	55	55	55	110	50	25	26
Предельное удлинение, %	6	2-6	1,8-3,2	1,5-2,0	10-20	5	8-12	8-12
Плотность $\rho_v$ , г/см <sup>3</sup>	1,2	1,2	1,2	1,2	0,9-0,91	1,2	2,7	1,7

Для изотропных материалов справедливо следующее соотношение между упругими характеристиками:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.1)$$

Для пластичных материалов  $\bar{\sigma}_{m1}^+ = \bar{\sigma}_{m1}^-$ ; для хрупких  $\bar{\sigma}_{m1}^- = (2 \div 3)\bar{\sigma}_{m1}^+$ ; для сдвиговой прочности в первом приближении можно принять  $\bar{\tau}_{12} = \frac{\bar{\sigma}_{m1}^+}{2}$ .

Таблица 3

Коэффициенты армирования									
	Вариант								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Psi_{\epsilon}$	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7

Продольный модуль упругости однонаправленного слоя рассчитывается по формуле

$$E_1 = E_{\epsilon 1} \Psi_{\epsilon} + E_m \Psi_m, \quad (1.2)$$

где  $\Psi_{\epsilon} = \frac{V_{\epsilon}}{V_{\text{КМ}}}$  – коэффициент армирования, равный отношению объема, занимаемого волокнами, ко всему объему композита;  $\Psi_m = 1 - \Psi_{\epsilon}$ .

Коэффициент Пуассона однонаправленного композита определяется по формуле

$$\nu_{12} = \nu_{\epsilon 12} \Psi_{\epsilon} + \nu_m \Psi_m. \quad (1.3)$$

Здесь первый индекс показывает направление действия внешней силы, а второй – направление поперечной деформации.

Коэффициент Пуассона  $\nu_{21}$  определяется из условия ортотропности однонаправленного слоя

$$\nu_{12} \cdot E_2 = \nu_{21} \cdot E_1 \quad (1.4)$$

Выражения для определения поперечного модуля упругости и модуля сдвига однонаправленного слоя, полученные по упрощенным формулам, выглядят следующим образом:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{\Psi_{\epsilon}}{E_{\epsilon 2}} + \frac{\Psi_m}{E_m} \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{\Psi_{\epsilon}}{G_{\epsilon 12}} + \frac{\Psi_m}{G_m} \quad (1.6)$$

Выражения для определения поперечного модуля упругости и модуля сдвига однонаправленного слоя, полученные по моделям теории упругости для неоднородной среды, выглядят следующим образом:

$$E_2 = E_m \left[ \frac{(1 + \zeta_E \Psi_{\epsilon}) E_{\epsilon 2} + \zeta_E (1 - \Psi_{\epsilon}) E_m}{(1 - \Psi_{\epsilon}) E_{\epsilon 2} + (\zeta_E + \Psi_{\epsilon}) E_m} \right], \quad (1.7)$$

$$G_{12} = G_m \left[ \frac{(1 + \zeta_G \Psi_{\epsilon}) G_{\epsilon 12} + \zeta_G (1 - \Psi_{\epsilon}) G_m}{(1 - \Psi_{\epsilon}) G_{\epsilon 12} + (\zeta_G + \Psi_{\epsilon}) G_m} \right]. \quad (1.8)$$

где  $\zeta_E, \zeta_G$  – коэффициенты влияния волокон на жесткость композита. В качестве первого приближения рекомендуется принять значения  $\zeta_E = 2, \zeta_G = 1$ .

**! Необходимо сравнить результаты, полученные по формулам (1.5), (1.6) с результатами, полученными по формулам (1.7), (1.8) и определить погрешность  $\delta$  в %.**

Плотность однонаправленного слоя рассчитывается по формуле

$$\rho = \rho_g \Psi_g + \rho_m \Psi_m. \quad (1.9)$$

## 1.2 Расчет прочностных характеристик однонаправленного слоя

Формула для определения предела прочности при растяжении при  $\bar{\varepsilon}_m^+ > \bar{\varepsilon}_g^+$

$$\bar{\sigma}_1^+ = \bar{\sigma}_{B1}^+ \left( \Psi_B + \Psi_M \frac{E_M}{E_{B1}} \right), \quad (1.10)$$

$$\bar{\sigma}_1^+ = \bar{\sigma}_{M1}^+ \left( \Psi_M + \Psi_B \frac{E_{B1}}{E_M} \right) \text{ при } \bar{\varepsilon}_B^+ > \bar{\varepsilon}_M^+ \quad (1.11)$$

Основные уравнения для прочности слоя при сжатии имеют вид:

$$\bar{\sigma}_1^- = \bar{\sigma}_{M1}^- \left( \Psi_M + \Psi_B \frac{E_{B1}}{E_M} \right), \text{ при } \bar{\varepsilon}_B^- > \bar{\varepsilon}_M^-, \quad (1.12)$$

$$\bar{\sigma}_1^- = \bar{\sigma}_{B1}^- \left( \Psi_B + \Psi_M \frac{E_M}{E_{B1}} \right), \text{ при } \bar{\varepsilon}_B^- < \bar{\varepsilon}_M^-. \quad (1.13)$$

При определенном соотношении упругих характеристик матрицы и волокон формулы (1.12), (1.13) дают чрезмерно завышенные значения прочности. В этом случае рекомендуется воспользоваться соотношением  $\bar{\sigma}_1^- = \frac{\bar{\sigma}_1^+}{1,5}$ .

Прочность однонаправленного слоя в поперечном направлении при соблюдении условия  $E_{B2} > E_{M2}$  определяется по формуле:

$$\bar{\sigma}_2^+ = \frac{\bar{\sigma}_{M2}^+}{K_{22}}, \quad (1.14)$$

$$\bar{\sigma}_2^- = \frac{\bar{\sigma}_{M2}^-}{K_{22}}, \quad (1.15)$$

$$\text{где } K_{22} = \frac{1 - \Psi_g \left( 1 - \frac{E_{M2}}{E_{g2}} \right)}{1 - \left( \frac{4\Psi_g}{\pi} \right)^{0,5} \left( 1 - \frac{E_{M2}}{E_{g2}} \right)}; \quad (1.16)$$

Прочность однонаправленного слоя при внутрислойном сдвиге при соблюдении условия  $G_{\text{в}12} > G_{\text{м}12}$  определяется по формуле:

$$\bar{\tau}_{12} = \frac{\bar{\tau}_{\text{м}12}}{K_{12}}, \quad (1.17)$$

$$\text{где } K_{12} = \frac{1 - \psi_{\epsilon} \left(1 - \frac{G_{\text{м}12}}{G_{\epsilon 12}}\right)}{1 - \left(\frac{4\psi_{\epsilon}}{\pi}\right)^{0,5} \left(1 - \frac{G_{\text{м}12}}{G_{\epsilon 12}}\right)}; \quad (1.18)$$

В случае если  $E_{\text{в}2} < E_{\text{м}2}$  и  $G_{\text{в}12} < G_{\text{м}12}$ , следует воспользоваться следующими выражениями:

$$\bar{\sigma}_2^+ = (0,85 \div 0,95) \bar{\sigma}_{\text{м}2}^+, \quad (1.19)$$

$$\bar{\sigma}_2^- = (0,85 \div 0,95) \bar{\sigma}_{\text{м}2}^-, \quad (1.20)$$

$$\bar{\tau}_{12} = (0,85 \div 0,95) \bar{\tau}_{\text{м}12}, \quad (1.21)$$

### 1.3 Расчет термоупругих характеристик однонаправленного слоя

Формулы для расчета в первом приближении коэффициента линейного расширения однонаправленного композита имеют вид

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_{\epsilon 1} E_{\epsilon 1} \psi_{\epsilon} + \alpha_{\text{м}} E_{\text{м}} (1 - \psi_{\epsilon})}{E_{\epsilon 1} \psi_{\epsilon} + E_{\text{м}} (1 - \psi_{\epsilon})}, \quad (1.22)$$

$$\alpha_2 = \alpha_{\epsilon 2} \psi_{\epsilon} (1 + \nu_{\epsilon 12}) + \alpha_{\text{м}} (1 - \psi_{\epsilon}) (1 + \nu_{\text{м}}) - \alpha_1 [\nu_{\epsilon 12} \psi_{\epsilon} + \nu_{\text{м}} (1 - \psi_{\epsilon})]. \quad (1.23)$$

При проверочном расчете следует воспользоваться другими формулами:

- в направлении армирования:

$$\alpha_1 = \alpha_{\text{м}} - [\alpha_{\text{м}} - \alpha_{\epsilon 1}] \frac{\psi_{\epsilon} E_{\epsilon 1}}{E_1}; \quad (1.24)$$

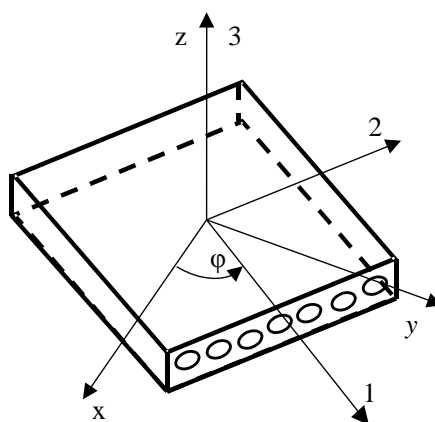
- в перпендикулярном направлении:

$$\alpha_2 = [1 + \nu_{\text{м}}] \alpha_{\text{м}} \cdot (1 - \psi_{\epsilon}) + \alpha_{\epsilon 1} \psi_{\epsilon} (1 + \nu_{\epsilon 12}) - \alpha_1 [\psi_{\epsilon} \nu_{\epsilon 12} + (1 - \psi_{\epsilon}) \nu_{\text{м}}]; \quad (1.25)$$

**! Необходимо сравнить результаты, полученные по формулам (1.22), (1.23) с результатами, полученными по формулам (1.24), (1.25) и определить погрешность  $\delta$  в %.**

**Часть 2. Расчет механических характеристик однонаправленного слоя в системе координат, расположенной под углом  $\varphi$  к главным осям упругой симметрии композита.**

### 2.1 Расчет упругих характеристик однонаправленного слоя



**Рис. 1.** Оси упругой симметрии (1, 2, 3) и произвольные ортогональные оси x, y, z

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_x} &= \frac{1}{E_1} \cos^4 \varphi + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi + \frac{1}{E_2} \sin^4 \varphi, \\ \frac{1}{E_y} &= \frac{1}{E_1} \sin^4 \varphi + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi + \frac{1}{E_2} \cos^4 \varphi, \\ \nu_{xy} &= E_x \cdot \left[ \frac{\nu_{12}}{E_1} \cdot (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) - \left\{ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right\} \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \right], \\ \frac{1}{G_{xy}} &= \left( \frac{1 + \nu_{12}}{E_1} + \frac{1 + \nu_{21}}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cdot \sin^2 2\varphi + \frac{1}{G_{12}}, \\ \nu_{yx} &= \nu_{xy} \frac{E_y}{E_x}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Коэффициенты термического расширения в направлениях, отличных от направления армирования, определяются по зависимостям:

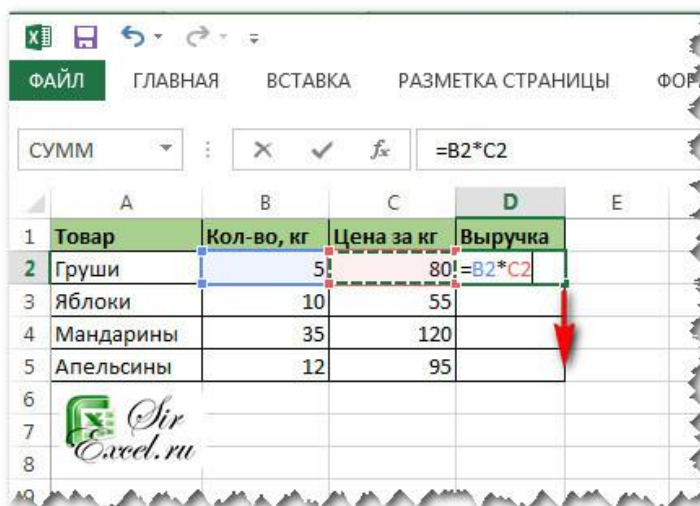
$$\alpha_x = \alpha_1 \cos^2 \varphi + \alpha_2 \sin^2 \varphi; \quad (1.27)$$

$$\alpha_y = \alpha_1 \sin^2 \varphi + \alpha_2 \cos^2 \varphi; \quad (1.28)$$

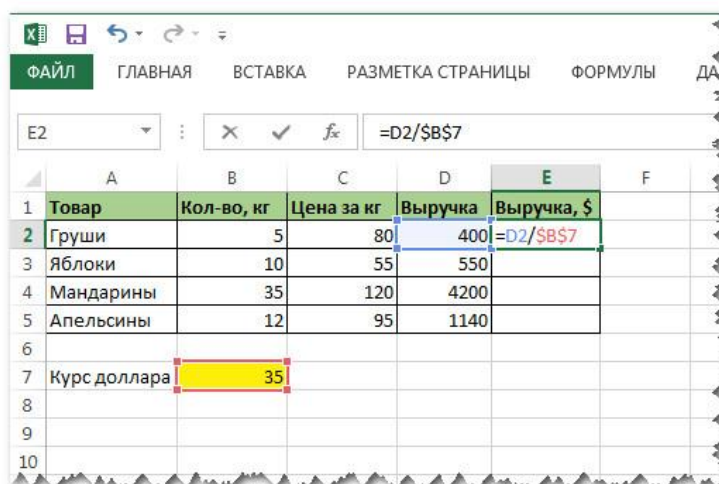
$$\alpha_{xy} = -2(\alpha_2 - \alpha_1) \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \quad (1.29)$$

### Часть 3. Некоторые тонкости работы в программе Microsoft Excel

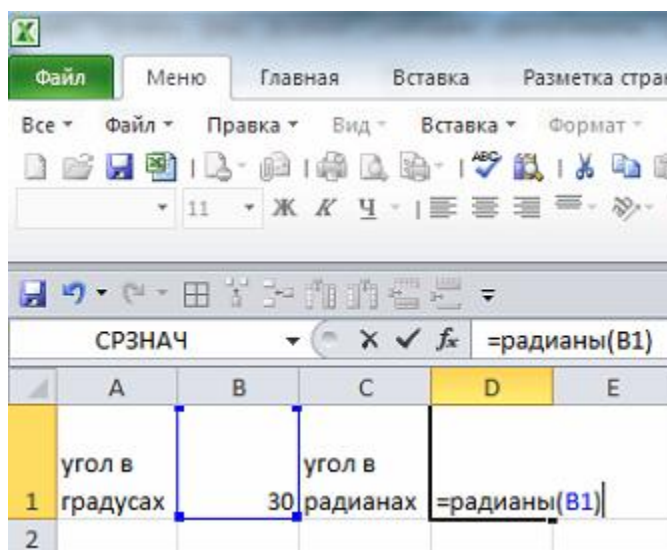
1 Для того чтобы рассчитать формулу в Excel, необходимо сначала нажать знак «=», а затем уже с помощью левой кнопки мышки (ЛКМ) выбирать те ячейки, которые будут участвовать в формуле; знаки «+», «-», «\*», «/» и др. вводятся с помощью клавиатуры; после окончания ввода необходимо нажать «**ENTER**».



2 Для того, чтобы зафиксировать ячейку в формуле в Excel, необходимо установить значок \$ перед номером строки и столбца той ячейки, которую Вы хотите зафиксировать.



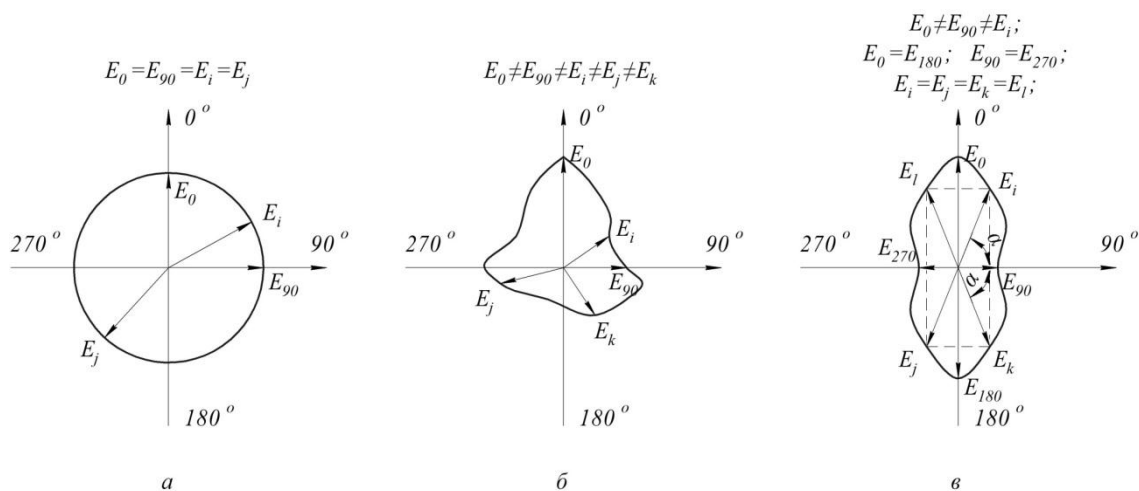
3 Тригонометрические функции в MS Excel (синусы, косинусы, тангенсы и т.д.) вычисляются **только для углов в радианах**; как перевести значения угла из градусов в радианы показано на рис. ниже:



4 При построении диаграммы анизотропии упругих и термоупругих свойств (рис. 2) использовать **точечную диаграмму**. Упругие и термоупругие свойства ( $E, G, \nu, \alpha$ ) разложить на проекции по оси X и по оси Y по формулам:

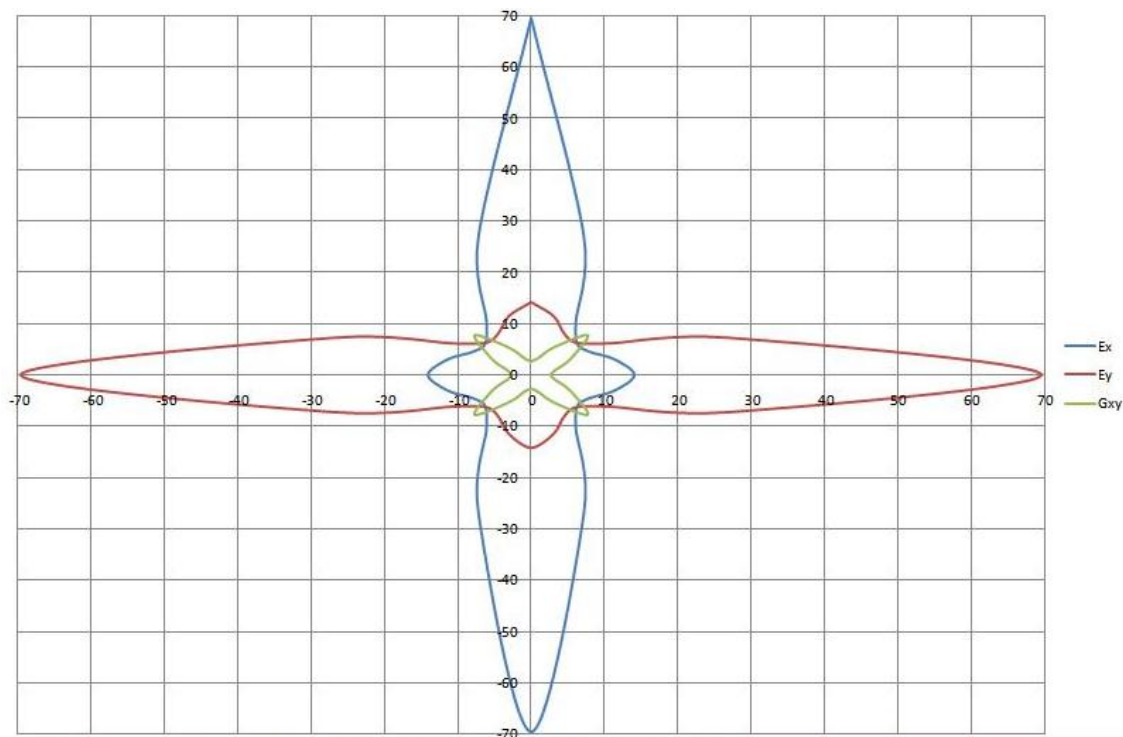
$$E_{\varphi x} = E_{\varphi} \cdot \sin \varphi ; \quad (1.30)$$

$$E_{\varphi y} = E_{\varphi} \cdot \cos \varphi ; \quad (1.31)$$



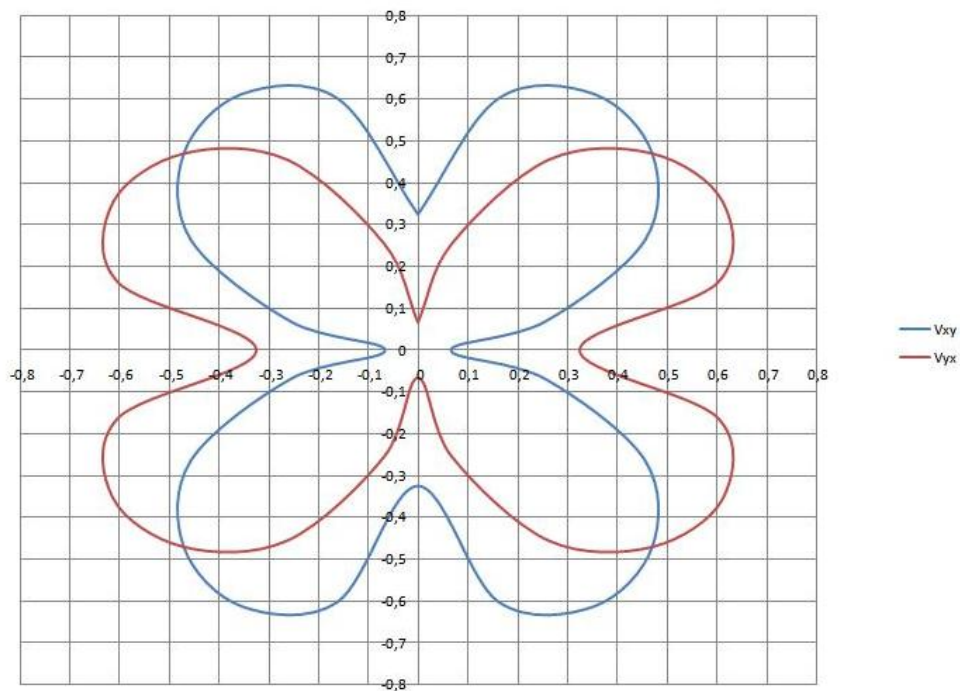
**Рис. 2.** Диаграммы анизотропии для *изотропного* (а), *анизотропного* (б) и *ортотропного* (в) тел случае плоской постановки задачи

Качественный вид полученных диаграмм анизотропии представлен на рис. 3.



а – диаграмма анизотропии  $E_x, E_y, G_{xy}$





$\bar{b}$  – диаграмма анизотропии  $v_{xy}, v_{yx}$

**Рис. 3.** Диаграммы анизотропии упругих свойств однонаправленного слоя